Modelos y respuestas de los sistemas

Modelo eléctrico

Ejemplo circuito eléctrico con capacitor y resistor

Elementos pasivos

Inductor

$L = \frac{\Phi}{I} \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt}$

$\therefore \boxed{v_{L(t)} = L \cdot \frac{dI}{dt}}$

Capacitor

$C = \frac{Q}{V} \rightarrow \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dV}{dt}$

$\therefore \boxed{I_{(t)} = C \cdot \frac{dv(c)}{dt}}$

$\Rightarrow$

$\boxed{I_{L(t)} = \frac{1}{L} \cdot \int v_{L(t)}\, dt}$

$\boxed{v_{c(t)} = \frac{1}{C} \cdot \int I_{C(t)}\, dt}$

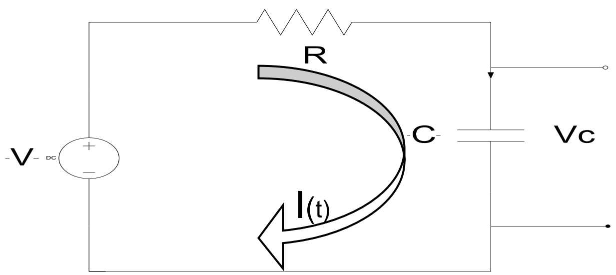
- Ley de Ohm ➔ V [volt]= I [amp]. R [Ω]
- Primera ley de Kirchhoff ➔ La suma algebraica de corrientes que convergen a un nodo es nula

$$\sum_{k=1}^{m} Ik_{(t)} = 0$$

- Segunda ley de Kirchhoff ➔ La tensión aplicada a un circuito serie cerrado es igual a la suma de las caídas de tensión $\sum_{k=1}^{m} Vk_{(t)} = 0$

Modelos y respuestas de los sistemas

Ejemplo de un circuito RC



$$V = v_{r(t)} + v_{c(t)} \Rightarrow V = R.I_{(t)} + v_{c(t)} \Rightarrow V = R.\,C\,.\,\frac{dv(c)}{dt} + v_{c(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{dv(c)}{dt} = \frac{1}{RC}\,[\,V - v_{c(t)}\,]$$

del modelo hidraulico $\frac{dh}{dt} = K\,(H - h)$

$$\boxed{v_{c(t)} = V\,(\,1 - e^{-\frac{t}{RC}}\,)}$$

$\therefore$ *Podemos decir que todos los sistemas de primer orden tienen la característica que la razón de cambio de alguna variable es proporcional a la diferencia entre esa variable y algún valor de referencia de la misma*

$\Rightarrow$

$$\therefore \quad v_{c(t)} = \underbrace{V}_{\text{Componente forzado}} - \underbrace{V\,.\,e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{Componente libre}}$$

$\Rightarrow$

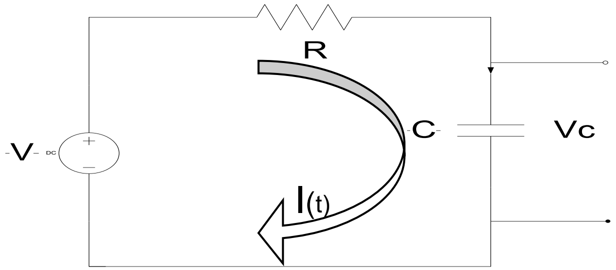
t (tiempo)	$e^{-\frac{t}{RC}}$	**V (1 -** $e^{-\frac{t}{RC}}$ **)**
τ	0,368	V . 0,632
$2.\tau$	0,135	V . 0,865
$3.\tau$	0,050	V . 0,950
$4.\tau$	0,018	V . 0,982
$5.\tau$	0,007	V . 0,993

RC: Constante de tiempo del sistema

τ = RC [Seg]

Modelos y respuestas de los sistemas

Ejemplo de un circuito RC

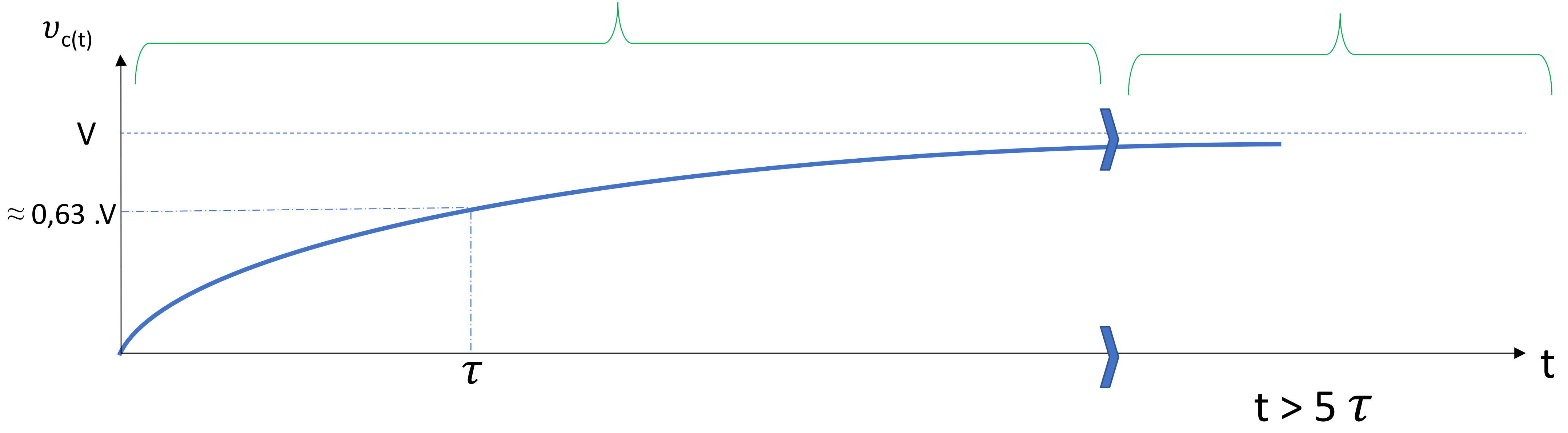


$$v_{c(t)} = \overbrace{V}^{\text{Componente forzado}} - \overbrace{V \,.\, e^{-\frac{t}{RC}}}^{\text{Componente libre}}$$

Respuesta Transitoria

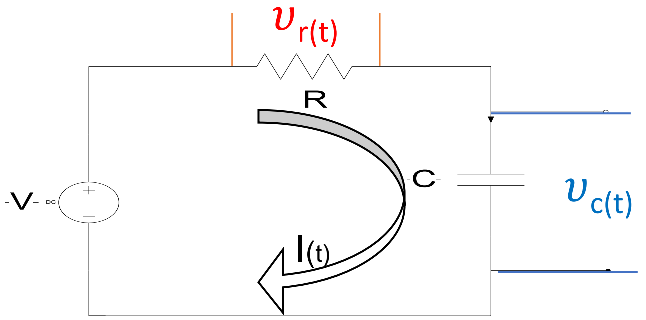
Régimen libre

Régimen forzado, permanente o estacionario



Modelos y respuestas de los sistemas

Ejemplo de un circuito RC



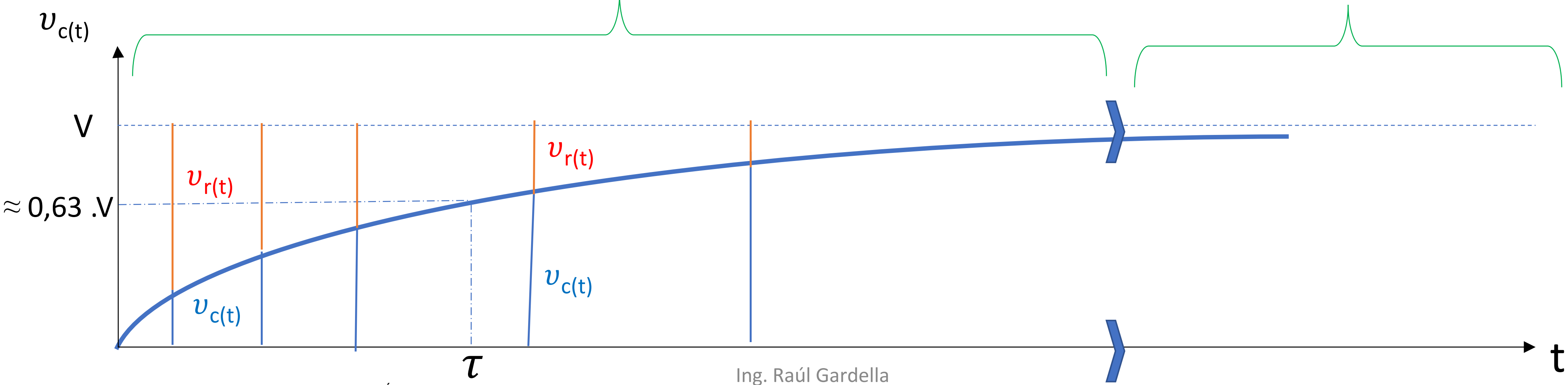
$$v_{c(t)} = \overbrace{V}^{\text{Componente forzado}} - \overbrace{V \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}^{\text{Componente libre}}$$

Condiciones iniciales nulas

Respuesta Transitoria

Régimen libre

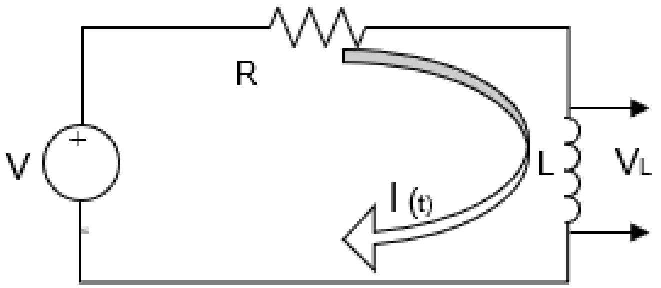
Régimen forzado, permanente o estacionario



$t > 5\,\tau$

Circuitos RL

Llamamos RL a un circuito que contiene un resistor en serie con un inductor. Aún siendo la fuente de alimentación, tensión continua, la corriente puede variar en el tiempo.



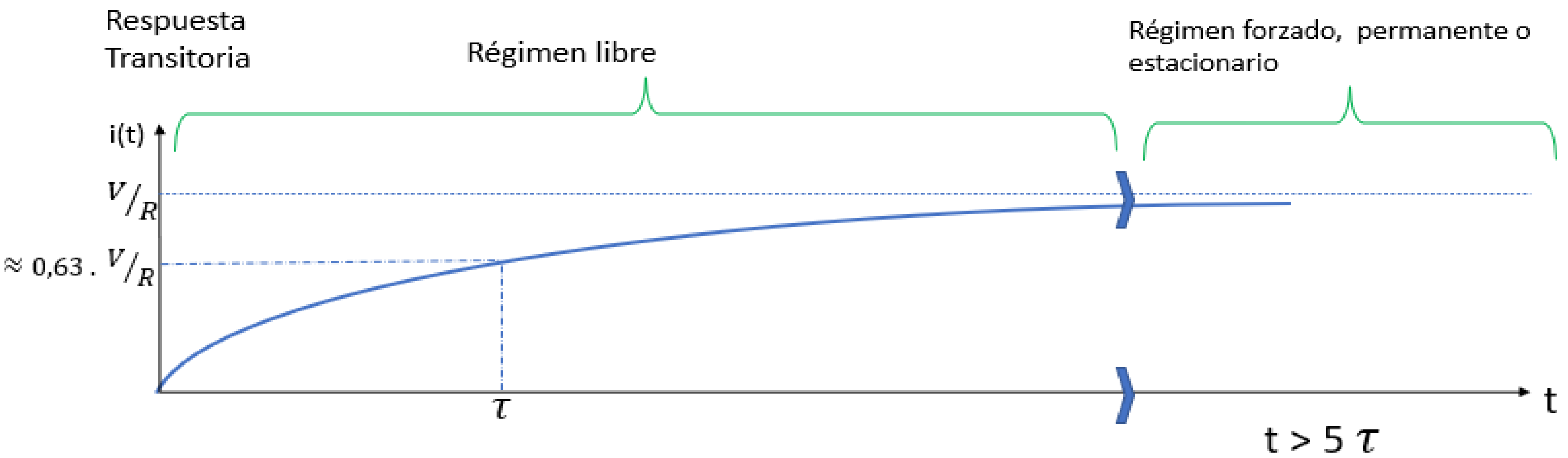
$$V = v_{r(t)} + v_{L(t)} \quad \rightarrow \quad V = R.I_{(t)} + L.\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad L.\frac{di}{dt} = V - R\,I_{(t)}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{V}{L} - R\,i_{(t)} \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{R}{L}\left[\frac{V}{R} - i_{(t)}\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{I_{(t)} = \underbrace{\frac{V}{R}}_{\text{Componente forzado}} - \underbrace{\frac{V}{R}\,e^{\frac{-t}{L/R}}}_{\text{Componente libre}}}$$

L/R: Constante de tiempo del sistema

τ = L/R [Seg]



Modelos y respuestas de los sistemas

Ecuación diferencial de primer orden:

[1] $a_1 \frac{d\theta(o)}{dt} + a_{(0)}\,\theta_{(o)} = b_{(0)}\,\theta(i) \Rightarrow$ $\boxed{\theta_{(o)} = \frac{b_{(0)}}{a_{(0)}}\,\theta(i)\,.\,[\,1 - e^{\frac{-a_{(0)}t}{a_1}}\,]}$

Respuesta de un sistema de primer orden para una entrada escalón

Si t ➔ ∞ $\quad \theta_{(o)} = \frac{b_{(0)}}{a_{(0)}}\,\theta(i)$ ➔ $\left.\frac{\theta_{(0)}}{\theta_{(i)}}\right|_{\infty} = \frac{b_{(0)}}{a_{(0)}}$

Gss : Transferencia en estado estable

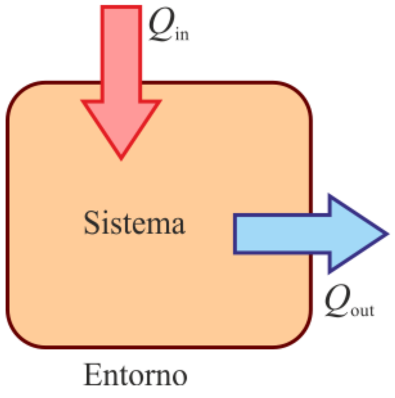
$\boxed{\text{Gss} = \frac{b_{(0)}}{a_{(0)}}}$ $\quad \boxed{\frac{a_1}{a_0} = \tau \text{ [Seg]}}$ $\quad \therefore \quad$ $\boxed{\theta_{(o)} = \text{Gss}\,.\,\theta(i)\,[\,1 - \;e^{\frac{t}{\tau}}\,]}$

de [1] dividiendo por $a_{(0)}$ ➔ $\boxed{\tau \frac{d\theta(o)}{dt} + \theta_{(o)} = \text{Gss}\;\;\theta(i)}$

Ecuación diferencial de primer orden.
Entrada escalón

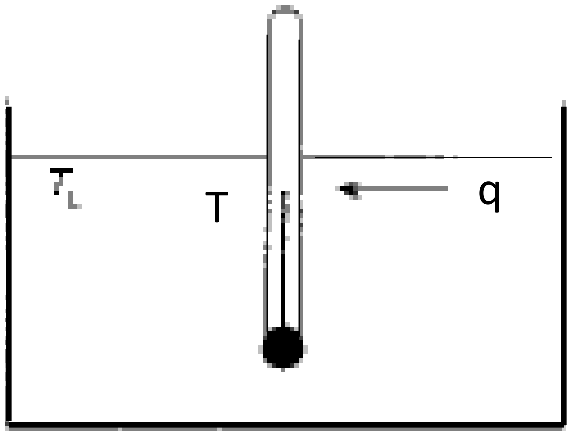
Modelo térmico

Capacidad calorífica : $\dfrac{\textit{cantidad de calor transmitida a un cuerpo}}{\textit{cambio de temperatura que experimenta el cuerpo}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{C = \dfrac{q_1 - q_2}{\frac{dT}{dt}}}$



Equivalente eléctrico $\quad I = \dfrac{V}{R} \quad$ $\boxed{q = \dfrac{T_2 - T_1}{R}}$

Ejemplo



$$q = \frac{T_L - T}{R} \qquad q = c\,\frac{dT}{dt} \quad \Rightarrow \quad c\,\frac{dT}{dt} = \frac{T_L - T}{R}$$

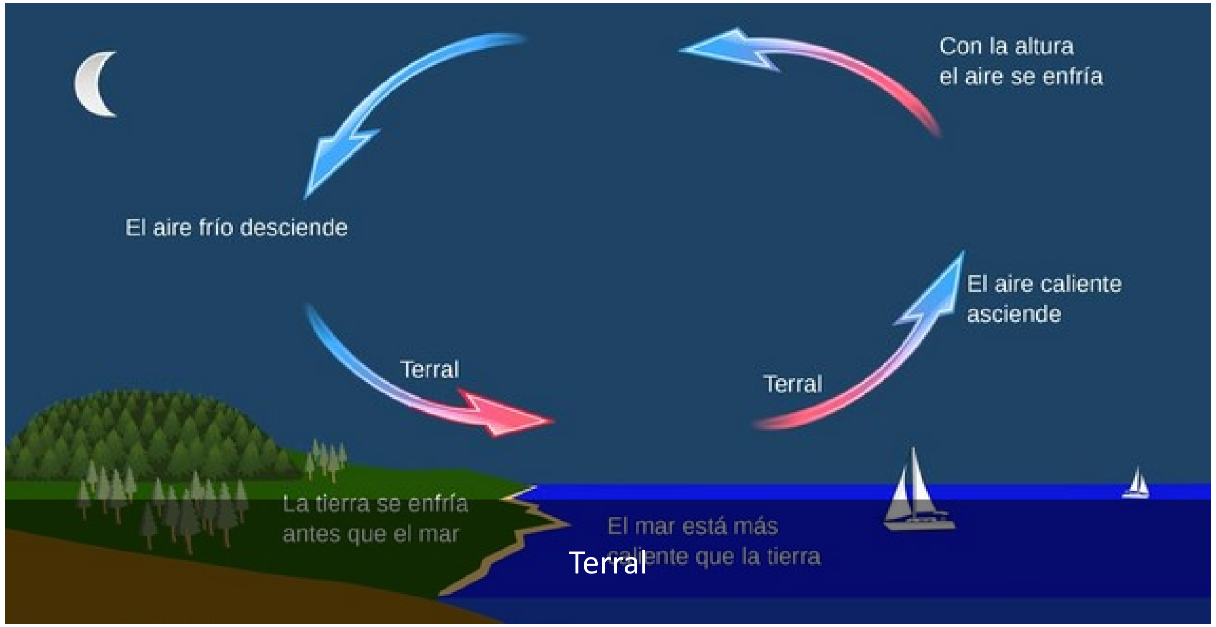
$$\boxed{R\,c\,\frac{dT}{dt} + T = T_L} \qquad \boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{1}{RC}(T_L - T)}$$

Comparar con el modelo hidráulico y eléctrico

$$\frac{d\upsilon(c)}{dt} = \frac{1}{RC}\,[\,V - \upsilon_{c(t)}\,]$$

Ejemplos particulares de la capacidad térmica en grandes masas

Virazón o brisa marina



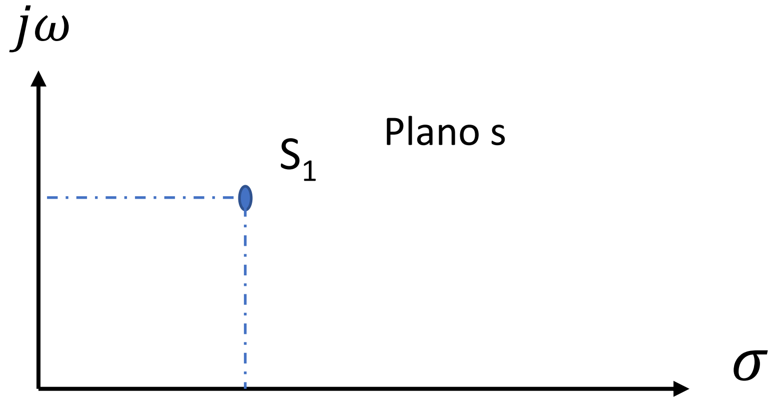
Terral

Aplicaciones de la Transformada de Laplace

$F_{(S)} = \mathcal{L}\,[f_{(t)}]$; Donde $F_{(S)}$ es la transformada de Laplace de $f_{(t)}$;

$$\boxed{\mathcal{L}\,[f_{(t)}] = \int_0^{\infty} f_{(t)}\;\; e^{-st}}$$

S : variable compleja $\left[\frac{1}{Seg}\right]$; $S = \sigma + j\omega$



Una función compleja G (s) como función de S, tiene una parte real y una parte imaginaria, es decir:

G(s) = Gx + j Gy

Ejemplo de la transformada de Laplace de un escalón unitario

$f_{(t)}$ = 0 pata t < 0

$f_{(t)}$ = 1 pata t > 0

$$\mathcal{L}\,[f_{(t)}] = \int_0^{\infty} (1)\;\; e^{-st} \quad \Rightarrow \quad F_{(S)} = -\frac{1}{s}\,(e^{-\infty} - e^{0}) \quad \therefore \quad \boxed{F_{(S)} = \frac{1}{s}}$$

Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Reglas básicas de la transformada de Laplace

1) $\mathcal{L}\,[f_{1(t)} + f_{2(t)}] = F_1(s) + F_2(s)$

2) $\mathcal{L}\,[A.f_{(t)}] = A\,F_{(S)}$

3) $\mathcal{L}\,\frac{df(t)}{dt} = S\,F_{(S)} - f(0)$

4) $\mathcal{L}\,\frac{d^2f(t)}{dt} = S^2\,F_{(S)} - S.\,f(0) - \frac{df(0)}{dt}$

5) $\mathcal{L}\,[\int_0^\infty f_{(t)}] = \frac{1}{s}\,F(S)$

6) $\mathcal{L}\,[f(t\text{-}T] = e^{-Ts}\,F(S)$

La traslación de una función del tiempo f(t) en la magnitud **T**, corresponde a la multiplicación de la transformada F(s) por e^{-Ts}

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace	*Función del tiempo*	*Descripción de la función del tiempo*
1		Impulso unitario
$\frac{1}{s}$		Función escalón unitario
$\frac{e^{-sT}}{s}$		Función escalón unitario retrasada
$\frac{1-e^{-sT}}{s}$		Pulso rectangular de duración T
$\frac{1}{s^2}$	t	Función rampa de pendiente unitaria
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	Decaimiento exponencial
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t\,e^{-at}$	
$\frac{2}{(s+a)^3}$	$t^2\,e^{-at}$	
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	Crecimiento exponencial
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t-\frac{(1-e^{-at})}{a}$	
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-at}-at\,e^{-at}$	
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace	*Función del tiempo*	*Descripción de la función del tiempo*
$\dfrac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1-\dfrac{b}{b-a}e^{-at}+\dfrac{a}{b-a}e^{-bt}$	
$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}\omega t$	Onda senoidal
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	Onda cosenoidal
$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	Onda senoidal amortiguada
$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	Onda cosenoidal amortiguada
$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$	$1-\cos\omega t$	
$\dfrac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$	$\dfrac{\omega}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}\operatorname{sen}\left[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t\right]$	
$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}$ con $\zeta<1$	$1-\dfrac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}\operatorname{sen}\left[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t+\phi\right]$ con $\zeta=\cos\phi$	

Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Teorema del valor inicial

$$\boxed{\lim_{S\to\infty} S\,.F(s) = \lim_{t\to 0} f(t)}$$

Teorema del valor final

$$\boxed{\lim_{S\to 0} S\,.F(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)}$$

Ecuación diferencial de primer orden:

$$a_1 \frac{d\theta(o)}{dt} + a_{(0)}\,\theta_{(o)} = b_{(0)}\,\theta(i)$$

Aplicando Laplace ➔

$$a_1\, S\, \theta o(s) + a_{(0)}\,\theta o_{(s)} = b(o)\,\theta i(s)$$

$$\theta o(s)[a_1\, S + a_{(0)}] = b(o)\,\theta i(s)$$

$$\frac{\theta o(s)}{\theta i(s)} = \frac{bo}{a_1\, S + a_{(0)}}$$

Recordando

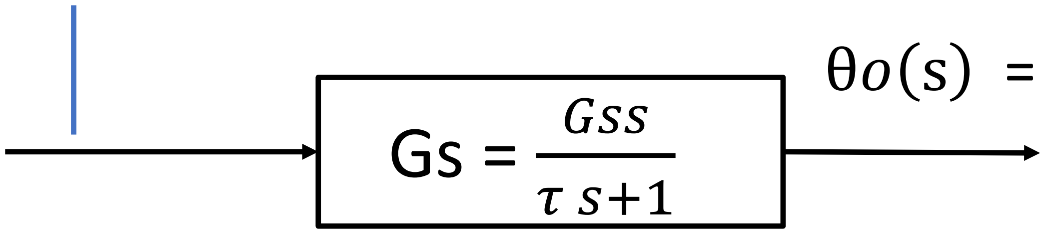
$$Gss = \frac{b_{(0)}}{a_{(0)}} \qquad \frac{a_1}{a_0} = \tau\ [Seg]$$

$$\therefore \qquad \boxed{Gs = \frac{Gss}{\tau\, s+1}}$$

Forma general de la transferencia en el dominio S para un sistema de primer orden

Respuestas en un sistema de primer orden

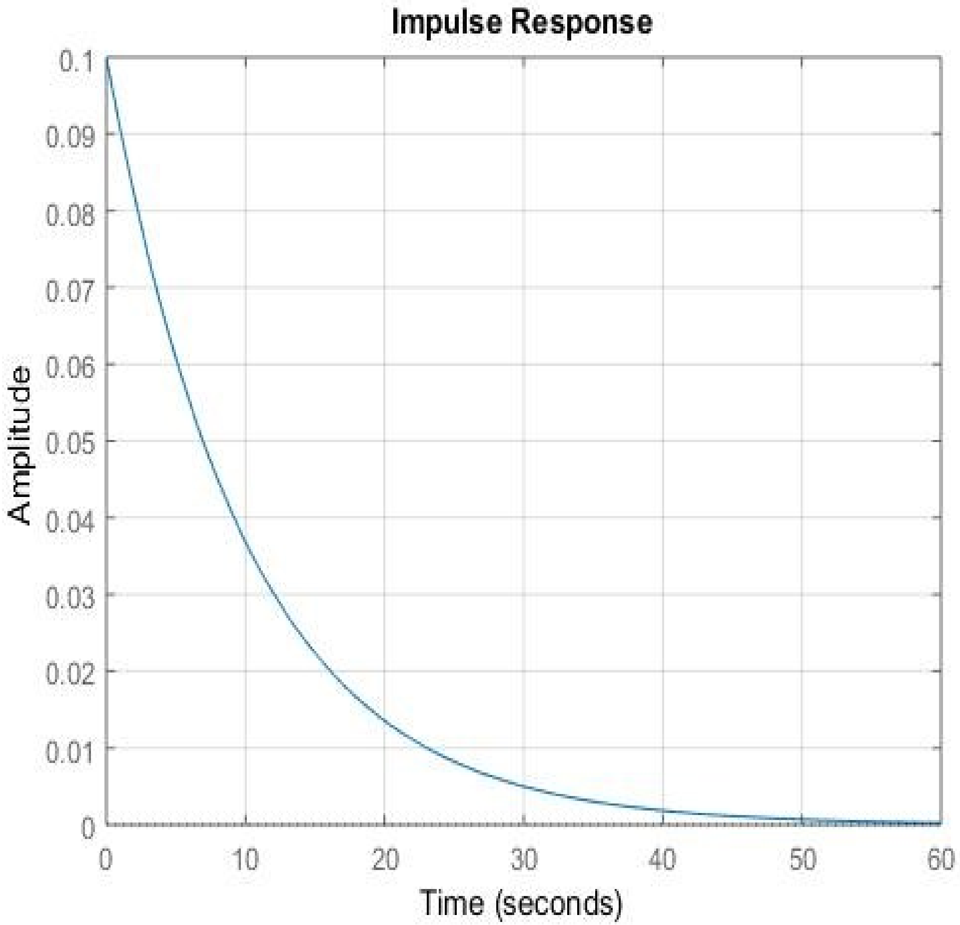
Impulso



$$\theta o(s) = \frac{Gss}{\tau\, s+1} \quad (1)$$

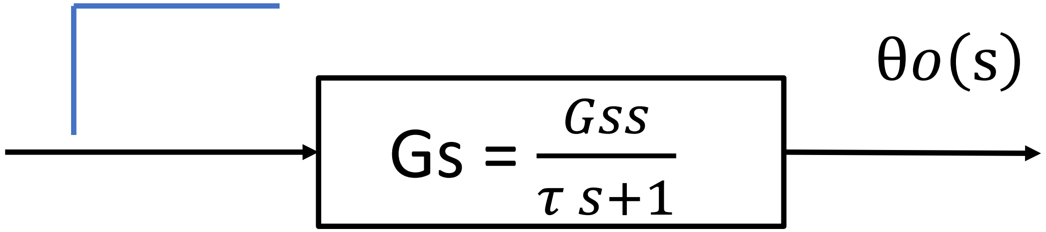
$$\theta o(s) = \frac{1}{\tau} \; \frac{Gss}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$\boxed{\theta o(t) = \text{Gss}\; \frac{1}{\tau}\; e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



Respuestas en un sistema de primer orden

Escalón Unitario

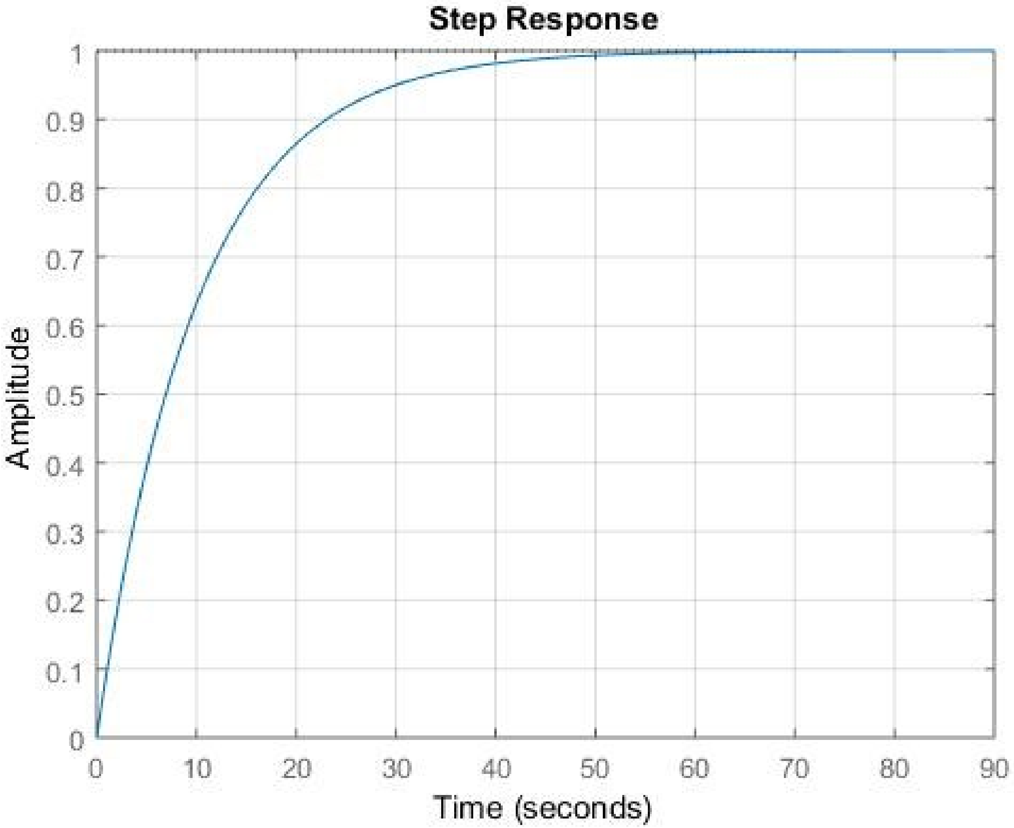


$$Gs = \frac{Gss}{\tau\, s+1}$$

$$\theta o(s) = \frac{Gss}{\tau\, s+1}\ \frac{1}{S}$$

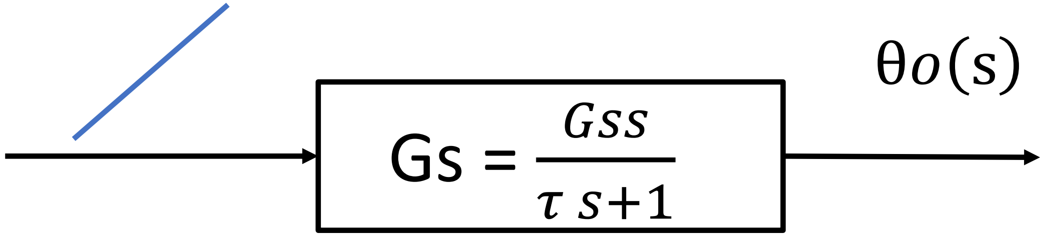
$$\theta o(s) = Gss\ \frac{\frac{1}{\tau}}{S\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}$$

$$\boxed{\theta o(t) = \mathrm{Gss}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$



Respuestas en un sistema de primer orden

Rampa unitaria



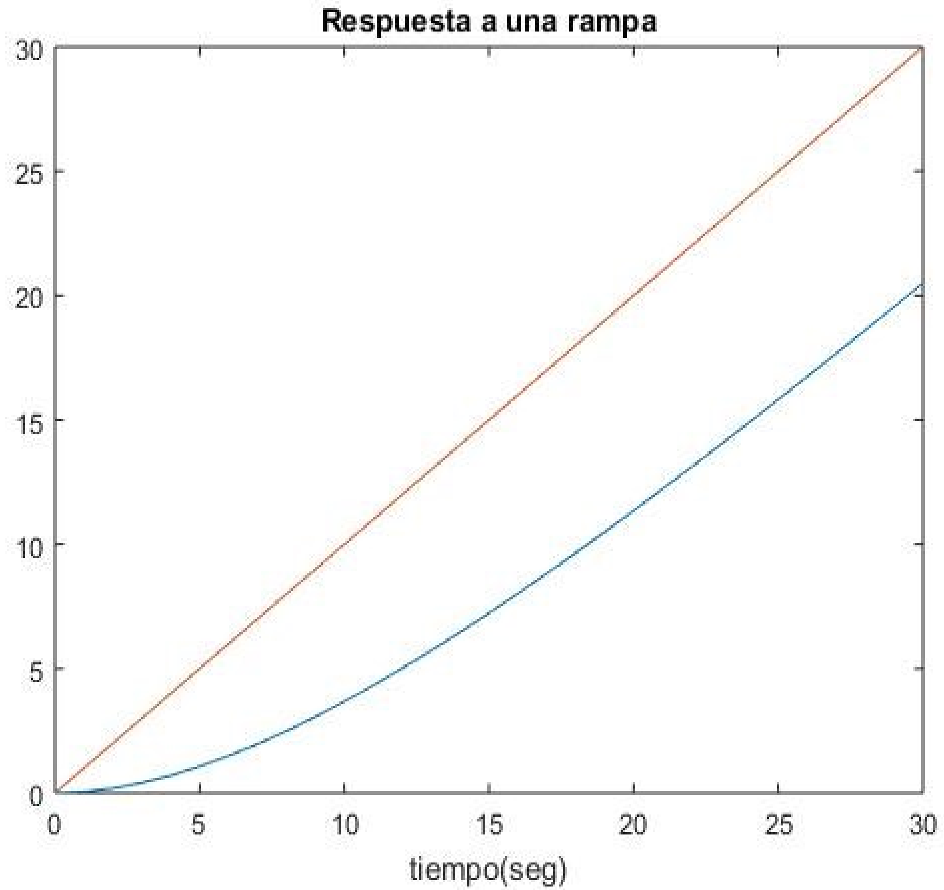
$$\theta o(s) = \frac{Gss}{\tau\, s+1} \quad \frac{1}{S^2}$$

$$\theta o(s) = Gss \; \frac{\frac{1}{\tau}}{S^2\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}$$

por fracciones parciales o por tabla

$$\boxed{\theta o(s) = \text{Gss}\left[\frac{1}{S^2} + \frac{\tau}{S+\frac{1}{\tau}} - \frac{\tau}{S}\right]}$$

$$\boxed{\theta o(t) = \text{Gss}\left[\, t + \tau . e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau \,\right]}$$



Ejemplo con Matlab

```
clear all                              % borra todas las variables previas no permanentes
Clc                                    % borra el texto en la ventana de comando
numg1=[1];                             % numerador =1
deng1=[10,1];                          % denominador = 10S +1
printsys(numg1, deng1)                 % visualizar la función
H = tf(numg1,deng1);                   % halla la transferencia (no es necesario en este caso)
impulse(numg1,deng1);                  % calcula y gráfica la respuesta al impulso del sistema
grid;                                  % presenta la grilla en el gráfico actual
title ('Respuesta a al Impulso’);      % agrega un título al gráfico actual
xlabel ('tiempo(seg)’);                %  agrega un texto al eje x
```

Ejercicios a realizar

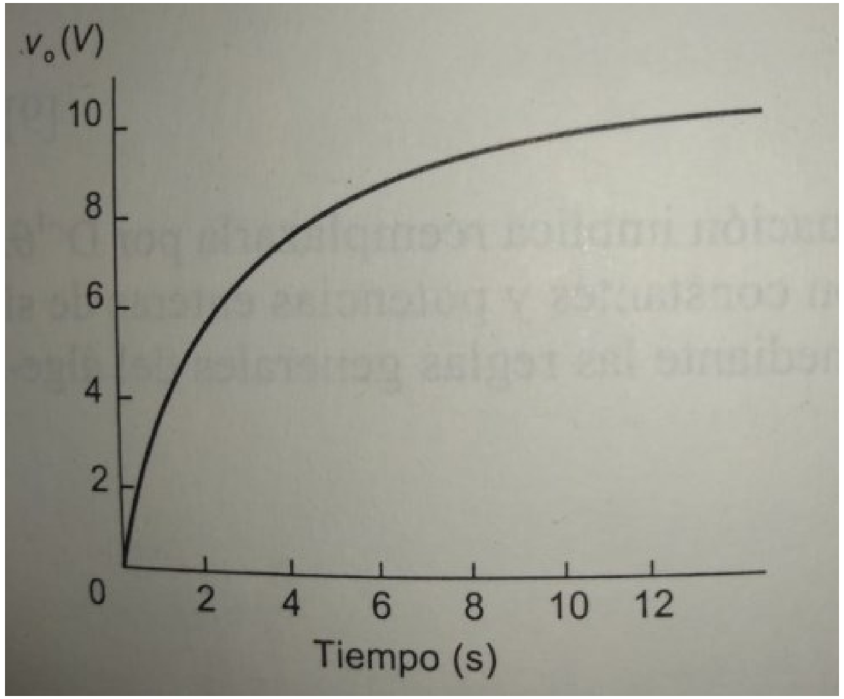
1. Un sistema de control se utiliza para posicionar un móvil en una línea de producción. Para alimentar al motor del móvil se utiliza un amplificador. Se emplea un sistema de medición de 5 V/cm. Hallar la función transferencia global.

   Datos:

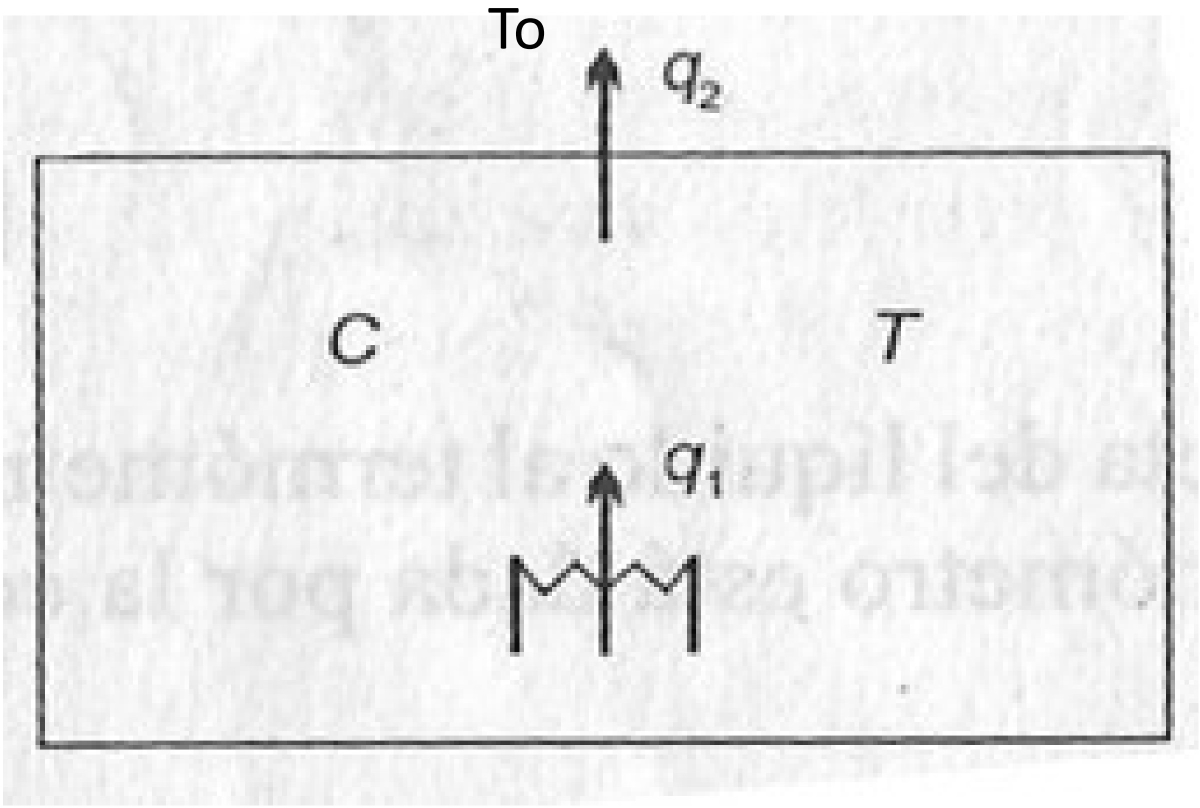
   Amp: 10 mA/V
   Móvil: 1 cm/mA
   Medición: 5 V/cm

2. La figura muestra como la v_0 de un sistema de primer orden varía con el tiempo cuando está sujeta a una entrada escalón de 5 volt. Estimar:

a) La constante de tiempo.
b) La función de transferencia en estado estable.
c) La ecuación diferencial de primer orden para el sistema.



3. Dado el siguiente sistema térmico que consta de un calefactor eléctrico en una habitación, hallar la ecuación que describe como varía la temperatura de la habitación en el tiempo.



- q1 : Calor que emite el calefactor
- q2: Calor que pierde la habitación
- T: temperatura del aire en la habitación
- To: Temperatura exterior
- C: capacitancia térmica del aire en la habitación

4. Un sistema de primer orden tiene una constante de tiempo de 4s y una función de transferencia en estado estable de 6 ¿Cual es la forma de la ecuación diferencial para este sistema?

5. Determinar, en base a la tabla, la transformada de Laplace para:
a) Un escalón de voltaje de magnitud 4 V que empieza en t=0.
b) Un escalón de voltaje de magnitud 4 V que empieza en t=2
c) Una rampa de voltaje que empieza en t=0 y se incrementa a razón de 3v/s.
d) Una rampa de voltaje que empieza en t=2s y se incrementa a razón de 3v/s.
e) Un impulso de voltaje de magnitud 4V que empieza en t=3s
f) Un voltaje senoidal de amplitud 2v y frecuencia angular de 10 Hz.

6. A partir de la tabla determinar la transformada inversa de Laplace de:
a) 2/S
b) 3/(2S+1)
c) 2/(S-5)