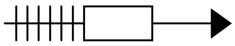
UTILIZACION DE LAS VARIABLES ALEATORIAS EN LOS PROCESOS DE SIMULACION

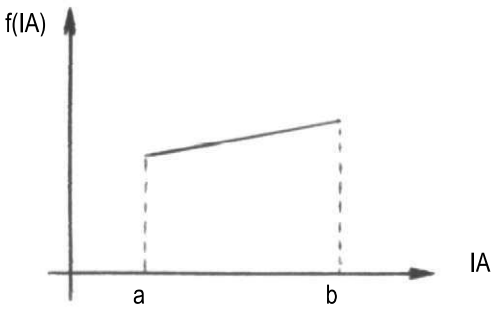
Autor: Ing. Jorge Schmitt

VARIABLES ALEATORIAS

En muchos casos la utilización de la simulación está referida a sistemas en los cuales aparecen involucradas variables aleatorias.

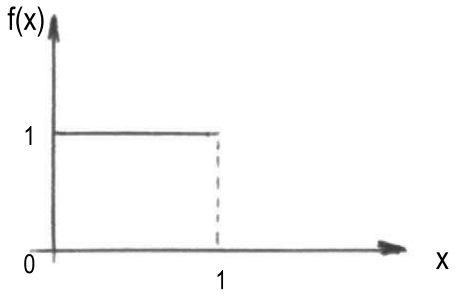
Cuando alguno de los datos de un sistema es una variable aleatoria, el conocimiento del dato se materializa a través del conocimiento de la distribución de probabilidad de dicha variable.

Así, si en un sistema de cola  simple decimos que el IA de las transacciones es una variable aleatoria dato del problema, lo que conocemos es la distribución de probabilidad de los IA.



Para determinar los sucesivos valores del IA debemos generar valores aleatorios que respondan a la distribución de probabilidad dato.

Consideraremos en especial el caso más simple, en que los valores que puede tomar la variable son equiprobables. Es decir, que la función de densidad de probabilidad es una paralela al eje de abscisas.

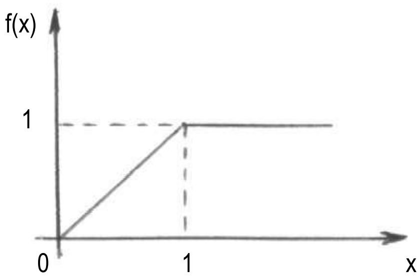


Si los valores de la variable varían entre 0 y 1 tendremos:

$f(x) = 1 \quad \text{para } 0 \le x \le 1$

$f(x) = 0 \quad \text{para } x<0 \wedge x>1$

Y la función de probabilidad acumulada será:



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{para } x<0 \\ x & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{para } x>1 \end{cases}$$

Los valores que toma una variable aleatoria de estas características se denominan **números aleatorios uniformes** o más simplemente **números aleatorios** y prácticamente todas las computadoras ofrecen la posibilidad de generar esta clase de números.

Es importante tener en claro que la generación de números aleatorios mediante una computadora digital, surge de la aplicación de un algoritmo y por lo tanto en realidad no son valores aleatorios, aunque a los fines prácticos pueden ser considerados como tales. Por esta razón algunos autores suelen llamarlos números pseudoaleatorios.

Ya hemos dicho que hoy en día prácticamente todos los sistemas de computación disponen de rutinas para la generación de números aleatorios, de manera que éste es un problema que normalmente el especialista en simulación no necesita resolver.

De todas maneras, y a título ilustrativo, citaremos un par de métodos para generar números pseudoaleatorios equiprobable.

Uno de los más sencillos es el propuesto por Von Neumann llamado de los cuadrados medios.

Partiendo de un número X_0 de n dígitos (generalmente n par) se calcula x_0^2 y se extraen los n dígitos centrales para obtener x_1 y así sucesivamente.

1	x_i	x_i^2	x_{i+1}
0	3456	$11\underline{9439}36$	9439

La serie de números que se obtiene de esta manera tiene algunos inconvenientes. El más grave es que según el valor inicial que se adopte puede entrar rápidamente a repetir ciclos muy cortos de números. Por esta razón en general se usan otros métodos tales como los **métodos de congruencia** basados en la expresión recursiva

$n_{i+1} \equiv a.n_i + c \pmod{m}$

donde ni, a y c son enteros no negativos. Esto significa que para obtener el vallor ni+1 se debe efectuar a.ni+c, dividir el resultado por m y el resto de esa división será ni+1.

Si hacemos c=0 tendremos el **método multiplicativo de congruencia**

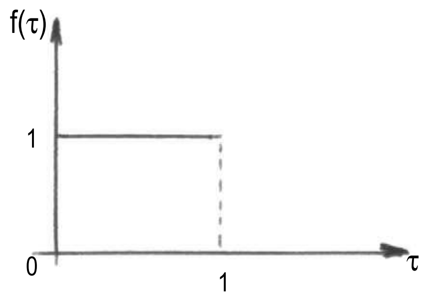
$ni+1 \equiv a.ni + \pmod{m}$

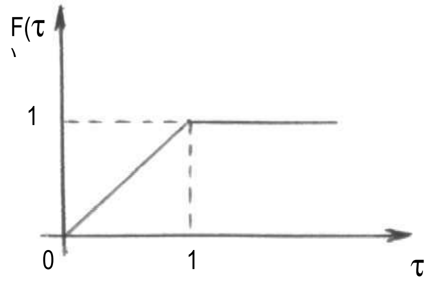
bastante utilizado por su velocidad de computación y buen resultado estadístico.

Si hacemos a=1 y c≠0 tendremos el **método aditivo de congruencia** y con a≠1 y c≠0 el **método mixto de congruencia**.

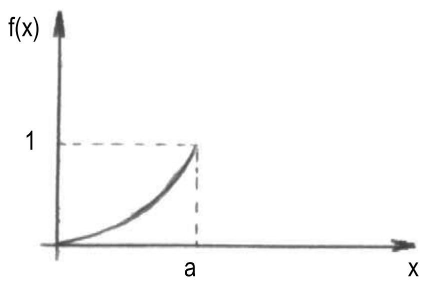
Ya hemos dicho que le especialista en simulación no necesita preocuparse por este problema porque actualmente prácticamente todos los sistemas proporcionan subrutinas para la generación de números pseudoaleatorios de calidad adecuada. Sin embargo, el problema no termina aquí, pues normalmente la función de densidad de probabilidad del dato no es uniforme y requiere en consecuencia una transformación.

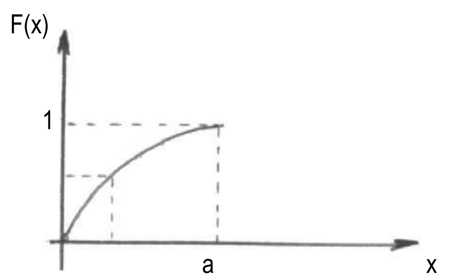
De nuestro sistema de computación podemos obtener valores aleatorios. Llamémoslos τ que responden a:





pero nustro dato responde a:





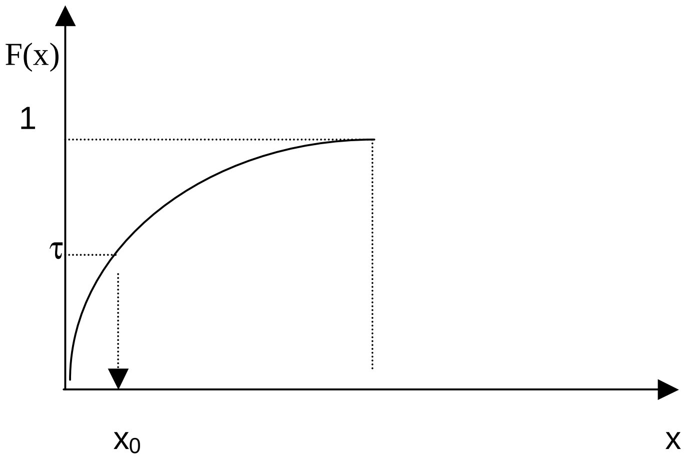
Tendremos que efectuar una transformación que a partir de los valor es de τ nos permita encontrar los valores de x.

En la bibliografía especializada existen rutinas ya preparadas, que son proporcionadas a los alumnos del curso, para pasar de la distribución uniforme a las principales funciones de densidad de probabilidad que han visto en el curso de probabilidad y estadística.

Para casos sencillos existe un método muy cómodo basado en la función de probabilidad acumulada.

Se observa que los valores de F(x) varían siempre entre 0 y 1.

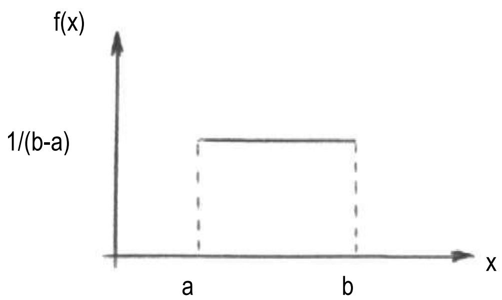
Si asignamos a F(x) los **números aleatorios equiprobables** τ que obtenemos de nuestra rutina de generación de números aleatorios tendremos $\tau = F(x)$ que, si existe la función inversa, puede expresarse como $x = F^{-1}(\tau)$ y que podemos visualizar en el gráfico diciendo que para cada τ obtenemos el x correspondiente.



Y como estos x están surgiendo de la F(x), al partir de valores equiprobables de F(x) se obtendrán valores de x que responden a la función de densidad de probabilidad f(x) dada originalmente.

Veamos un ejemplo muy sencillo:

Supongamos una función de densidad de probabilidad uniforme entre a y b:



$f(x)=1/(b-a)$

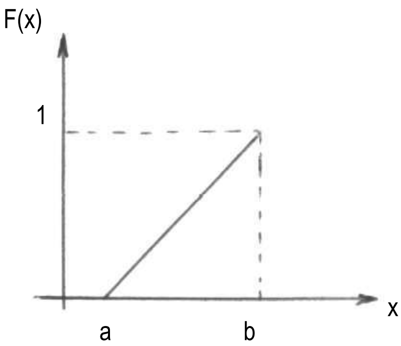
La función de probabilidad acumulada será:

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int 1/(b-a)\, dx = x/(b-a) + c$$

para hallar c podemos tomar F(a)=0

$$a/(b-a) + c = 0 \quad \therefore \quad c = -a/(b-a)$$

$$F(x) = x/(b-a) - a(b-a) = (x-a)/(b-a)$$



igualando a τ

$$\tau = (x-a)/(b-a)$$

despejando

$$x-a = \tau\,(b-a)$$

$$\boxed{x = \tau\,(b-a) + a}$$

Podemos aplicar el mismo método para cualquier caso en que pueda conocerse la función inversa de la función de probabilidad acumulada. Por ejemplo, para una exponencial

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \qquad \text{para } x \geq 0$$

$$F(x) = \int \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = - e^{-\lambda x} + c$$

dado que para x = 0 es F(x) = 0

$$-e^{-\lambda x} + c = 0$$

$$-1 + c = 0 \qquad \therefore \quad c = 1$$

$$F(x) = - e^{-\lambda x} + 1 \qquad \text{haciendo } F(x) = \tau$$

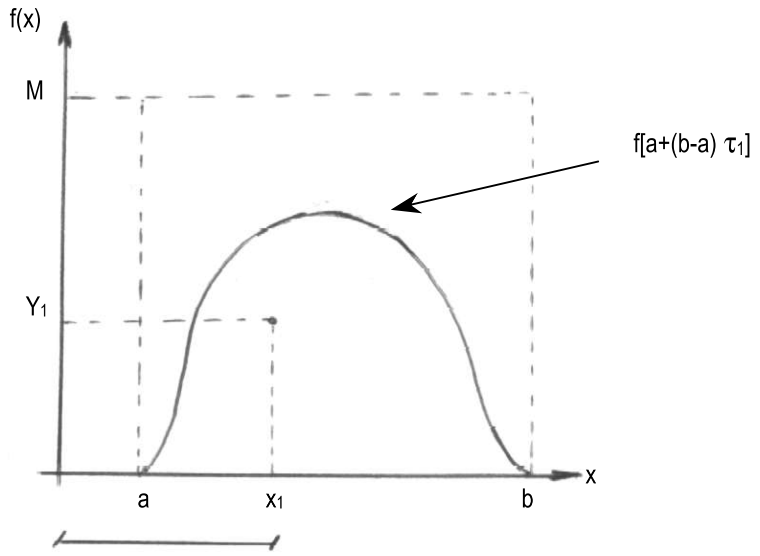
$$- e^{-\lambda x} = \tau - 1$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - \tau$$

$$-\lambda x = \ln(1 - \tau)$$

$$x = - \ln(1 - \tau)/\lambda = - 1/\lambda \ln(1 - \tau)$$

Método del rechazo



Sea una función de densidad de probabilidad f(x) definida en un intervalo [a, b], acotada y M un valor igual o mayor que le máximo de f(x).

Generamos dos valores aleatorios uniformes τ_1 y τ_2 que servirán para definir la absisa $x_1 = a + (b-a)\ \tau_1$ y la ordenada $y_1 = M\ \tau_2$.

Luego verificaremos si el punto está bajo la curva

$$M\ \tau_2 \leq f(a+(b-a)\ \tau_1)$$

Si está afuera se rechaza. Si está debajo de la curva se toma

$$x = a+(b-a)\ \tau_1$$

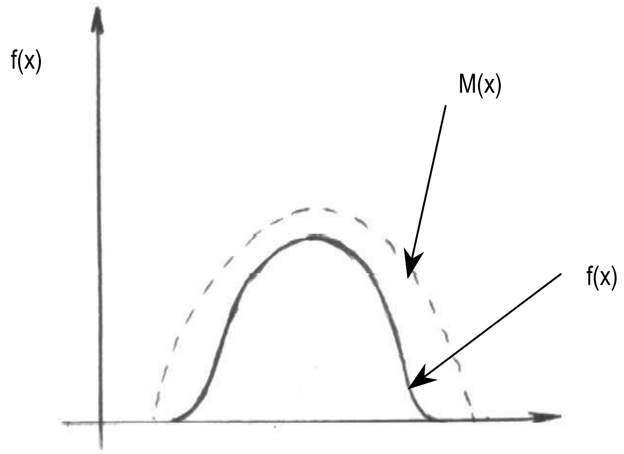
Los valores de x así obtenidos responden a la función de densidad de probabilidad.

El problema de este método es la cantidad de pruebas rechazadas.

La eficiencia del método estará dada por

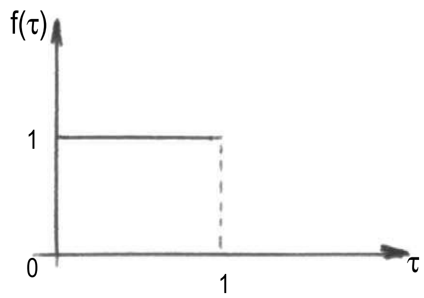
$$e = \text{área bajo la curva} / \text{área del rectángulo} = 1 / M\ (b - a)$$

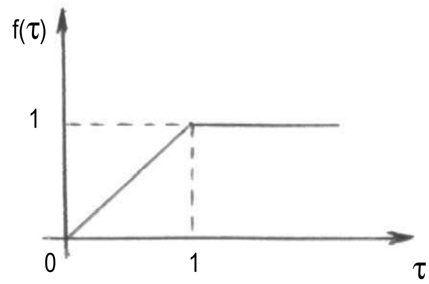
Se puede mejorar reemplazando el rectángulo por una función conocida que encierre a f(x)



En síntesis:

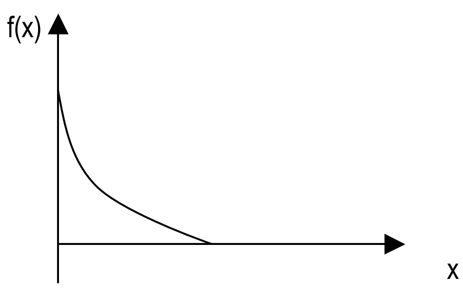
Los sistemas de computación disponen normalmente de rutinas para generar números pseudoaleatorios con distribución de probabilidad uniforme entre 0 y 1.





Si no dispusiéramos de esta facilidad podemos preparar una rutina utilizando métodos tales como el de los cuadrados medios o de congruencia.

Para pasar a la función de densidad de probabilidad dato:



Podemos utilizar rutinas existentes en la bibliografía o bien preparar una rutina empleando métodos tales como el de la función inversa o el del rechazo.

Desde el punto de vista de la simulación lo más importante es tener claro que cuando en el modelo aparecen variables aleatorias, para poder generar sus valores es necesario conocer su función de densidad de probabilidad y la validez de la simulación quedará en gran medida supeditada a la confiabilidad de ese conocimiento que en muchos casos no es fácil obtener.