

Guía de Estudio N° 4 – “Sistema de Partículas”

1.- INTRODUCCION – FUERZAS INTERIORES Y EXTERIORES:

Llamamos sistema de Puntos materiales o partículas a todo conjunto de Partículas que interactúan entre sí. Es decir que cumplen el principio de Acción - Reacción o tercera Ley de la Dinámica.

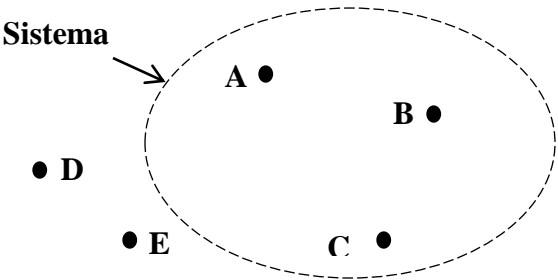
Entendemos por partícula a todo cuerpo cuyas dimensiones son despreciables frente al orden de magnitud con que trabajamos o estudiamos. Si bien el tamaño se considera despreciable, a cada partícula se le asigna una masa M.

Como ejemplo básico: Un avión en la Pantalla del radar de un aeropuerto es una partícula donde interesa la Posición, velocidad y aceleración de la misma. Es decir la Cinemática de ese cuerpo o Partícula. No su tamaño que frente al “espacio aéreo” es despreciable. O en el seguimiento del movimiento del mismo para su aterrizaje o despegue son fundamentales sus variables cinemáticas. Y a eso debe abocarse en gran parte de su trabajo el operador aéreo.

Lo mismo ocurre con un barco en el océano independientemente de su tamaño si analizamos su trayectoria o su movimiento en general.

Un **sistema de partículas** consta de dos o más partículas.

Si el número de partículas es Infinito, decimos que se trata de un **cuerpo sólido**. El mismo puede analizarse como Rígido y entonces estamos en presencia del **Cuerpo solido Rígido**. El estudio de la Cinemática y Dinámica del Cuerpo Rígido será el tema de estudio en la próxima Guía. En materias más avanzadas y según la especialidad dentro de la ingeniería se estudiara la elasticidad o deformación de los cuerpos. Y estaríamos en presencia de **Cuerpos solidos elásticos**.



Nosotros elegimos el sistema.
En el caso del dibujo decimos que las partículas A, B y C son **interiores** al sistema.
Las partículas D y E son **exteriores**.
Cabe aclarar que entre todos los puntos del Universo existirán interacciones.

Por el solo hecho de tener masa, las partículas van a interactuar entre sí mediante fuerzas de atracción de origen gravitatorio. Cumplen la ley Universal de Gravitación de Newton (Guía de estudio N° 2 de Dinámica. Teórico 3c).

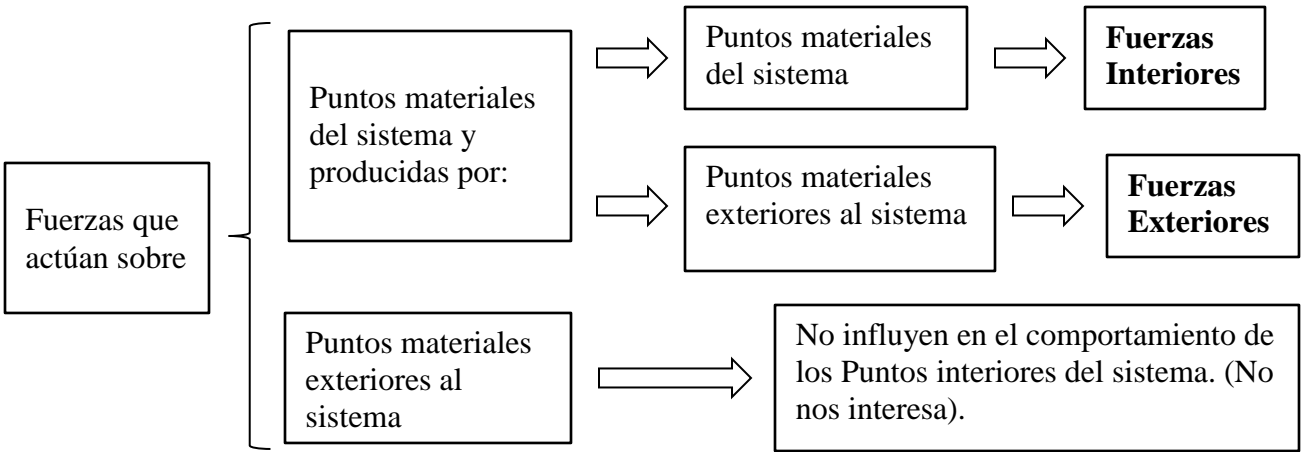
Si poseen carga eléctrica interactúan mediante fuerzas de índole electromagnética.

Mediante fuerzas de contacto también pueden interactuar.

Y así en otras situaciones. Pero siempre van a cumplir el Principio de Acción – Reacción.

En el siguiente cuadro veremos que Fuerzas son **Interiores** y cuales **Exteriores** para el sistema anteriormente dibujado.

Viendo el dibujo de las 5 partículas el sistema lo conforman los puntos materiales A, B y C.



Importante: por lo que vemos “Que es” una Fuerza Exterior **F_{EXT}** y “Que es” una Fuerza Interior **F_{INT}** va a depender de como definamos (elegimos) el sistema.

Vamos a designar o usar la siguiente notación:

F_{AB} = Fuerza que la partícula A ejerce sobre B

F_{BC} = Fuerza que la partícula B ejerce sobre C

F_{CB} = Fuerza que la partícula C ejerce sobre B

Y así sucesivamente. Tendremos entonces que la suma de todas (Σ) las fuerzas interiores que actúan sobre nuestro sistema será:

$$\Sigma \mathbf{F}_{INT} = \mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{CA} + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{CB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{F}_{BC}$$

Por la Tercera Ley de Newton (Principio de Acción – reacción) tenemos que:

$$F_{BA} = -F_{AB} \quad F_{CA} = -F_{AC} \quad F_{CB} = -F_{BC}$$

Entonces: $\Sigma F_{INT} = 0$ (I) (Primera Conclusión).

La suma de todas las fuerzas interiores en un sistema de Partículas es Nula. Se dedujo para un Sistema de 3 puntos materiales. Pero podemos extenderlo a cualquier número. Incluso Infinito (Cuerpo Rígido). Además:

$$\Sigma F_{INT} + \Sigma F_{EXT} = \underbrace{(F_{BA} + F_{CA} + F_{DA} + F_{EA})}_{M_A \cdot A_A} + \underbrace{(F_{AB} + F_{CB} + F_{DB} + F_{EB})}_{M_B \cdot A_B} + \underbrace{(F_{AC} + F_{BC} + F_{DC} + F_{EC})}_{M_C \cdot A_C}$$

Donde M_A , M_B y M_C son las masas de las partículas del sistema

A_A , A_B y A_C son las aceleraciones de las partículas del sistema

Al ser $\Sigma F_{INT} = 0$. Reemplazamos:

$$0 + \Sigma F_{EXT} = M_A A_A + M_B A_B + M_C A_C$$

Entonces: $\Sigma F_{EXT} = \Sigma M_i A_i$ (II) (Segunda Conclusión).

La suma de todas las fuerzas exteriores en un sistema de Partículas es igual a la suma de los productos de la masa por la aceleración en cada una de las partículas. Se dedujo para un Sistema de 3 puntos materiales. Pero podemos extenderlo a cualquier número. Incluso Infinito (Cuerpo Rígido).

Además usando el Análisis Matemático con valores diferenciales el valor instantáneo de cada aceleración será:

$$A = dV/dT \rightarrow A_A = dV_A / dT, \quad A_B = dV_B / dT \text{ y } A_C = dV_C / dT$$

De acuerdo a las propiedades de las derivadas:

$$M \cdot A = M \cdot dV/dT = d/dT (M \cdot V).$$

Podemos entonces escribir en base a la segunda conclusión y para nuestro Sistema:

$$\Sigma F_{EXT} = d/dT (M_A \cdot V_A) + d/dT (M_B \cdot V_B) + d/dT (M_C \cdot V_C)$$

Reemplazando:

$$M_A V_A = p_A = \text{Cantidad de movimiento de las Partícula A}$$

$$M_B V_B = p_B = \text{Cantidad de movimiento de las Partícula B}$$

$$M_C V_C = p_C = \text{Cantidad de movimiento de las Partícula C}$$

$$\Sigma F_{EXT} = d/dT p_A + d/dT p_B + d/dT p_C.$$

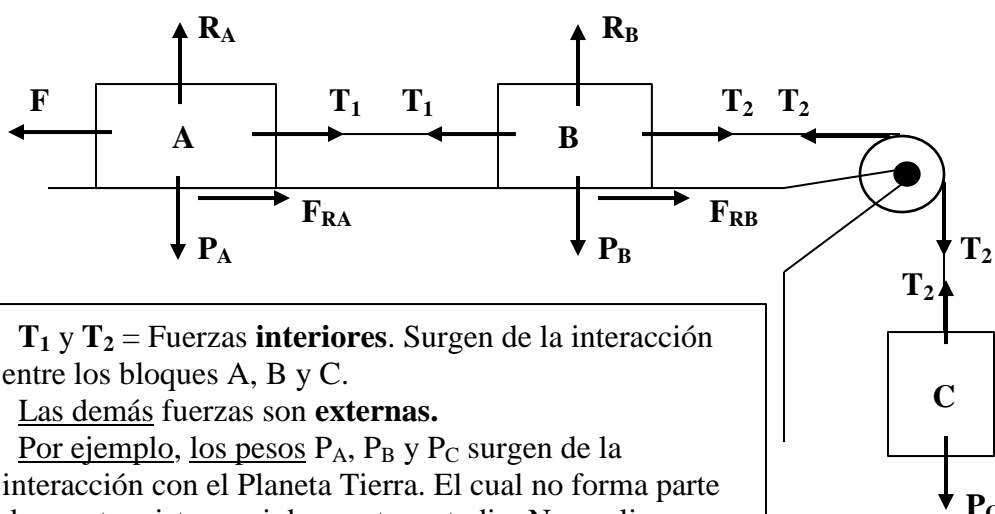
Generalizando para N partículas con $N = 2$ a $N \rightarrow \infty$, obtenemos otra forma de expresar (II):

$$\Sigma F_{EXT} = d/dT \Sigma p_i \quad \text{(III) (Segunda Conclusión).}$$

Ejemplo de Fuerzas interiores y exteriores en un Sistema de Partículas:

Vamos a verlo en el caso de cuerpos Vinculados y que ya hemos estudiado y resuelto. Usaremos tres cuerpos A, B y C que en realidad son tres partículas pues hasta ahora No hemos considerado las dimensiones de los cuerpos.

Recordemos que en estos problemas la masa de las cuerdas y poleas o elementos de vínculo se considera nula.



T_1 y T_2 = Fuerzas **interiores**. Surgen de la interacción entre los bloques A, B y C.

Las demás fuerzas son **externas**.

Por ejemplo, los pesos P_A , P_B y P_C surgen de la interacción con el Planeta Tierra. El cual no forma parte de nuestro sistema ni de nuestro estudio. No analizamos en esta materia como se traslada y rota nuestro Planeta.

Son fuerzas exteriores las Reacciones Normales R_A y R_B ejercidas por el Piso sobre los bloques.

Son fuerzas exteriores las de Rozamiento F_{RA} y F_{RB} ejercidas por el Piso sobre los bloques.

El Piso tampoco forma parte de nuestro sistema en estudio. Se supone en Reposo.

Y por último la fuerza F ejercida por un moto-reductor o por una persona mediante un cable o sogá.

2.- CENTRO DE MASAS (Posición):

Existe un punto en todo sistema de partículas llamado centro de Masas CM que se mueve como si en el estuviera concentrada toda la masa del sistema y las fuerzas externas que actúan sobre el sistema se aplicaran exclusivamente sobre dicho punto.

Dicho de otra manera: Existe un punto en un sistema de partículas (Cuerpo Rígido si es un sistema de infinitas partículas) cuyo movimiento bajo la acción de fuerzas externas puede ser analizado como el de una partícula simple. Su masa M es la suma de todas las masas m_i del sistema. Este punto se llama CM. Puede estar dentro o fuera del sistema de Partículas.

$$M = \sum m_i$$

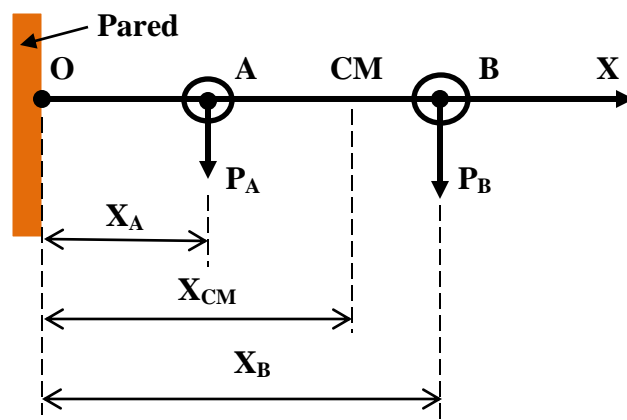
Podemos también enunciar

“**Centro de masa CM** de un sistema de Partículas es el punto material en el cual se puede considerar concentrada toda la masa del sistema $M = \sum m_i$ y cuyo movimiento es equivalente al del sistema bajo la acción de las fuerzas exteriores”

POSICION:

Consideramos en primer lugar un sistema simple formado por dos partículas A y B y llamamos X_A y X_B a sus coordenadas medidas desde el origen arbitrario O de un sistema fijo de coordenadas (Eje X).

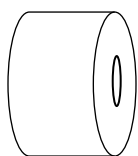
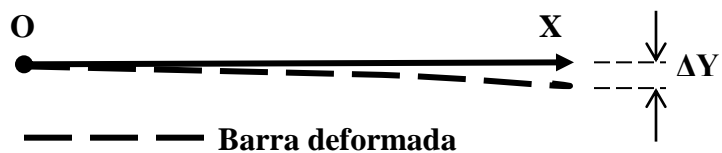
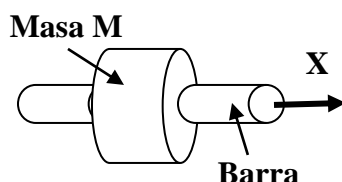
A este sistema fijo al planeta Tierra se lo llama Sistema Laboratorio. Al igual que todo sistema en reposo respecto a nuestro planeta.



Imaginemos una barra ideal y sin masa que empotramos (clavamos) a una pared. Coincidente con el punto de empotramiento ubicamos el origen O del sistema de referencia (Eje X).

Dos partículas A y B las imaginamos de forma cilíndrica o esférica con agujeros para poder deslizarlas y colocarlas en cualquier posición a lo largo de la barra. En nuestra figura las posiciones son X_A y X_B

Bajo la acción de estos dos Pesos P_A y P_B la barra se flexiona. Se deforma. Mínimamente pero su extremo desciende (imaginemos) ΔY



Cada una de las partículas está representada aquí por un cilindro con un orificio para poder ubicar a la Masa en distintas posiciones al trasladarse sobre la barra. La barra se introduce en los agujeros de cada una de las masas

Los Pesos “colgados” en la barra producen en las situaciones reales la deformación ΔY indicada. No importa aquí ese valor. Calcularlo es tema de otras asignaturas de la ingeniería.

Lo que sí se puede inferir es que esa deformación será mayor cuanto más se aleje del origen O (punto de empotramiento) el peso del cilindro o esfera idealmente pequeña. Es decir que no solo depende de la fuerza Peso aplicada sino de la posición X donde se ubica la masa.

Al producto de una fuerza (P_A) por la distancia (X_A) se la denomina **momento de esa fuerza** respecto del punto O:

M_{PA}^O = Momento de la fuerza Peso P_A respecto del Punto O.

$$M_{PA}^O = X_A \cdot P_A = X_A \cdot M_A \cdot g \quad (\text{Modulo})$$

Aclaración Importante: El momento de una fuerza es en realidad el producto vectorial del **Vector Posición** de la fuerza (respecto del punto) por el **Vector Fuerza**. El resultado es un vector perpendicular al plano definido por los vectores posición y fuerza.

Este tema se verá con más detalle en el punto 9 de “Sistema de Partículas”.

En general: M^O_F = Momento de la fuerza **F** respecto del Punto **O**.

El momento de las Fuerzas tiende a generar rotaciones. En este ejemplo alrededor del punto O.

Es como cuando abrimos una puerta aplicando una fuerza a la manija. Se abre rotando. No trasladándose. La puerta gira alrededor del eje de bisagras de la puerta. NO SE TRASLADA. La puerta GIRA por que actúa un momento cuyo modulo es igual al producto entre la distancia de la manija al eje de bisagras y la fuerza aplicada a la manija

Los momentos generan Rotaciones (Giros)

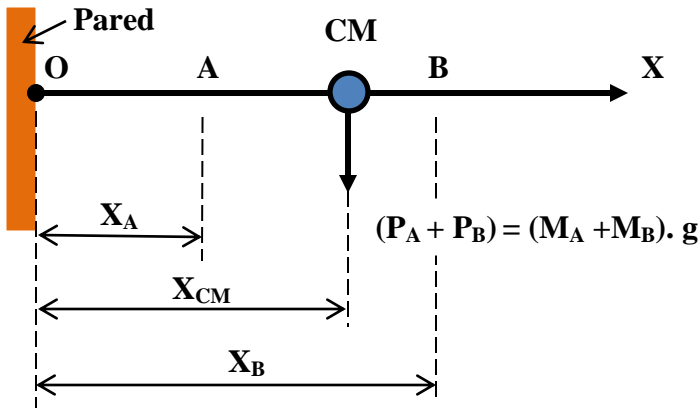
Imaginemos ahora que retiramos las dos masas M_A y M_B y colocamos otro cuerpo o pesa cilíndrica cuya masa es la suma de las de A y B. La colocamos en la barra y vamos moviéndola hasta que genere la misma deformación ΔY que las dos masas anteriores (A y B).

Esta única masa tiende a hacer girar la barra alrededor del Punto **O** de la misma manera que las otras dos A y B. Al igual que antes tiende a girar. Pero realmente se produce un pequeño y casi imperceptible desplazamiento o flexión representado por ΔY

El efecto es equivalente dado que la barra no puede girar por estar empotrada (clavada en la pared). La barra se flexiona (se curva hacia abajo) de la misma manera que ocurría con las dos masas A y B.

El efecto o sollicitación a la flexión es el mismo.

Hemos reemplazado las dos masas anteriores y su efecto por una única masa de igual valor pero ahora ubicada en lo que identificamos como el Centro de Masas CM.



El momento respecto del punto **O** que genera ahora la misma deformación o flexión que las dos masas separadas es:

M^O_PAB = X_CM . P_AB = X_CM . (M_A + M_B) . g

Este Momento es igual, como se indicó, al generado por P_A y P_B separados:

M^O_PA + M^O_PB = X_A . P_A + X_B . P_B
M^O_PA + M^O_PB = X_A . M_A . g + X_B . M_B . g

Igualandos ambos Momentos → M^O_PAB = M^O_PA + M^O_PB →

X_CM . (M_A + M_B) . g = X_A . M_A . g + X_B . M_B . g →

X_CM = (X_A . M_A + X_B . M_B) / (M_A + M_B) = (X_A . M_A + X_B . M_B) / M

M = M_A + M_B

Si → M_A = M_B = M → X_CM = (X_A + X_B) / 2
El CM se ubica en el punto medio entre los dos cuerpos.

Para N partículas → M . X_CM = Σ M_i X_i →

X_CM = Σ M_i . X_i / M

M = Σ M_i

Podemos generalizar el resultado obtenido en el caso de dos partículas en una dirección al caso de muchas partículas en las tres direcciones X, Y, Z:

Llamando M = Σ m_i = Suma de las masas de todas las partículas.

M . X_CM = Σ m_i X_i
M . Y_CM = Σ m_i Y_i
M . Z_CM = Σ m_i Z_i

En notación vectorial:
M . r_CM = Σ m_i r_i → r_CM = [Σ m_i r_i] / M.
Con r_CM = X_CM . i + Y_CM . j + Z_CM . k

NOTA:

De acuerdo al libro “Mecánica Vectorial para Ingenieros” de los autores “Beer – Johnston Jr – Clausen” en la página 180 punto 14.4 se define:

“El centro de Masa de un sistema de partículas es el punto G definido por el vector posición r_CM que cumple la relación”:

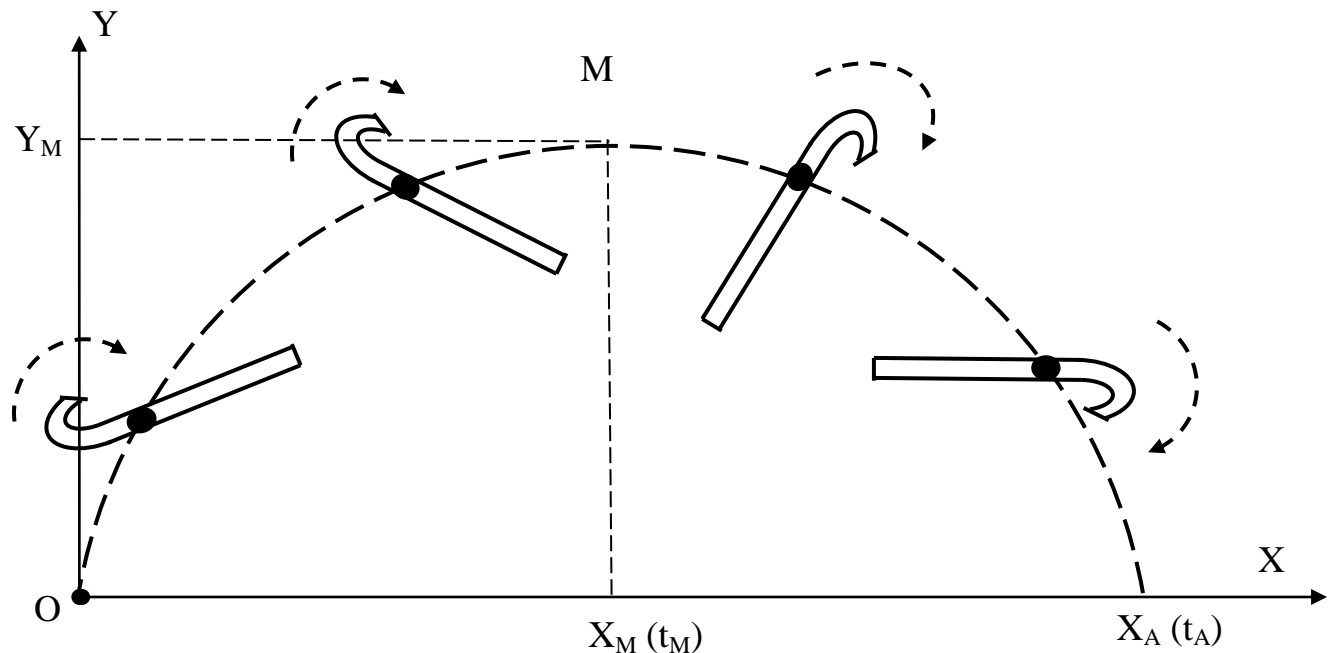
M . r_CM = Σ m_i r_i → con M = Σ m_i = Masa total del Sistema.

3.- MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS DE UN SISTEMA

Segunda ley de Newton.

El movimiento de un objeto extenso tal como un bastón lanzado al aire es complicado. Un punto del bastón, su centro de Masas, describe la misma trayectoria parabólica simple que recorrería si fuese una partícula en un Tiro oblicuo.

Solo actúa la fuerza gravitatoria y ninguna otra fuerza externa. El Tiro oblicuo “ideal” que estudiamos se entiende en el Vacío, es decir con ausencia del rozamiento fluido con el aire



● Centro de Masa (CM) del bastón.

Para describir el movimiento analicemos primero el del centro de masas CM.

Para ello vamos a calcular V_{CM} diferenciando (derivando) la ecuación:

$$M \cdot r_{CM} = \sum m_i r_i$$

Derivando:

$$M \cdot r_{CM} = \sum m_i r_i \rightarrow M \cdot d r_{CM}/dT = m_1 \cdot d r_1/dT + m_2 \cdot d r_2/dT + \dots = \sum m_i \cdot d r_i/dT$$

$$M \cdot V_{CM} = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 + \dots = \sum m_i \cdot V_i \quad (1)$$

Despejamos V_{CM} :

$$V_{CM} = \sum m_i \cdot V_i / M = \sum m_i \cdot V_i / \sum m_i$$

Volvemos a derivar la ecuación (1):

$$M \cdot dV_{CM}/dT = m_1 \cdot dV_1/dT + m_2 \cdot dV_2/dT + \dots = \sum m_i \cdot dV_i/dT$$

$$M \cdot A_{CM} = m_1 \cdot A_1 + m_2 \cdot A_2 + \dots = \sum m_i \cdot A_i \quad (2)$$

Despejamos A_{CM} :

$$A_{CM} = \sum m_i \cdot A_i / M = \sum m_i \cdot A_i / \sum m_i$$

En el Teórico 1, hoja 2 de 20, obtuvimos para un Sistema de Partículas la igualdad (II) segunda conclusión

$$\sum F_{EXT} = \sum M_i A_i$$

Además recién vimos en (2) \rightarrow

$$M \cdot A_{CM} = \sum m_i \cdot A_i$$

Y teniendo en cuenta que $M_i = m_i$.

Obtenemos \rightarrow

$$\sum F_{EXT} = F_{NETA} = M \cdot A_{CM}$$

Segunda Ley de Newton para un Sistema de Partículas

“La masa total de un sistema de partículas $M = \sum m_i$ multiplicada por la aceleración del centro de masas A_{CM} es igual a la fuerza externa Resultante (Fuerza Neta) que actúa sobre el sistema”

Dicho de otra manera, el centro de masas se mueve como una partícula de masa $M = \sum m_i$ sometida a la influencia de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema.

Conclusión: Vemos que es válido aplicar la segunda ley de Newton o principio de Masa al CM de un sistema de Partículas

MOVIMIENTO DEL CM – APLICACIÓN A DOS PARTICULAS.

Lo desarrollado en este Ítem en la hoja anterior podemos utilizarlo para dos partículas A y B. Para ellas las expresiones de la Velocidad y Aceleración del CM serán:

De la Ecuación (1) $\rightarrow M \cdot V_{CM} = M_A \cdot V_A + M_B \cdot V_B \rightarrow$ Como $M = M_A + M_B$. Despejamos V_{CM}

$$V_{CM} = [M_A \cdot V_A + M_B \cdot V_B] / (M_A + M_B)$$

De la Ecuación (2) $\rightarrow M \cdot A_{CM} = M_A \cdot A_A + M_B \cdot A_B \rightarrow$ Como $M = M_A + M_B$. Despejamos A_{CM}

$$A_{CM} = [M_A \cdot A_A + M_B \cdot A_B] / (M_A + M_B)$$

4.- CONSERVACION DEL IMPETU LINEAL

Para un Sistema de partículas hemos obtenido en el Tema anterior 3, carilla 5 de 20 la expresión (1):

$$M \cdot V_{CM} = \sum m_i \cdot V_i$$

Donde $M \cdot V_{CM} = p_{CM} =$ Ímpetu o cantidad de movimiento lineal del CM.

$m_i \cdot V_i = p_i =$ Ímpetu o cantidad de movimiento lineal de cada partícula.

Por lo tanto \rightarrow

$$p_{CM} = \sum p_i$$

Ímpetu lineal total de un sistema

Se suele definir Centro de masas de un sistema de partículas (puntos materiales) a aquel que cumple con la igualdad anterior.

En el Teórico 1, hoja 2 de 20, obtuvimos para un Sistema de Partículas la igualdad (III) segunda conclusión

$$\sum F_{EXT} = d/dT \sum p_i \quad (III)$$

Y como $\sum p_i = p_{CM} \rightarrow$

$$\sum F_{EXT} = d/dT p_{CM}$$

“La suma de las fuerzas exteriores (Fuerza Resultante) es igual a la derivada del Ímpetu lineal (Momento lineal) del Centro de Masas del Sistema”.

Recordar que $\rightarrow \sum F_{EXT} =$ Fuerza Neta $F_N =$ Fuerza Resultante F_R .

Cuando la Fuerza resultante que actúa sobre un Sistema de partículas es nula, tendremos:

$$F_R = \sum F_{EXT} = 0 \rightarrow p_{CM} = \text{Constante} \rightarrow$$

$$P_{CM} = M \cdot V_{CM} = \sum m_i \cdot V_i = \text{Constante}$$

Ley de conservación del Ímpetu lineal: “Si la fuerza externa resultante ejercida sobre un sistema de partículas es cero, la velocidad del centro de masas del sistema es constante y entonces la cantidad de movimiento (ímpetu) lineal total del sistema también es constante. Se conserva”

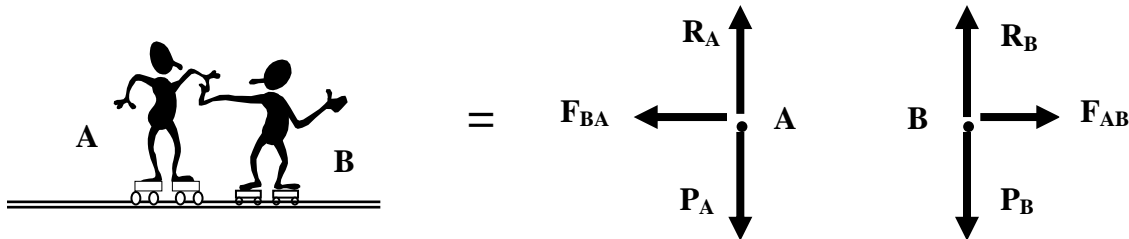
$$V_{CM} = \text{constante} \rightarrow p_{CM} = \text{constante} \rightarrow \sum p_i = p_{CM} = \text{constante}$$

Esta ley es en general más aplicable que la ley de conservación de la energía mecánica debido a que las fuerzas interiores ejercidas por una partícula del sistema sobre otra son frecuentemente NO conservativas. Esto puede hacer variar la energía mecánica total del sistema. Pero como estas fuerzas internas siempre se presentan por parejas, no pueden modificar la cantidad de movimiento total del sistema.

Ejemplo: Vamos a analizar el caso de dos patinadores ubicados sobre una superficie de hielo (idealmente sin rozamiento). Despreciamos el rozamiento con el aire y suponemos que no actúa ninguna otra fuerza, sobre este sistema de 2 partículas A y B.

Si ahora uno de los patinadores empuja al otro durante un corto intervalo de tiempo, de acuerdo al principio de acción y reacción, la fuerza que ejerce el patinador A sobre el B: F_{AB} será de igual intensidad y dirección que la que ejerce B sobre A: F_{BA} , pero de sentido contrario.

El DCL es:



Las fuerzas que intervienen al “empujarse” F_{BA} y F_{AB} son **interiores** al sistema formado por los cuerpos A y B. Son las fuerzas de interacción entre A y B. Acción – Reacción.

Además de estas fuerzas actúan cuatro más que son **exteriores**: Los pesos de A y de B y las reacciones Normales del piso sobre los cuerpos A y B.

Estas 4 fuerzas exteriores, como vemos en el DCL, están equilibradas

Se dice que el **sistema** es **aislado** cuando NO intervienen fuerzas exteriores al mismo o si intervienen, la fuerza exterior resultante o neta es NULA. Como en este caso.

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}_{EXT} = \mathbf{0} \rightarrow p_{CM} = \text{Constante}$$

Como resultado o síntesis se cumple el **principio de conservación de la cantidad de movimiento o ímpetu lineal**:

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}_{EXT} = \mathbf{0} \rightarrow p_{CM} = \text{Constante} \rightarrow \Delta p = p' - p = 0$$

El sistema formado por los dos patinadores conserva el ímpetu lineal $\rightarrow p = p'$

$$\text{Ímpetu lineal Inicial } p = M_A \cdot V_A + M_B \cdot V_B = 0 \rightarrow \text{Ambos cuerpos en reposo} \rightarrow V_A = V_B = 0$$

$$\text{Ímpetu lineal Final } p' = M_A \cdot V'_A + M_B \cdot V'_B = 0 \rightarrow$$

V'_A y V'_B son las velocidades de ambos patinadores luego de “empujarse”. Una será positiva $V'_B > 0$ pues se dirige hacia la derecha. La otra negativa $V'_A < 0$ pues se dirige hacia la izquierda.

Y los productos de masa por velocidad tendrán igual modulo pero signo contrario

$$M_B \cdot V'_B = -M_A \cdot V'_A$$

$$\begin{aligned} p &= p_0 = p_i = 0 \rightarrow \text{Ímpetu lineal del sistema } \textit{antes} \text{ de la interacción} \\ p' &= p_f = 0 \rightarrow \text{Ímpetu lineal del sistema } \textit{luego} \text{ de la interacción} \end{aligned}$$

El ímpetu lineal se conserva. No es así con la **Energía mecánica** inicialmente nula y que luego **aumenta**.

$$\text{Energía Mecánica Inicial} \quad E_C = 1/2 \cdot M_A \cdot V_A^2 + 1/2 \cdot M_B \cdot V_B^2 = 0 \rightarrow \boxed{E_C = 0}$$

Ambos cuerpos inicialmente en reposo $\rightarrow V_A = V_B = 0$

$$\text{Energía Mecánica Final} \quad E'_C = 1/2 \cdot M_A \cdot (V'_A)^2 + 1/2 \cdot M_B \cdot (V'_B)^2 > 0 \rightarrow$$

$$(V'_A)^2 > 0 \text{ y } (V'_B)^2 > 0 \rightarrow \text{La energía Cinética aumento} \rightarrow \boxed{E'_C > 0}$$

OBSERVACIONES:

A) La suma de todas las fuerzas interiores que actúan en un sistema partículas cumplen el principio de acción – reacción y se anulan entre sí. Como en este caso. Ver Teórico 1. Carilla 2 de 20. Igualdad (I)

B) El aumento de la Energía Mecánica proviene de la disminución de energía química interna de ambos patinadores. Ellos realizan el trabajo necesario para obtener sus desplazamientos con la correspondiente velocidad (energía Cinética). Recordar Teorema Trabajo – Energía. (Teórico 3 de Guía Dinámica 3)

5.- CHOQUES – APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU LINEAL

Los puntos materiales de un sistema de partículas sufren un choque o colisión cuando sobre cada uno de ellos actúan fuerzas interiores al sistema que son relativamente grandes con respecto a las fuerzas exteriores y lo hacen (actúan) durante un intervalo de tiempo relativamente corto en comparación con el tiempo durante el cual se observan los movimientos de los puntos materiales.

Debe aclararse que durante un choque pueden actuar fuerzas externas como en el caso de dos bolas de billar al chocar sobre las cuales también actúan, por ejemplo, fuerzas de rozamiento con la superficie de la mesa y con el aire (de menor intensidad).

Pero en general, las **fuerzas Externas** serán **despreciables** en comparación con las **fuerzas interiores** de la colisión, las cuales suelen conocerse con el nombre de **fuerzas impulsivas** del choque.

Como las fuerzas interiores son mucho mayor que las exteriores admitiremos que:

$$\Sigma F_{EXT} = 0 \rightarrow \text{Suponemos al sistema aislado.}$$

Vemos entonces que en base a este análisis y teniendo en cuenta el Teórico 4 que en Todo choque se va a conservar la cantidad de Movimiento.

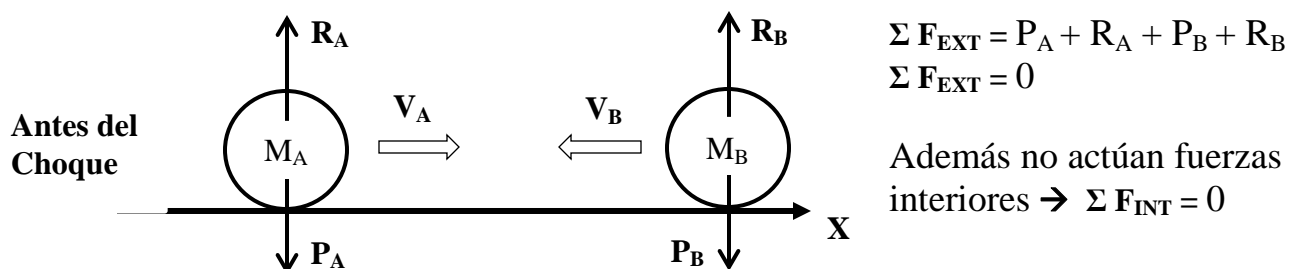
Es decir que antes del choque y después del mismo el sistema tiene el mismo valor de Ímpetu lineal

$$\Delta p = 0 \rightarrow p' - p = 0 \rightarrow p' = p$$

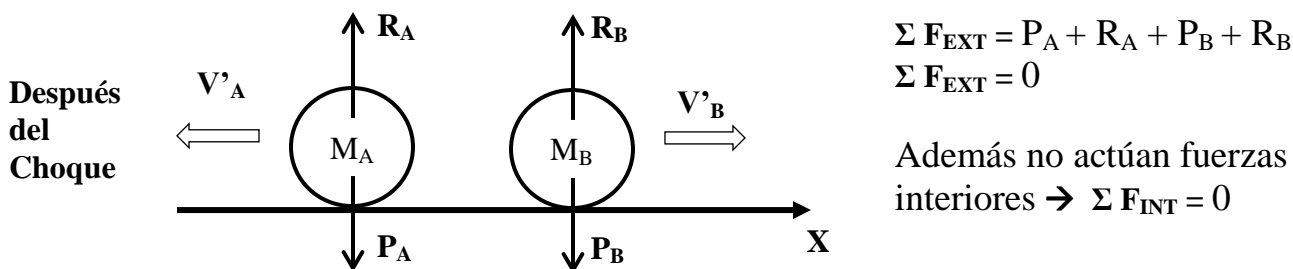
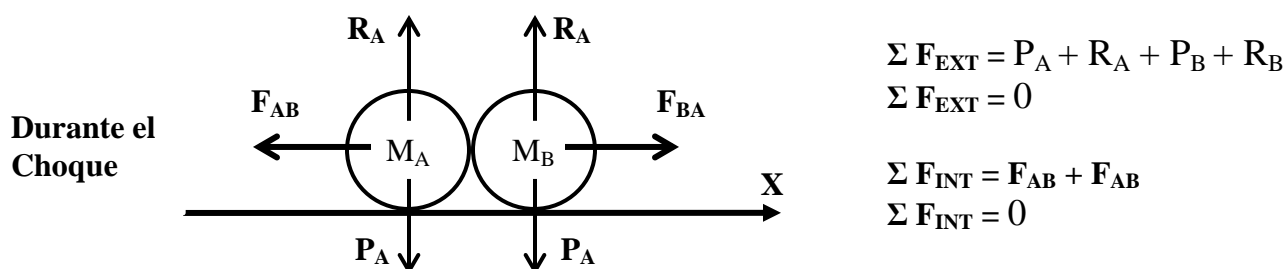
Vamos a analizar y resolver en general choques de dos partículas en una sola dirección. Eje X. En aquellos casos de más direcciones se trabajara con el ímpetu lineal en esas direcciones. (Ejes X-Y-Z).

Esquema y planteo para el caso más simple:

Supongamos dos esferas sobre una superficie sin rozamiento que chocan entre sí. Una se dirige al encuentro de otra. En el planteo se entiende que las velocidades y fuerzas son magnitudes vectoriales.



NUESTRO SISTEMA DE REFERENCIA ES EL Eje X POSITIVO HACIA LA DERECHA \rightarrow
 $V_A > 0$ y $V_B < 0$



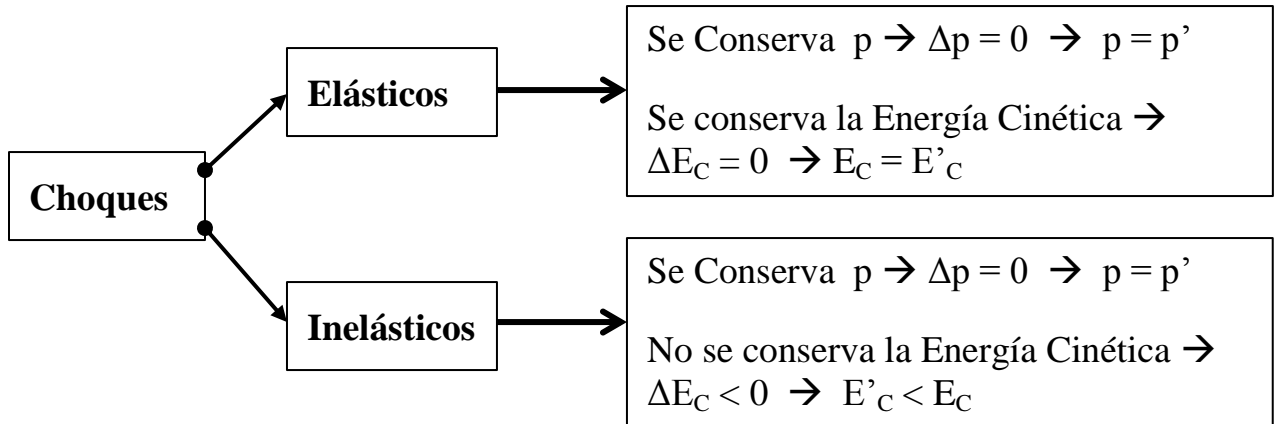
NUESTRO SISTEMA DE REFERENCIA ES EL Eje X POSITIVO HACIA LA DERECHA \rightarrow
 $V'_A < 0$ y $V'_B > 0$

Persecución: Debe aclararse que el Choque puede darse cuando ambos cuerpos van en el mismo sentido. En ese caso un cuerpo alcanzaría al otro. Y las velocidades iniciales tienen el mismo signo.

Aclaración: Luego del choque que analizamos podría ocurrir que ambos cuerpos se dirigen en el mismo sentido y no en sentidos opuestos. La resolución matemática con sus signos nos dará el sentido correcto. Es decir, podría ocurrir en el ejemplo que ambas velocidades fuesen negativas. Es decir que $V'_A < 0$ y $V'_B < 0$. O ambas positivas.

Como se infiere en este análisis el **Ímpetu lineal se conserva para cualquier tipo de Choque**. Pero esto no ocurre con la Energía Cinética.

Ella puede conservarse. Disminuir o incluso aumentar. En base a esto tendremos básicamente dos Tipos de Choques: **Elásticos e Inelásticos**.



Vamos a plantear en base a todo lo visto y para dos partículas A y B moviéndose en una misma dirección (Eje X) las ecuaciones necesarias para resolver los distintos tipos de choques.

CHOQUE ELASTICO:

Se resuelve planteando la conservación del Ímpetu lineal y de la Energía Cinética. Es decir:

$$p = p' \rightarrow M_A \cdot V_A + M_B \cdot V_B = M_A \cdot V'_A + M_B \cdot V'_B \quad (1)$$

$$E_C = E'_C \rightarrow \frac{1}{2} \cdot M_A \cdot V_A^2 + \frac{1}{2} \cdot M_B \cdot V_B^2 = \frac{1}{2} \cdot M_A \cdot V'^2_A + \frac{1}{2} \cdot M_B \cdot V'^2_B \quad (2)$$

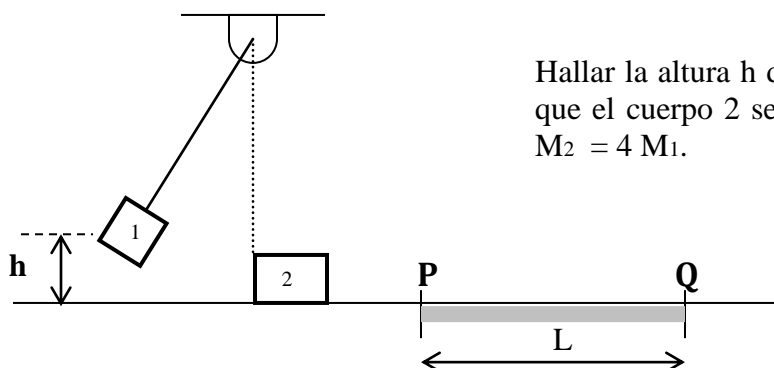
Combinando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$(V_A - V_B) = -(V'_A - V'_B) \quad (3)$$

Los problemas de Choque elástico los podemos resolver aplicando la ecuación (1) y (2). O usando la (1) y (3). Esta última combinación es más rápida y clara.

Problema Aplicación de un Choque Elástico:

Un pequeño bloque 1 está sujeto a una barra articulada de masa despreciable. Se lo eleva hasta una altura h y luego se lo libera. Cuando pasa por la vertical, choca elásticamente con otro bloque 2 que inicialmente esta en reposo sobre una superficie horizontal perfectamente lisa. El tramo PQ de longitud $L = 3 \text{ m}$ es rugoso y tiene un coeficiente de rozamiento $\mu_c = 0,2$.



Hallar la altura h desde la cual debe caer el cuerpo 1 para que el cuerpo 2 se detenga en la mitad del recorrido L si $M_2 = 4 M_1$.

Resolución:

Planteamos el Teorema Trabajo – Energía para el cuerpo 2 luego del choque hasta detenerse:

$WF = \Delta E_C \rightarrow WF = \text{Trabajo de Todas las Fuerzas (conservativas y no conservativas)}$

$\Delta E_C = \text{Variación de Energía Cinética} = E_{cf} - E_{ci}$

Solo actúa la fuerza de rozamiento (No Conservativa) en el recorrido $\Delta X = L/2$. Su trabajo es negativo por ser una fuerza opuesta al desplazamiento ΔX .

$$-\mu_c M_2 g L/2 = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot (V_{F2})^2 - \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot (V_{I2})^2 = 0 - \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot (V_{I2})^2$$

$V_{F2} = 0 = \text{velocidad final. Al detenerse. } V_{I2} = V_2' = \text{Velocidad luego del choque con } M_1$

$$\mu_c \cdot g \cdot L/2 = \frac{1}{2} \cdot (V_{I2})^2 \rightarrow 0,2 \cdot 10 \cdot 1,5 = \frac{1}{2} \cdot (V_{I2})^2 \rightarrow 3 = \frac{1}{2} \cdot (V_{I2})^2 \rightarrow (V_{I2})^2 = 6 \rightarrow$$

$$V_{I2} = V_2' = 2,45 \text{ (m/s)}$$

Recordar $\rightarrow V_{F2} = 0 = \text{Velocidad Final del bloque 2 (detenido). Al recorrer } \Delta X = L/2.$

$V_2' = V_{I2} = \text{Velocidad Inicial del bloque 2 (luego de chocar con el 1).}$

Choque Elástico entre Bloques 1 y 2:

Como en todo choque se conserva el Ímpetu lineal p:

$$M_1 \cdot V_1 + M_2 \cdot V_2 = M_1 \cdot V'_1 + M_2 \cdot V'_2$$

V_1 y V_2 = Velocidad de los bloques 1 y 2 antes del choque.

V'_1 y V'_2 = Velocidad de los bloques 1 y 2 luego del choque. (**Recordar $V'_2 = V_{12}$**)

Reemplazando $V_2 = 0$ y $M_2 = 4 M_1$:

$$M_1 \cdot V_1 + 0 = M_1 \cdot V'_1 + 4 M_1 \cdot V'_2$$

$$V_1 = V'_1 + 4 \cdot V'_2 \quad (1)$$

Aplicamos la tercera ecuación válida solo para Choques elásticos:

$$(V_1 - V_2) = -(V'_1 - V'_2)$$

Reemplazando valores:

$$(V_1 - 0) = -(V'_1 - V'_2) \rightarrow V_1 = -V'_1 + V'_2 \quad (2)$$

Igualamos:

$$(1) = (2) \rightarrow V'_1 + 4 \cdot V'_2 = -V'_1 + V'_2 \rightarrow 2 \cdot V'_1 = -3 \cdot V'_2 \rightarrow V'_1 = -3/2 \cdot V'_2$$

Reemplazando en (1):

$$V_1 = -3/2 \cdot V'_2 + 4 \cdot V'_2 = 5/2 \cdot V'_2 = 5/2 \cdot 2,45 \rightarrow$$

$$V_1 = \mathbf{6,125 \text{ (m/s)}}$$
 = Velocidad del cuerpo 1 antes de Chocar con el 2.

En la caída del Cuerpo 1 hasta chocar con el Cuerpo 2 NO actúan fuerzas No Conservativas (Rozamiento sólido con el Piso. Rozamiento fluido con el aire. Fuerzas externas. Etc). Planteando el Teorema Trabajo – Energía Generalizado:

$$W_{FNC} = \Delta E_m \rightarrow \text{Dónde: } W_{FNC} = 0 = \text{Trabajo de las fuerzas No Conservativas}$$

$$\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi}$$

$$\text{Por lo tanto } \rightarrow 0 = E_{mf} - E_{mi} \rightarrow E_{mi} = E_{mf} \rightarrow M_1 \cdot g \cdot h = 1/2 \cdot M_1 \cdot (V_1)^2$$

$$h = (1/2 \cdot g) (V_1)^2 \rightarrow h = (1/20) (6,125)^2 \rightarrow \boxed{h = 1,88 \text{ (m)}}$$

CHOQUE INELASTICO:

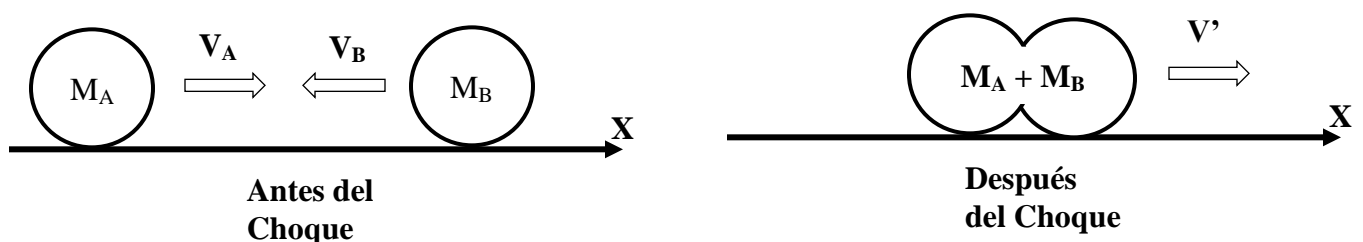
Se resuelve planteando la conservación del Ímpetu lineal. Es decir:

$$p = p' \rightarrow \boxed{M_A \cdot V_A + M_B \cdot V_B = M_A \cdot V'_A + M_B \cdot V'_B} \quad (1)$$

En los problemas se dará de ser necesario algún dato adicional. Pero al igual que en el choque elástico plantear siempre la constancia del Ímpetu lineal P. Además se cumple que $E_C > E'_c$. Se pierde energía.

CHOQUE PLASTICO:

Dentro de los choques Inelásticos tenemos el caso especial de los Choques **Plásticos**. En ellos los cuerpos luego del choque quedan juntos (adheridos, pegados).



Se resuelve planteando la conservación del Ímpetu lineal. Es decir:

$$p = p' \rightarrow \boxed{M_A \cdot V_A + M_B \cdot V_B = (M_A + M_B) V'} \quad (1)$$

En los problemas se dará de ser necesario algún dato adicional. Pero al igual que en el choque elástico e inelástico plantear siempre la constancia del Ímpetu lineal P. Solo sabemos que $E_C > E'_c$.

FORMULA GENERAL PARA CHOQUES: (Coeficiente de restitución).

La fórmula planteada por Newton para choques elásticos e inelásticos establece:

$$\boxed{(V'_A - V'_B) = -\epsilon (V_A - V_B)}$$

Donde $(V'_A - V'_B)$ = Velocidad relativa entre las partículas o cuerpos **después** del choque

$(V_A - V_B)$ = Velocidad relativa entre las partículas o cuerpos **antes** del choque

ϵ = **Coeficiente de restitución.**

Además $\rightarrow \mathcal{E} = 1$ Para choques Elásticos. Ver Formula (3) en carilla 9 de 14.

$0 < \mathcal{E} < 1$ Para choques Inelásticos.

$\mathcal{E} = 0$ Para choques Plásticos

“Al ser $\mathcal{E} = 1$ en los choques elásticos se cumple que la velocidad relativa después del choque es igual a la velocidad relativa antes del choque cambiada de signo”

Y en los choques plásticos al ser $\mathcal{E} = 0$ vemos que $(V'_A - V'_B) = 0 \rightarrow V'_A = V'_B$

CHOQUE EXPLOSIVO:

Es un caso especial que puede analizarse como el “opuesto” al Choque plástico. En este último caso dos o más partículas terminan “juntándose” luego del choque-

En el choque explosivo una partícula (cuerpo) se separa en dos o más luego de una “Explosión” o “interacción interna” (actúan fuerzas interiores).

En general trabajaremos con una partícula que se separa en otras dos y de manera unidireccional (Todo el proceso en la dirección del Eje X). Por supuesto que existen resoluciones en donde se trabaja también en 2 o 3 direcciones. Incluso en algunos casos con el cuerpo inicialmente en Movimiento.

Choques explosivos pueden ser: La explosión de una bomba. Dos patinadores empujándose. Dos carritos entre los cuales se introduce un resorte y se lo comprime para luego dejar expandir al resorte comprimido y producir con ello el “disparo” de ambos carritos. Etc.

En este tipo de Choque (el único caso) la **Energía Cinética aumenta**. La **Energía interna inicial** del sistema **se transforma** en energía de movimiento (**Cinética**).

Al igual que **en todo Choque**, en este caso también, **se conserva el Ímpetu lineal**

Ejemplo 1: Dos patinadores A y B en reposo están ubicados sobre una superficie de hielo ideal (sin rozamiento). Despreciamos además el rozamiento con el aire.

Ambos patinadores se empujan.

Sabiendo que $M_A = 84$ (Kg) y $P_B = 680$ (N), calcular las velocidades de ambos patinadores luego de empujarse si la energía cinética total después del choque es 363 (J)

Resolución: Ver en Teórico 4, carilla 7 de 20 el **Ejemplo** (dos patinadores)

Como se trata de un choque se conserva la cantidad de movimiento

$$p = p' \rightarrow 0 = p' \text{ pues las velocidades iniciales son nulas } V_A = V_B = 0$$

$$\text{Además } M_A = 84 \text{ (Kg) y } P_B = M_B \cdot g \rightarrow 680 = M_B \cdot 10 \rightarrow M_B = 68 \text{ (kg)}$$

$$0 = M_A \cdot V'_A + M_B \cdot V'_B \rightarrow$$

$$0 = 84 \cdot V'_A + 68 \cdot V'_B \quad (1)$$

$$\text{Además } E'_c = 1/2 \cdot M_A \cdot V'^2_A + 1/2 \cdot M_B \cdot V'^2_B = 363 \rightarrow$$

$$42 \cdot V'^2_A + 34 \cdot V'^2_B = 363 \quad (2)$$

$$\text{De (1)} \rightarrow 0 = 84 \cdot V'_A + 68 \cdot V'_B \rightarrow -(84/68) \cdot V'_A = V'_B \rightarrow -1,235 \cdot V'_A = V'_B \rightarrow$$

Elevamos al cuadrado y obtenemos:

$$1,526 \cdot V'^2_A = V'^2_B$$

Reemplazamos en (2):

$$42 \cdot V'^2_A + 34 \cdot (1,526 \cdot V'^2_A) = 363 \rightarrow 93,884 \cdot V'^2_A = 363 \rightarrow$$

$$V'^2_A = 3,866 \rightarrow V'_A = \pm 1,97 \text{ (m/s)} \rightarrow$$

Mirando el dibujo del Ejemplo en el Teórico 4 vemos que A debe dirigirse hacia la izquierda \rightarrow

$$V'_A = -1,97 \text{ (m/s)} = -7,08 \text{ (Km/h)}$$

$$\text{De (1) obtuvimos: } -1,235 \cdot V'_A = V'_B \rightarrow$$

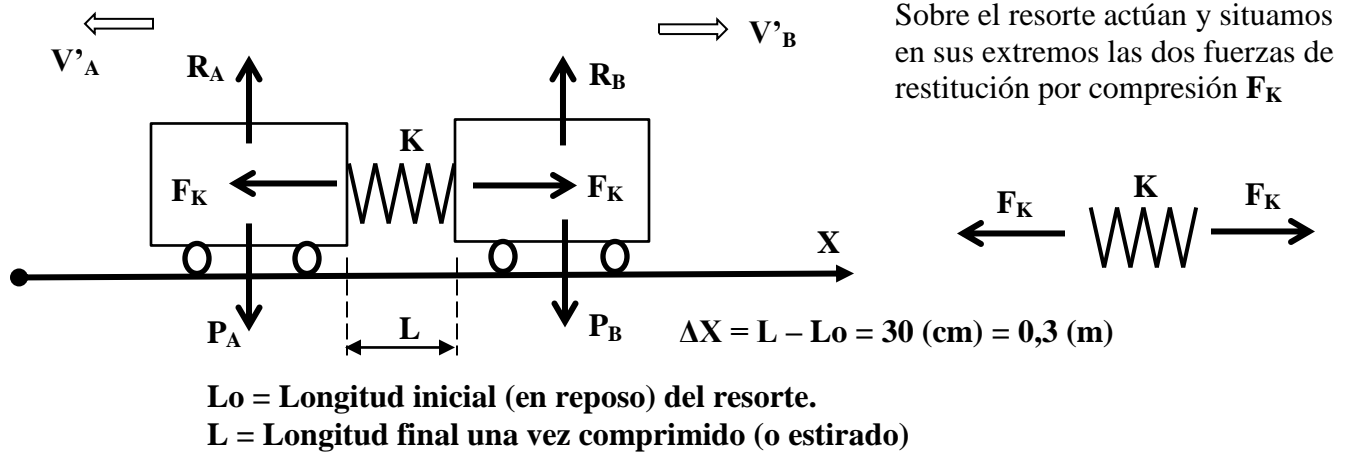
$$-1,235 \cdot (-1,97) = V'_B \rightarrow V'_B = +2,43 \text{ (m/s)} = +8,74 \text{ (Km/h)}$$

Ejemplo 2: Dos carritos A y B cuyas masas son respectivamente 4 (Kg) y 6 (Kg) están en reposo sobre un piso horizontal sin rozamiento. Ambos trabados y con un resorte de constante $K = 120$ (N/m) comprimido 30 (cm) entre ambos. Se saca la traba y el resorte se estira empujando ambos carritos. Calcule las velocidades de ambos al separarse.

Resolución:

Como se trata de un choque se conserva la cantidad de movimiento

$$p = p' \rightarrow 0 = p' \text{ pues las velocidades iniciales son nulas } V_A = V_B = 0$$



Observar que las velocidades V'_A y V'_B de ambos carritos indicadas en el dibujo son luego de caer el resorte. Es decir cuando se liberan los carritos que estaban trabados. Son los valores que debemos calcular. Como vemos $V'_A < 0$ y $V'_B > 0$

Recordemos: $p = p' \rightarrow p' = 0 = M_A \cdot V'_A + M_B \cdot V'_B \rightarrow 0 = 4 \cdot V'_A + 6 \cdot V'_B$

$$V'_A = -1,5 V'_B \quad (1)$$

La energía potencial elástica del resorte se transfiere a los carritos como energía cinética:

$$U_k = E'_{cA} + E'_{cB} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta X^2 = \frac{1}{2} \cdot M_A \cdot V'^2_A + \frac{1}{2} \cdot M_B \cdot V'^2_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot (0,3)^2 = 5,4 = 2 \cdot V'^2_A + 3 \cdot V'^2_B \quad (2)$$

Operamos matemáticamente y Reemplazamos (1) en (2):

$$5,4 = 2 \cdot (2,25 \cdot V'^2_B) + 3 \cdot V'^2_B = 7,5 V'^2_B$$

$$0,72 = V'^2_B \rightarrow \pm 0,85 \text{ (m/s)} = V'_B$$

Pero vemos que $V'_B > 0$ Positiva porque se dirige hacia la derecha. El sistema de referencia Eje X me indica positivo. Por lo tanto:

$$V'_B = +0,85 \text{ (m/s)}$$

$$\text{De (1)} \rightarrow V'_A = -1,27 \text{ (m/s)}$$

6.- SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS:

Cuando La fuerza externa resultante o fuerza Neta que actúa sobre un sistema es Nula, la velocidad del Centro de masas CM es constante.

Es conveniente a veces cuando ocurre lo antedicho, elegir un sistema de coordenadas con origen en el CM. A este sistema lo llamamos Sistema CM y como su velocidad es constante (en modulo, dirección y sentido por ser la velocidad una magnitud vectorial) su movimiento será un MRU.

Dicho de otra manera, con respecto al sistema de coordenadas original fijo a la Tierra (Sistema absoluto o Laboratorio), este sistema de coordenadas se mueve con una velocidad constante V_{CM} .

Como analogía podríamos imaginar un tren que en tramo recto de vía se mueve a velocidad constante. Ello implica que la resultante de todas las fuerzas externas es nula. Si no fuese así su velocidad cambiaría. Por lo tanto el tren y su CM se mueven con velocidad $V_{CM} = \text{constante}$.

Si fijamos imaginariamente un sistema de referencia en su CM podríamos analizar sin mayores inconvenientes el movimiento de objetos dentro del tren. Es algo que podemos hacer como pasajeros cuando viajamos en un tren. O en un avión a velocidad constante. No en el despegue o aterrizaje.

Vimos que la cantidad de movimiento de un sistema respecto a Tierra es:

$$P_{\text{Neto}} = \sum p_i = M \cdot V_{CM} = p_{CM} \quad (\text{Ver Teórico 4}).$$

Con respecto al Sistema CM tendremos que:

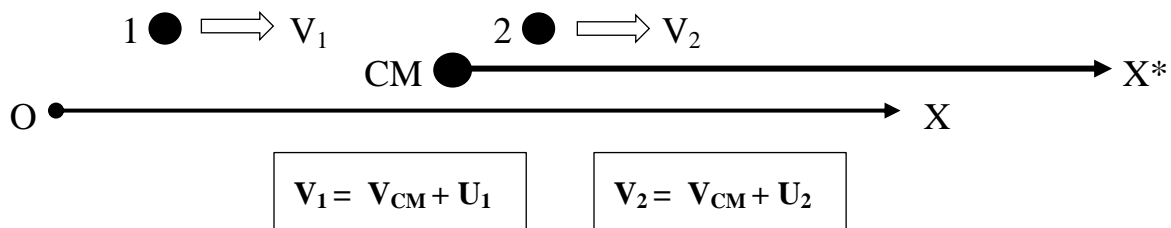
$$U^*_{CM} = 0 = \text{Velocidad del CM respecto al sistema CM}$$

Evidentemente si llamamos $p^*_{CM} = \text{Ímpetu lineal con respecto al Sistema CM}$, tendremos:

$$p^*_{CM} = M \cdot U^*_{CM} = 0$$

Por esto es que también a este sistema se lo llama **Sistema de referencia del ímpetu lineal nulo**.

Si tenemos dos partículas 1 y 2, sus velocidades con respecto al sistema de referencia absoluto O (fijo a Tierra) serán V_1 y V_2



U_1 = Velocidad de la Partícula 1 respecto del Sistema centro de Masa.

U_2 = Velocidad de la Partícula 2 respecto del Sistema centro de Masa.

Si las partículas 1 y 2 están en un sistema cuyo CM se mueve con velocidad $V_{CM} = 50$ (m/s) y la partícula 2 se mueve respecto al CM a una velocidad $U_2 = 10$ (m/s) es evidente que la velocidad V_2 de esta partícula respecto a Tierra será:

$$V_2 = V_{CM} + U_2 = 50 \text{ (m/s)} + 10 \text{ (m/s)} = 60 \text{ (m/s)}$$

Sería análogo a pensar en dos pasajeros en un tren que se mueven con respecto al tren con Velocidades U_1 y U_2 y con respecto a una estación fija a la Tierra sus velocidades serían V_1 y V_2 . Mientras que la velocidad del tren es V_{CM} respecto a la Tierra.

Además si el sistema consta de estas dos partículas la velocidad del CM es de acuerdo a lo visto en el Teórico 3, carilla 6 de 20

$$V_{CM} = [M_1 \cdot V_1 + M_2 \cdot V_2] / (M_1 + M_2)$$

Nota. Si por ejemplo $M_1 = 10$ (Kg), $M_2 = 20$ (Kg) podemos calcular con la expresión anterior el valor de la velocidad respecto a Tierra de la partícula 1 $\rightarrow V_1 = 30$ (m/s). Y con este valor la velocidad respecto al sistema CM de la partícula 1 nos da: $U_1 = -30$ (m/s).

En el sistema CM como ya vimos, el ímpetu lineal es cero $\rightarrow p_{CM}^* = M \cdot U_{CM}^* = 0 \rightarrow$

$$m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 + m_3 \cdot u_3 + m_4 \cdot u_4 + \dots = 0 \rightarrow$$

$$\Sigma m_i \cdot u_i = 0$$

$U_i = u_i$ = Velocidad de c/u de las partículas del sistema.

7.- ENERGIA CINETICA (De un Sistema de Partículas).

$$\text{Si } \Sigma F_{EXT} = 0 \rightarrow p_{CM} = \text{Constante}$$

Esto no implica que la energía mecánica total del sistema permanezca constante. Puede variar.

Como hemos visto en el Teórico 1 las fuerzas internas se presentan de a pares. Cumplen el principio de Acción – Reacción, por lo tanto no pueden alterar la cantidad de movimiento total. Pueden ser **no conservativas** y por lo tanto modificar la energía mecánica total del sistema. Esta energía puede aumentar o disminuir.

$$\text{Si Fuerza interior } F_i = \text{Fuerza No conservativa } F_{NC} \rightarrow E_m \neq 0$$

La energía Cinética de un sistema de partículas puede escribirse como la suma de dos términos:

1° \rightarrow La energía cinética asociada con el movimiento del CM \rightarrow

$$1/2 \cdot M \cdot V_{CM}^2 \quad (1) \quad \text{Con } M = \Sigma m_i$$

2° \rightarrow La energía cinética asociada con el movimiento de las partículas del sistema respecto del CM

$$\Sigma 1/2 \cdot M_i \cdot U_i^2 \quad (2) \quad \text{Recordemos que } U_i \text{ es la velocidad de cada partícula relativa al centro de masas.}$$

$$V_i = V_{CM} + U_i$$

Entonces la **Energía cinética** de un **sistema de partículas** puede escribirse como la suma de (1) + (2):

$$E_C = 1/2 \cdot M \cdot V_{CM}^2 + \Sigma 1/2 \cdot M_i \cdot U_i^2 \quad (3)$$

También se escribe:

$$\Sigma 1/2 \cdot M_i \cdot U_i^2 = E_{C_{rel}}$$

$E_{c_{rel}}$ = Energía cinética del movimiento relativa al centro de masas, es decir, es la energía cinética con referencia al sistema centro de Masas.

Esta energía es la misma en cualquier sistema de referencia pues depende solo de las velocidades de las partículas respecto del CM.

La energía asociada con el movimiento del centro de masas, expresión (1), depende del sistema de referencia. En el sistema centro de masas vale cero.

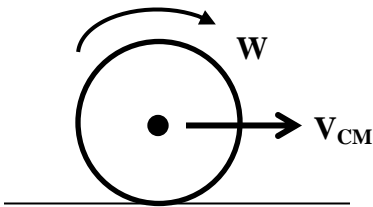
En este caso, toda la energía cinética es la energía del movimiento relativo al CM.

Ejemplo de Aplicación 1:

Analicemos el movimiento de traslación y rotación de una pelota.

Este cuerpo idealmente esférico y rígido (no se deforma) constituye un sistema de infinitas partículas que analizaremos más detalladamente en la próxima Guía pero que en base a lo visto en este tema ya estamos en condiciones de analizar su energía cinética.

Si miramos la formula (3) vemos que la energía cinética total la podemos calcular sumando los dos términos de la misma.



La pelota se traslada. Su traslación está representada por la traslación de su CM con Velocidad V_{CM} .

La pelota o mejor dicho todos los puntos materiales de la misma rotan con velocidad angular W alrededor del CM.

Tendremos entonces en base a la formula (3):

Energía Cinética de traslación del CM $\rightarrow 1/2 \cdot M \cdot V_{CM}^2$

Energía Cinética por rotación de las partículas alrededor del CM $\rightarrow \sum 1/2 \cdot M_i \cdot U_i^2$

Este último término se deduce y usa en el próximo Tema: Cuerpos Rígidos.

Ejemplo de Aplicación 2:

Explosión de una granada inicialmente en reposo. No actúan fuerzas exteriores. Solo actúan fuerzas internas muy intensas generadas por la energía química interna del explosivo. Por lo tanto se conserva la cantidad de movimiento de este cuerpo que constituye un sistema de infinitas partículas (Teórico 4. Carilla 6 de 20). La cantidad de movimiento del sistema y por lo tanto del centro de masas es la misma antes que después de la explosión.

$$P_{CM} = p'_{CM} \rightarrow M \cdot V_{CM} = M \cdot V'_{CM} \rightarrow V_{CM} = V'_{CM}$$

Antes de la explosión la granada estaba en reposo $\rightarrow V_{CM} = 0 = V'_{CM}$

Al no existir velocidad del CM luego de la explosión ello me indica que el CM permanece en reposo. Es decir en el lugar que estaba inicialmente la granada. Y ahí sigue estando. Recordar que el CM es una concepción teórica por que el sistema o cuerpo actúa como si allí estuviese concentrada toda la masa. Incluso, como ya se dijo, su ubicación puede estar fuera del sistema.

Es decir que la Energía cinética de traslación del CM es nula antes y después de la explosión.

$$\text{Energía Cinética de traslación del CM} \rightarrow 1/2 \cdot M \cdot V_{CM}^2 = 1/2 \cdot M \cdot V'^2_{CM} = 0$$

Solo nos queda el segundo término de la ecuación (3):

$$\text{Antes de la Explosión} \rightarrow E_{c_{rel}} = \sum 1/2 \cdot M_i \cdot U_i^2 = 0 \quad (\text{Reposo})$$

$$\text{Después de la Explosión} \rightarrow E'_{c_{rel}} = \sum 1/2 \cdot M_i \cdot U'^2_i \neq 0 \rightarrow$$

Los fragmentos de la granada se dispersan. Ello implica una Energía cinética final. Es decir:

$$\begin{array}{l} E_c = 0 \rightarrow \text{Antes de la explosión} \\ E_c > 0 \rightarrow \text{Después de la explosión} \end{array}$$



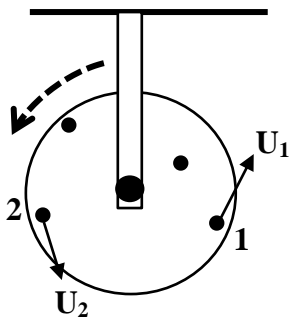
$$\Delta E_c > 0$$

Inicialmente la Energía cinética es nula.

Existe o se genera una Energía Cinética final a expensas de la energía química interna del explosivo

Ejemplo de Aplicación 3:

Analizamos ahora la aplicación de la formula (3) a una **Polea girando**.



El CM de la polea no se traslada. El primer término de la ecuación (3) que representa la energía cinética de traslación del CM es nulo.

Energía Cinética de traslación del CM $\rightarrow \frac{1}{2} M \cdot V_{CM}^2 = 0$

En el dibujo U_1 y U_2 representan las velocidades de las partículas 1 y 2 respecto del CM.

Energía Cinética por rotación de las partículas alrededor del CM $\rightarrow E_{c'_{rel}} = \sum \frac{1}{2} M_i \cdot U_i'^2 \neq 0$

Evidentemente las partículas que giran alrededor del CM son infinitas pues la polea, como todo cuerpo sólido, constituye un sistema de infinitas partículas. Aquí solo dibujamos 4 e indicamos la velocidad en solo dos de ellas.

8.- IMPULSO Y TRABAJO (De un Sistema de Partículas)

Teorema Impulso – Ímpetu. Para un sistema de partículas se verifica:

$$\sum I_{EXT} + \sum I_{INT} = \sum (\Delta p_i) = \Delta (\sum p_i)$$

$$\sum I_{EXT} + \sum I_{INT} = \Delta p_{CM}$$

$$[N.s] = [Kg.m/s]$$

“La suma de los Impulsos de las fuerzas interiores y exteriores que actúan sobre un sistema es igual a la variación del Ímpetu lineal del Centro de Masas del Sistema”.

Teorema Trabajo – Energía. En este caso tendremos:

$$\sum W_{EXT} + \sum W_{INT} = \Delta \sum E_{Ci}$$

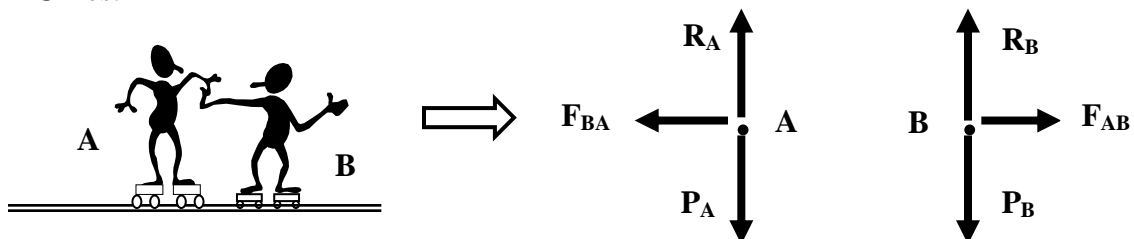
$$[J] = [N.m = \text{Joule}]$$

“La suma de los Trabajos de las fuerzas interiores y exteriores que actúan sobre un sistema es igual a la variación de la suma de las Energías Cinéticas de las partículas del Sistema”.

Para aclarar un poco estos conceptos los analizaremos en el caso de los dos patinadores que se empujan y dado en Teórico 4, carilla 7 de 20.

Ejemplo: Dos patinadores A y B en reposo sobre una pista de hielo ideal (sin rozamiento) interactúan entre si impulsándose mediante sus brazos.

El DCL es:



F_{AB} = Fuerza que el patinador A ejerce sobre B

F_{BA} = Fuerza que el patinador B ejerce sobre A

Aplicamos el Teorema Impulso - Ímpetu:

$\sum I_{EXT}$ = Suma de los impulsos de las fuerzas exteriores

$$\sum I_{EXT} = R_A \Delta T + P_A \Delta T + R_B \Delta T + P_B \Delta T = 0$$

$$R_A \Delta T + P_A \Delta T = 0 \rightarrow \text{Suma de Impulsos nulos por acción – Reacción: } R_A = -P_A$$

$$\text{De la misma manera } R_B \Delta T + P_B \Delta T = 0 \text{ y } R_C \Delta T + P_C \Delta T = 0$$

$$\sum I_{EXT} = 0$$

$\sum I_{INT}$ = Suma de los impulsos de las fuerzas interiores

$$\sum I_{INT} = F_{BA} \Delta T + F_{AB} \Delta T = (F_{BA} + F_{AB}) \Delta T = 0 \quad \text{Por que } F_{BA} = -F_{AB}$$

$$\Sigma I_{INT} = 0$$

Vemos que $\Sigma I_{EXT} + \Sigma I_{INT} = 0 \rightarrow \Delta p_{CM} = 0 \rightarrow M \cdot (V_{CM}' - V_{CM}) = 0$ con $M = M_A + M_B$
Es decir:

$$V_{CM}' = V_{CM}$$

La velocidad del CM antes de impulsarse V_{CM} es la misma luego del impulso V_{CM}'
Y como inicialmente los patinadores estaban en reposo

$V_{CM}' = V_{CM} = 0 \rightarrow$ El CM no se mueve. Permanece en reposo.

Aplicamos el Teorema Trabajo - Energía:

ΣW_{EXT} = Suma de los Trabajos de las fuerzas exteriores

$\Sigma W_{EXT} = W_{PA} + W_{RA} + W_{PB} + W_{RB} = 0$ (No hay desplazamientos en la dirección vertical)

$$\Sigma W_{EXT} = 0 \rightarrow \text{Trabajo de todas las fuerzas Exteriores Nulo.}$$

ΣW_{INT} = Suma de los Trabajos de las fuerzas interiores

$\Sigma W_{INT} = W_{F_{BA}} + W_{F_{AB}} = F_{BA} \cdot \Delta X_A + F_{AB} \cdot \Delta X_B > 0 \rightarrow$ Suma de dos trabajos positivos porque el desplazamiento tiene el mismo sentido de la Fuerza en ambos casos \rightarrow Resultado Positivo.

$$\Sigma W_{INT} > 0 \rightarrow \text{Trabajo de todas las fuerzas Interiores Positivo.}$$

Además para ambos cuerpos o partículas: $\Delta \Sigma E_{Ci} = E_{CF} - E_{CI}$

$\Sigma E_{CF} = 1/2 \cdot M_A \cdot V_A'^2 + 1/2 \cdot M_B \cdot V_B'^2 > 0$

$\Sigma E_{CI} = 0$ (inicialmente en reposo)

Por lo tanto la diferencia de la sumatoria de energías cinéticas finales e iniciales es positiva.

Aumenta la energía

$$\Delta \Sigma E_{Ci} > 0 \rightarrow \text{Diferencia o Variación de energías cinéticas Positivo.}$$

$$\Sigma W_{EXT} + \Sigma W_{INT} = \Delta \Sigma E_{Ci} \rightarrow 0 + \Sigma W_{INT} = \Delta \Sigma E_{Ci} \rightarrow$$

$$\Sigma W_{INT} = \Delta \Sigma E_{Ci}$$

“El trabajo de todas las fuerzas interiores del sistema, es decir el trabajo fisiológico de ambos patinadores en este caso, genera una variación (aumento) de la energía cinética del sistema (los dos patinadores). Ambos pasan del reposo al movimiento”.

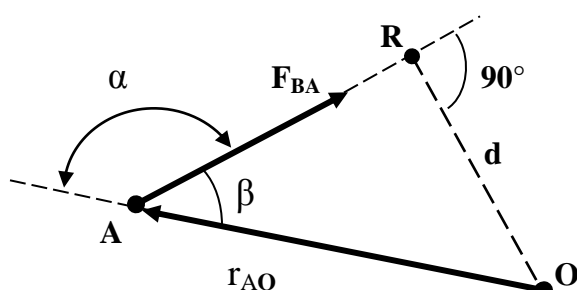
9.- MOMENTO DE UNA FUERZA

Los sistemas de Partículas y los cuerpos rígidos que también son sistemas con infinitas partículas pueden no solo trasladarse sino también rotar.

Como ya se vio o adelante en el Teórico 2 los momentos son las magnitudes vectoriales que pueden generar rotaciones y ellas pueden ser en un sentido u otro. Por ejemplo, la rotación de la rueda de un auto puede ser en un sentido u otro. Y según el sentido de rotación el auto “avanza” o “retrocede” (marcha atrás). Lo mismo vale para una polea que pertenece al sistema de accionamiento de un ascensor. Según el giro de la misma el ascensor asciende o desciende.

Entonces para analizar el Equilibrio o el Movimiento de una partícula o un sistema de ellas (Rígido incluido) debemos tener en cuenta los momentos de las fuerzas.

Los momentos se toman respecto de un punto.

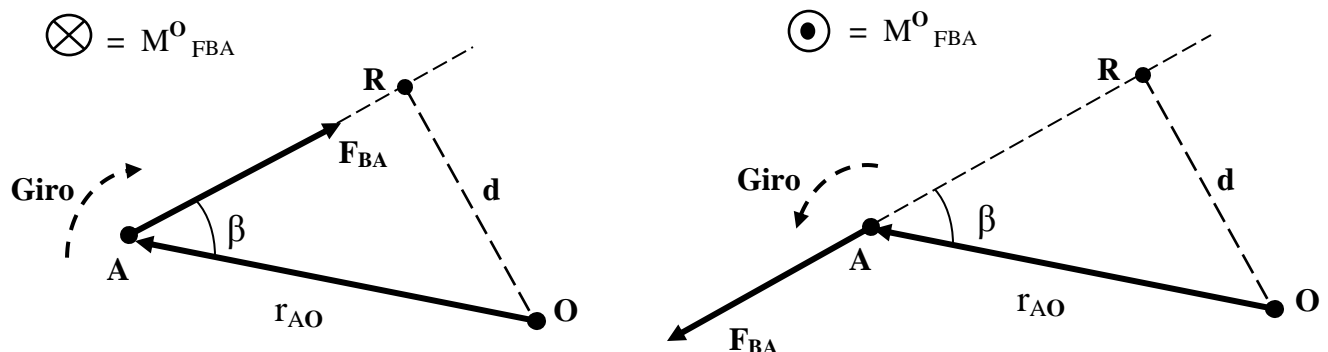


En el dibujo tenemos una partícula A de un sistema sobre la que actúa una fuerza F_{BA} por interacción con otra partícula B del sistema. El Momento de esa fuerza respecto a un punto cualquiera O es el producto vectorial del Vector posición por el vector fuerza. Es decir

$$M_{FBA}^O = r_{AO} \times F_{BA}.$$

El resultado es otro vector perpendicular al plano del dibujo determinado por los vectores r_{AO} y F_{BA}

Si “imaginamos” que el vector posición es una varilla que puede girar libremente alrededor del extremo o pivote O, al aplicarle la fuerza F_{BA} en el otro extremo libre (A), la varilla gira en el sentido horario. En ese caso el vector representativo es perpendicular al plano de dibujo y entrante al mismo. Se representa por una cruz X. Si la fuerza F_{BA} tuviese sentido contrario, la varilla gira en sentido anti horario alrededor de O y el vector que representa al Momento que genera ese giro o rotación es también perpendicular al plano del dibujo pero saliente del mismo. Se representa mediante un punto



Para determinar el sentido del vector Momento siempre perpendicular al plano definido por los dos vectores del producto se puede aplicar la “regla de la mano derecha”. Capítulo 8. Página 255 del libro Física. Tomo 1 del autor “Tipler”. O Capitulo 3. Página 49 de libro Física 1 de los autores “Resnick-Halliday-Krane”

Por ser una materia universitaria no debe dejar de tener en cuenta el alumno que tanto las fuerzas como los momentos son magnitudes vectoriales donde el sentido es fundamental tenerlo en cuenta.

En el caso de los momentos el sentido de giro es lo que importa y analizamos.

Sin embargo en Física 1 solo utilizaremos el modulo del Momento de las fuerzas. En materias más avanzadas de la carrera y según las orientaciones analizaran y resolverán situaciones donde es necesario tener en cuenta las direcciones y sentidos.

En base a lo anterior podemos establecer las condiciones necesarias para el equilibrio de cualquier cuerpo rígido o sistema de partículas.

Si de nuevo “imaginamos” que el vector posición es una varilla que puede girar alrededor del pivote o extremo O y además ese extremo puede trasladarse inferimos que la condición de equilibrio estático de cualquier cuerpo rígido o sistema de partículas serán dos.

Condiciones de EQUILIBRIO ESTATICO del Sistema de partículas y cuerpo Rígido.

1º) La fuerza resultante externa aplicada al sistema de partículas (incluido cuerpo rígido) debe ser Nula. Ello implica que no se traslada. Está en equilibrio para la traslación

$$\Sigma F_{EXT} = 0$$

2º) El momento resultante externo respecto a cualquier punto O debe ser Nulo. Ello implica que no rota. Está en equilibrio para la rotación.

$$\Sigma M^O_{EXT} = 0$$

Recordemos el Teórico 1 donde se dedujo que $\Sigma F_{INT} = 0 \rightarrow$ Las fuerzas interiores en todo sistema se equilibran entre sí. No pueden generar desplazamientos. Tampoco rotaciones por que el giro generado por una fuerza interna será igual y opuesto al giro generado por la fuerza interior que la equilibra. Es decir:

$$\Sigma F_{INT} = 0$$

$$\Sigma M^O_{INT} = 0$$

Modulo del Momento – Brazo de palanca.

Volvamos a analizar el primer dibujo de este Teórico.

El modulo del momento es el módulo de un producto vectorial de dos vectores. Por lo tanto es el producto de los módulos de los vectores posición y fuerza por el seno del ángulo que forman ambos vectores. En este caso ángulo α (alfa)

Modulo del Momento $\rightarrow M^O_{FBA} = r_{AO} \cdot F_{BA} \cdot \text{Sen } \alpha$. Pero $(\alpha + \beta) = 180^\circ \rightarrow \text{Sen } \alpha = \text{Sen } \beta \rightarrow$
 $M^O_{FBA} = r_{AO} \cdot F_{BA} \cdot \text{Sen } \beta = F_{BA} \cdot r_{AO} \cdot \text{Sen } \beta$

Si miramos la figura en el Triángulo rectángulo OAR con ángulo de 90° en R, la hipotenusa r_{AO} al ser multiplicada por el seno del ángulo β me da la distancia $d = RO$ que se suele llamar, en el cálculo de los momentos de las fuerzas, **brazo de palanca**.

Tenemos entonces:

Brazo de palanca $d = r_{AO} \cdot \text{Sen } \beta$ = Distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza al punto o eje de rotación O.

$$\text{Modulo del Momento } M_{FBA}^O = F_{BA} \cdot d$$

En general para cualquier Fuerza F y cualquier punto o eje O se cumple:

$$\text{Modulo del Momento } M_F^O = F \cdot d$$

Unidad [N.m]

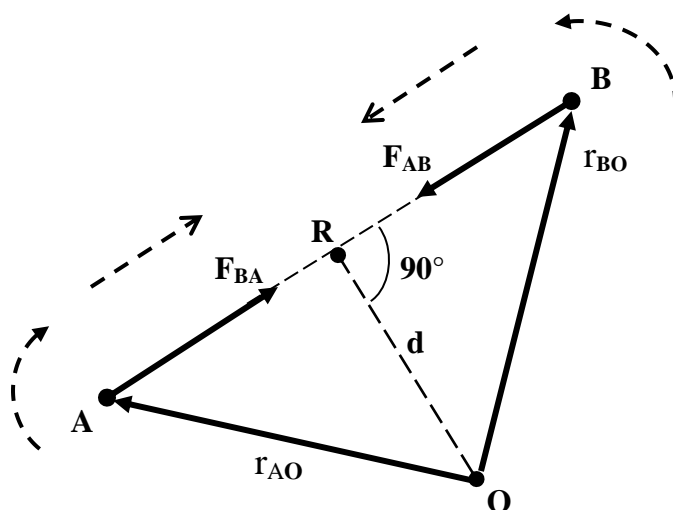
Cabe aclarar que si ubicamos el punto O en otra posición cualesquiera y hacemos el análisis geométrico anterior siempre el modulo del momento nos dará igual al producto entre el módulo de la fuerza y el brazo de palanca definido siempre por la distancia perpendicular entre la línea de acción de la fuerza y cualquier punto que se tome para calcular el Momento.

Tercera Ley de Newton.

Si tenemos en cuenta que no solo se generan traslaciones por acción de las fuerzas actuantes sino también rotaciones esta ley o Principio de Acción – Reacción aplicada por ejemplo a dos partículas A y B interiores a un Sistema y por lo tanto en equilibrio debe escribirse en forma vectorial de la siguiente manera:

$$F_{BA} = -F_{AB}$$

$$M_{FBA}^O = -M_{FAB}^O \rightarrow r_{AO} \times F_{BA} = -r_{BO} \times F_{AB}$$

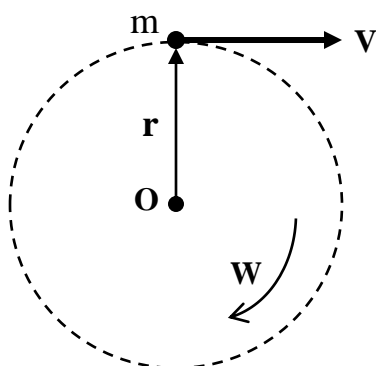


En línea punteada se indica para las partículas A y B los sentidos de traslación y rotación anulados o equilibrados por cumplirse el principio de Acción – Reacción entre ambas partículas. No se desplazan ni pueden rotar alrededor de un punto O ubicado arbitrariamente en cualquier lugar.

Ambas Partículas NO ROTAN. NO SE TRASLADAN.

10.- IMPETU ANGULAR. CONSERVACION (Segunda Ley de Newton para la Rotación)

Vamos a analizar una partícula de masa M que se mueve en una trayectoria circular con centro O y radio de giro r.



La velocidad tangencial o lineal es V y la velocidad angular W. El ímpetu o Cantidad de movimiento angular relativo al centro de giro O lo designamos L^O y se define como el momento de la Cantidad de Movimiento o Ímpetu lineal p respecto del punto O.

Es decir, es equivalente o análogo al caso del Momento de una fuerza.

$$L^O = r \times p = r \times m \cdot v \quad [\text{Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

Se define como el producto vectorial del radio o vector posición r por el vector Ímpetu lineal $p = m \cdot v$

Nota: Indistintamente se usara **M** o **m** para identificar la masa de la partícula o cuerpo.

El Modulo del Ímpetu o Cantidad de movimiento angular será:

$$L^O = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen} \Theta \rightarrow \text{siendo } \Theta = 90^\circ \rightarrow L^O = r \cdot m \cdot v$$

$$\text{Pero } v = w \cdot r \rightarrow L^O = r \cdot m \cdot (w \cdot r) \rightarrow \text{Ordenando términos: } L^O = (m \cdot r^2) \cdot w$$

Dónde:

$$I^O = m \cdot r^2$$

Unidad: [Kg. m²]

I^O = Momento de Inercia o Inercia de rotación de la partícula respecto del punto O.

I^o representa la resistencia a la Rotación respecto del Punto O de una partícula de masa m ubicada a una distancia r medida perpendicularmente entre la trayectoria (dirección del movimiento) de la partícula en esa posición o instante y cualquier punto O que se tome para calcular el Ímpetu Angular.

Finalmente el Ímpetu angular será:

$$L^o = I^o \cdot w$$

Unidad: $[Kg \cdot m^2/s]$

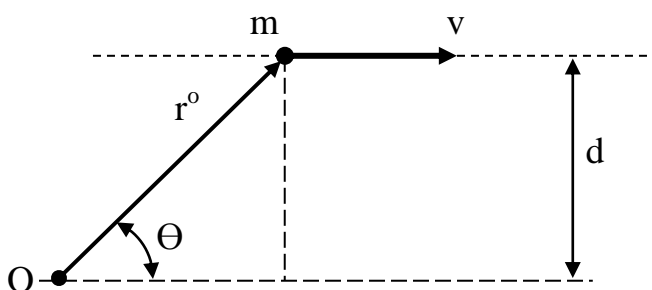
Evidentemente existe una analogía entre el Ímpetu lineal y angular.

Ímpetu lineal $\rightarrow p = m \cdot v$ ($Kg \cdot m/s$) \rightarrow Importa la Masa (m) y la velocidad Lineal (V).

Ímpetu angular $\rightarrow L^o = I^o \cdot w$ ($Kg \cdot m^2/s$) \rightarrow Importa la Masa m con su distribución (I^o) y la velocidad Angular (w).

Si vemos el tema Teórico anterior hay una similitud entre el Momento de una Fuerza y el Ímpetu angular pues ambos son Momentos. Antes analizamos el Momento de una fuerza respecto de un punto. Ahora el momento de la cantidad de Movimiento (Ímpetu lineal). Y se cumple lo mismo que en el teórico 9 cuando usamos o se dedujo el uso del brazo de palanca o distancia d .

Analizamos a continuación el ímpetu angular respecto de un punto O para una partícula que tiene en un instante cualquiera una velocidad V



Vectorialmente: $L^o = r^o \times m \cdot v$

Escalarmente: $L^o = r^o \cdot m \cdot v \cdot \sin \theta$

$r^o \cdot \sin \theta = d \rightarrow$

$$L^o = m \cdot v \cdot d$$

Vemos que para calcular el módulo de L^o debemos usar la distancia d entre la dirección del movimiento y el punto O.

El Ímpetu Angular es una magnitud Vectorial pues es el producto vectorial de dos vectores. Su dirección es perpendicular al plano definido por los vectores posición r e Ímpetu lineal p .

Su sentido se determina en forma idéntica a lo explicado en el Momento de una fuerza (Teórico 9).

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA LA ROTACION:

Para una Partícula y usando el Análisis Matemático vamos a calcular la variación del Ímpetu lineal (derivando) respecto al Tiempo T:

$$L^o = r^o \times p \rightarrow dL^o/dT = d/dT (r^o \times p) = dr^o/dT \times p + r^o \times dp/dT$$

La variación del Vector posición respecto del Tiempo me da la velocidad instantánea $\rightarrow dr^o/dT = v$

Nos queda:

$$dL^o/dT = v \times p + r^o \times dp/dT = 0 + r^o \times dp/dT$$

$v \times p = 0$ Por que v y $p = m \cdot v$ son colineales. Están ubicados ambos vectores sobre la misma recta de acción \rightarrow producto vectorial nulo por que forman un Angulo $\theta = 0^\circ \rightarrow \sin \theta = 0$

Además:

$dp/dT = F$ = Fuerza resultante que actúa sobre la partícula. Guía Dinámica 3. Teórico 5.

Entonces:

$$dL^o/dT = r^o \times dp/dT = r^o \times F \rightarrow dL^o/dT = M_F^o \quad (1)$$

De acuerdo a lo visto al comienzo de este Teórico para una ROTACION, si W es la velocidad angular respecto del punto O sabemos que:

$$L^o = I^o \cdot w \rightarrow dL^o/dT = I^o \cdot dW/dT$$

La variación de la velocidad angular w con el tiempo es la aceleración Angular $\gamma \rightarrow$

$$dW/dT = \gamma \rightarrow dL^o/dT = I^o \cdot \gamma \quad (2)$$

(1) = (2) $\rightarrow M_F^o = I^o \cdot \gamma$ Segunda Ley de Newton para la Rotación

Recordemos la Segunda Ley de Newton para la traslación $\rightarrow F = M \cdot a$
 M = Masa del cuerpo o partícula y a = Aceleración del mismo

PRINCIPIO DE CONSERVACION DEL IMPETU LINEAL:

La segunda Ley de Newton para la Rotación establece que el Momento externo Resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una Partícula es igual al cambio respecto del Tiempo del Ímpetu angular

$$M_F^o = I^o \cdot \gamma$$

Si: $M_F^o = 0 \rightarrow$ En base a la ecuación (1) $\rightarrow dL^o/dT = M_F^o = 0 \rightarrow$

$$L^o = \text{Constante}$$

Esta expresión representa el principio de conservación que establece:

“Si el momento resultante de las fuerzas externas es nulo, el Ímpetu angular Total es constante”

CONCLUSION:

Lo analizado fue en general para una partícula, pero si tenemos en cuenta que todo Sistema de Partículas incluidos los Cuerpos Rígidos posee un Centro de Masas CM, podemos aplicar los conceptos analizados aquí a ese CM. Esto se verá con más detalle en los siguientes Temas: “Cinemática y Dinámica del Cuerpo Rígido”.

Nota 1: El ímpetu Angular de partículas individuales de un sistema puede cambiar, pero el total puede permanecer constante

Nota 2: El Momento resultante que actúa sobre una partícula o sistema es Nulo si:

a) $F_R = 0 \rightarrow$ Fuerza Resultante Nula.

b) El vector posición y la fuerza Resultante son colineales. Es decir, tienen la misma dirección.

