Introducción a la Probabilidad

Clase 1

Chan-Stein-Howlin-Casparian

Organización

1. La Estadística y la Probabilidad
2. Eventos Especiales
3. Definiciones de Probabilidad

LA ESTADÍSTICA

Aparece en las Ciencias y en la Vida cotidiana

Vamos a presentar los conceptos fundamentales de esta teoría poniendo especial interés en las aplicaciones a ciencias y a ingeniería.

Con frecuencia nos preguntamos

- qué probabilidad habrá de lluvias?
- qué chance tendré de que me contraten?
- será casual que este paciente mejoró más que este otro?

En general respondemos intuitivamente a estas preguntas y otras similares. La idea es entonces formalizar una respuesta en los casos en que sea posible a estas preguntas.

Aleatorio o Determinístico?

Experimento

Es cualquier procedimiento mediante el cual se generan resultados

Según el grado de conocimiento que tengamos sobre los posibles resultados un experimento puede ser aleatorio o determinístico.

- Un experimento es un procedimiento mediante el cual se generan resultados
- Si se conoce su resultado a priori, se denomina **determinístico**.
- Si no se conoce el resultado a priori se denomina **aleatorio**.

Las características de un experimento aleatorio son:

- No se puede anticipar su resultado.
- Se conocen con exactitud todos sus posibles resultados.
- Se puede repetir indefinidamente, en las mismas condiciones iniciales, pudiendo ser los resultados distintos en cada repetición.

Indiquemos si son determinísticos o aleatorios

- Arrojar dos monedas equilibradas y anotar los resultados de las caras superiores.
- Medir la longitud de una mesa.
- Sumar 2+5
- Tirar un dado hasta que salga as.
- Calcular la derivada de 5x+2.

Espacio Muestral

Llamaremos espacio muestral

al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento o fenómeno aleatorio. A cada elemento del espacio muestral se lo denomina punto muestral.

- Todos los posibles resultados del experimento aleatorio
- Este espacio muestral puede ser finito
- También puede ser infinito numerable o infinito no numerable.

Hallar el espacio muestral de estos experimentos aleatorios

- Arrojar dos monedas y contar cuántas caras salieron
- Arrojar un dado hasta que sale un as
- Derivar x^3
- Medir la longitud de una habitación
- Calcular $2 + 3$

Organización

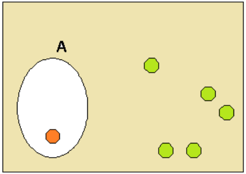
1. La Estadística y la Probabilidad
2. Eventos Especiales
3. Definiciones de Probabilidad

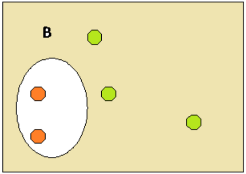
Sucesos o Eventos

Suceso o Evento

es cualquier subconjunto medible del espacio muestral.

- Un suceso es **simple o elemental** cuando su resultado no puede descomponerse en una combinación de otros.
- Cuando en cambio está formado por dos o más eventos simples, diremos que el suceso es **compuesto**.





Eventos Especiales

- Se dice que un **evento es cierto o seguro** cuando ocurre en toda realización del experimento o fenómeno aleatorio.
- Un suceso se dice **imposible** cuando no ocurre en ninguna realización del experimento o fenómeno aleatorio.
- Dos sucesos se dicen **incompatibles o mutuamente excluyentes** cuando no comparten resultados comunes, es decir no existe ningún punto muestral que pertenezca a ambos. Los sucesos incompatibles no pueden ocurrir simultáneamente.
- Un grupo de eventos se dicen **exhaustivos** cuando cubren el espacio muestral entre ellos.
- Dos sucesos se dicen **complementarios** cuando son al mismo tiempo mutuamente excluyentes y exhaustivos. Cuando uno de ellos, digamos A ocurre cada vez que el otro, digamos A^c (Complemento de A) no ocurre.

Ejemplo

En una empresa hay profesionales, hombres o mujeres, tienen contratos o son personal de planta. Si elegimos un profesional de esta institución al azar y consideramos su género y su tipo de contratación nos encontramos con las siguientes posibilidades:
Siendo los puntos muestrales para este experimento:

- FP: mujer de planta
- FC: mujer contratada
- MP: hombre de planta
- MC: hombre contratado

$$S = \{FP, FC, MP, MC\}$$

Eventos Asociados

Definamos ahora algunos sucesos vinculados con este espacio muestral S.

$A = \{\text{el profesional seleccionado es hombre}\}$

$B = \{\text{el profesional seleccionado es hombre y de planta}\}$

$C = \{\text{el profesional seleccionado es mujer}\}$

$D = \{\text{el profesional seleccionado es contratado}\}$

$E = \{\text{el profesional seleccionado no trabaja en la empresa}\}$

$F = \{\text{el profesional seleccionado trabaja en la empresa}\}$

Enumerando los puntos muestrales

$$A = \{\text{MP, MC }\}$$
$$B = \{\text{MP}\}$$
$$C = \{\text{FC, FP}\}$$
$$D = \{\text{FC, MC}\}$$
$$E = \{\}$$
$$F = \{\text{FP,FC, MP, MC}\}$$

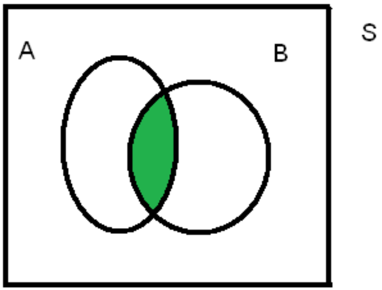
Observaciones

- B tiene un único punto muestral, es un suceso elemental.
- A por el contrario es un evento compuesto.
- E nunca ocurre, es un evento imposible.
- F siempre ocurre, es un evento cierto o seguro.
- B y C no pueden ocurrir al mismo tiempo, son mutuamente excluyentes o incompatibles.
- A y D no pueden ocurrir al mismo tiempo y son exhaustivos, por lo tanto son complementarios.

Operaciones entre eventos: Intersección $A \cap B$

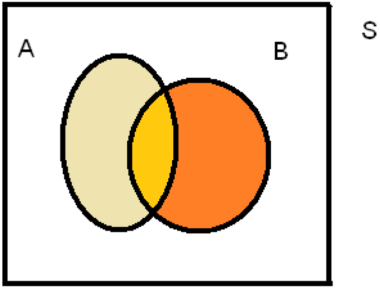
A partir de eventos conocidos suelen definirse nuevos eventos, por ejemplo:

que ocurra el evento A y al mismo tiempo ocurra el evento B



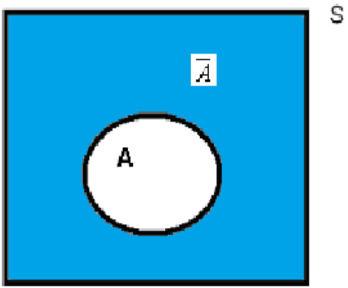
Operaciones entre eventos: Unión $A \cup B$

que ocurran el evento A o el evento B



Operaciones entre eventos: Complemento A^c o bien A'

que no ocurra el evento A.



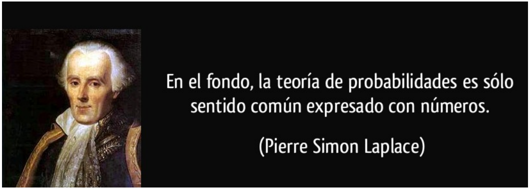
Organización

1. La Estadística y la Probabilidad
2. Eventos Especiales
3. Definiciones de Probabilidad

Definición Clásica (Laplace, 1774)

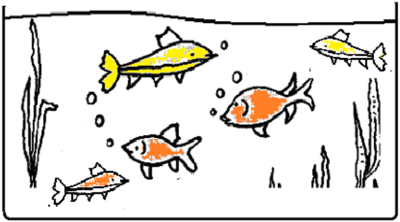
Dado un experimento o fenómeno aleatorio, con espacio muestral asociado S, y un evento A, de este espacio muestral; se llama **probabilidad** de que ocurra el suceso A al cociente entre el número de puntos muestrales de A (resultados favorables) y el total de puntos muestrales de S (resultados posibles). Sin embargo esta definición es válida solamente en el caso de que todos los puntos muestrales sean equiprobables

$$P(A) = \frac{\text{nro de casos favorables a A}}{\text{nro de casos posibles}}$$



Ejemplo

Consideremos una pecera con dos peces amarillos y tres anaranjados.



Sea el experimento aleatorio de "sacar un pez al azar y mirar el color"; el espacio muestral asociado a este experimento, distinguiendo entre los peces de igual color, puede expresarse de la siguiente manera:

$$S = \{A_1, A_2, N_1, N_2, N_3\}$$

Cuál es el problema?

Sea A el evento "el pez elegido es amarillo". La probabilidad de que ocurra A, según la definición clásica, es entonces:

$$P(A) = \frac{\#\text{nro de casos favorables a A}}{\#\text{número de casos posibles}} = \frac{2}{5}$$

Sin embargo, si expresábamos el espacio muestral asociado al experimento indicando los colores posibles del pez seleccionado:

$$S = \{A, N\}$$

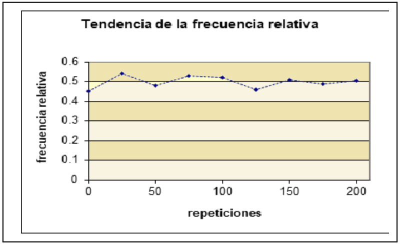
Hubiéramos podido pensar que $P(A) = \frac{1}{2}$, sin embargo esto no es correcto ya que el número de peces amarillos no es igual al número de peces negros. En síntesis, la definición clásica de probabilidad es apropiada en espacios de equiposibilidad o equiprobabilidad.

Enfoque a Posteriori

Considera la probabilidad de un cierto evento A como el límite de su frecuencia relativa para infinitas repeticiones del experimento.

$$f_r(A) = \frac{f(A)}{n}$$

Este cociente a medida que n crece, tiende a estabilizarse alrededor de un número que llamamos P(A).



Simbólicamente

$$lim_{n\to\infty} f_r(A) = P(A)$$

En algunos casos puede resultar imposible estimar el valor de este límite, ya que no podemos repetir el experimento un número muy grande de veces por diversos motivos.
Este **enfoque frecuencial** de la probabilidad se denomina también **probabilidad a posteriori** ya que sólo podemos dar la probabilidad de un suceso después de repetir y observar un gran número de veces el experimento aleatorio correspondiente. Algunos autores se refieren a ellas como probabilidades teóricas.

Definición Subjetiva de la Probabilidad

La definición clásica y la teoría frecuencial se basan en las repeticiones del experimento aleatorio....lo que no siempre es posible!!
En esos casos es necesario acudir a un punto de vista alternativo, que no dependa de las repeticiones, sino que considere la probabilidad como un concepto subjetivo que exprese el grado de creencia o confianza individual acerca de la posibilidad de que el suceso ocurra.
Se trata por tanto de un juicio personal o individual y es posible por tanto que, diferentes observadores tengan distintos grados de creencia sobre los posibles resultados, igualmente válidos. A esta definición de probabilidad

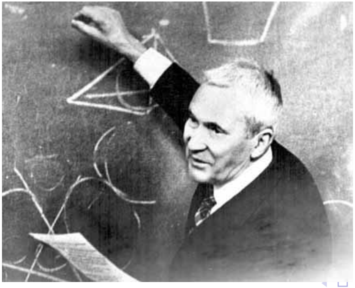
se la conoce como **definición subjetiva de probabilidad** .

Ejemplo

Dos profesionales opinan acerca de la evolución en una cierta semana de la pandemia en nuestro país. El Ing. Perez sostiene que la probabilidad de que baje la cantidad de infectados por día es del 0.80, mientras que el Dr. Ibañez sostiene que dicha probabilidad es 0.75. Como ambas son estimaciones subjetivas, se consideran válidas a pesar de no ser coincidentes!!

Definición Axiomática

La definición axiomática de la probabilidad es quizás la más simple de todas las definiciones y la menos controvertida. Está basada en un conjunto de axiomas (afirmaciones sobre las que se acuerda y no se intenta demostrar). La ventaja de esta definición es que permite un desarrollo riguroso y matemático de la probabilidad.
Supone la existencia de una función de probabilidad p(.) que asigna un número real a cada suceso A, definido dentro del espacio muestral S.



Definición Axiomática (Kolmogorov, 1933)

Axiomas

ax.1 $P(A) \geq 0$ para todo evento A del espacio muestral S.

ax.2 $P(S) = 1$.

ax.3 Si A_1 y A_2 son eventos mutuamente excluyentes entonces $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

El tercer axioma se puede extender a n conjuntos e incluso a una familia infinita de conjuntos disjuntos.

(I) Consecuencias de la Definición Axiomática

Varias propiedades importantes se derivan de la definición axiomática de probabilidad:

Probabilidad del Complemento

La probabilidad de que no ocurra el evento A, es decir la probabilidad de que ocurra el evento complemento de A (es decir que no ocurra A) y la probabilidad de que ocurra A suman 1.

Puesto que:

$$A \cap A^c = \emptyset \text{ y } A \cup A^c = S$$

Luego:

$$P(A^C) + P(A) = 1 \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$$

(II) Consecuencias de la Definición Axiomática

Evento Imposible

La probabilidad de que ocurra el evento imposible es cero, puesto que es el evento complementario del espacio muestral. Simbólicamente puede expresarse:

$$P(\emptyset) = 0$$

Dado que S y $\emptyset$ son disjuntos y exhaustivos, vale que:

$$P(S) + P(\emptyset) = 1$$

y puesto que

$$P(S) = 1$$

por ax.2 se tiene la tesis.

(III) Consecuencias de la Definición Axiomática

Eventos Encajados

Si el evento A ocurre algunas de las veces que ocurre el evento B, lo que simbólicamente se puede indicar $A \subseteq B$ (A es una parte de B o A está incluido en B), entonces la probabilidad asociada al evento A es menor o igual a la probabilidad de que ocurra el evento B. Simbólicamente puede expresarse:

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Ejemplo

Por ejemplo: algunos de los afectados por corona virus tienen complicaciones respiratorias que requieren asistencia mecánica, aunque en otros afectados no es así, luego:

$$AR \subseteq CV \Rightarrow P(AR) \leq P(CV)$$

Es decir que si los que requieren asistencia mecánica son un subconjunto de los que tienen el virus, la probabilidad de ser asistencia respiratoria mecánica es menor o igual que la de afectado por el virus.

(IV) Consecuencias de la Definición Axiomática

Si A y B son dos eventos cualesquiera de un espacio muestral S, puede ocurrir que $P(A) + P(B) > 1$, esto se debe a que la probabilidad de la intersección se está sumando dos veces.

Probabilidad de la Unión o Teorema de la Suma

Para eventos cualesquiera A y B de un espacio muestral S, vale que la probabilidad de que ocurra alguno de ellos es igual a la suma de las probabilidades de ambos menos la probabilidad de la intersección. Simbólicamente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo

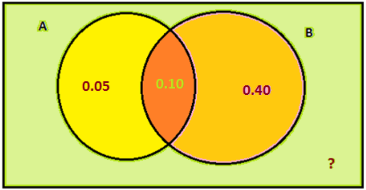
Un 15% de los pacientes atendidos en cierto hospital asisten a los consultorios externos por enfermedades crónicas, mientras que el 50% de los pacientes son de barrios cercanos al hospital y un 10% de los pacientes corresponden a consultas por enfermedades crónicas y son pacientes de la zona. Interesa determinar ¿Qué probabilidad hay de que al elegir un paciente al azar sea de la zona o venga por un padecimiento crónico? Denotemos con:

$$A = \{\text{enfermedad crónica}\}$$

$$B = \{\text{paciente de la zona}\}$$

Ejemplo

El diagrama de Venn para representar la situación es el siguiente:



- $A \cap B = \{$enf. crónica y paciente de la zona$\}$ (zona naranja central)
- $A \cup B = \{$enf. crónica o paciente de la zona$\}$ (todo menos la zona verde)

Ejemplo

Sabemos que:

- $p(A) = 0,15$
- $p(B) = 0,50$
- $p(A \cap B) = 0,10$

Entonces, por la propiedad de la suma:

$$p(A \cup B) = 0,50 + 0,15 - 0,10 = 0,55$$

Entonces podemos afirmar que el 55% de los pacientes de este hospital asisten por una dolencia crónica o son de su zona de jurisdicción.

Diagrama de Carrol

Otra forma de representar el problema es un Diagrama de Carrol

	A	A^c
B	$A \cap B$	$B - A$
B^c	**A-B**	$A^c \cap B^c$

GRACIAS!!

Seguimos la próxima y mientras: