Première partie

TP2 Analyse - Rendu de Benjamin Khenniche et Elisa Lescarret

1 Exercie 1

1.1 Question 1

On prend x_0 **le milieu de** $[a;b]$ **c'est à dire** $x_0 = 1/2(a+b)$ l **se trouve donc dans un des deux intervalles** $]a;x_0[$ **ou** $]x_0;b[$

D'après la méthode par dichotomie si $f(a)f(x_0) < 0$ **alors** $l \in]a;x_0[$ **on pose alors** $a_1 = a$ $b_1 = x0$

Si $f(a)f(x_0) = 0$ **alors** $l = x_0$

Si $f(a)f(x_0) > 0$ **alors** $l \in]x_0;b[$ **On pose** $a_1 = x_0$ $b_1 = b$

On pose ensuite $x_1 = 1/2(a_1 + b_1)$

On construit donc une suite $x_n = 1/2(a_n + b_n)$ **tel que** $|x_n - l| \leq \frac{(b-a)}{2^{n+1}}$

1.2 Question 2

Soit e_n **l'écart entre** x_n **et** l **On a donc** $e_{n+1} = e_n/2$ **testons si la méthode est d'ordre 1**

On doit vérifier que $|e_{n+1}|/|e_n|$ **converge quand** $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\frac{e_n}{2}|}{|e_n|} = \frac{1}{2}$$

On vérifie pour l'ordre 2 si $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2}$ **converge quand** $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|e_n|}{2|e_n|^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2|e_n|} = +\infty$$

$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2}$ **diverge la méthode est donc d'ordre 1**

1.3 Question 3

Pour commencer l'algorithme il faut que $f(a)$ **et** $f(b)$ **soit de signe opposés pour que** $0 \in [f(a), f(b)]$ **donc** $f(a)f(b) < 0$

On a pour condition d'arrêt $|f(x_n)| \leq \epsilon$

2 Exercice 2

2.1 Question 1

On a $\frac{y-f(a)}{x-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g(a) = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

On a donc

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n f(b) - bf(x_n)}{f(b) - f(a)}$$

2.2 Question 2

$f(a)$ **et** $f(b)$ **sont de signes opposés pour que** $0 \in [f(a), f(b)]$ **donc** $f(a)f(b) < 0$

Quand la convergence coupe l'axe en abscisse en l **cela correspond à** $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$

3 Exercice 3

3.1 Question 1

Soit l'équation $f(x) = x^3 - 2x - 5$ **, nous cherchons les limites de** $f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 2$

TABLEAU DE VARIATION :

x : -$\infty; -\sqrt{2/3}; \sqrt{2/3}; +\infty$

$f'(x)$ **:** $+$ **;** $-$ **;** $+$

$f(x)$ **: -**$\infty; < 0; < 0; +\infty$

Il y a donc bien une seul solution.

3.2 Question 2

Algo...

3.3 Question 3

On a : $f(x) = x^3 - 2x - 5$ **et** $f'(x) = 3x - 2$ **et** $f''(x) = 6x$

Et nous cherchons un $u_0 \in [a, b]$ **tel que** $f(u_0) \times f''(u_0) > 0$ **et** $f(a) \times f(b) < 0$

Nous savons que $f(\sqrt{2/3}) < 0$ **et** $f(4) = 51$**. choisissons donc l'interval** $[\sqrt{2/3}, 4]$ **et** $u_0 = 4$

4 Exercice 4

4.1 Question 1

Comparaison avec Newton : Contrairement à la méthode de Newton, la méthode de la corde se sert de deux points (x_0 **et** x_1**) pour calculer une "'tangente"' approximative.** x_n **dépend de** x_{n-1} **et** x_{n-2}**. Deplus à l'initialisation,** x_0 **et** x_1 **n'ont pas besoin d'encadrer une racine de** $f(x)$**. Cependant,** $f(x)$ **doit être strictement monotone (**$f'(x) \neq 0$**) sur tout son domaine de définition.**

Comparaison avec Newton : La méthode de la sécante ressemble beaucoup à celle de Lagrange. A ceci près que pour Lagrange, une des deux bornes (celle supérieure) est fixée. Pour la sécante, nous avont x_0 et x_1, l'une étant la dernière trouvé, l'autre datant d'une itération de plus.

4.2 Question 2

4.3 Question 3