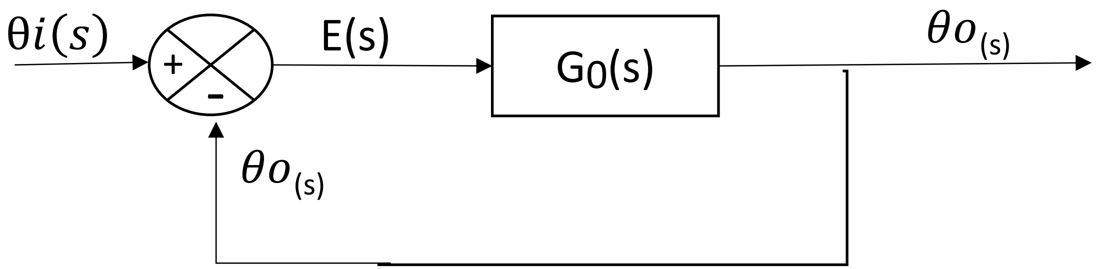
Error en estado estable



$$E(s) = \theta i(s) - \theta o_{(s)}$$

$$E(s) = \theta i(s) - \theta i(s)\,\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}.$$

$G_{0(s)}$: Se la define como la transferencia en el trayecto directo cuando la realimentación es unitaria. Se la denomina también función transferencia en lazo abierto del sistema de lazo cerrado

$$E(s) = \theta i(s)\left[1 - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\right]$$

$$E(s) = \theta i(s)\left[\frac{1+G_0(s)-G_0(s)}{1+G_0(s)}\right]$$

$$E(s) = \theta i(s)\left[\frac{1}{1+G_0(s)}\right]$$

Teorema del valor final

$$\lim_{S\to 0} S\,.\,F(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{S\Rightarrow 0} S\,.\,\frac{1}{1+G_0(s)}\,.\,\theta i(s)}$$

e_{ss} : steady state error

$G_{0(s)}$ **:** Se la define como la transferencia en el trayecto directo cuando la realimentación es unitaria.
Se la denomina también función transferencia en lazo abierto del sistema de lazo cerrado

$$G_{0(s)} = \frac{K\,(S^m + a_{m-1}.\,S^{m-1} + a_{m-2}.\,S^{m-2} + \ldots\ldots..+a_1.S + a_0\ )}{S^q\ (S^n + bn - 1\,S^{n-1} + bn - 2\,S^{n-2} + \cdots \qquad + b_1.S + b_0)}$$

q : Tipo o clase del sistema
K: Constante
m y n : enteros

El error estacionario es una medida de la exactitud de un sistema de control.
Se determina el comportamiento en estado estacionario de un sistema en general debido a las entradas escalón, rampa y parábola. Si un sistema presenta o no error estacionario ante determinada entrada, depende de $G_{0(s)}$, es decir exclusivamente de sus características intrínsecas.
El error estacionario determina también la incapacidad de un sistema para seguir cierto tipo de entrada.

Entrada escalón unitario

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{S \Rightarrow 0} S \cdot \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{S}}$$

$$e_{ss} = \lim_{S \Rightarrow 0} \frac{1}{1+G_0(s)}$$

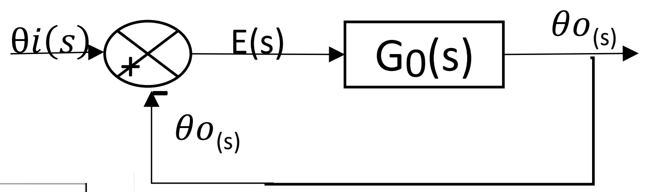
Si $Kp = \lim_{S \Rightarrow 0} G_0(s)$

Kp: Coeficiente estático de error de posición. Es adimensional

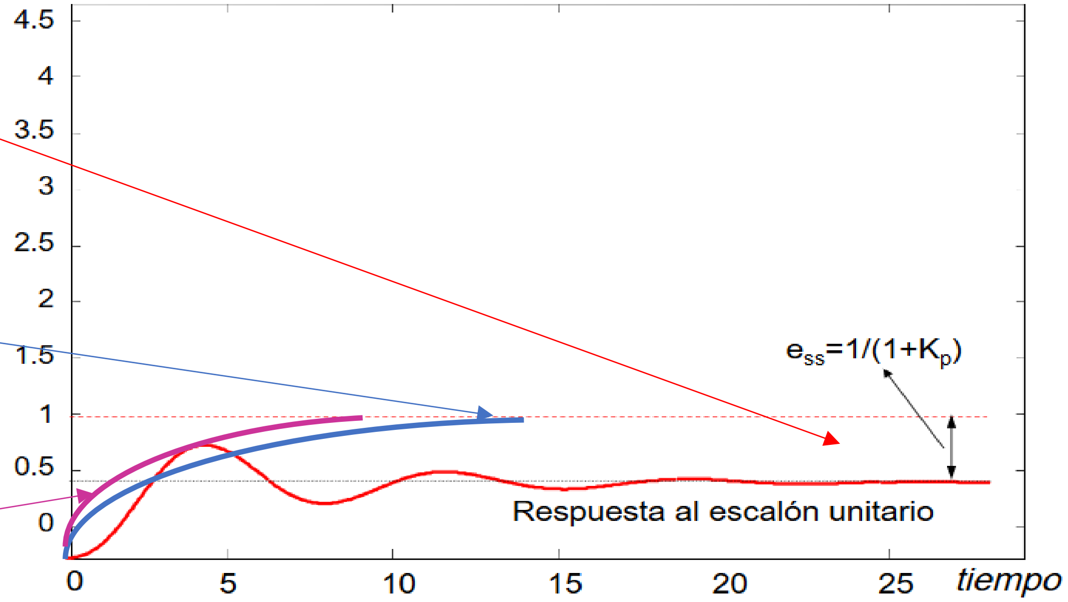
$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{1+Kp}}$$

<u>Sistema tipo 0</u>

$$G_{0(s)} = \frac{K\,(S^m + a_{m-1}.S^{m-1} + a_{m-2}.S^{m-2} + \dots \dots .. + a_1.S + a_0)}{S^q\,(S^n + bn-1\,S^{n-1} + bn-2\,S^{n-2} + \cdots \quad + b_1.S + b_0)}$$



$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{1+Kp}}$$



<u>Sistema tipo 1</u>

Kp ➔ ∞

$$\boxed{e_{ss} = 0}$$

<u>Sistema tipo 2</u>

Kp ➔ ∞

$$\boxed{e_{ss} = 0}$$

Entrada rampa unitaria

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{S \Rightarrow 0} S \cdot \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{S^2}}$$

$$e_{ss} = \lim_{S \Rightarrow 0} \frac{1}{S + S.\,G_0(s)}$$

Si $Kv = \lim_{S \Rightarrow 0} S.\,G_0(s)$

Kv: Coeficiente estático de error de velocidad. Unidades = $^{1}/_{seg}$

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{Kv}}$$

$$G_{0(s)} = \frac{K\,(S^m + a_{m-1}.S^{m-1} + a_{m-2}.S^{m-2} + \dots\dots.. + a_1.S + a_0)}{S^q\ (S^n + bn-1\,S^{n-1} + bn-2\,S^{n-2} + \cdots \quad + b_1.S + b_0)}$$

<u>Sistema tipo 0</u>

$Kv \rightarrow 0$

$$\boxed{e_{ss} \rightarrow \infty}$$

<u>Sistema tipo 1</u>

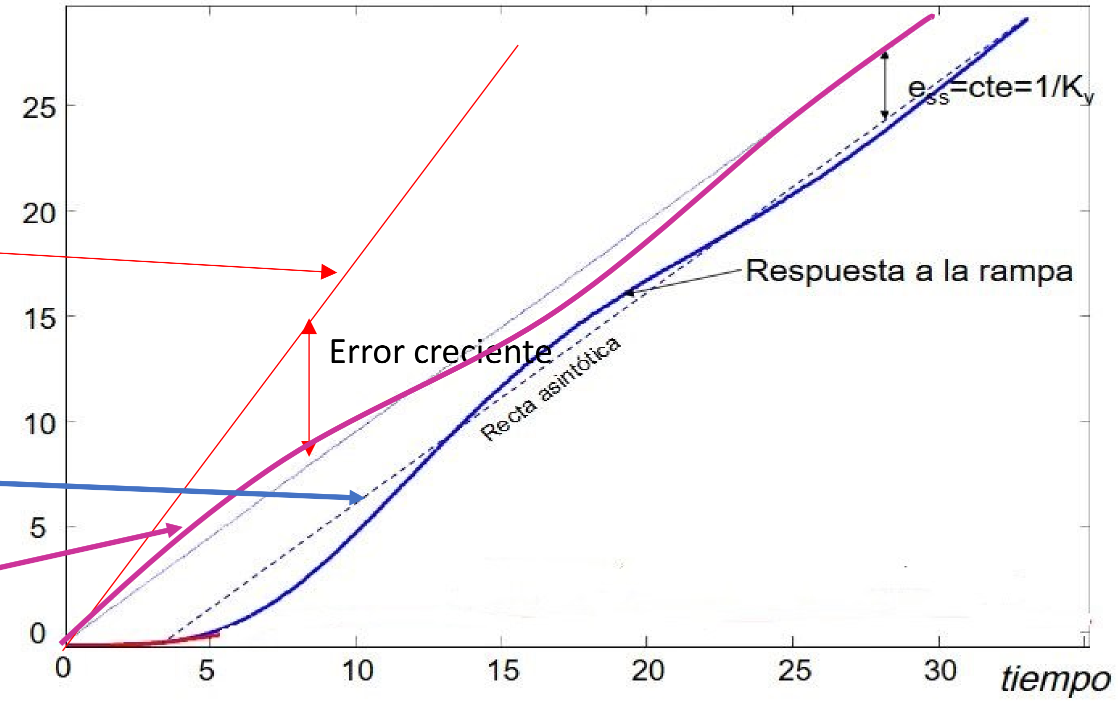
$Kv \rightarrow K\,\frac{a_0}{b_0}$

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{Kv}}$$

<u>Sistema tipo 2</u>

$Kv \rightarrow \infty$

$$\boxed{e_{ss} = 0}$$



Entrada parábola unitaria

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{S\Rightarrow 0} S \cdot \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{S^3}}$$

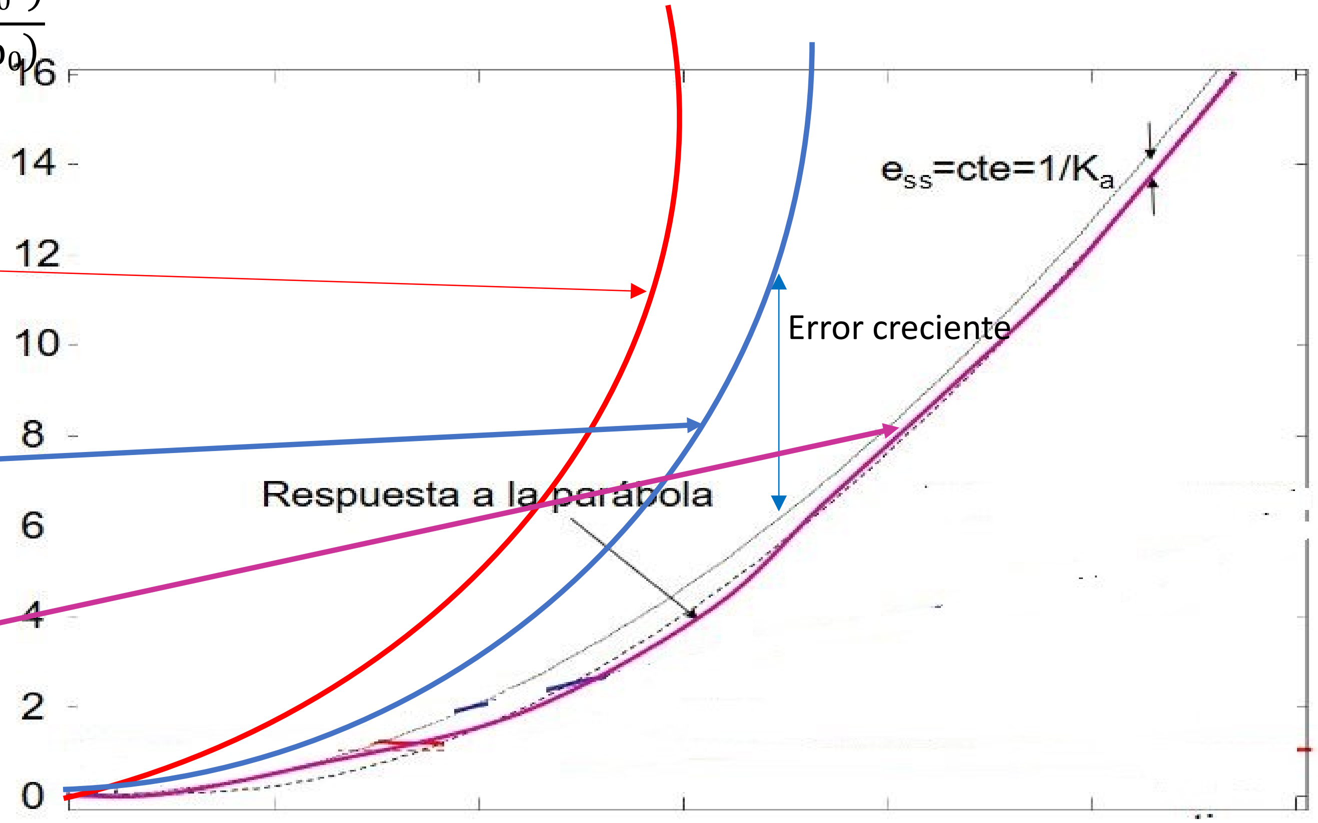
$$e_{ss} = \lim_{S\Rightarrow 0} \frac{1}{S^2 + S^2 \cdot G_0(s)}$$

Si $Ka = \lim_{S\Rightarrow 0} S^2 \cdot G_0(s)$

Ka: Coeficiente estático de error de aceleración. Unidades = $\frac{1}{Seg^2}$

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{Ka}}$$

$$G_{0(s)} = \frac{K\,(S^m + a_{m-1}\,S^{m-1} + a_{m-2}\,S^{m-2} + \ldots\ldots + a_1 \cdot S + a_0)}{S^q\ (S^n + bn-1\,S^{n-1} + bn-2\,S^{n-2} + \cdots + b_1 \cdot S + b_0)}$$



Sistema tipo 0

Ka ➔ 0

$$\boxed{e_{ss} \to \infty}$$

Sistema tipo 1

Ka ➔ 0

$$\boxed{e_{ss} \to \infty}$$

Sistema tipo 2

Ka ➔ $K \frac{a_0}{b_0}$

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{ka}}$$

Error en estado estacionario

Sistema \ entrada	$\frac{1}{S}$ escalón	$\frac{1}{S^2}$ rampa unitaria	$\frac{1}{S^3}$ parábola unitaria	$\frac{1}{S4}$
Sistema Tipo 0	$\frac{1}{1+Kp}$	∞	∞	∞
Sistema Tipo 1	0	$\frac{1}{Kv}$	∞	∞
Sistema Tipo 2	0	0	$\frac{1}{Ka}$	∞
Sistema Tipo 3	0	0	0	$\frac{1}{K4}$

Ejercicios

1. Cuales son los errores en estado estable en las siguientes funciones de transferencia $G_{0(s)}$

a. $4/(s+1)$
b. $10/\ [(S+1)\ (S+2)]$
c. $5/\ [S\ (\ S^2-3S+\ 5)]$
d. $6\ (S+3)\ /\ [(S+2)\ (S+6)]$
e. $10/\ [S^2\ (\ S^2+2S+\ 1)]$

Cuando se aplica en cada caso:

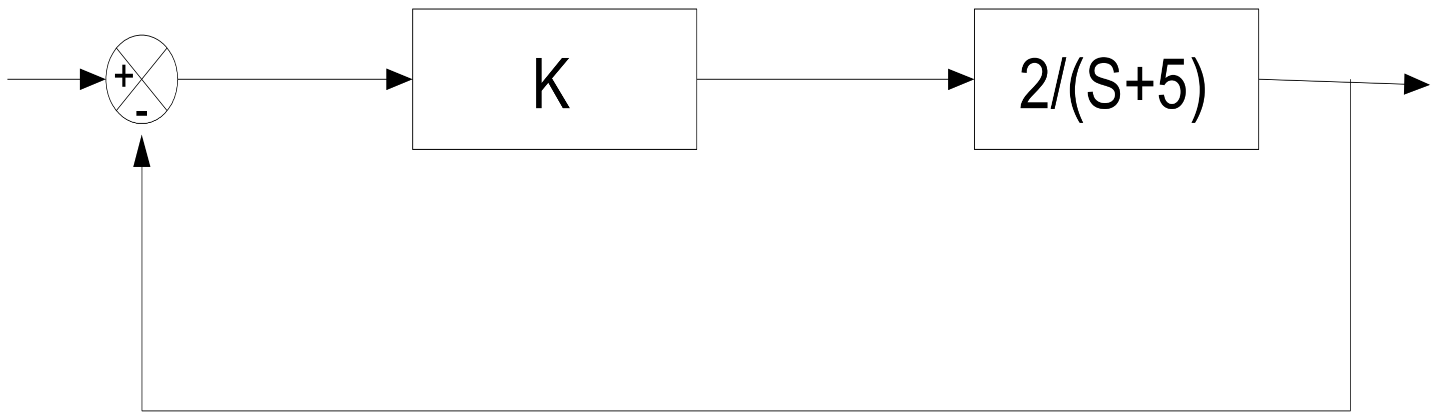
1.1 Una entrada escalón unitario.
1.2 Una entrada rampa unitaria.
1.3 Una entrada parabólica unitaria

2. Calcular el error en estado estable para el sistema de la figura cuando está sujeto a una entrada escalón unitario si K tiene un valor de

a. 1

b. 10

c. Explicar que significa aumentar el valor de K



3. El sistema de guiado de un automóvil tiene una función de transferencia en lazo abierto de $G_{0(s)} = K/ s\,(s+a)\,(s+b)$. Indicar los errores en estado estable cuando el sistema está sujeto a:

a. Una entrada escalón de magnitud A.

b. Una entrada rampa con una razón igual a A.

Estabilidad

Un sistema está en equilibrio si era ausencia de cualquier perturbación o entrada la salida se mantiene en el mismo estado.

Un sistema de control lineal, invariante en el tiempo es estable si finalmente la salida retorna a su estado de equilibrio cuando el sistema es sometido a una perturbación

Un sistema de control lineal invariante en el tiempo, es inestable si continúa indefinidamente una oscilación en la salida, o si la salida diverge sin límite respecto de su estado de equilibrio cuando es sometido a una perturbación.

Considerando una entrada impulso unitario en un sistema con condiciones iniciales nulas, la respuesta será igual a la transferencia del sistema. Se puede obtener la información dinámica del sistema excitándolo con un impulso y midiendo la respuesta. Una manera de definir la estabilidad de un sistema es si para una entrada impulso, la respuesta tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito

Ejemplos :

$$G_{(s)} = \frac{1}{S+2} \qquad \theta o_{(s)} = \frac{1}{S+2}$$

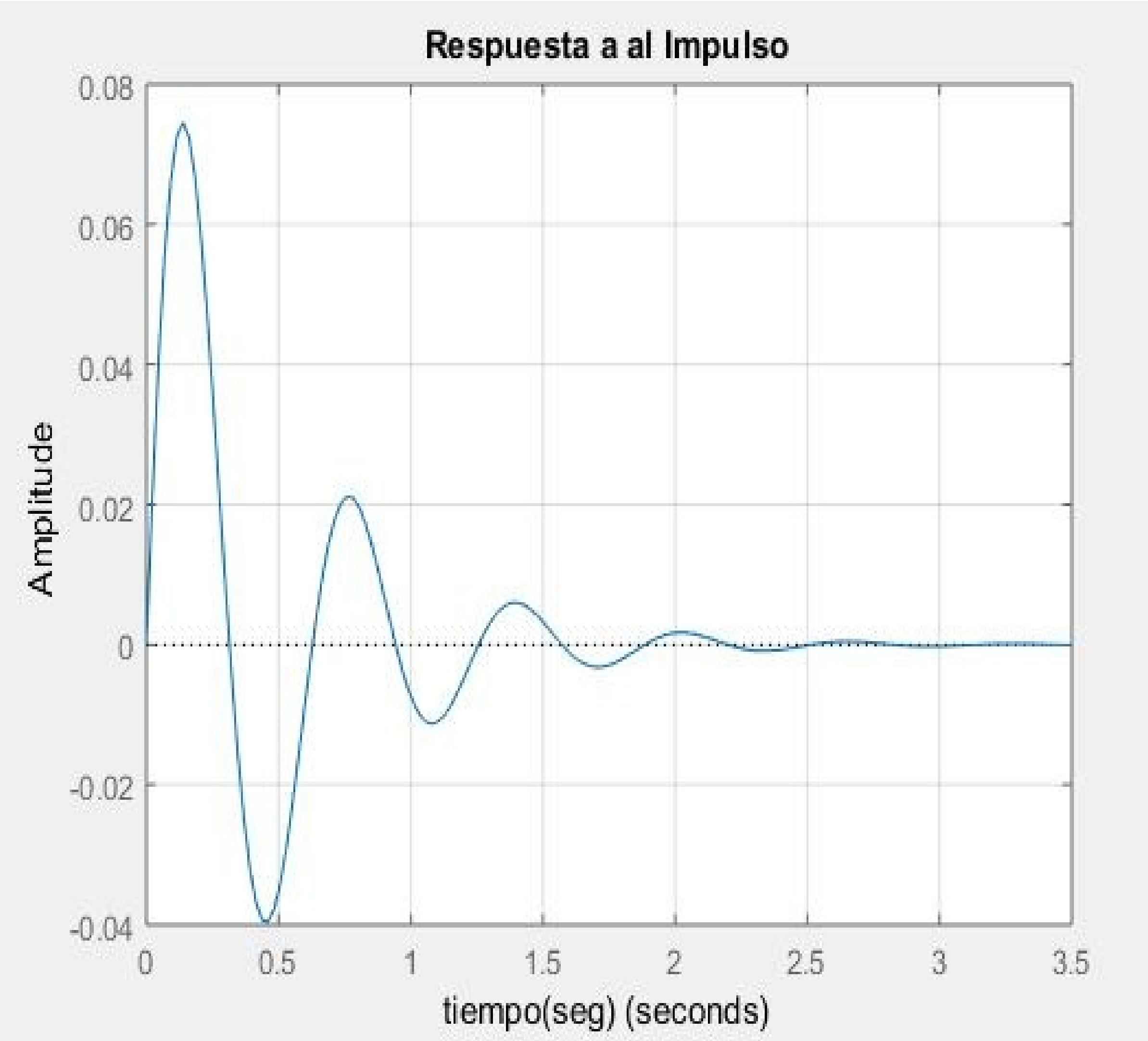
$$\therefore \quad \boxed{\theta o_{(t)} = e^{-2t}}$$

$$G_{(s)} = \frac{1}{S-2} \qquad \theta o_{(s)} = \frac{1}{S-2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\theta o_{(t)} = e^{+2t}}$$

$$G_{(s)} = \frac{1}{[S+(2+j4)][S+(2-j4)]}$$

$a = (2 + j4) \wedge \ b = (2 - j4)$ $\qquad \frac{1}{(s+a).(S+b)} \rightarrow \frac{e^{-at} - e^{bt}}{(b-a)}$



$$\theta o_{(t)} = \frac{1}{(2-j4-2-j4)} \left[e^{-(2+j4)t} - e^{-(2-j4)t} \right]$$

$$\theta o_{(t)} = \frac{1}{(-8j)} e^{-2t} \left[e^{-j4} - e^{j4} \right]$$

$$\theta o_{(t)} = \frac{[e^{j4} - e^{-j4}]}{8j} e^{-2t} \qquad Sent = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

$$\boxed{\theta o_{(t)} = \sin 4\,t\ e^{-2t}}$$

$$G_{(s)} = \frac{1}{[S+(-2+j10)][\,S+(-2-j10)]}$$

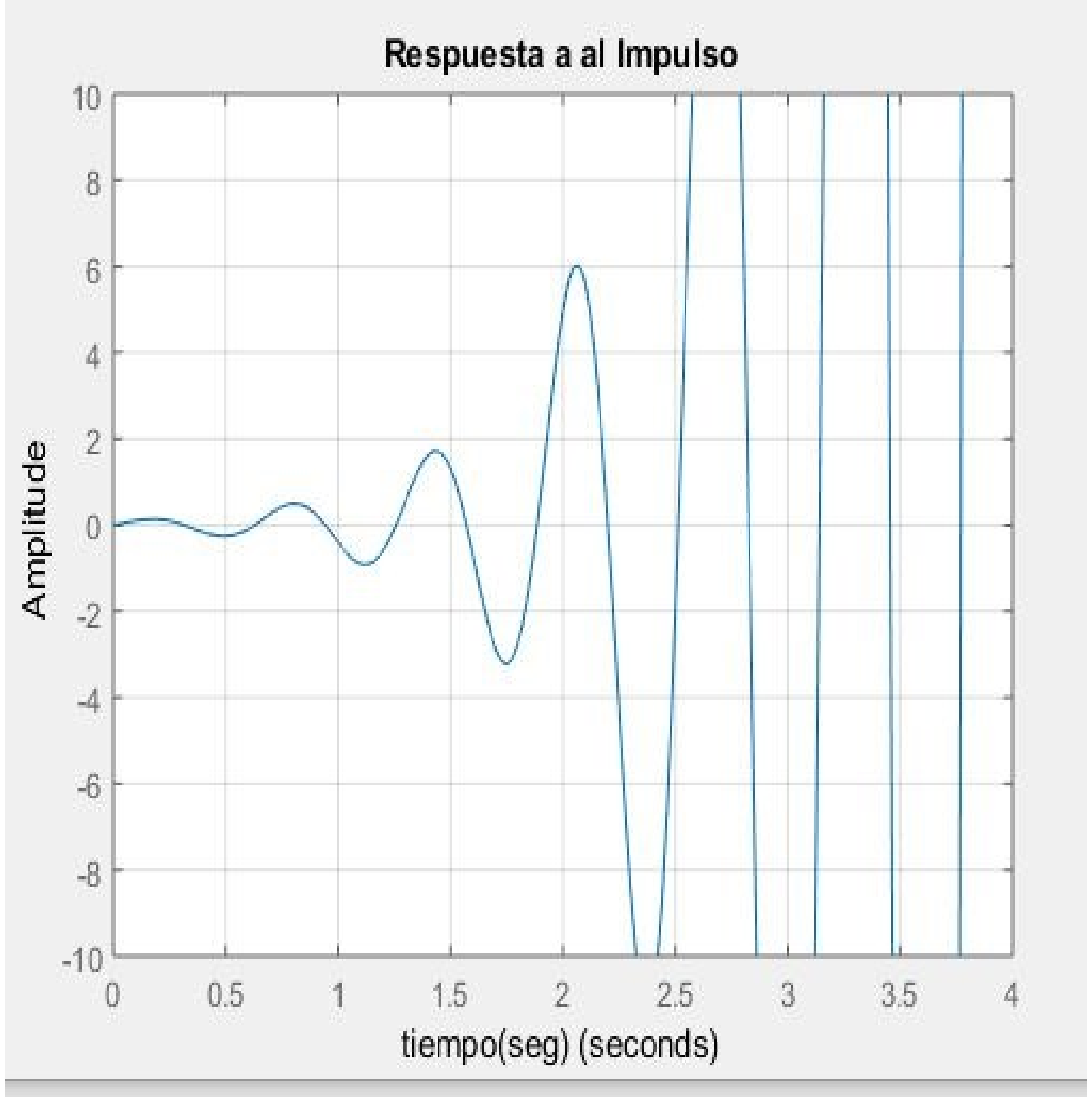
$$\theta o_{(t)} = \frac{1}{(-2-j10+2-j10)}\ [\,e^{-(-2+j10)t} - e^{-(-2-j10)t}\,]$$

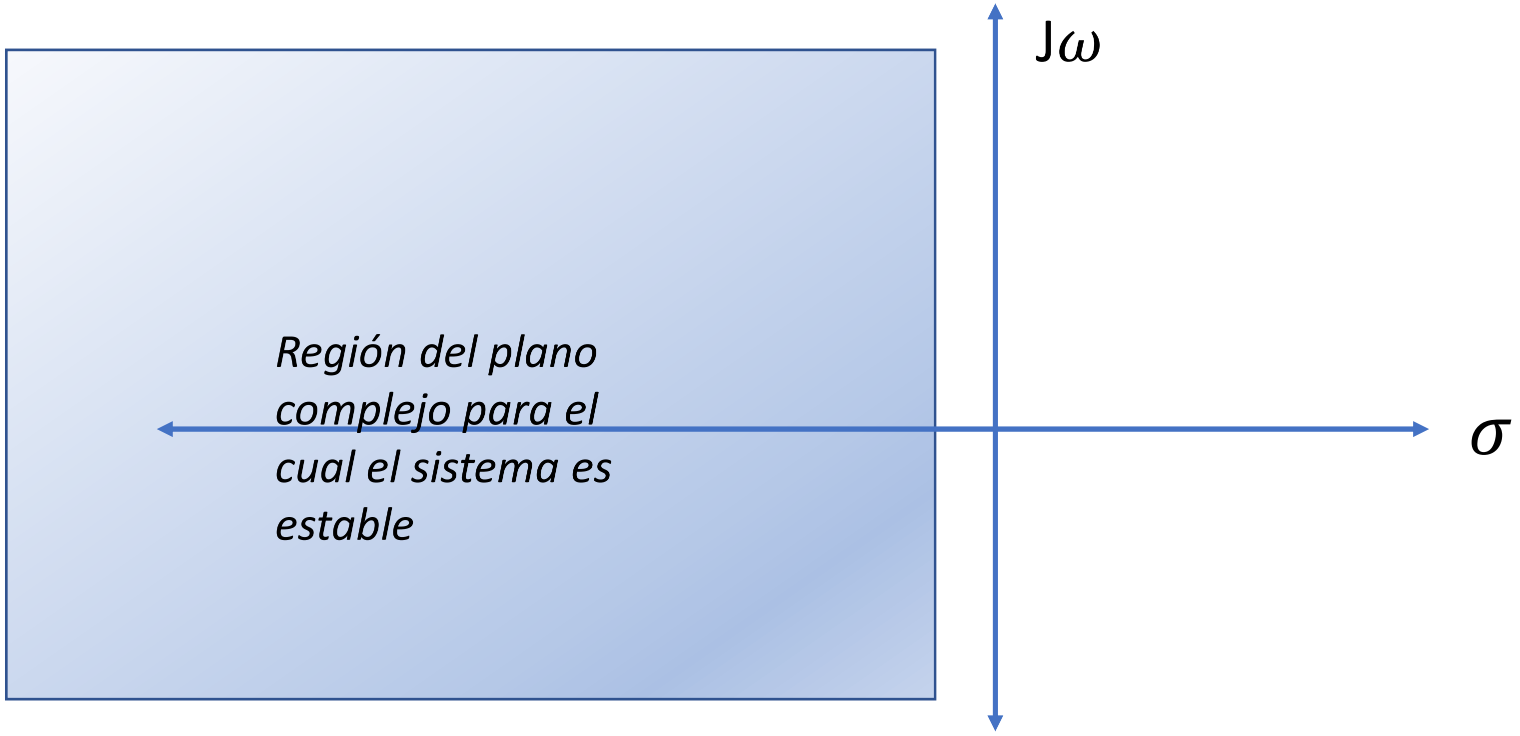
$$\theta o_{(t)} = \frac{1}{(-20j)}\ e^{+2t}[\,e^{-j10t} - e^{j10t}\,]$$

$$\theta o_{(t)} = \frac{[\,e^{j10t} - e^{-j10t}\,]}{20j}\ e^{+2t}$$

$$Sent = \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}$$

$$\boxed{\theta o_{(t)} = \sin 10\,t\ \ e^{+2t}}$$





Si cualquiera de los polos está ubicado sobre el plano derecho, la respuesta transitoria aumenta u oscila de manera creciente. Si todos los polos de lazo cerrado están ubicados en el semiplano izquierdo del eje jw, la respuesta transitoria llega al equilibrio representando el estado estable. Si hay polos cercanos al eje jw , la respuesta transitoria puede ser muy lenta o presentar demasiadas oscilaciones. Por esta razón se toma un margen respecto al eje jw como el indicado en el gráfico.
El tipo de entrada no afecta la estabilidad del sistema, sino que contribuye a la respuesta estacionaria. En otras palabras, si un sistema es estable o no depende de sus características intrínsecas y no de su entrada.

Ejemplo de aplicación del criterio de Routh- Hurwitz

Dado el siguiente polinomio, determinar si tiene raíces positivas. $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1 = 0$

Al ser todos los coeficientes positivos y ninguno cero, las raíces pueden ser todas negativas. Si algún coeficiente es negativo, esto indica que tiene al menos una raíz positiva. En caso de representar estas raíces a los polos de lazo cerrado del sistema podemos determinar, si el sistema es o no estable.

s^4	1	3	1
s^3	2	4	0
s^2	b1	b2	b3
s^1	c1	c2	c3
s^0	d1	d2	d3

Se desprende de la ecuación

Cada fila se calcula en base a las dos anteriores

b1 = 3 - $\frac{1}{2}$ 4 b2 = 1 - $\frac{1}{2}$ 0 b3 = 0 - $\frac{1}{2}$ 0

c1 = 4 - $\frac{2}{b1}$ b2 c2 = 0 - $\frac{2}{b1}$ b3 c3 = 0 - $\frac{2}{b1}$ 0

d1 = b2 - $\frac{b1}{c1}$ c2 d2 = b3 - $\frac{b1}{c1}$ c3 d2 = b3 - $\frac{b1}{c1}$ c3

s^4	$\boxed{1}$	3	1
s^3	$\boxed{2}$	4	0
s^2	b1	b2	b3
s^1	c1	c2	c3
s^0	d1	d2	d3

Ing. Raúl Gardella
Apunte Clase Virtual 5

Ejemplo de aplicación del criterio de Routh- Hurwitz

s^4	1	3	1
s^3	2	4	0
s^2	1	1	0
s^1	2	0	0
s^0	1	0	0

Se desprende de la ecuación

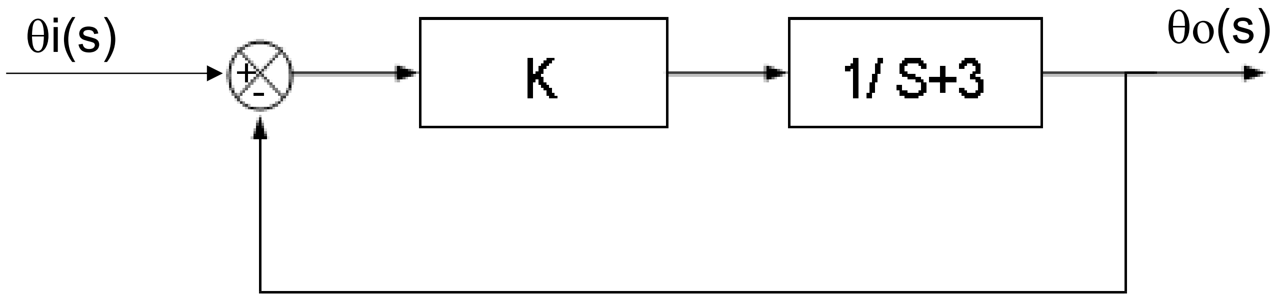
Cada fila se calcula en base a las dos anteriores

Si todos los coeficientes de la primera columna son positivos, indica que todas las raíces (polos de lazo cerrado) son negativas. En este caso podemos afirmar que el sistema es estable.

Si algún coeficiente de la primer columna es negativo, tiene al menos una raíz positiva. Este polo de lazo cerrado con parte real positiva indica que el sistema es inestable.

1) Dado el sistema indicado en la figura determinar:

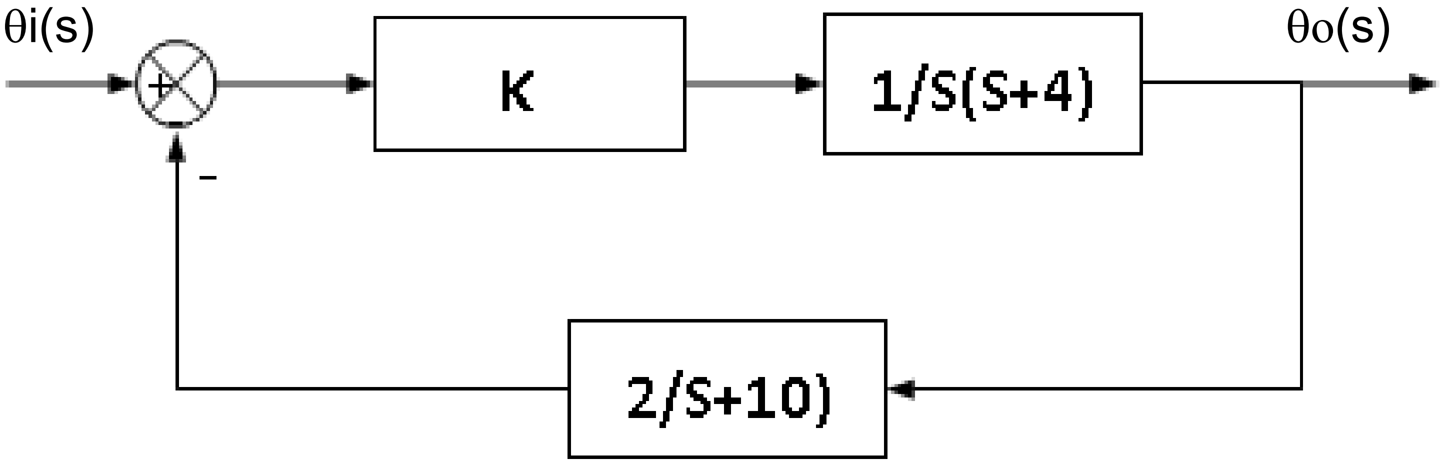
a) Si el sistema es estable analizando la salida en el dominio del tiempo cuando la entrada es un impulso unitario.



b) Gráficamente el movimiento del polo para distintos valores de K.

c) Si el sistema es estable ante una entrada escalón unitario.

2) En el sistema de la figura indicar el intervalo de K para el cual es estable aplicando el método de Routh- Hurwitz. Representar los polos gráficamente para K=0. (polos en lazo abierto)



3. El sistema de guiado de un automóvil tiene una función de transferencia en lazo abierto de $G_{0(s)} = K / s\,(s+a)\,(s+b)$. Indicar los errores en estado estable cuando el sistema está sujeto a:

a. Una entrada escalón de magnitud A.

b. Una entrada rampa con una razón igual a A.