Variables Aleatorias Discretas Especiales

Clase 5

Chan-Stein-Howlin-Casparian-Arceo-Spano

Organización

Distribución Bernoulli

Concepto

Una variable aleatoria se dice Bernoulli

cuando modela un experimento dicotómico (con sólo dos resultados) que se denominan éxito y fracaso. Es decir cuentan '1' cuando cierto evento ocurre, es decir éxito y '0' cuando no ocurre.

La distribución Bernoulli depende de un único parámetro $p \in [0; 1]$ si:

- X toma valor 1 o 0, siendo
- $P(X = 1) = p$
- $P(X = 0) = 1 - p = q$

Distribución Bernoulli

Notación y Ejemplos

Notación

Para denotar que una variable aleatoria X sigue una distribución Bernoulli de parámetro p, lo escribiremos de la siguiente manera: $X \sim Be(p)$

- Tiro una moneda con una probabilidad $p = \frac{1}{2}$ de que salga cara, asignando $X = 1$ si salió cara y $X = 0$ si salió cruz.
- Saco una carta de un mazo de barajas españolas y veo si es un oro con probabilidad $p = \frac{1}{4}$.
- Disparo a un blanco y doy en el centro con probabilidad p o no, con probabilidad $1 - p$.

Distribución Bernoulli

Ejemplos

Resumiendo

Una manera más general de plantear el experimento sería decir que $X = 1$ en caso de éxito, y $X = 0$ en caso de fracaso, estando el "éxito" y el "fracaso" definido por el contexto del experimento.

En la Vida Cotidiana

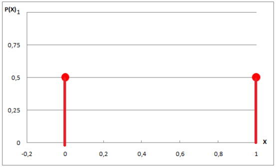
El modelo de Bernoulli se utiliza para esquematizar, por ejemplo los votos a favor o en contra de un candidato. Si p es la proporción de la población que vota a favor de un candidato, entonces el voto de un individuo tomado al azar podría ser modelado por $X \sim Be(p)$.

Distribución Bernoulli

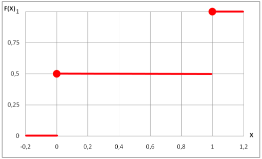
Probabilidad Puntual y Distribución (p=0.5)

X	p(X)	F(X)
0	0,5	0,5
1	0,5	1

(a) Tabla para $X \sim Be(0,5)$



(b) Probabilidad Puntual



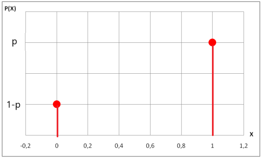
(c) Distribución Acumulada

Distribución Bernoulli

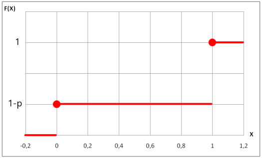
F. Probabilidad Puntual y F. Distribución

X	p(X)	F(X)
0	1-p	1-p
1	p	1

(a) Tabla para $X \sim Be(p)$



(b) Probabilidad Puntual



(c) Distribución Acumulada

Distribución Bernoulli

Esperanza y Varianza

$E(X)$ y $E(X^2)$

A partir de la tabla de función de probabilidad puntual se puede calcular la Esperanza de la siguiente manera.

$$E(X) = P(X = 1).1 + P(X = 0).0 = p.1 + (1 - p).0 = p$$

$$E(X) = p$$

$$E(X^2) = P(X = 1).1^2 + P(X = 0).0^2 = p.1^2 + (1 - p).0^2 = p$$

Utilizando la Fórmula de Cálculo de la Varianza

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p.(1 - p) = p.q$$

Organización

Experimento Binomial

Definición y Características

Experimento Binomial Satisface los siguientes cuatro requerimientos:

- El experimento consiste de n ensayos Bernoulli, siendo n fijo.
- Las pruebas son idénticas y en cada prueba hay sólo dos resultados posibles, que denominaremos Éxito (E) y Fracaso (F).
- Las pruebas son independientes, es decir que el resultado de una prueba no influye sobre el de las otras.
- La probabilidad de Éxito ($P(E)=p$) se mantiene constante en todas las pruebas.

Experimento Binomial

Notación y Ejemplos

Son ejemplos de experimentos binomiales:

1. Se arroja una moneda n veces y se llama Éxito al suceso "sale cara".
2. Se arroja un dado equilibrado n veces y se llama Éxito al suceso "se obtiene un as".
3. Se extraen 4 bolillas con reposición de una urna que contiene 5 bolillas blancas y 3 negras y se denomina Éxito al evento sale blanca.

Variable Aleatoria Binomial

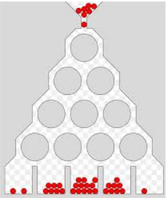
Notación y Recorrido

Variable Aleatoria Binomial

Consideremos un experimento binomial que consiste de n repeticiones y en el cual P(E) = p. Denominaremos v.a. binomial a la variable X: número de éxitos en las n repeticiones.

Notación: $X \sim Bi(n, p)$

$$R_X = \{0, 1, \cdots, n\}$$



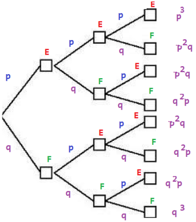
Distribución Binomial

Probabilidad Puntual

Probabilidad Puntual

P(X=k) es la probabilidad de obtener k 'éxitos' en los n ensayos del experimento.

Vamos a intentar pensar en un experimento con 3 repeticiones y probabilidad de éxito p en cada una de ellas. Lo representamos a continuación:



Experimento Binomial

Probabilidad Puntual

Del diagrama de árbol inferimos que:

- $P(X = 0) = q^3$
- $P(X = 1) = 3pq^2$
- $P(X = 2) = 3p^2q$
- $P(X = 3) = p^3$

Observación

$$q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = (p + q)^3 = 1^3 = 1$$

Las probabilidades de esta función son los términos de un desarrollo binomial.

Distribución Binomial

Probabilidad Puntual- Generalización

Probabilidad Puntual

Para un experimento binomimal con probabilidad p de éxito y n ensayos, siendo $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Siendo $\binom{n}{k}$ las distintas formas de elegir las posiciones donde suceden los k éxitos dentro de los n ensayos.

Distribución Binomial

Ejemplo

Lanzamos 5 veces una moneda equilibrada

Queremos hallar la probabilidad de obtener exactamente dos caras en los 5 lanzamientos.

Si quisiera calcular la probabilidad de obtener 2 caras al tirar 5 veces la moneda, debería averiguar $P(X = 2)$. Sabiendo que:

- Probabilidad de cara $\rightarrow p = 0.5$.
- Probabilidad de cruz $\rightarrow 1 - p = q = 0.5$.

Distribución Binomial

Solución del Ejemplo

La probabilidad de obtener 2 caras

implica también que se obtuvieron 3 cruces.

- Probabilidad de 2 caras $\rightarrow p^2$.
- Probabilidad de 3 cruces $\rightarrow (1-p)^3$.
- Probabilidad de 2 caras y 3 cruces $p^2.(1-p)^3$

Pero debemos recordar que existen varias maneras de obtener 2 caras en 5 tiradas. Por ejemplo:

- (O,O,X,X,X)
- (O,X,O,X,X)
- ...
- (X,X,X,O,O)

Distribución Binomial (ejemplo)

Dado que:

$$B(k;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k} & si \quad k = 0,1,2,...n \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \tag{1}$$

Entonces

- n: Cantidad de ensayos (5)
- p: Probabilidad de éxito (0.5)
- k: Cantidad de éxitos (X=2)
- $P(X=2) = \binom{5}{2}.p^2.(1-p)^3$

Variable Aleatoria Binomial

Como suma de variables Bernoulli

IMPORTANTE

Todo ensayo Binomial puede pensarse como suma de n ensayos Bernoulli independientes. Además conocemos la Esperanza y la Varianza de una variable aleatoria Bernoulli: $X \sim Be(p)$ es $E(X) = p$.

Simbólicamente

La variable aleatoria $Y \sim Bi(n, p)$ es la suma de n variables aleatorias independientes X_i, con distribución Bernoulli $X_i \sim Be(p)$

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n \rightarrow Y \sim Bi(n, p)$$

Distribución Binomial

Esperanza y Varianza

Luego, la Esperanza y Varianza de Y, pueden pensarse:

$$E(Y) = E(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + ... + E(X_n)$$

$$E(Y) = n.p$$

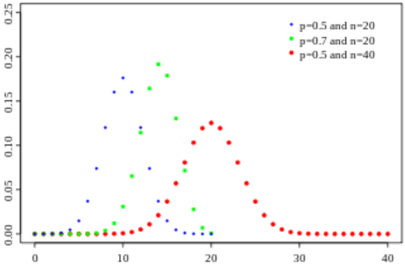
Obtenemos la varianza de Y de la misma manera:

$$V(Y) = V(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + ... + V(X_n)$$

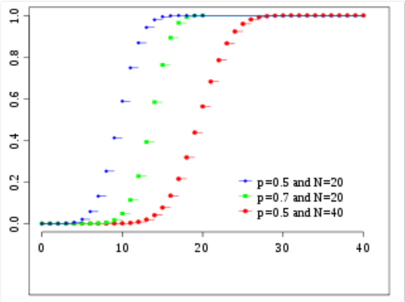
$$V(Y) = n.p.q$$

Distribución Binomial

Forma de las Funciones



(a) Probabilidad Puntual



(b) Distribución Acumulada

Organización

Distribución Hipergeométrica

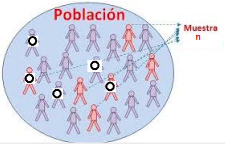
Presentación del Experimento

Se tiene

- Una población se compone de N individuos.
- Dentro de esos individuos $R < N$ tienen cierta característica C.
- Se extrae una muestra de $n \leq N$ individuos de esta población (sin reposición!).
- Interesa saber cuántos indidividuos de la muestra tienen la propiedad.

La Variable aleatoria Hipergeométrica cuenta

el número de elementos de la muestra que tienen la característica C.



Variable Aleatoria Hipergeométrica

Recorrido, Notación y Probabilidad Puntual

Notación

$X \sim H(n, R, N)$, siendo x la cantidad de éxitos en la muestra de tamaño n extraída de la población de N elementos de los cuales R tienen la propiedad C.

Recorrido

$$\max\{0, n-(N-R)\} \leq X \leq \min\{n, R\}$$

Probabilidad Puntual

$$P(X = x) = H(x, n, R, N) = \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Variable Aleatoria Hipergeométrica

Esperanza y Varianza

Expresiones

Si X es una variable aleatoria hipergeométrica $X \sim H(n, R, N)$ entonces

- $E(X) = n.\frac{R}{N}$
- $V(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right).n.\frac{R}{N}\left(1 - \frac{R}{N}\right)$

Comparación con la Binomial

Si consideramos que en la primer extracción $\frac{R}{N}$ es la proporción $p*$ de éxitos en la población, y la reemplazamos en las expresiones dadas:

- $E(X) = n.p*$
- $V(X) = n.p * (1 - p*)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

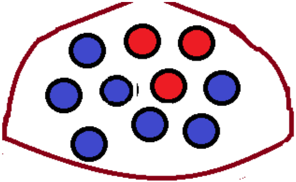
Las varianzas difieren en un factor conocido como **factor de corrección por muestra finita y en que p* no es constante!.**

Variable Aleatoria Hipergeométrica

Ejemplo

Enunciado

De una urna que contiene 3 bolillas rojas y 7 azules se extraen 4 bolillas sin reposición y se define
X: número de bolillas rojas extraídas.



Queremos hallar

a) Qué cantidad de bolillas rojas es más probable extraer?
b) El valor esperado de bolillas rojas.

Variable Aleatoria Hipergeométrica

Ejemplo

1. $P(X=0) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{1 \times 35}{210} = \dfrac{1}{6}$
2. $P(X=1) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{3 \times 35}{210} = 0.5^{**}$
3. $P(X=2) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{3 \times 21}{210} = 0.3$
4. $P(X=3) = \dfrac{\binom{3}{3}\binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{3 \times 21}{210} = \dfrac{1}{30}$
5. $E(X) = 4 \times \dfrac{3}{10} = 1.2$

Organización

Variable Aleatoria Poisson

Presentación Notación y Recorrido

Qué modela?

La variable aleatoria Poisson, modela ocurrencias discretas sobre un espacio contínuo. Por ejemplo:

- Llegada de autos a un peaje por minuto.
- Llamadas que llegan a un call center por hora.
- Cantidad de infectados por coronavirus en un día.
- Baches en una ruta por km.
- Fallas en una tela por m^2.

Esta variable aleatoria depende de una constante λ

Que se denomina intensidad del proceso de Poisson y la notación usual es $X \sim Po(\lambda)$ siendo $X \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ la intensidad del proceso o tasa de ocurrencias en cierto continuo.

Variable Aleatoria Poisson

Función de Probabilidad Puntual

Probabilidad Puntual

En este caso no vamos a describir un experimento pero luego le daremos sentido a esta variable.

$$p_{\lambda}(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

Siendo:

- $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, y $\lambda \in (0, \infty)$

Para que sea una función de probabilidad puntual, debe cumplir que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = 1$$

Función de Probabilidad Puntual

Demostración

Si recordamos por serie de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Volviendo a la Función de Probabilidad Puntual y operando, obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Quedando demostrado que es una Función de Probabilidad Puntual

Variable Aleatoria Poisson

Esperanza

Deducción del Valor

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

$$E(X) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{k(k-1)!}$$

$$E(X) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

Variable Aleatoria Poisson

Varianza

Cálculo

Para calcular la Varianza, primero debemos hallar $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k) P(X = k) + \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k)$$

Sabiendo que:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = \lambda$$

Variable Aleatoria Poisson

Varianza

Cálculo (Continuación)

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2 - k)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} + \lambda$$

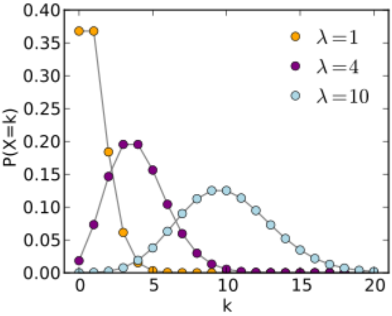
$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k(k-1)(k-2)!} + \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-2}\lambda^2}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda$$

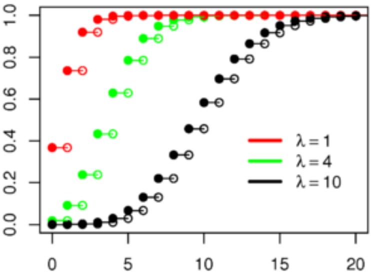
$$E(X^2) = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda \Longrightarrow V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Variable Aleatoria Poisson

Probabilidad Puntual y Distribución



(a) Probabilidad Puntual



(b) Distribución Acumulada

Variable Aleatoria Poisson

Ejemplo

Enunciado

Una máquina analiza pruebas de laboratorio y hace en promedio 6 muestras por hora. Calcular:

1. la probabilidad de que no se analice ninguna muestra en media hora.
2. Se analicen al menos dos muestras en una hora.
3. El valor más probable de muestras a realizarse en media hora.
4. El valor esperado de muestras para quince minutos.
5. El valor de muestras superado por al menos el 50% de las horas.

Variable Aleatoria Poisson

Ejemplo

Respuestas

1. $P_{\lambda=3}(X=0) = \dfrac{e^{-3}3^0}{0!} \approx 0.0497$
2. $P_{\lambda=6}(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \dfrac{e^{-6}6^0}{0!} - \dfrac{e^{-6}6^1}{1!}$
   $P_{\lambda=6}(X \geq 2) = 0.9826$
3. no hay un único valor!

x	0	1	2	3	4	5
$p_{\lambda=3}(x)$	0.0498	0.1494	0.224	0.224	0.168	0.1008

4. $\lambda = 6/4 = 1.5$
5. $X \leq 5$

x	0	1	2	3	4	5	6	...
$F_{\lambda=6}(x)$	0.003	0.017	0.062	0.151	0.285	0.446	0.606	...

Relación entre la Distribución Binomial y la Poisson

Propiedad

Se puede probar que la distribución binomial converge a la distribución de Poisson cuando el parámetro n tiende a infinito y el parámetro p tiende a ser cero, bajo la condición de que el producto de n por p sea una cantidad constante λ.
Simbólicamente:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty \wedge p \longrightarrow 0 \wedge n.p=\lambda} P_{Bi(n,p)}(X) = P_{Po(\lambda)}(x)$$

MUCHAS GRACIAS!!