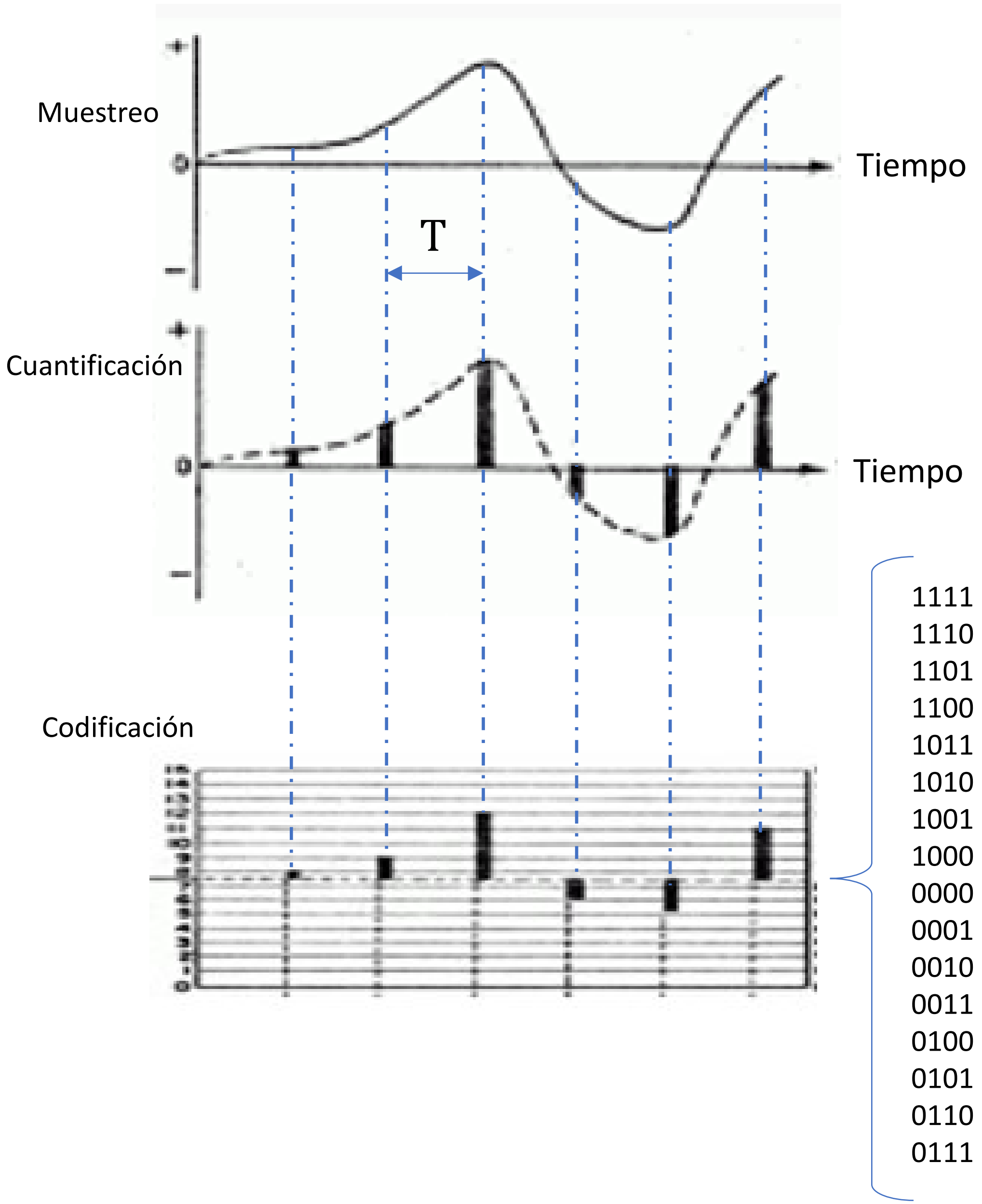
Introducción – Digitalización de una señal



Teorema de Nyquist o del Muestreo

Dada una función cuya energía esta enteramente contenida en un ancho de banda cuya frecuencia máxima es *fmax***,** si se muestrea a una frecuencia igual o mayor a *2 fmax* (ancho de banda finito), la función original puede ser totalmente recuperada por medio de un filtro pasa bajos ideal.
La frecuencia **mínima** de muestreo será: fm $_{(min)}$ = 2 . fmax
Considerando que el ancho de banda del canal telefónico tiene un rango desde los 300 hz hasta los 3400 hz, entonces con una frecuencia de muestreo de 8000 muestras por segundos cumplimos con la condición de Nyquist.
fmuestreo = 8 Khz

Muestras por segundo = 8000 ➔ 1 muestra cada 125 $\mu sseg$
Bits por muestra = 8 (256 niveles)

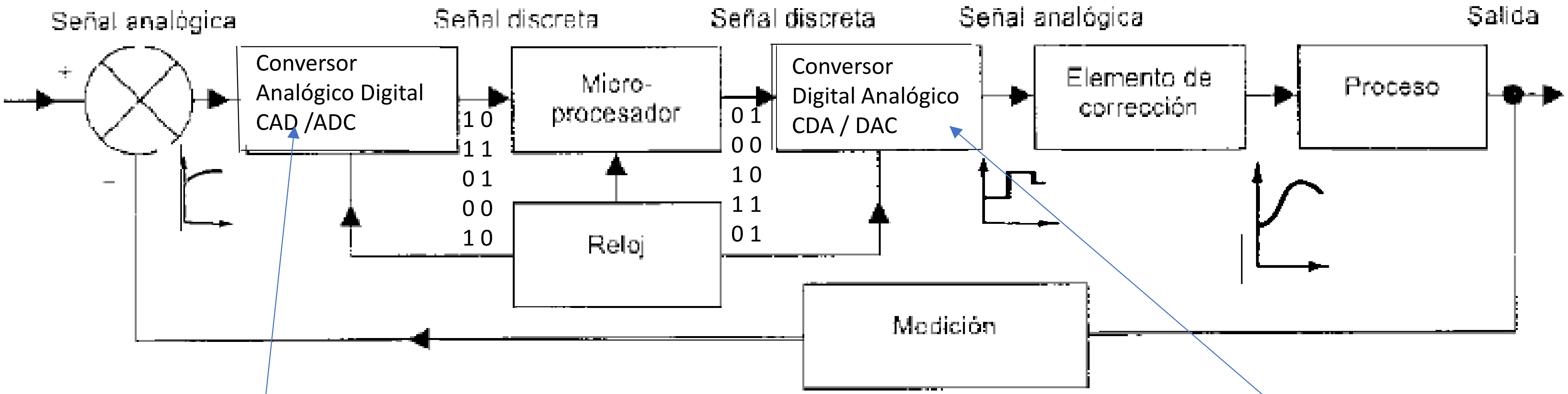
Velocidad del canal = 8000 $\frac{muestras}{Segundo}$ $8 \frac{Bit}{Muestra}$

Velocidad del canal = 64000 $\frac{Bit}{Segundo}$

Velocidad del canal = 64 Kbs

Sistema de datos muestreados

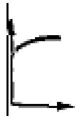
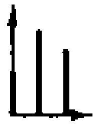
El microprocesador implementa la ley de control



- Muestreo – Retención

+

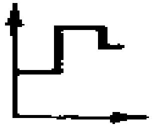
- Convertidor analógica digital (codificación)

 ⇒  ⇒ 0110010...

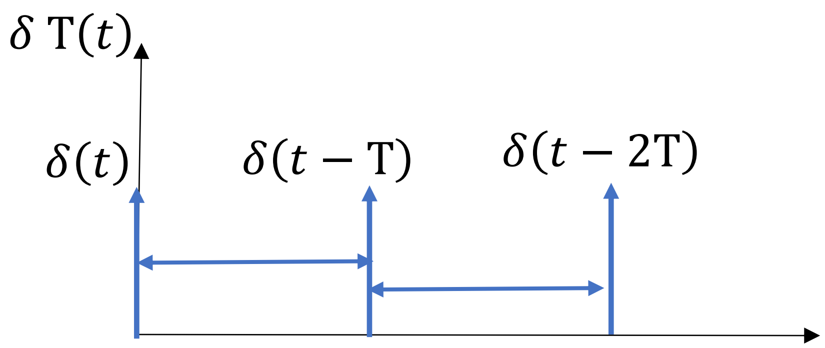
- Convertidor digital analógico

+

- Circuito de retención (ej: ZOH)

(cod. muestra) 1001011... ⇒  ⇒ 

Tren de impulsos



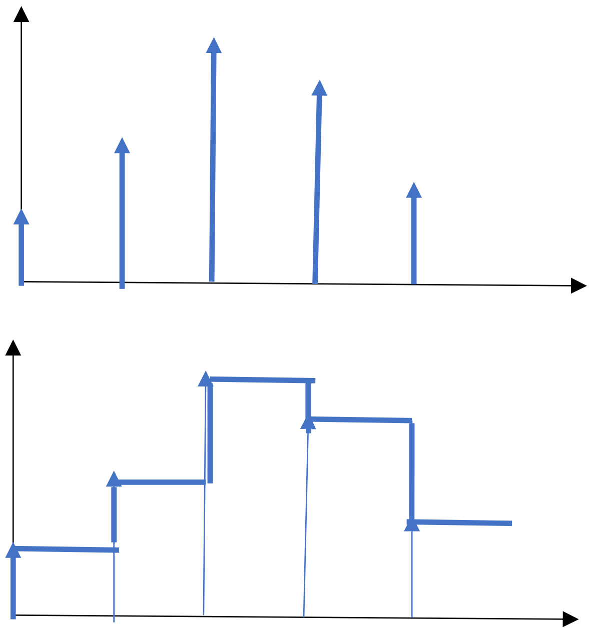
$\mathcal{L}\,[f(t-T)] = e^{-Ts}\;F(S)$

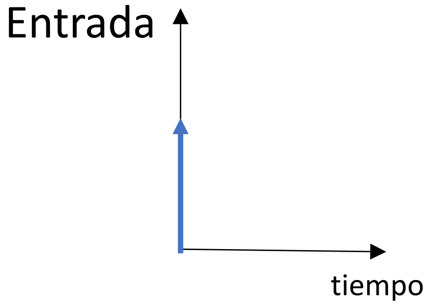
Transformada de Laplace del impulso unitario = 1

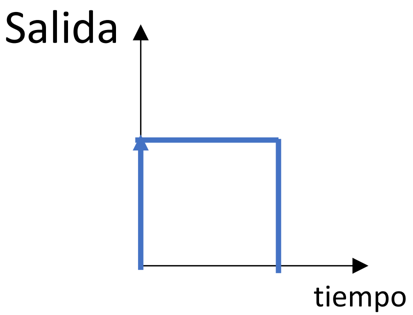
$\mathcal{L}\,[\delta(t-T)] = e^{-Ts}$

$\mathcal{L}\,[\delta(t-2T)] = e^{-2Ts}$

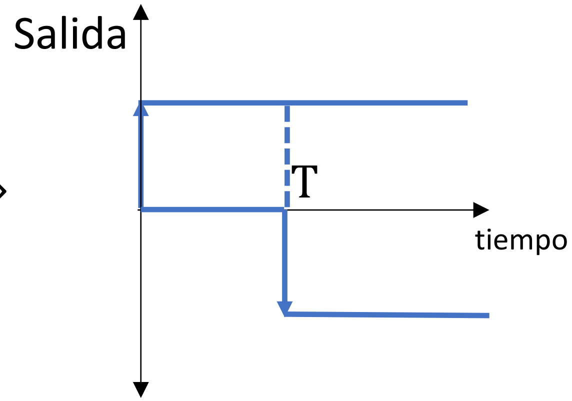
Reten de Orden cero







$\Rightarrow$



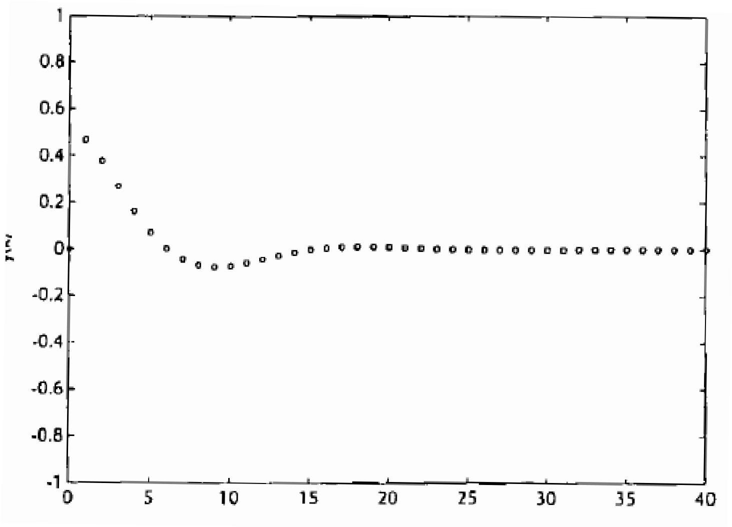
$$\theta_{O(s)} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\mathrm{T}s}}{s}$$

$$\theta_{O(s)} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\mathrm{T}s}}{s}$$

$$\boxed{G_{0(s)} = \frac{1 - e^{-\mathrm{T}S}}{S}}$$

Transferencia para el retén de orden cero

Transformada Z



f*(t) = f [0] $\delta(t)$ + f [1] $\delta(t-1\mathrm{T})$ + f [2] $\delta(t-2\mathrm{T})$ + ……….. + f [k] $\delta(t-K\mathrm{T})$

$\mathcal{L}\ [f\ ^{*}{}_{(t)}] = F_{(S)}$

$F_{(S)} =$ f [0] 1 + f [1] $e^{-\mathrm{T}S}$+ f [2] $e^{-2\mathrm{T}S}$+ ……….. + f [k] $e^{-k\mathrm{T}S}$

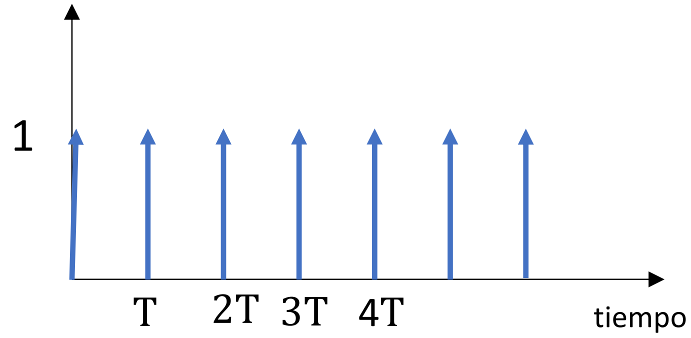
Si Z = e^{TS} $\Longrightarrow e^{-\mathrm{T}S} = Z^{-1}$

$\therefore \quad F_{(Z)}$ = f [0] + f [1] Z^{-1}+ f [2] Z^{-2}+ ……….. + f [k] Z^{-k}

$F_{(Z)} = \sum_{k=0}^{k=\infty}$ f [k] . Z^{-K}

Transformada Z

Escalón unitario muestreado



$$\boxed{F_{(Z)} = \sum_{k=0}^{k=\infty} f\,[k]\;.\;Z^{-K}}$$

$$F_{(Z)} = f\,[0] + f\,[1]\,Z^{-1} + f\,[2]\,Z^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + f\,[k]\,Z^{-k}$$

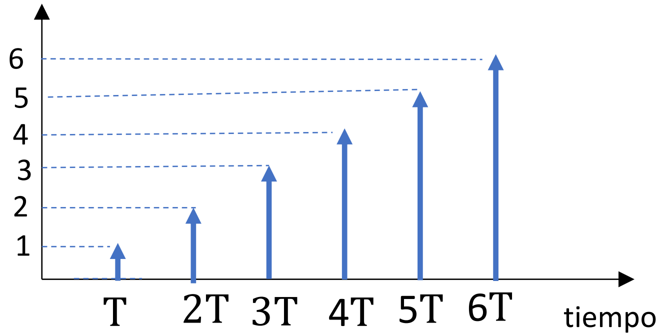
$$F_{(Z)} = f\,[0] + [1]\,Z^{-1} + [1]\,Z^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + [1]\,Z^{-k}$$

Como $1 + x + x^2 + \ \ldots\ldots para\ |X| < 1\ converge\ a\ \frac{1}{1-x}$

Si $x = \frac{1}{z}$ $\Longrightarrow$ $F\ (z) = \frac{1}{1-\,^1/_z}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{F\ (z) = \frac{Z}{Z-1}}$

Transformada Z

Rampa unitaria muestreada



$$\boxed{F_{(Z)} = \sum_{k=0}^{k=\infty} f\,[k]\,.\;Z^{-K}}$$

$$F_{(Z)} = f\,[0] + f\,[1]\,Z^{-1} + f\,[2]\,Z^{-2} + f\,[3]\,Z^{-3} \quad + \ldots\ldots$$

$$F_{(Z)} = [0] + [1]\,Z^{-1} + [2]\,Z^{-2} + [3]\,Z^{-3} \quad + \ \ldots\ldots.$$

$$Z\,.\,F(Z) = [1]\,Z^{0} + [2]\,Z^{-1} + [3]\,Z^{-3} \quad + \ \ldots\ldots$$

Como $1 + 2x + 3x^2 + \ \ldots\ldots para\ |X| < 1\ converge\ a\ \frac{1}{(1-x)^2}$

Si $x = \frac{1}{z}$ $\quad\Longrightarrow\quad F\,(z).Z = \frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{F\,(z) = \frac{Z}{(Z-1)^2}}$

Algunas transformadas Z

$f(t)$ *muestreada, periodo de muestreo* T	$F(z)$
Impulso unitario, $\delta(t)$	1
Impulso unitario retardado por kT	z^{-k}
Escalón unitario, $u(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$
Escalón unitario retardado por kT	$\dfrac{z}{z^k(z-1)}$
Rampa unitaria, t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\dfrac{T^2 z(z-1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
te^{-at}	$\dfrac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$

$f[k]$	$f[0], f[1], f[2], f[3], \ldots$	$F(z)$
$1u[k]$	$1, 1, 1, 1, \ldots$	$\dfrac{z}{z-1}$
a^k	$a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots$	$\dfrac{z}{z-a}$
k	$0, 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
ka^k	$0, a^1, 2a^2, 3a^3, \ldots$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
ka^{k-1}	$0, a^0, 2a^1, 3a^2, \ldots$	$\dfrac{z^2}{(z-a)^2}$
e^{-ak}	$e^0, e^{-a}, e^{-2a}, e^{-3a}, \ldots$	$\dfrac{z}{z-e^{-a}}$

Reglas básicas de la transformada Z

1) $$\mathrm{Z}\,\{f[k] + g[k]] = \mathrm{Z}\,\{f[k]\} + \mathrm{Z}\,\{g[k]\}$$

2) $$\mathrm{Z}\,\{a\, f[k]\} = a\,\mathrm{Z}\{f[k]\}$$

3) $$\mathcal{L}\, f[k-n] = Z^{-n}\, F(z)$$

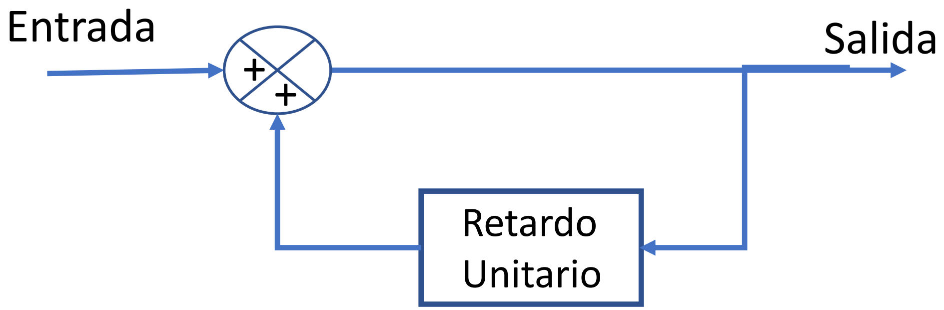
Teorema del valor inicial

$$\mathrm{f}[0] = \lim_{t\to 0} f[k] \equiv \lim_{z\to\infty} F(z)$$

Teorema del valor final

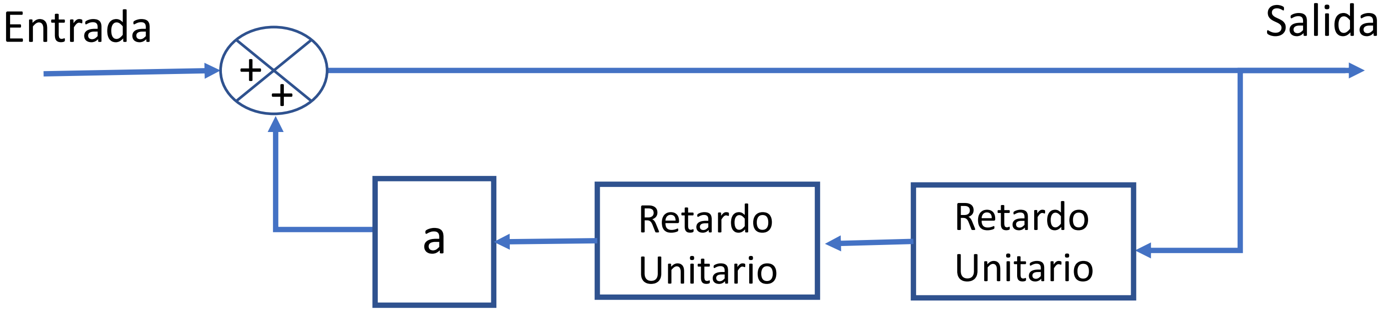
$$\mathrm{f}[\infty] = \lim_{t\to\infty} f[k] \equiv \lim_{z\to 1} (1 - Z^{-1})\, F(z) \equiv \lim_{z\to 1} \frac{Z-1}{Z}\, F(z)$$

Procesamiento de señales en tiempo discreto



$$y[k] = y[k-1] + x[k]$$

Ecuación en diferencias
Relaciona la salida y la entrada para un sistema en tiempo discreto



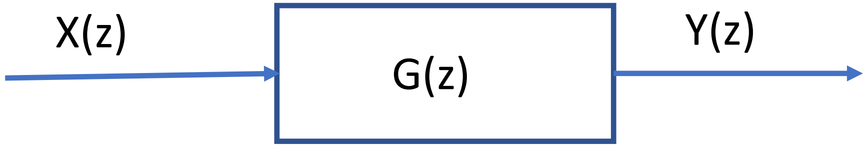
$$y[k] = y[k-2]\,a + x[k]$$

Ecuación en diferencias

Salida como resultado de procesar el pulso presente en la entrada y los pulsos previos de la salida

Función Transferencia de Pulso

La función transferencia de pulso relaciona la transformada Z de la salida en los instantes de muestreo respecto a la entrada muestreada



$$G(z) = \frac{Y\,(z)}{X(z)}$$

Dada la siguiente ecuación en diferencias, hallar la función transferencia de pulso

Ecuación en diferencias

$y[k] = y[k\text{-}2]\ a + x[k]$

Al aplicar la transformada Z obtenemos: $Y(z) = a\ Y(Z)\ Z^{-2} + X(z)$

$$Y(z)\ [\ 1 - a\ Z^{-2}] = X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{[\ 1 - a\ Z^{-2}]}$$

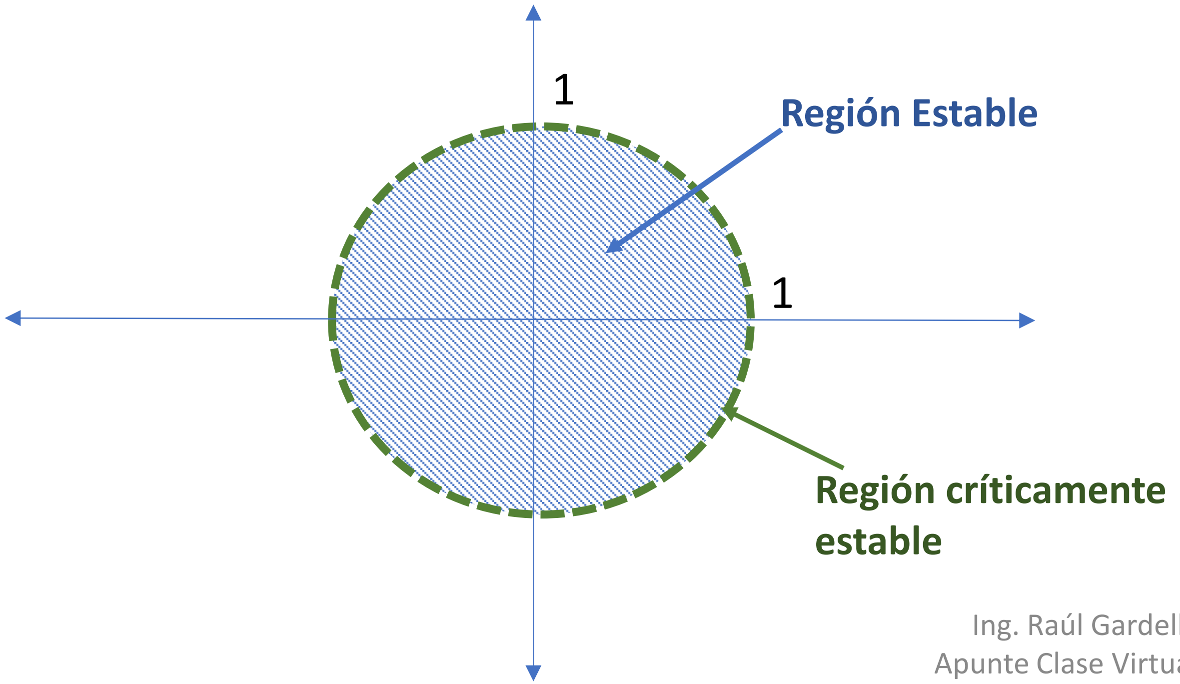
$$\boxed{G(z) = \frac{1}{[\ 1 - a\ Z^{-2}]}}$$

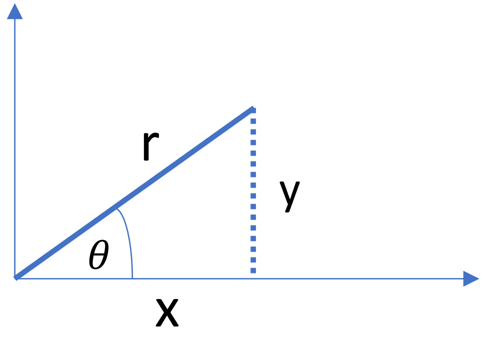
Estabilidad de un sistema en tiempo discreto

$Z = e^{TS}$ $\qquad$ $S = \sigma + j\omega$ $\qquad$ $Z = e^{(\sigma + j\omega)T}$ $\qquad$ $Z = e^{\sigma T}\, e^{j\omega T}$

$Z = \rho\, e^{j\omega T}$

La condición de estabilidad en el plano S es que σ<o.
Esto indica que los límites de ρ será entre cero y uno





x = r cos θ $\qquad$ y = r sen θ

X + jy = r $(\cos\theta + j sen\theta)$

$e^{i\varphi}$ = $\cos\varphi + j sen\varphi$ (Formula de Euler)

$$\boxed{X + jy = r\, e^{i\varphi}}$$

Transformada z inversa

Cuando es dificil encontrar la forma cerrada de la secuencia , se puede obtener las primeras muestras por medio de la division directa

$$Ejemplo\text{: sea } F_{(z)} = \frac{10Z^{-1}+5Z^{-2}}{1-1{,}2Z^{-1}+0{,}2Z^{-2}} \qquad Determinar\ las\ primeras\ muestras\ f_{(k)}$$

$$\begin{array}{l|l}
10Z^{-1} + 5Z^{-2} & 1 - 1{,}2\,Z^{-1} + 0{,}2\,Z^{-2} \\ \hline
10\,Z^{-1} - 12\,Z^{-2} + 2Z^{-3} & 10\,Z^{-1} + 17\,Z^{-2} + 18{,}4\,Z^{-3} + 18{,}68Z^{-4} \\ \hline
0 \quad + 17\,Z^{-2} - 2Z^{-3} & \\
+ 17\,Z^{-2} - 20{,}4Z^{-3} + 3{,}4Z^{-4} & \\ \hline
0 \quad + 18{,}4Z^{-3} - 3{,}4Z^{-4} & \\
+18{,}4Z^{-3} - 22{,}08Z^{-4} + 3{,}68\,Z^{-5} & \\ \hline
0 \quad + 18{,}68Z^{-4} - 3{,}68Z^{-5} &
\end{array}$$

$$\boxed{F_{(z)} = 10\,Z^{-1} + 17\,Z^{-2} + 18{,}4\,Z^{-3} + 18{,}68\,Z^{-4}}$$

1. Determinar la transformada z de las siguientes señales en tiempo discreto:

   a) 0, 0; 0; 0; 1; 1; 1 …………………
   b) 0; 3; 1; 4; 0; 0; 0 …………………

2) Determinar la transformada Z de la secuencia $f_{(k)} = k + e^{-k}$

3) Encontrar la transformada Z de las siguientes secuencias

a) 1,0,0, y todos los valores siguientes son 0
b) 0,0,2 y todos los valores siguientes son 2
c) 0,1,2,3, …., $f_{(k)} = K$

4) Determinar la respuesta a una entrada impulso unitario de un sistema de procesamiento de tiempo discreto que tiene una función de transferencia de pulso de Z/ (Z-1)

5) Determinar si los sistemas de datos muestreados con las siguientes funciones de transferencia pulso son estables.

$G(z)= 5Z / [Z (Z – 1)]$
$G (z)= [3Z – 1] / [3Z^2 +2Z -1]$
$G(z)= [-2Z+1] / [Z^2 +2Z + 1,7]$
$G(z)= [-Z + 0,6] / [Z^2 + 0,5Z + 0,25]$