Apunte de clase. 2024
Materia Teoría de Control
Prof. Raúl Gardella

Lugar de Raíces

Asegurar la estabilidad de un sistema realimentado es fundamental en el diseño de sistemas de control. Debido a que un sistema de lazo cerrado inestable no tiene ningún valor en la práctica, se buscan métodos que ayuden a analizar y diseñar sistemas estables garantizando las condiciones para tal funcionamiento. Un sistema estable es aquel que tiene una respuesta limitada cuando está sujeto a una entrada o perturbación limitada. En otras palabras, la salida o variable controlada no diverge respecto a su entrada de referencia o set point.

La estabilidad de un sistema de lazo cerrado depende de su respuesta transitoria cuyas características básicas son determinadas por los polos de lazo cerrado, es decir las raíces de la ecuación característica del sistema $[1+G_{(s)}.H_{(s)}]$. Por lo tanto, al analizar un problema es importante ubicar los polos de lazo cerrado en el plano s (un sistema es estable si y solo si todos los polos de lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo s).

En el diseño de sistemas de lazo cerrado se deben ajustar los polos y ceros de lazo abierto [G(s).H(s)] **(*)**, de manera de que los polos y ceros de lazo cerrado se sitúen en las posiciones deseadas en el plano s.
Los polos de lazo cerrado son las raíces (los ceros) de la ecuación característica: 1+ G(s).H(s) = 0

El lugar de raíces es un gráfico que representa la posición de los polos de la transferencia de lazo cerrado en función del parámetro de sensibilidad estática del lazo K. Es decir, dada la función de transferencia

$$\frac{\Theta o(s)}{\Theta i(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s).\,H(s)}$$

Es necesario al diseñar un sistema, conocer como se mueven los polos de lazo cerrado en el plano s conforme varía algún parámetro del sistema.

<u>El lugar de raíces es el lugar geométrico para todos los valores de S que satisfacen la siguiente ecuación característica</u>:

1+ G(s). H(s) = 0

(*) *G (s). H(s): denominada función de transferencia de lazo abierto también llamada Ganancia de lazo (expresa la relación entre la señal realimentada y la señal de error o actuación)*

Considerando que **G(s) H(s)** se puede expresar como: $\dfrac{\mathbf{K\,(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots\,(s-z_m)}}{\mathbf{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots\ldots\,(s-p_n)}}$

$$\Rightarrow\; 1+\frac{K\,(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_n)}=0 \;\Rightarrow\; \frac{K\,(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_n)}=-1 \;\Rightarrow\; \frac{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_n)}{(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots(s-z_m)}=-K$$

De donde surgen dos condiciones:

- <u>1ra Condición:</u> de módulos

$$|k| = \frac{|(s-p_1)|\,|(s-p_2)|\ldots|(s-p_n)|}{|(s-z_1)|\,|(s-z_2)|\ldots\ldots|(s-z_m)|}$$

➢ 2^{da} Condición: de ángulos

- si k>0 la fase de - K es 180º luego la expresión queda:

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s-p_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-z_j)=180°(2r+1)$$

donde r = 0, 1, 2, …

- si k<0 la fase de -K es 0º luego la expresión queda:

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s-p_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-z_j)=180°\,.\,(2r)$$

Resumiendo:

$$|K| = \pi\,\frac{|s-p_i|}{|(s-z_j|}$$

$$\sum\angle(s-p_i)-\sum\angle(s-z_j)=180°(2r+1) \qquad \text{Si } K>0$$

$$\sum\angle(s-p_i)-\sum\angle(s-z_j)=180°\,.\,(2r) \qquad \text{Si } K<0$$

Los valores de s que cumplen con las condiciones de ángulo y módulo son las raíces de la ecuación característica o polos de lazo cerrado.

Si se cumple la condición de ángulos se analiza la condición de módulos para calibrar el gráfico en función de los valores de K.

La condición de ángulos es necesaria y suficiente para determinar que el punto del plano pertenece al lugar de raíces. Si no se cumple esta condición el punto analizado no pertenece al lugar de raíces.

Es decir que el diagrama de los puntos del plano complejo que satisfacen solamente la condición de ángulo forma el Lugar de Raíces. Las raíces de la ecuación características o polos de lazo cerrado correspondiente a un nivel de ganancia (K), es determinado por la condición de módulo.

W. R. Evans diseñó un método sencillo y gráfico para encontrar las raíces de la ecuación característica. Este método se denomina *método del lugar de las raíces.*

El método del lugar de raíces permite encontrar los polos de lazo cerrado partiendo de los polos y ceros en lazo abierto [G(s). H(s)] tomando a la ganancia como parámetro.

Parámetro K: Se la define como ganancia o sensibilidad estática del lazo. Este parámetro K es el que resulta como factor multiplicador cuando la función está expresada de la siguiente manera:

$$1+\frac{K\,(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_n)}=0$$

Reglas de construcción del Lugar de Raíces

1) **El lugar de raíces tiene tantas ramas como polos tiene la transferencia en lazo abierto G(s). H(s)**

⇨ $$1+\frac{K\,(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_n)}=0$$

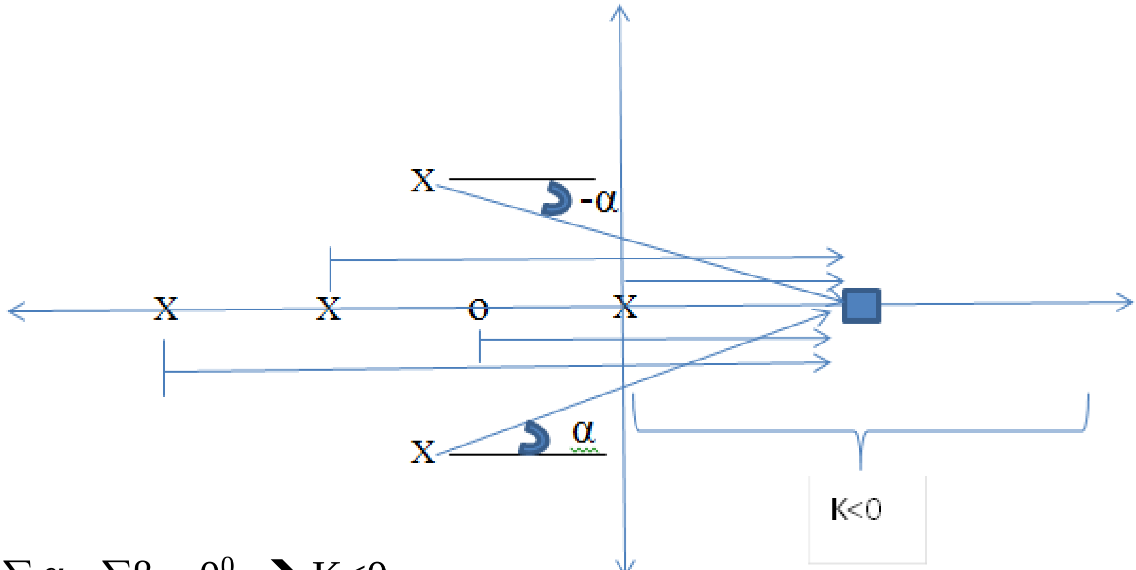
Todos los puntos del plano complejo que satisfacen esta ecuación forman parte del lugar de raíces. Es decir, son los polos de la transferencia en lazo cerrado

$\therefore (s-p_1)(s-p_2) \ldots\ldots (s-p_n) + \; K(s-z_1)(s-z_2) \ldots. (s-z_m) = 0$

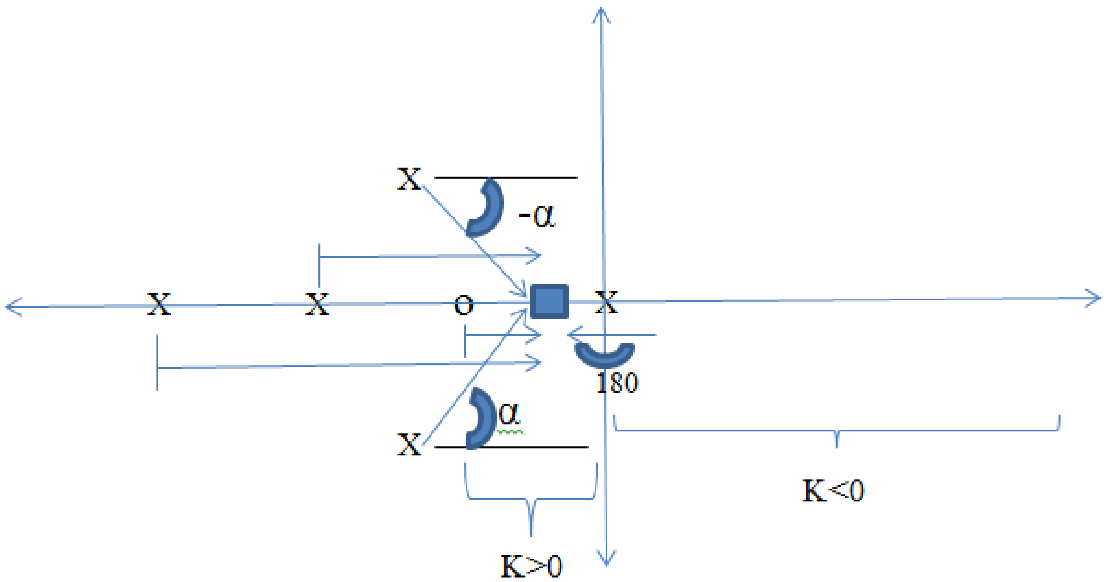
Cada polo tiene una ubicación en el plano según el valor de K, entonces al variar k de manera continua de $-\infty$ a $+\infty$ las soluciones de la ecuación (polos) se desplazan también de manera continua sobre distintas trayectorias. A cada trayectoria la denominamos rama, entonces concluimos en el enunciado "*El lugar de raíces tiene tantas ramas como polos tiene la transferencia en lazo abierto G(s). H(s)*"

2) **El eje real forma parte del lugar de raíces y el signo de K cambia cada vez que se saltea un polo o cero.**

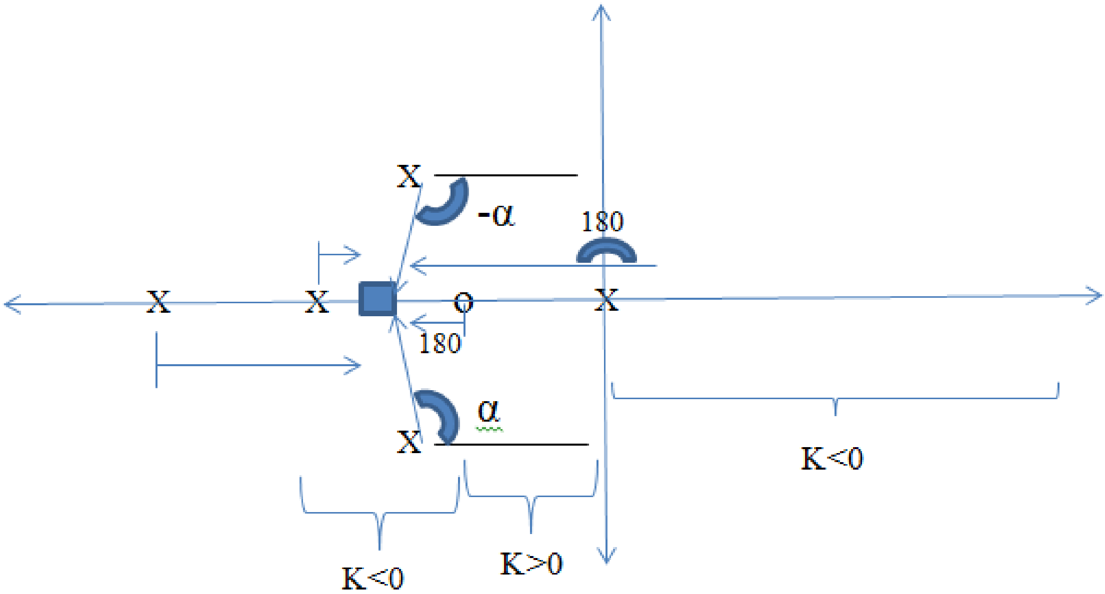
Considerando el lugar de raíces para $0 \le k < \infty$, (si K<0 corresponde a realimentación positiva y en la práctica no se analiza. La función de MatLab rlocus calcula el lugar de raíces para K>0) entonces el eje real forma parte por secciones del lugar de raíces (cumple con la condición de ángulo).
El valor de K cambia de signo cada vez que se encuentra un polo o cero en el eje real.
Tomando un punto de prueba sobre dicho eje podemos afirmar que forma parte del lugar de raíces si la cantidad de polos y ceros a la derecha de dicho punto es impar. (Debido a la contribución de la fase de los ceros y polos sobre el eje; los polos o ceros complejos conjugados no tienen contribución angular neta sobre dicho eje.)



$\sum \alpha - \sum \beta = 0^0 \;\rightarrow\; K<0$



$\sum \alpha - \sum \beta = 180^0 \;\rightarrow\; K>0$



$\sum \alpha - \sum \beta = 0^0 \Rightarrow K<0$

<u>Conclusiones:</u>

1) Los polos o ceros complejos conjugados contribuyen con ángulos que se anulan.
2) El valor de K cambia de signo cada vez que se encuentra con un polo o cero simple en el eje real.
3) Todo el eje real pertenece al lugar de raíces.

3) **Puntos del plano donde comienzan y terminan las ramas.** Es decir para $k \rightarrow -\infty$ ¿Donde comienza el lugar de raíces? y para $k \rightarrow +\infty$ ¿Donde termina el lugar de raíces?
Recordamos:

$$G(s).\ H(s) = -1 \quad ; \quad G(s).\ H(s) = \frac{K\,(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_n)} \Rightarrow \frac{(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots\ldots(s-p_n)} = -1/K$$

Si $S \rightarrow Z_i$, es decir para S cercano a un cero, el valor de K se acerca a $\pm\infty$. Esto nos indica que el lugar de raices comienza y termina en los ceros.

Si $S \rightarrow P_i$, es decir S se acerca a un polo, el valor de K se acerca a ± 0 (En otras palabras, los puntos sobre el lugar de raíces correspondiente a K=0 son los polos de lazo abierto)

Como primera conclusión podemos decir que las ramas del lugar de raíces comienzan en ceros (para $k \rightarrow -\infty$), pasan por los polos (para $K \rightarrow 0$) y terminan en ceros (para $k \rightarrow +\infty$)

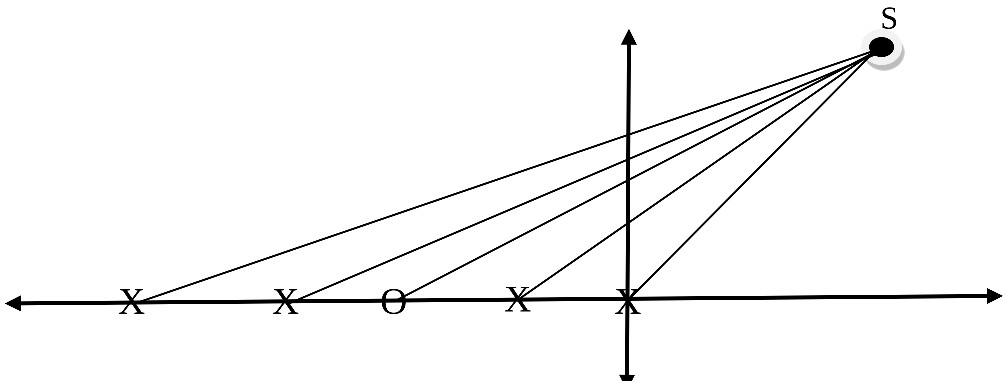
En todo sistema físico el número de polos es mayor que el de ceros. Entonces, al ser mayor la cantidad de polos, si $s \rightarrow \infty$, la función $\rightarrow 0$ y $K \rightarrow -\infty$. Es decir el lugar de raíces comienzan en ceros que no se ven en la expresión, estos ceros se denominan ceros impropios.

Podemos afirmar que si en la expresión G(s). H(s) hay más polos (n) que ceros (m), entonces los n lugares geométricos terminan en m ceros finitos y los (n-m) lugares restantes terminan en infinito (ceros impropios)

Considerando los ceros en el infinito, la cantidad de polos (n) es igual a la cantidad de ceros (m).

Conclusión: **Las ramas del lugar de raíces comienzan en los ceros propios o impropios (K ➔ -∞) pasan por los polos (K➔0) y terminan en ceros propios o impropios (K ➔ +∞).**

4) Asíntotas. Se refiere al ángulo con que las ramas del lugar de raíces dejan el eje real.
Cuando el número de polos de lazo abierto es mayor que el número de ceros de lazo abierto, las ramas terminan en un cero impropio, es decir en infinito tendiendo asintóticamente.
El ángulo con que las ramas se alejan hasta el infinito del lugar de raíces en el eje real forman las asíntotas.

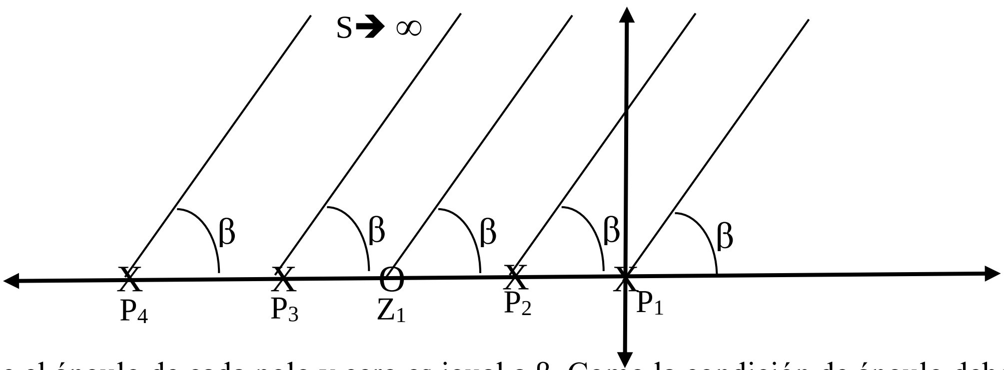


Sea un punto S que pertenece al lugar de raíces y que por lo tanto cumple con la condición de ángulo:

$$\sum\angle(s-p_i)-\sum\angle(s-z_j)=180°(2r+1) \qquad \text{Si } K>0$$

$$\sum\angle(s-p_i)-\sum\angle(s-z_j)=180°\,.\,(2r) \qquad \text{Si } K<0$$

Si el punto S lo alejamos circulando por "su" rama hasta el infinito sigue perteneciendo al lugar de raíces, en este caso todos los vectores son paralelos entre sí como podemos ver en la siguiente figura:



Donde el ángulo de cada polo y cero es igual a β. Como la condición de ángulo debe cumplirse ➔

$$\sum\angle(s-p_i)-\sum\angle(s-z_j)=4.\,\beta-\beta$$

Donde 4 es el número de polos y uno el número de ceros. En forma general puede indicarse:

$$\sum\angle p_i-\sum\angle z_j = v\beta - w\,\beta$$ (v: cantidad de polos y w: cantidad de ceros)

Debe seguir cumpliendo con la condición de ángulo tal que:

$$B\,.\,(v-w) = \begin{cases} 180°(2r+1) & \text{Si } K>0 \\ 180°\,.\,(2r) & \text{Si } K<0 \end{cases}$$

Entonces, el ángulo B que nos da la dirección de la asíntota es :

$$B = \begin{cases} \dfrac{180°(2r+1)}{(v-w)} & \text{Si } K>0 \\[2ex] \dfrac{180°\,.\,(2r)}{(v-w)} & \text{Si } K<0 \end{cases}$$

Donde r toma valores desde 0 hasta que el resultado coincide con el obtenido para r=0

En el caso considerado donde v=4 y w=1, los ángulos de las asíntotas toman los siguientes valores:

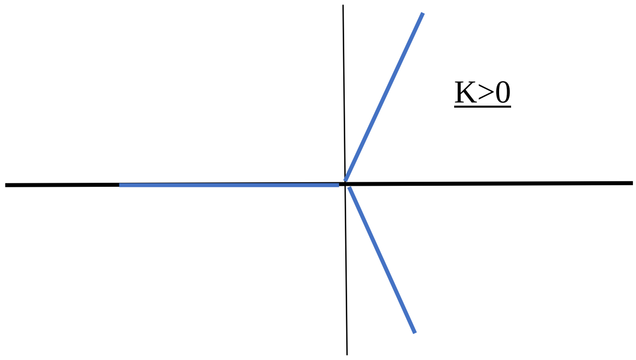
Para K>0 ; $B = \frac{180° (2r+1)}{3}$

Para r=0 ➔ $\frac{180}{3} = 60°$

Para r=1 ➔ $\frac{180° * 3}{3} = 180°$

Para r=2 ➔ $\frac{180° * 5}{3} = 300°$

Para r=3 ➔ $\frac{180° * 7}{3} = 420° \equiv 60°$



En el caso considerado donde v=4 y w=1, los ángulos de las asíntotas toman los siguientes valores:

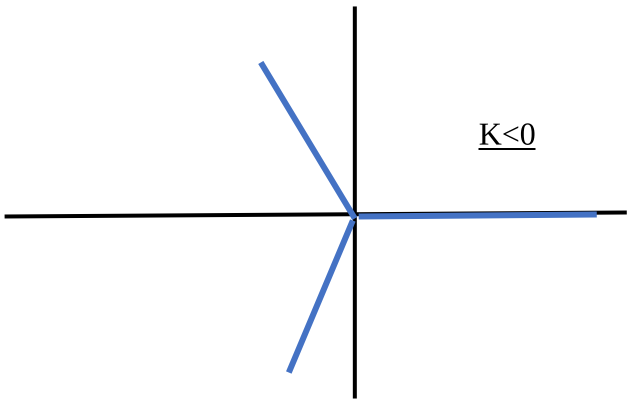
Para K<0 ; $B = \frac{180° (2r)}{3}$

Para r=0 ➔ $= 0°$

Para r=1 ➔ $\frac{180° * 2}{3} = 120°$

Para r=2 ➔ $\frac{180° * 4}{3} = 240°$

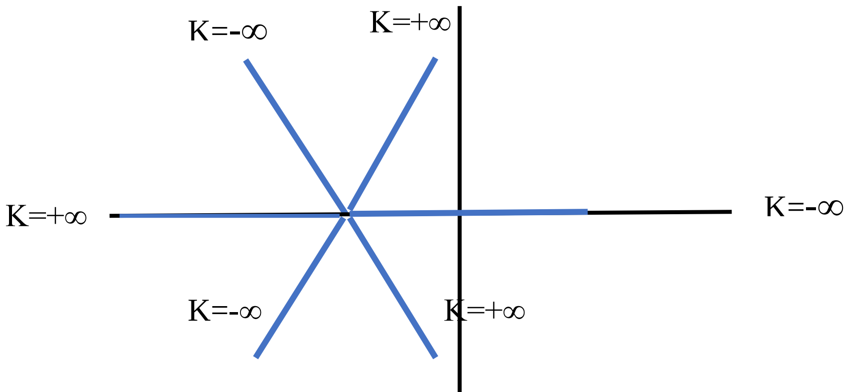
Para r=3 ➔ $\frac{180° * 6}{3} = 360° \equiv 0°$



Como regla general podemos decir que independientemente del signo de k:

$$B = \frac{180°}{\textit{número de polos} - \textit{número de ceros}}$$

En este caso, con B =60° quiere decir que cada 60° trazamos una asíntota y luego se le asigna el valor de k correspondiente empezando por k menor que cero para 0°.
Como todas las asíntotas están trazadas para S➔∞ empezando o terminando en ceros impropios, el valor de k en la unión de rama y asíntotas (S➔∞) debe ser -∞ o +∞



5) Las asíntotas se intersectan en un punto sobre el eje real. Este punto se denomina centroide o centro de gravedad de las asíntotas.

$$= \frac{(p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_n) - (z_1 + z_2 + z_3 + \dots z_n)}{n - m}$$

6) Puntos de desprendimiento o ruptura. Son los puntos de escape o entrada de las ramas del lugar de raíces cuando abandonan el eje real. El punto de escape puede ubicarse entre dos polos, entre dos ceros o entre un polo y un cero (en este último caso no hay punto de escape ni de entrada o hay uno de escape y uno de entrada).
Para hallar estos puntos de entrada o escape del eje real, hay que tomar expresión -k, se la deriva e iguala a cero y se hallan los valores de S que satisfacen dicha ecuación.

En estos puntos d [(-k)/ds] =0

7) Ángulo que forman las tangentes a las ramas del lugar de raíces con las horizontales en un cero o polo complejo conjugado.
Se considera un punto s muy cercano al polo o cero, tan cercano que consideramos que pertenece al lugar de raíces y se cumple la condición de ángulos. $[\ \sum\angle(s - p_i) - \sum\angle(s - z_j) = 180°(2r + 1) \quad \text{Si } K>0\ ]$

Siendo conocidos los ángulos desde el resto de polos y ceros puede obtenerse lo siguiente:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta \dots + \alpha_n - \phi_1 - \phi_2 - \dots \phi_n = 180°$ ➔

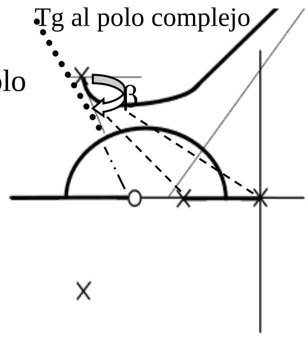
$\beta = 180° - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n + \phi_1 + \phi_2 + \dots \phi_n$

α: ángulo que forma desde cada polo hasta el cero o polo complejo conjugado
ϕ_1. ángulo que forma desde el cada cero hasta el cero o polo complejo conjugado

β: Ángulo que queremos hallar correspondiente al ángulo formado por la tangente del lugar de raíces respecto a la horizontal.

Ejemplo, con los ángulos medidos o calculados desde cada polo o cero al polo complejo se obtiene β
$\beta = 180° - 150° - 130° - 90° + 120°$

en el caso de β = - 70 aproximadamente



8) Intersección del lugar de raíces con el eje imaginario.

Para hallar estos puntos se aplica el criterio de Routh. El sistema es estable cuando todos los coeficientes de la primera columna son positivos, indicando de esta manera que todos los polos de lazo cerrado están ubicados en el semiplano izquierdo. En este caso, dado que los polos están sobre el eje jw (en estos puntos el sistema es críticamente estable) un coeficiente de la primera columna será cero.

Una vez aplicado el criterio en la ecuación característica, realizar los siguientes pasos:

- En el primer coeficiente de la primera columna donde intervenga K, igualarlo a cero
- Despejar el valor de K para esa condición
- Reemplazar ese valor de K en la fila anterior
- Formar la ecuación con el valor de k hallado y despejar S

Tener en cuenta que si los valores de jω que satisfacen la ecuación se verifican para k negativo, no se consideran.

Ejemplo. Dada la siguiente función de característica, determinar el punto por el cual el lugar de raíces corta el eje imaginario

$$GH = \frac{K}{S\,[\,(S+4)^2 + 16]}$$

1+ G(s). H(s) = 0 ➔ $1+\dfrac{K}{S\,[\,(S+4)^2 + 16]} = 0$

Es suficiente que solo sea nula:

$$S^3 + 8\,S^2 + 32\,S + k = 0$$

Aplicando el criterio de Routh

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 32 \\ s^2 & 8 & k \\ s^1 & \dfrac{256-k}{8} & 0 \\ s^0 & k & 0 \end{array}$$

Si K =256, los polos están ubicados sobre el eje imaginario. Para determinar la frecuencia a la que ocurre este corte reemplazamos este valor en la fila anterior.

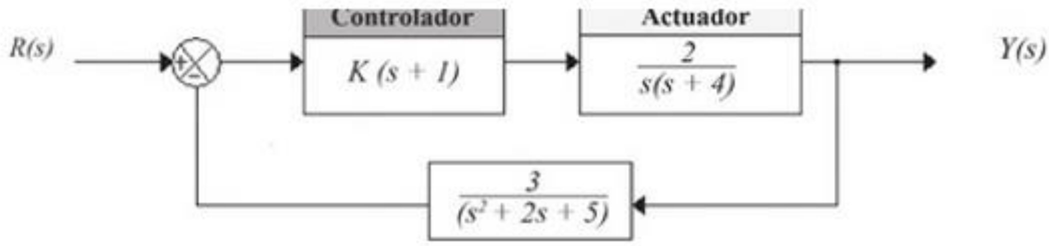
$8\,S^2 + 256 = 0$ ➔ $S^2 = -32$ ➔ $S = \pm j\sqrt{32}$

- **Ejercicio. Construir el lugar de raíces** G(s). H(s) = $\dfrac{K}{S^2\,(S+2)}$

- Ejemplos

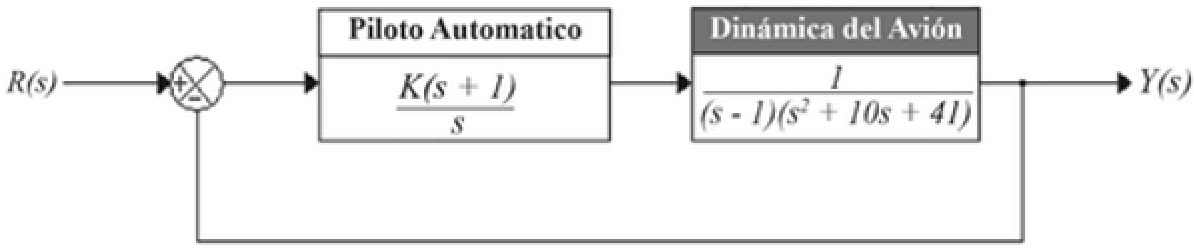
Brazo Robótico

El brazo robótico europeo de la Estación Espacial Internacional se utiliza para instalar y sustituir placas solares, revisar y ensamblar módulos y para trasladar a los astronautas que realizan los paseos espaciales. Mide unos 11.3 m de largo y pesa 630 Kg y es capaz de mover hasta 8000 Kg. En apariencia es casi como un brazo humano, con articulaciones y con la capacidad de coger, sujetar y girar como si de una verdadera mano se tratase. Es simétrico en su construcción. El brazo se puede dirigir desde el exterior, a través de un panel, o desde una sala de control en el interior de la estación espacial denominada *Cúpula* por su forma y que a través de sus siete ventanas permitirá a los astronautas ver todos los movimientos del brazo robótico. En la figura 3.6 se muestra el sistema de control para el actuador encargado del movimiento del brazo [4].



Para el diseño del sistema de control para el brazo robótico se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Realizar un bosquejo del lugar de las raíces del sistema al variar la ganancia K, mediante el desarrollo de las reglas generales para la construcción de los lugares de las raíces. Adicionalmente, identificar el rango de valores de la ganancia K para la estabilidad.
- Utilizando MATLAB, dibujar el lugar de las raíces y comprobar los resultados del bosquejo anteriormente realizado.
- Determinar ahora la ganancia K que limita la sobreelongación para que sea menor que el 6% mientras se alcanza el menor tiempo de subida posible.



Un *piloto automático* es un sistema mecánico, eléctrico o hidráulico usado para guiar un vehículo sin la ayuda de un ser humano. Los pilotos automáticos modernos usan sistemas informáticos para controlar la aeronave. El sistema lee la posición actual de la aeronave y controla un sistema de vuelo para guiarla. En un sistema de este tipo, además de los controles de vuelo clásicos, muchos pilotos automáticos incorporan la capacidad de gestionar el empuje, para controlar la aceleración de los motores y optimizar la velocidad, y de mover el combustible entre los diferentes depósitos para equilibrar la aeronave en una posición óptima en el aire [4]. Un avión de reacción de alto rendimiento con un sistema de control de piloto automático tiene una realimentación unitaria y un sistema de control tal como lo muestra la figura 3.7.

Para el diseño del sistema de control del piloto automático para un avión de reacción se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Realizar un bosquejo del lugar de las raíces del sistema al variar la ganancia *K*, mediante el desarrollo de las reglas generales para la construcción de los lugares de las raíces. Adicionalmente, identificar el rango de valores de la ganancia *K* para la estabilidad.
- Utilizando MATLAB, dibujar el lugar de las raíces y comprobar los resultados del bosquejo anteriormente realizado.
- Determinar ahora la ganancia *K* que proporciona la menor sobreelongación posible y un tiempo de establecimiento mínimo.

Nota: Para el desarrollo de los anteriores ejercicios de diseño se debe mostrar la gráfica del lugar de las raíces con las líneas constantes de ζ y los círculos de constante ω_n obtenidos en los diseños, indicando en ellas el valor de *K* obtenido. Además, presentar las gráficas de la respuesta al escalón del sistema diseñado para comprobar los requerimientos solicitados.