Appunti di Analisi 2

Mauro Conte, Federico Cerutti

Febbraio 2019

Indice

Parte I

Spazi Metrici

Capitolo 1

Spazi Metrici

1.1 Preliminari

Definizione 1. *Si dice spazio metrico un insieme X non vuoto in cui sia definita una distanza(metrica), vale a dire una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ con le proprietà:*

1. $d(x, y) >= 0 \ \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$ *simmetria*
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, y, z \in X$ *disuguaglianza triangolare*

Esempio 1.

$$X = \mathbb{R}^2, \quad d((x_1, y_1), (X_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$$

si dimostra che la funzione così definita è una distanza:

1. $d(x_1, x_2) \geq 0$, *è verificata poiché l'argomento della radice è sempre positivo o al più nullo essendo una somma di quadrati, e la radice mantiene le quantità positive.*
2. $d((X_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0$
   $\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 - x_1)^2 = 0 \\ (y_2 - y_1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
3. *invertendo le prime componenti con le seconde, il quadrato non cambia quindi la simmetria è rispettata*
4. *DISEGNO TRIANGOLO VETTORI.....*

Esempio 2.

$$X = \mathbb{R}, \quad d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$$

Le proprietà 1,2,3 sono soddisfatte per le proprietà del modulo.
La proprietà 4 si può dimostrare: $d(x_1, x_3) = |x_3 - x_1| \leq |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| = d(x_3, x_2) + d(x_2, x_1)$

Esempio 3.

$$X = \mathbb{R}^3 \quad d(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$$

Analogo al primo esempio

Esempio 4.

$$X = \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i - x_i{}^2}$$

Analogo al primo esempio

Esempio 5.

$$X = \mathbf{C^0}([a, b], \mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

$$d_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$$

1. *X contiene infiniti elementi(funzioni)*
2. *d_∞ è detta distanza uniforme o distanza della convergenza infinita o distanza della convergenza uniforme*
3. *DISEGNO*

Si verificano le 4 proprietà di distanza:

1. *Se* $\sup = \infty$ *non va bene poiché l'insieme di arrivo è $\mathbb{R}$, applicando il Thm. di Weierstrass, una funzione continua definita su un intervallo $[a, b]$ ammette massimo e minimo e quindi anche il* sup
2. *se e solo se hanno lo stesso dominio e per ogni punto di esso entrambe le funzioni hanno la stessa immagine*
3. $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f - g| = \sup_{x \in [a,b]} |f - g| = d_\infty(g, f)$
4. $|h(x) - f(x)| \leq |h(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$, *applicando il sup la disuguaglianza resta vera*

Osservazione 1. *Tutto questo è valido finché $[a, b]$ chiuso e limitato altrimenti non vale più Weierstrass*

UN CONTROESEMPIO

Esempio 6. *ferrovia*

Esempio 7. *Metrica Discreta $X \neq \emptyset$,* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 0 & 1 \neq y \end{cases}$

1. $d(x, y) \geq 0$ *per definizione*
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *per definizione (ragiona sul sse)*

3. $d(x,y) = d(y,x)$ *...per definizione (fai due casi x=y e l'altro)*
4. $d(x,y) \leq d(y-z) + d(z-x)$

Esempio 8.

$$X = \mathbb{R}^2$$

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

$$d'(x,y) = |x_1 - y - 1| + |x_2 - y - 2|$$

...

Esempio 9.

Esempio 10.

$$X = \mathbf{C^0}([0,1], \mathbb{R})$$

$$d_2 = \int_0^1 |g(x) - f(x)|\, d(x)$$

Esempio 11.

$$X = \mathbf{C^0}([a,b], \mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

$$d_2 = \sqrt{\int_a^b [g(x) - f(x)]^2\, d(x)}$$

Proposizione 1. *Sia (X,d) s.m. e $A \subseteq X$ e $A \neq \emptyset$, sia* $\begin{array}{rcl} d_{|A} : A \times A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & d(x,y) \end{array}$ $\Rightarrow (A, d_{|A})$ *è uno spazio metrico*

Dimostrazione. .... □

Definizione 2. *Un insieme è finito se il numero dei suoi elementi è finito*

Definizione 3. *Un insieme è infinito se non è finito*

Definizione 4. *Sia (X,d)s.m., $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ si definisce diametro di A:*

$$diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

Definizione 5. *A è limitato $\leftrightharpoons$ $diam(A)$ è finito ($\in \mathbb{R}$)*

Definizione 6. *A è illimitato $\leftrightharpoons$ $diam(A)$ è infinito ($= \infty$)*

Esempio 12. *...*
...
...
..
....

Osservazione 2. *Ogni insieme finito è limitato e ogni insieme illimitato è infinito. Non valgono i viceversa.*

Esempio 13. .....
....
.....
......
.....
....

Definizione 7. *X è uno spazio (vettoriale) normato sul campo $\mathbb{K}$ se:*

- *X è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$*
- *se è definita una norma su X, ovvero una funzione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*
    1. $\forall x \in X, \quad \|x\| \geq 0$
    2. $\forall x \in X, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
    3. $\forall x, y \in X, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
    4. $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Esempio 14.

$$X = \mathbb{R} \quad \|x\| = |x|$$

Esempio 15.

$$X = \mathbb{R}^2 \quad \left\| \begin{bmatrix} x \\ y+ \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Esempio 16.

$$X = \mathbb{R}^n \quad x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

Esempio 17.

$$X = \mathbb{C} \quad \|x\| = |x|$$

Esempio 18.

$$X = \mathbf{C^0}([a,b], \mathbb{R}) \quad \|f\| \sup_{x \in [a,b]} |f|$$

Proposizione 2. *Sia X uni spazio normato allora (X, d) è uno spazio metrico con* $\begin{array}{rcl} d : X \times X & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \to & \|(\| x_1 - x_2) \end{array}$
Inoltre per la distanza così definita valgono le seguenti proprietà:

1. *INVARIANZA PER TRASLAZIONI*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X \quad d(x_1, x_2) = d(x_1 + x_3, x_2 + x_3)$$

2. *POSITIVAMENTE OMOGENEA*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathbb{R} \quad d(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda| \, d(x_1, x_2)$$

Dimostrazione. Per dimostrare che è uno spazio metrico si dimostra che valgono le proprietà di distanza

1.
2.
3.
4.

□

Definizione 8. *Sia* (X, d) *spazio metrico e siano* $x_0 \in X$ *e* $r \in \diagdown$. *Si dice sfera aperta di centro* x_0 *e raggio* r *l'insieme:*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, y) < r\}$$

Osservazione 3. *se* $r = 0 \Rightarrow B(x_0, r) = \emptyset$
se $r > 0 \Rightarrow x_0 \in B(x_0, r)$

Esempio 19. *In* $\mathbb{R}$ *con* d_E, $B(x_0, r)$ *è un intervallo simmetrico centrato in* x_0

Esempio 20. *In* $\mathbb{R}^2$ *con* d_E, $B(x_0, r)$ *è una un cerchio con centro in* x_0

Esempio 21. *In* $\mathbb{R}^3$ *con* d_E, $B(x_0, r)$ *è una sfera con centro in* x_0

Esempio 22.

Esempio 23.

Definizione 9. *Siano* (X, d_1) *e* (X, d_2) *spazi metrici.* d_1 *e* d_2 *sono equivalenti* $\leftrightharpoons \exists c, C \in \mathbb{R}, c_1 > 0, c_2 > 0$ *t.c:*

$$\forall x, y \in X \quad cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y)$$

1.2 ...

1.3 Limiti e Continuità

Definizione 10. *Siano* (X, d_x) *e* (Y, d_y) *spazi metrici,* $A \subseteq X$,x_0 *di accumulazione per* A, $f : A \to Y$ *una funzione e* $l \in Y$
$\lim_{x} \to x_0 = l \rightleftharpoons \forall \epsilon, \exists \delta : \forall x \in A : d_x(x, x_0) < \delta ex \neq x_0 : d_y(f(x), l) < \epsilon$

Proposizione 3. *Siano* (X, d_x) *e* (Y, d_y) *spazi metrici,* $A \subseteq X$,x_0 *di accumulazione per* A, $f : A \to Y$ *una funzione e* $l' \in Y$,$l'' \in Y$

1.4 Il Teorema delle Contrazioni

Definizione 11. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico. Si dice contrazione una funzione* $T : X \to X$ *soddisfacente a:*

$\exists K \in [0, 1[$ *tale che* $\forall x', x'' \in X$ *vale* $d(Tx'', Tx') \leq Kd(x'', x')$.

Una contrazione è quindi una funzione con insieme di partenza e di arrivo coincidenti e Lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1. E generalmente inutile considerare *contrazioni definite tra spazi diversi. Data una funzione $T : X \to Y$ Lipschitziana, è sempre possibile riscalare la distanza in uno dei due spazi X o Y per ottenere una costante di Lipschitz minore di 1.*

ESEMPI:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *data da* $f(x) = \frac{x}{2}$. f *è una contrazione.*
2. $f : [0, 2] \to [0, 2]$ *data da* $f(x) = 1 + \frac{x}{2}.f$ *è una contrazione*
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *data da* $f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ *è una contrazione*

Proposizione 4. *Sia (X, d) uno spazio metrico, siano $f, g : X \to X$ due contrazioni in $X \Rightarrow f \circ g$ è una contrazione*

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\forall x', x'' \in X, d(fx'', fx') \leq K_f d(x'', x').$$
$$\forall x', x'' \in X, d(gx'', gx') \leq K_g d(x'', x').$$

$f \circ g = f(g(x))$, quindi presi $x', x'' \in X$ si ha che:

$$d(fg(x''), fg(x')) \leq K_f d(g(x''), g(x')) \leq K_f K_g d(x'', x').$$

□

Proposizione 5. *Sia $f \in C1(R^n; R^n)$. Se $\exists k \in [0, 1[$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vale $\|Df(x)\| < k$, allora f è una contrazione.*

Teorema 1. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo in cui è definita una contrazione $T : X \to X$. Allora esiste un unico punto fisso di T in X.*

Dimostrazione. Costruisco una successione di elementi di X nel seguente modo:
scelgo $x_0 \in X$,
$x_1 = T(x_0)$
$x_2 = T(x_1)$

...
$x_n = T(x_{n-1})$
La successione $x_n : n \in N$ così costruita è una successione di Cauchy. Infatti, presi $n, m \in N$ con $m > n$ si ha:

$$d(x_m, x_n) = d(Tx_{m-1}, x_{n-1}) \leq Kd(x_{m-1}, x_{n-1}) =$$
$$= Kd(x_{m-1}, x_{n-1}) = Kd(Tx_{m-2}, x_{n-2}) \leq K^2 d(x_{m-2}, x_{n-2}) =$$
$$= ... =$$
$$= ... = K^n d(x_{m-n}, x_0) \leq$$
$$\leq K^n \sum_{0}^{m-n+1} (d(x_{m-n-i}, x_{m-n-i-1})) =$$
$$\leq \sum_{0}^{m-n+1} (d(Tx_{m-n-i-1}, Tx_{m-n-i-2}))$$

per ogni termine di questa sommatoria si può applicare lo stesso ragionamento

$$\leq K^n \sum_{0}^{m-n+1} (K^{m-n-2} d(Tx_0, x_0)) =$$

$$\leq K^n d(Tx_0, x_0) \sum_{0}^{m-n+1} K^{m-n-2} = K^n \frac{1-K^{m-n-1}}{1-K} d(Tx_0, x_0) \leq \frac{K^n}{1-K} d(Tx_0, x_0)$$

Ho quindi trovato che $d(x_m, x_n) \leq \frac{K^n}{1-K} d(Tx_0, x_0)$
L'ultima espressione ottenuta può essere resa arbitrariamente piccola (in modulo) pur di prendere n, e quindi anche m, sufficientemente elevato. La completezza di X implica quindi che esiste il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} xn$. Sia x^* questo limite. x^* è un punto fisso per T. Infatti, grazie alla continuità di T:

$$T(x^*) = T \lim_{n\to+\infty} xn$$

□

Parte II

Calcolo Differenziale

Capitolo 2

Calcolo Differenziale

2.1 Preliminari

La base canonica di R^n è indicata con $(e_1, ..., e_i)$, e_i è il vettore di R^n con tutte le componenti nulle tranne la i-esima che vale 1.
Un generico vettore x si può quindi scrivere come combinazione lineare dei vettori di base $x = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j e_j$.
Nel caso n=2 è usata la notazione $(x, y) = xi + yj$
Nel caso n=3 è usata la notazione $(x, y, z) = xi + yj + zk$
Alcune classi di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hanno nomi particolari:

- $n = 1$,$m = 1$:f *è una funzione reale di una variabile reale;*
- $n = 1$,$m > 1$:f *è una curva in R^m (purché sia almeno continua e definita su un intervallo)*
- $n > 1$,$m = 1$:f *è un campo scalare*
- $n > 1$,$m > 1$:f *è un campo vettoriale*

2.2 Derivate Parziali e Direzionali

Definizione 12. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, $h, k \in \mathbb{R}$ chiamo derivata parziale rispetto a x di f in (x_0, y_0) la quantità (se esiste finita)*

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

chiamo derivata parziale rispetto a y di f in (x_0, y_0) la quantità (se esiste finita)

$$\partial_y f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Definizione 13. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$, $i = 1, ..., n$*

$$\partial_i f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

dove $(e_1, ..., e_n)$ rappresentano la base canonica di R^n

Osservazione 4. *nella prima definizione la derivata è un valore reale mentre nella seconda è un vettore di* R^m

Osservazione 5. *le proprietà e le regole di derivazione sono le stesse di Analisi 1*

Definizione 14. *sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$*, sia* $v \in \mathbb{R}^2$*con* $\|v\| = 1$ *diciamo derivata nella direzione* v *della funzione* f *nel punto* (x_0, y_0) *il limite (se esiste finito)*

$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

dove v_1, v_2 *sono le componenti di* $v(v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix})$

Definizione 15. *sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$*, sia* $v \in \mathbb{R}^n$*con* $\|v\| = 1$ *diciamo derivata nella direzione* v *della funzione* f *nel punto* x_0 *il limite (se esiste finito)*

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Proposizione 6. *(ANALISI 1): sia* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
f *è differenziabile* $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ *t.c.* $f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h)$ *per* $h \to 0$ *...*
...
...

2.3 Derivata Totale

Definizione 16. *sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
f *è differenziabile in* $x_0 \rightleftharpoons \exists M \in Mat(mxn) : f(x_0 + h) = f(x_0) + Mh + o(h)$ *per* $h \to 0$

Definizione 17. *siano* $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* x_0 *di accumulazione per* A
$f = o(g)$ *per* $x \to x_0 \rightleftharpoons \lim_{x->x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}$

Definizione 18. *sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$
f *è differenziabile in* $(x_0, y_0) \rightleftharpoons f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0) + m_1 h + m_2 k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$ *per* $(h, k) \to (0, 0)$

Definizione 19. *siano* $f, g :: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* (x_0, y_0) *di accumulazione per* A
$f = o(g)$ *per* $(x, y) \to (x_0, y_0) \rightleftharpoons \lim_{(x,y)->(x_0,y_0)} \frac{\|f(x,y)\|}{\|g(x,y)\|}$

Proposizione 7. *(Unicità della derivata totale) sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*,* $x_0 \in \mathring{A}$*,* M_1*,*$M_2 \in Mat(mxn)$
$M1$ *derivata totale di* f *in* x_0*,*
$M2$ *derivata totale di* f *in* x_0*,*
allora $M1 = M2$

Dimostrazione. poiché M_1 e M_2 sono derivate totali di f nel punto x_0,
$f(x_0 + h) = f(x_0) + M_1 h + o(h)$ per $h \to 0$
$f(x_0 + h) = f(x_0) + M_2 h + o(h)$ per $h \to 0$

facendo la differenza membro a membro delle precedenti ottengo che $(M_1 - M_2)h = o(h)$ per $h \to 0$
Scelto $h = te_i$, dove e_i è un vettore della base canonica, si ottiene $(M_1 - M_2)te_i = o(h)$ quindi $\lim\limits_{t\to 0} \frac{(M_1-M_2)te_i}{t\|e_i\|} = \lim\limits_{t\to 0}(M_1 - M_2)e_i = 0$, poiché e_i è un vettore non nullo deve essere $(M_1 - M_2) = 0$ quindi $M_1 = M_2$

□

Osservazione 6. *L'ultima riga della dimostrazione dice che le applicazioni lineari M_1 e M_2 hanno le stesse immagini sui vettori della base canonica, quindi coincidono.*

Proposizione 8. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$*
f è differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0
DIMOSTRAZIONE

..
..
..
..
..
..

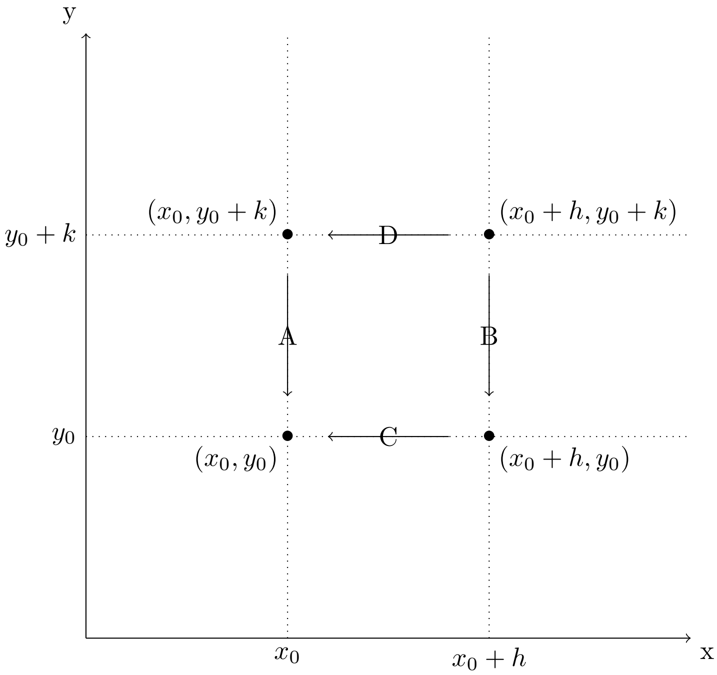
Teorema 2. *Differenziale Totale sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$.*
$\exists \partial_i f(x)\ \forall i = 1, ..., n definite \forall x$ in un intorno di x_0
∂if è continua in x_0
$\Rightarrow f$ è differenziabile in x_0

Teorema 3. *Differenziale Totale sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$.*
$\exists \partial_x f(x, y)$ e $\exists \partial_y f(x, y)$ definite $\forall x$ in un intorno di (x_0, y_0)
$\partial_x f(x, y)$ e $\exists \partial_y f(x, y)$ continue in x_0
$\Rightarrow f$ è differenziabile in (x_0, y_0)

Dimostrazione. devo dimostrare che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0 \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix})}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

dove $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0, y, 0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{bmatrix}$



devo calcolare lo scarto della funzione tra i punti $(x_0 + h, y_0 + k)$ e (x_0, y_0). Ho a disposizione le derivate parziali che mi danno informazioni lungo le parallele agli assi quindi non muovo lungo la diagonale ma lungo i percorsi D,A e B,C
Il limite (¡-) fa zero se il numeratore è zero, allora guardo solo quello.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \partial x f(x_0, y_0)h - \partial y f(x_0, y_0)k$$

riscrivo tale quantità seguendo il percorso D,A

$$[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] + [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)] - \partial x f(x_0, y_0)h - \partial y f(x_0, y_0)k$$

chiamo $\varphi(x) = f(x, y_0)$ quindi $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$
la funzione φ è una funzione reale di una variabile reale ed in virtù del teorema di Lagrange $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \beta h)h$ per $\beta \in]0, 1[$, per come definita φ si ha che $\varphi'(x_0 + \beta h)h = \partial_x f(x_0 + \beta h, y_0)h$
con un ragionamento del tutto analogo si può definire $\Psi(x) = f(x_0 + h, y)$ e si ha che $\Psi(y_0 + h) - \Psi(y_0) = \Psi'(y_0 + \alpha k)k = \partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha k)k$ per $\alpha \in]0, 1[$
Quindi

$$[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] + [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)] - \partial x f(x_0, y_0)h - \partial y f(x_0, y_0)k =$$

$$= [\partial_x f(x_0 + \beta h, y_0)h] + [\partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha k)k] - \partial x f(x_0, y_0)h - \partial y f(x_0, y_0)k =$$

$$= [\partial_x f(x_0 + \beta h, y_0)h - \partial x f(x_0, y_0)h] + [\partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha k)k - \partial y f(x_0, y_0)k]$$

Adesso la riscrivo recuperando il denominatore 'e devo verificare che il limite per $(h, k) \to (0, 0)$ tenda a zero.

$$[\partial_x f(x_0 + \beta h, y_0) - \partial x f(x_0, y_0)]\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + [\partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha k) - \partial y f(x_0, y_0)]\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Le derivate parziali sono continue quindi per $(h, k) \to (0, 0)$ i numeratori tendono a zero
Inoltre le due frazioni per $(h, k) \to (0, 0)$ sono quantità limitate tra -1 e 1 quindi si può dire che il limite cercato fa 0. $\square$

2.4 Regole di Derivazione

Proposizione 9. *Siano* $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
f differenziabile in x_0, g differenziabile in x_0 allora $f + g$ differenziabile in x_0 e $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$

Dimostrazione. f è differenziabile, allora $f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
anche g lo è, quindi $g(x_0 + h) = g(x_0) + Dg(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
sommando membro a membro si ottiene $(f + g)(x_0 + h) = (f + g)(x_0) + [Df(x_0) + Dg(x_0)]h + o(h)$ per $h \to 0$
Questa è la definizione di differenziabilità, allora $f + g$ è differenziabile e $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$ $\square$

Proposizione 10. *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$
f differenziabile in x_0 allora λf differenziabile in x_0 e $D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0)$

Dimostrazione. f è differenziabile, allora $f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
valuto ora $(\lambda f)(x_0 + h) = (\lambda f)(x_0) + \lambda Df(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
Questa è la definizione di differenziabilità, allora λf è differenziabile e $D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0)$ $\square$

Proposizione 11. *Sia* $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
Sia $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *e* $g(x_0) \in \mathring{B}$
f differenziabile in $g(x_0)$, g differenziabile in x_0 allora $f \circ g$ differenziabile in x_0 e $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) * Dg(x_0)$

Dimostrazione. g è differenziabile in x_0, allora $g(x_0 + h) = f(x_0) + Dg(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
f è differenziabile in $g(x_0)$ allora $g(g(x_0) + k) = f(g(x_0)) + Df(g(x_0))k + o(k)$ per $k \to 0$
valuto ora

$$(f \circ g)(x_0 + h) = f(g(x_0 + h) + Dg(x_0)h + o(h)) =$$

$$= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))(Dg(x_0)h + o(h)) + o(Dg(x_0)h + o(h)) =$$

$$= (f \circ g)(x_0) + Df(g(x_0))Dg(x_0)h + Df(g(x_0))o(h) + Dg(x_0)o(h) + o(h)$$

con h un vettore $n \times 1$
con Dg una matrice $m \times n$
con Df una matrice $p \times m$

da rivedere un pochino ....
Questa è la definizione di differenziabilità, allora $f \circ g$ è differenziabile e $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0)$ $\square$

Proposizione 12. *DERIVATA DEL PRODOTTO*

2.5 La Formula degli Accrescimenti Finiti

Definizione 20. *Siano $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, si dice segmento di estremi x_0 e x_1 l'insieme $S = tx_1 + (1-t)x_0 : t \in [0,1]$*

Proposizione 13. *Formula degli accrescimenti finiti*
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0, x_1 \in \mathring{A}$, S il segmento di estremi x_0, x_1, sia $f \in \mathbf{C^1}(A, \mathbb{R}^m)$ allora $\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{x \in S} \|Df(x)\| \, \|x_1 - x_0\|$

Osservazione 7. $\|A\|$ *con* $A \in Mat(n \times m)$, $\|A\| = \sup_{\|x\|=1 : x \in \mathbb{R}^n} \|Ax\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n n\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ *questa è chiamata norma operativa*
NOTA:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Dimostrazione. sia $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ che $t \to f(tx_1 + (1-t)x_0)$
La funzione F è una funzione reale di variabile reale , posso quindi applicare il teorema di Lagrange $F(1) - F(0) = F'(\theta)1$ quindi $f(x_1) - f(x_0) = Df(\theta x_1 + (1-\theta)x_0)(x_1 - x_0)$
scelto $v \in \mathbb{R}^m$ con $v = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{\|f(x_1)-f(x_0)\|}$ moltiplico entrambi i membri per v si ottiene $v(f(x_1)-f(x_0)) = vDf(\theta x_1 + (1-\theta)x_0)(x_1 - x_0)$
... da finire per bene ☐

Definizione 21. *Sia $C \in \mathbb{R}^n$, C è convesso $\rightleftharpoons \forall x_0, x_1 \in C$ anche $S_(x_0, x_1) = \{tx_1 + (1-t)x_0 : t \in [0,1]\} \subseteq C$ù*

Proposizione 14. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A è aperto connesso e $f \in \mathbf{C^1}(A; \mathbb{R}^m)$ e $Df = 0$ allora f è costante su A*
..... disegnino e bozza di dimostrazione

Proposizione 15. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A è aperto convesso e $f \in \mathbf{C^1}(A; \mathbb{R}^m)$ e $Df = 0$ allora f è costante su A*
..... disegnino e bozza di dimostrazione

Proposizione 16. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A è aperto connesso e $f \in \mathbf{C^1}(A; \mathbb{R}^m)$ e $Df = 0$ allora f è costante su A*
..... disegnino e bozza di dimostrazione

Osservazione 8. *vale anche sugli insiemi connessi poiché in questi posso congiungere due qualunque punti con una poligonale interamente contenuta nell'insieme e con i lati paralleli agli assi. Attraverso la formula degli accrescimenti finiti posso calcolare la f nei due estremi passando per tutti gli spigoli della poligonale.(Uno spigolo è un segmento quindi si puòapplicare il teorema precedente)*

si po dire qualcosa sulle funzioni lineari tipo c1, lips ....

2.6 Derivate Seconde

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *sappiamo che* $Df(x_0) \in Mat(m \times n)$*, allora* $Df : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$ *cioè la derivata è una funzione a valori in* $Mat(m \times n)$*, ne segue che* $D(D(F)) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n\times n}$

Definizione 22. *sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *derivabile parzialmente in* x_0 *lungo* e_i*. Se la funzione* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *è derivabile parzialmente lungo* e_j *in* x_0*, la quantità* $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ *è la derivata seconda di* f *in* x_0 *rispetto* x_i, x_j *e si indica* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

Definizione 23. *sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
f differenziabile due volte in xo $\rightleftharpoons$ f *è differenziabile in un intorno di* x_0 *e* f *è differenziabile in* x_0

Osservazione 9. *con la notazione della definizione precedente,* f *è una funzione definita in un intorno di* x_0 *con valori in* $Mat(m \times n)$*, spazio identificabile con* $R^{m\times n}$

Osservazione 10. *per una funzione scalare* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, la derivata prima è un vettore (il gradiente* ∇ *in* $R^{1\times n}$*), la derivata seconda è una matrice in* $R^{1\times n\times n}$*, la derivata terza è una super matrice ...*

Definizione 24. *sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$*,* f *ammette tutte le derivate parziali seconde in* x_0*. La matrice di queste derivate seconde si chiama Matrice Hessiana di* f *in* x_0

$$H_f(x_0) = D^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

ESEMPI:
...
...
...

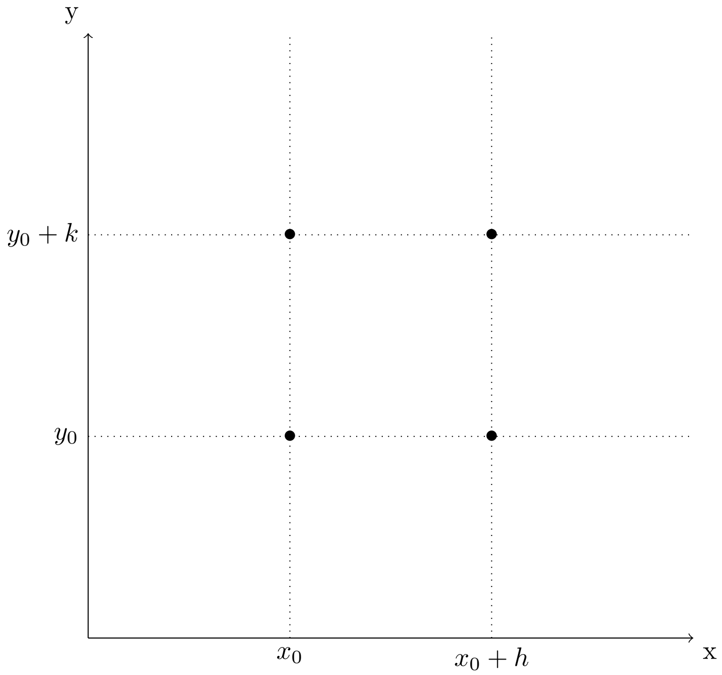
2.7 Il Lemma di Schwarz

Proposizione 17. *sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$*. Fino ...*
$\exists \partial^2_{ij} f(x)$ *e* $\exists \partial^2_{ji} f(x)$ *in un intorno di* x_0 *e continue in* $x_0 \Rightarrow$ *....*

CASO n=2 m=1

Proposizione 18. *sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$*. .....*
$\exists \partial^2_{xy} f(x, y)$ *e* $\exists \partial^2_{yx} f(x, y)$ *in un intorno di* (x_0, Y_0) *e continue in* $(x_0, y_0) \Rightarrow$ *....*

Dimostrazione. prendo una quantità $q = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$



L'idea è quella di calcolare q in due modi diversi e osservare che le due scritture rappresentano la stessa quntità quindi sono uguali.

$$q = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]$$

scelgo una funzione $\varphi(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)$

$$q = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\alpha' h)h$$

valida per $\alpha' \in]0, 1[$ e $\varphi'(h) = \partial_x f(x_0 + h, y_0 + k) - \partial_x f(x_0 + h, y_0)$

$$q = [\partial_x f(x_0 + \alpha' h, y_0 + k) - \partial_x f(x_0 \alpha' h +, y_0)]h$$

scelgo una funzione $\varPhi(k) = \partial x f(x_0 + h, y_0 + k)$

$$q = [\varPhi(k) - \varPhi(0)]h = \varPhi'(\beta' k)hk$$

valida per $\beta' \in]0, 1[$ e $\varPhi'(k) = \partial_y \partial_x f(x_0 + \alpha' h, y_0 + k)$

$$q = \partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha' h, y_0 + \beta' k)hk$$

Ma q può anche essere calcolata in un secondo modo

$$q = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] - [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

scelgo una funzione $\psi(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)$

$$q = \psi(k) - \varphi(0) = \psi'(\alpha'' k)k$$

valida per $\alpha'' \in]0, 1[$ e $\psi'(k) = \partial_y f(x_0 + h, y_0 + k) - \partial_y f(x_0, y_0 + k)$

$$q = [\partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha'' k) - \partial_y f(x_0, y_0 + \alpha'' k)]k$$

scelgo una funzione $\Psi(h) = \partial y f(x_0 + h, y_0 + \alpha'' k)$

$$q = [\Psi(h) - \Phi(0)]k = \Psi'(\beta'' k)hk$$

valida per $\beta'' \in]0,1[$ e $\Psi'(h) = \partial_x \partial_y f(x_0 + h, y_0 + \beta'' k)$

$$q = \partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha'' h, y_0 + \beta'' k)hk$$

Abbiamo quindi trovato che

$$\partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha' h, y_0 + \beta' k)hk = \partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha'' h, y_0 + \beta'' k)hk$$

Ci sarebbe un disegno ...
...
Abbiamo trovato che le derivate parziali seconde miste coincidono in due punti ad esempio quelli segnati con il cerchio, poiché $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ li abbiamo scelti in $]0,1[$
poiché h, k li abbiamo scelti del tutto arbitrari allora facciamo il limite e poiché le due quantità sono uguali allora sono uguali anche i limiti.
allora per $(h,k) \to (0,0)$ anche $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ cambiano ma essendo limitati tra $]0,1[$ moltiplicandoli oer una quantità che tende a zero fa tutto zero.
Usando la continuità, per $(h,k) \to (0,0)$ ottengo $\partial^2_{xy} f(x_0, y_0) = \partial^2_{yx} f(x_0, y_0)$ □

Osservazione 11. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$Df(x_0) = \nabla f(x_0) \in Mat(1 \times n)$
$H_f(x_0) \in Mat(n \times n)$
Il lemma di Schwarz dice che sotto opportune ipotesi la $H_f(x_0)$ è una matrice simmetrica, in questo caso non dobbiamo calcolare $n \times n$ termini, ma solo $\frac{n(n+1)}{2}$

2.8 Sviluppo in Serie di Taylor al II Ordine

sacbnijldasbndfcbuhsadebuhjdewsafbnmweasdbuijeasdhl...
sdadsadsfsdasdfasdfasdfafewrgvregrgbreqeragerwawfer...

2.9 Il Teorema della funzione Implicita

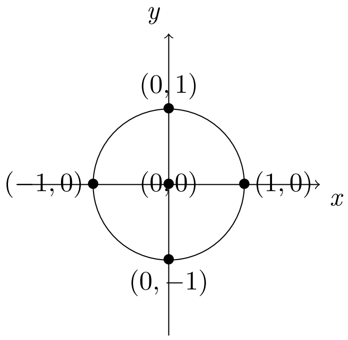
Definizione 25. *sia $X \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in \mathbb{R}^m$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}^l$, $x_0 \in \mathring{X}$, $y_0 \in \mathring{Y}$.*
L'equazone $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di $(x_0, y_0) \rightleftharpoons$

1. *$f(x_0, y_0) = 0$, rappresenta un punto di partenza*
2. *$\exists \mathcal{X}$ intorno di x_0 e $\exists \mathcal{Y}$ intorno di y_0, in questo modo due intorno uno per punto, uno è l'insieme di partenza, l'altro l'insieme di arrivo*
3. *$\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.: $f(x,y) = 0$ con $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$*

ESEMPIO:
$m = n = l = 1$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, questa equazione non definisce mai una funzione implicita poiché non è mai nulla

ESEMPIO:

$m = n = l = 1,\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$



Per prima cosa osservo che s possono trovare dei punti che rendono vera $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ *e sono tutti i punti della circonferenza di centro l'origine degli assi e raggio unitario.*
il punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ *definisce implicitamente una funzione* $y = \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *con* $\mathcal{X} = [-1, 1]$ *e* $\mathcal{Y} = [0, 1]$
un primo problema è dovuto alla scelta degli intervalli $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$*, per esempio posso scegliere* $\mathcal{X} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *e* $\mathcal{Y} = R^+$
un secondo problema è la scelta del punto (x_0, y_0)*, potrei scegliere il punto* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Osservazione 12. *La stessa definizione può essere riscritta con la x funzione della y poiché a priori non c'è distinzione tra le variabili.*

Proposizione 19. *(caso lineare)*
sia $f : R^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *che* $(x, y) \to Ax + By - C$ *con* $A \in Mat(p \times n), B \in (p \times m), B \in (p \times 1)$.
Se $p = m$ *cioè B è un matrice quadrata, e* $det(B) \neq 0$ *cioè invertibile, allora*
$\exists! \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *t.c.:* $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

Dimostrazione. $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = -C \Leftrightarrow By = -Ax + C \Leftrightarrow y = -B^{-1}Ax + B^{-1}C = \varphi(x)$ □

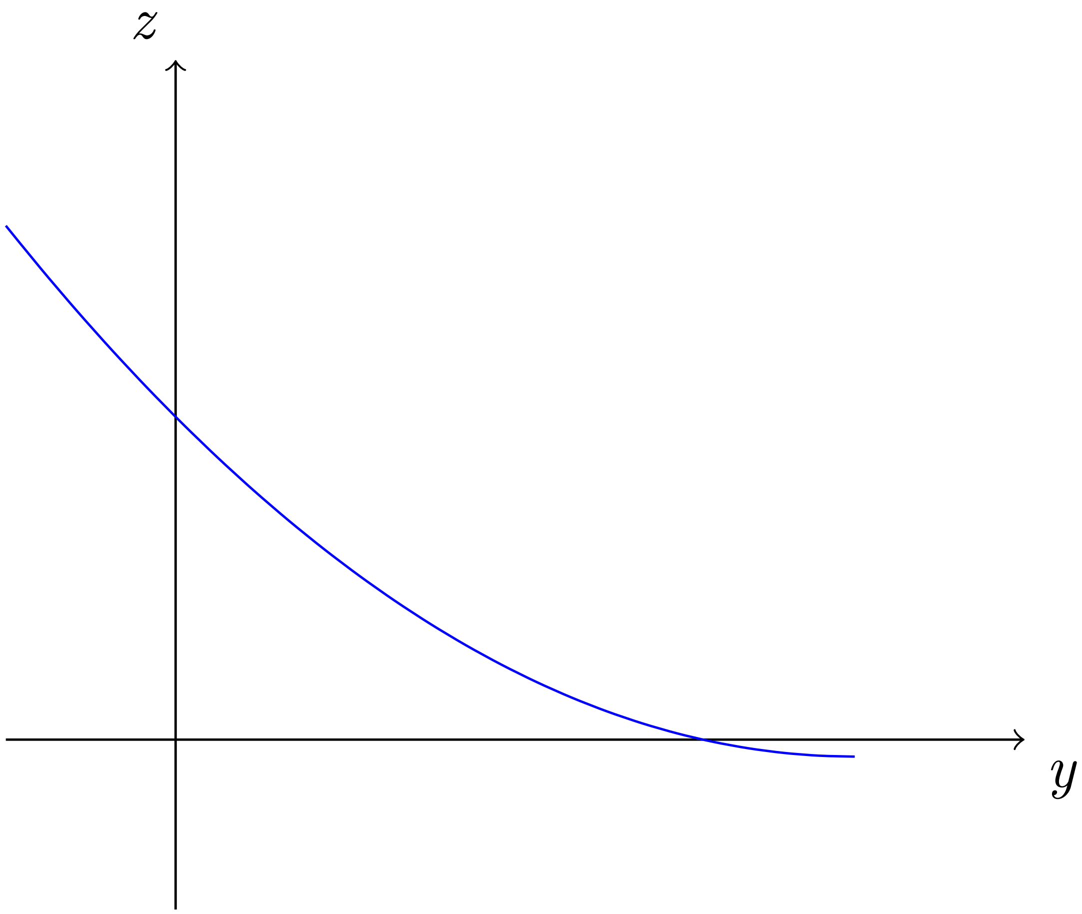
Proposizione 20. *Sia* $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ *con* $X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m$
Preso un punto (x_0, y_0) *con* $x_0 \in \mathring{X}, y_0 \in \mathring{Y}$
se:

1. *f continua in* $X \times Y$
2. $f(x_0, y_0) = 0$
3. *f differenziabile rispetto a* $y \forall (x, y) \in X \times Y$ *e* $D_y f(x, y)$ *continua.*
4. $D_y f(x_0, y_0)$ *invertibile .*

$\Rightarrow$ *si ha:*
esistenza della funzione implicita
$\exists \mathcal{X} \subseteq X$ *intorno di* x_0*(xstrano aperto)*
$\exists \mathcal{Y} \subseteq Y$ *intorno di* y_0*(ystrano aperto)*
$\exists \varphi$ *continua con* $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *t.c.* $[\varphi(x_0) = y_0 e] f(x, y) = 0, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ *unicità di sostanza cioè a meno del dominio:*
se $\varphi_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{Y}_i$ *e* $x_0 \in \mathcal{X}_i, y_0 \in \mathcal{Y}_i$
$f(x_0, y_0) = 0 \forall x \in \mathcal{X}_i, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi_i(x)$ *con* $i = 1, 2$
Allora $\forall \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ *vale* $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

Osservazione 13. *Le ipotesi 3 e 4 garantiscono che esiste una approssimazione lineare, l'ipotesi 4 è sensata poiché y e f hanno lo stesso numero di componenti quindi Dyf è un matrice qudrata. la funzione $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ che $(x, y) \to f(x, y)$??????*
cioè $\forall x \in X$ (sto fissando una x) $f^x : Y \to \mathbb{R}^m$ che $y \to f(x, y)$(sto variando la y), $Df^x \in Mat(m \times m)$

Osservazione 14. *Metodo degli zeri di Newton per troare gli zeri di una funzione o metofo delle tangenti.*



Scelgo un punto y_0 ne prendo il valore sulla curva, disegno la tangente e chiamo y_1 l'intersezione con l'asse y. Itero il processo $y_n + 1 = y_n \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$
discorso al momento difficile per me....

Dimostrazione. Dobbiamo partire da $f(x, y) = 0$ arrivare a $y = \varphi(x)$,vogliamo applicare un ragionamento simile a quello della Metodo di Newton, passando però per il concetto di punto fisso, il teorema delle Contrazioni ci assicura che esiste unico.
cerchiamo quindi una contrazione T il cui punto fisso sia soluzione di $f(x, y) = 0$. T è del tipo:
$T : ? \times ? \to ?$
$(x, y) \to y - [D_y f(X_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$, nota che non avere nella derivata lo stesso punto in cui si calcola la funzione (come è nel metodo di Newton) ha effetti "tragici" sulla velocità di convergenza, ma a noi interessa l'esistenza.

bisgna capire quali insiemi usare come insiemi di partenza e arrivo, devo essere scelti in modo da poter applicare il teoremma delle contrazioni. Bisogna scegliere sottoinsiemi di R^n e R^m, scegliamo quindi delle sfere
$T : \overline{B(x_0, r_x)} \times \overline{B(y_0, r_y)} \rightarrow \overline{B(y_0, r_y)}$, scegliendo la chiusura delle sfere si è sicuri di lavorare in uno spazio metrico completo, poiché in R^l completo $\Leftrightarrow$ chiuso e limitato.
come vengono invece scelti i raggi? sono scelti in modo che:

1. T è ben definita
2. $\forall x \in \overline{B(x_0, r_x)} Tx : \overline{B(x_0, r_x)} \rightarrow \overline{B(y_0, r_y)}$ che $y \rightarrow T(x, y)$,

cioè T è una contrazione tale che $\forall x$ esiste un punto fisso, $\forall x$ associo a y una x, e quindi na funzione.
r_x, r_y devono essere sufficientemene piccoli per avere tali proprietà e per poterci lavorare sopra.
Abbiamo che $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow T(x, y) = y$
$T(x, y) = y \Leftrightarrow y = y - [D_y F(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$
$[D_y F(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) = 0$
Per verificare che T è una contrazione ne stimo la norma
$\|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| \leq \sup\limits_{\widetilde{y} \in segmento} \|D_y T(x, \widetilde{y})\| \|y_2 - y_1\|$ accrescimenti finiti.
Poichè le sfere sono insiemi convessi è stato possibile applicare il Teorema degli accresscimenti finiti.
Presa $T(x, y) = y - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$, la derivo rispetto a y:

$$D_y T(x, y) = I_{\mathbb{R}}^m - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} D_y f(x, y) =$$

$$= [D_y f(x_0, y_0)]^{-1}][D_y f(x_0, y_0) - D_y f(x, y)]$$

Osserviamo che abbiamo ottenuto una matrice come costante moltiplicativa, al secondo membro abbiamo la differenza di due valori di una funzione, che per ipotesi è una funzione continua ($D_y f(x, y)$ continua), allora per r_x e r_y sufficientemente piccoli ho che:
$\|D_y T(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$, è scelto questo valore poiché è comodo al fine di dimostrare la contrazione...

$$\|D_y T(x, y)\| \leq \left\|D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|D_y f(x_0, y_0) - D_y f(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$$

$$\|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| \leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\|$$

Se dimostriamo che T è ben definita abbiamo dimostrato che T è una contrazione.
Per verificare che T è en definita bisogna mostrare che $T(x, y) \subseteq \overline{B(y_0, r_y)}$ quindi si mostra che la distanza tra $T(x, y)$ e il centro è minore di r_y

$$\|T(x, y) - y_0\| \leq \|T(x, y) - T(x, y_0)\| + \|T(x, y_0) - y_0\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\|y_0 - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y_0) - y_0\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\|[D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|f(x, y_0) - 0\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\|[D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}r_y + \frac{1}{2}r_y \leq r_y$$

Allora T è ben definita perché $T(x, y) \in \overline{B(y_0, r_y)}$.
In conclusione con $\mathcal{X} = \overline{B(x_0, r_x)}$ e $\mathcal{Y} = \overline{B(y_0, r_y)}$ ho che $T : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ è tale che $\forall x \in \mathcal{X}$ la funzione $y \to T(x, y)$ è una contrazione e $\overline{B(y_0, r_y)}$ è completo.
quaolcosa sui completi.........
....
....
A questo punto può essere applicato il teorema delle contrazioni:
$\forall x \in \mathcal{X}, \exists y \in \mathcal{Y} : f(x, y) = 0$ allora chiamo $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ che $x \to y$ è unica quindi φ è una funzione.
Allora la funzione implicita esiste. La continuità direva direttamente dal teorema delle contrazioni: l'applicazione che al parametro associa il punto fisso è continua.
Per l'unicità si osservano le ipotesi 1 e 2, dove è scritto $\forall x$ ovvero scelta una qualunque x la y è unica quindi φ è univocamente definita.

□

Proposizione 21. *Sia $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ con $X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m$*
Preso un punto (x_0, y_0) con $x_0 \in \mathring{X}$,$y_0 \in \mathring{Y}$
se:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $f \in \mathbf{C^1}(X \times Y, R^m)$.
3. $D_y f(x_0, y_0)$ *invertibile* .

$\Rightarrow$ *si ha:*

1. $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *definita implicitamente da* $f(x_0, y_0) = 0$
2. φ *continua su* $\mathcal{X}$
3. φ *è differenziabile e* $D\varphi(x) = -[D_y f(x, \varphi(x))]^{-1} D_x f(x, \varphi(x))$

Dimostrazione. I punti 1 e 2 sono gli stessi del teorema della funzione implicita e si dimostrano allo stesso modo.
Per il punto 3 abbiamo che $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ e quindi $\forall x \in \mathcal{X}$ $f(x, \varphi(x)) = 0$
....
....

□

Proposizione 22. *CASO N=1, M=1*
Sia $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ con $X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}$
Preso un punto (x_0, y_0) con $x_0 \in \mathring{X}$,$y_0 \in \mathring{Y}$
se:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $f \in \mathbf{C^1}(X \times Y, R)$.
3. $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.

$\Rightarrow$ *si ha:*

1. $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *definita implicitamente da* $f(x_0, y_0) = 0$
2. $\varphi \in \mathbf{C^0}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
3. φ *è derivabile e* $\varphi'(x) = -[\partial_y f(x, \varphi(x))]^{-1} \partial_x f(x, \varphi(x))$

Dimostrazione. $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$, derivando $D(f(x, \varphi(x))) = 0$
$\partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$
allora $\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}$ □

Osservazione 15. *Non essendoci motivo per preferire la x alla y o viceversa, esiste anche una versione di questo teorema in cui le ipotesi sono le stesse eccetto l'ultima che diventa* $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$

1. $\exists \psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ *definita implicitamente da* $f(x, y) = 0$
2. $\psi \in \mathbf{C^0}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$
3. ψ *è derivabile e* $\psi'(y) = -[\partial_x f(\psi(y), y)]^{-1} \partial_y f(\psi(y), y)$

Qualche esempio qui

2.10 Il Teorema della funzione Inversa

Data una funzione f, poterla invertire ...... unico modo l'equazione (o sistema ....)... l'incognita x in funzione del parametro .....

Proposizione 23. *(Teorema della funzione inversa caso lineare)*
Sia $f : R^n \in \mathbb{R}^m$ *data da* $f(x) = Mx$ *e* $M \in Mat(m \times n)$, f *è invertibile* $\Leftrightarrow n = m$ *e* $detM \neq 0$

Proposizione 24. *(caso generale)*
sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ *con* $A \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbf{C^1}(A, R^n)$, $x_0 \in \mathring{A}$ *e* $Df(x_0)$ *invertibile.*
Allora $\exists \mathcal{X} \in A, \exists \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^n$, $\exists \varphi \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ *con la proprietà* $f(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi(y)$ *con* $x \in \mathring{\mathcal{X}}$ *e* $y \in \mathring{\mathcal{Y}}$ *e* $\varphi \in \mathbf{C^1}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ *e* $D\varphi(y) = [Df(x)]^{-1}$

Dimostrazione. $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) - y = 0$. Allora introduco $F : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $F(x, y) = f(x) - y$.
Studio $F(x, y) = 0$ per ottenere $x = \varphi(y)$.
Per poter applicare il teorema della funzione implicita serve $D_x F(x_0, y_0)$ invertibile, ma $D_x F(x_0, y_0) = Df(x_0)$ che è invertibile per ipotesi.
Applico allora il teorema della funzione implicita , quindi gli intorni esistono e $x = \varphi(y)$.
resta da trovare la derivata totale di φ. Sappiamo che $f \in \mathbf{C^1}$ quindi $\varphi \in \mathbf{C^1}$.
Sappiamo che $\varphi(f(x)) = x$, applicando la derivata della funzione composta abbiamo che:
$D\varphi(f(x))Df(x) = I$
$D\varphi = [Df(x)]^{-1}$ quando $\varphi(y) = x$
si puo anche scrivere come $(Df^{-1})(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$ □

2.11 Massimi e Minimi Liberi

Definizione 26. *Siano (X,d)s.m., $A \subseteq X$ e $f : A \to \mathbb{R}$, siano $x_0 \in A, B \in A$ e $m, M \in \mathbb{R}$ (L'insieme immagini deve essere R per poter parlare di massimi e minimi, R è un campo ordinato a differenza di R^n).*
M è massimo di f su $B \rightleftharpoons M = \max f(B) \Leftrightarrow \forall x \in B f(x_0) \geq f(x)$
M è minimo di f su $B \rightleftharpoons m = \min f(B) \Leftrightarrow \forall x \in B f(x_0) \leq f(x)$
x_0 è punto di massimo assoluto per $f \rightleftharpoons f(x_0) = \max\limits_A f(x)$
x_0 è punto di minimo assoluto per $f \rightleftharpoons f(x_0) = \min\limits_A f(x)$
x_0 è punto di massimo locale relativo per $f \rightleftharpoons \exists r > 0 : f(x_0) = \max\limits_{x \in B(x_0,r)} f(x)$ con $B(x_0, r) \subseteq A$
x_0 è punto di minimo locale relativo per $f \rightleftharpoons \exists r > 0 : f(x_0) = \min\limits_{x \in B(x_0,r)} f(x)$ con $B(x_0, r) \subseteq A$

2.11.1 Condizioni Necessarie

Proposizione 25. *Teorema di Fermat*
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Se x_0 è punto di massimo(0 minimo) locale per f su A e f è differenziabile in x_0 allora $\nabla f(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$, la funzione $F(t) = f(x_0 + tv)$ che a $t \to x_0 + tv$ è il moto rettilineo uniforme che passa da x_0 all'istante 0 e si muove con velocità vettore costante v. cioè per tempi negativi mi avvicino a x_0 al tempo zero si è in x_0 e per tempi positivi si allontana da x_0. quindi $t = 0$ è punto di massimo per F, allora $F'(0) = 0$ per il teorema di Fermat di A1.
Ora abbiamo che $F'(t) = \nabla f(x_0 + tv)v$ quindi $F'(0) = \nabla f(x_0)v$ cioè $\nabla f(x_0)v = 0$.
Quindi $\forall v : \|v\| = 1$ vale $\nabla f(x_0) = 0$
OSS:: Vale anche che $D_v f(x_0) = 0$ □

Definizione 27. *sia $f : A \subseteq r^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$*
x_0 è punto stazionario .... $\rightleftharpoons f$ è differenziabile in x_0 e $\nabla f($ ......

Osservazione 16. *nel caso $n = 2, m = 1, \nabla f(x_0, y_0) = [\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)]$ ..... i punti stazionari sono quelli che ......parziali.*

Osservazione 17. *Prima di continuare un paio di osservazioni sulle forme quadratiche.*

Definizione 28. *forma quadratica su $R^n \rightleftharpoons q : R^n \to \mathbb{R}$ che $x \to x^T Q x$ con $Q \in Mat(n \times n)$ simmetrica*
ESEMPI:n=2

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO
SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO
SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO

Proposizione 26. *se Q è una forma quadratica, allora*

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

- $q(0) = 0$
- *se* q *è limitata* $\Rightarrow q \equiv 0$

Dimostrazione.
- $q(\lambda x) = (\lambda x)^T Q(\lambda x) = \lambda^2 x^T Qx = \lambda^2 q(x)$
- $q(0) = q(0x) = 0q(x) = 0$
- (contronominale $q \neq 0 \Rightarrow q$ non è limitata).
  se q è non nulla $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$ $q(x) \neq 0$
  allora $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ illimitata.
- ???

□

Proposizione 27. *se* q *è una forma quadratica* $\Rightarrow \exists M \geq 0 : |q(x)| \leq M \|x\|^2$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Dimostrazione. per $x \neq 0$ $|q(x)| = \left|q\left(\|x\| \frac{1}{\|x\|}x\right)\right| = \|x\|^2 \left|q\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right| \leq$
$\leq \left(\sup_{\|x\|=1} |q(x)|\right) \|x\|^2 =\leq \left(\max_{\|x\|=1} |q(x)|\right) \|x\|^2 = M \|x\|^2$ □

Proposizione 28. *Sia* q *una forma quadratica, se* $q(x) = o(\|x\|^2)$ *per* $x \to 0 \Rightarrow q \equiv 0$

Dimostrazione. sia $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| = 1$ e $t > 0$.
$q(x) = \frac{1}{t^2}$, $q(tx) = \frac{q(tx)}{\|tx\|^2} \to 0$ per $t \to 0$ per ipotesi.
Allora $\forall x$ con $\|x\|$ vale $q(x) = 0$ e allora $\forall x \neq 0, q(x) = q\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) \|x\|^2$ □

Definizione 29. *Sia* $q : R^n \to \mathbb{R}$ *una forma quadratica*

- q *è definita positiva* $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ $q(x) > 0[Q > 0]$
- q *è semidefinita positiva* $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n$ $q(x) \geq 0[Q \geq 0]$
- q *è definita negativa* $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ $q(x) < 0[Q >< 0]$
- q *è semidefinita negativa* $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n$ $q(x) \leq 0[Q \leq 0]$

Proposizione 29. *Sia* $q : R^n \to \mathbb{R}$ *una forma quadratica, se* q *è definita positiva* $\Rightarrow \exists m > 0 :$ $\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) \geq m \|x\|^2$

Dimostrazione. Noto che $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
$q(x) = q\left(\frac{1}{\|x\|}x \|x\|^2\right) \geq \min_{\|x\|=1} q(\lambda) \|x\|^2$ □

Ora dobbiamo cercare di capire se q *è definita positiva*
Ad esempio: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *è facile capire che è semodefinita positiva poiché è in diagonale, quindi la prima cosa da fare è trovare una forma diagonale per* Q

un procedimento pratico e veloce è il seguente:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\lambda = q_{11}, \quad \lambda_2 = \frac{detQ_2}{q_1 1} \quad \lambda_3 = \frac{detQ_3}{detQ_2} \quad ... \quad \lambda_i = \frac{detQ_i}{detQ_{i-1}}$$

Questo perché se dobbiamo valutare il segno dell'incremento della f ci servono le variazioni sulle quadriche. Se f è $\mathbf{C^2}$ scrivo lo sviluppo di Taylor al secondo ordine:

$$f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

max e min dove $\nabla f(x_0) = 0$ per Fermat, l'o piccolo è trascurabile, allora il segno della derivata dipende dalla forma quadratica al secondo membro.

Proposizione 30. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.*
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$ e x_0 punto di massimo locale per f su $A \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ e $H_f(x_0)$ è semidefinita negativa.

Dimostrazione. $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$ poiché $f \in \mathbf{C^2}$
il primo termine è negativo poiché per ipotesi x_0 è punto di massimo locale, ne segue che il termine $(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0)$ non può essere positivo. □

Proposizione 31. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.*
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$ e x_0 punto di minimo locale per f su $A \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ e $H_f(x_0)$ è semidefinita positiva.

Dimostrazione. $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$ poiché $f \in \mathbf{C^2}$
il primo termine è positivo poiché per ipotesi x_0 è punto di minimo locale, ne segue che il termine $(x - x_0)^T H_f(x - x_0)$ non può essere negativo. □

2.11.2 Condizioni Sufficienti

Proposizione 32. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.*
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$, $\nabla f(x_0) = 0$,$H_f(X_0)$ è definita negativa $\Rightarrow x_0$ è un punto di massimo locale per f

Dimostrazione. $f \in \mathbf{C^2}$ quindi possiamo scrivere:
$f(x_+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
$f(x_+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
Sappiamo che H_f è definita negativa per ipotesi, allora $h^T H_f(x_0)h \leq -m \|x_0\|$ allora $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ e quindi x_0 è punto di massimo locale per f. □

Proposizione 33. *sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.*
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$, $\nabla f(x_0) = 0$,$H_f(X_0)$ è definita positiva $\Rightarrow x_0$ è un punto di minimo locale per f

Dimostrazione. $f \in \mathbf{C^2}$ quindi possiamo scrivere:
$f(x_+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
....
....

□

QUALCHE DISEGNO E SPIEGAZIONE.....

2.11.3 Il Significato Geometrico del Gradiente n=2 m=1

Definizione 30. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$*
La suferficie $z = f(x, y)$ è il grafico di f, è unsottoinsieme di R^3
Se $c \in \mathbb{R}$, la curva di livello c di f è l'insieme $f^{-1}(c)\{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$
Se f 'e differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ il piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ in (x_0, y_0) ha equazione:

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} (x - x0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix}$$

$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Osservazione 18. *geometricamente, il gradiente di una funzione indica la direzione di R^n in cui si ha la massima variazione del valore di f, nel verso di incremento positivo di f,*

Osservazione 19. *osservazione col grafico che al momento non faccio.*

Proposizione 34. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, l'incremento di $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ è massimo quando $[hk] = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ con $\lambda > 0$ ed è minimo con $[hk] = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ con $\lambda < 0$*

Dimostrazione. so che posso approssimare la funzione quindi posso scrivere:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o(\sqrt{h^2 + k^2}) = = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \left\|[hk]\right\| cos(\theta) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$
dove θ è l'angolo tra $\nabla f(x_0, y_0)$ e $[hk]$ per $||[hk]||$ sufficientemente piccola, l'incremento $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ è massimo se $cos(\theta) = 1$ ed è minimo se $cos(\theta) = -1$, da cui la tesi. □

Proposizione 35. *siano $f \in \mathbf{C^1}(A; R)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ e $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$[cioè stazionario]. Allora nabla$f(x_0, y_0)$ è perpendicolare alla curva di livello passante per .....*

Osservazione 20. *un vettore 1'e perpendicolare a una curva se è perpendicolare alla retta o al vettore tangente alla curva in quel punto.*

Dimostrazione. La curva di livello è $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ cioè $f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0$, per trovare la tangente a questa curva è piu facile se si ha $y = \varphi(x)$
Usiamo quindi il teorema della funzione implicita, mi serve che $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, questa condizione non è assicurata dalle ipotesi, per ipotesi il gradiente è non nulla quindi almeno una delle due componenti è non nulla.
Inizio con il caso $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.
Il T.F.IMPL. assicura che :
$\exists \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ con $x_0 \in \mathring{\mathcal{X}}, y_0 \in \mathring{\mathcal{Y}}$, $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.:
$f(x, y) = f(x_0, y_0), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$
La retta tangente in x_0 a $y = \varphi(x)$ è $y = y_0 + \varphi'(x_0)(x - x_0)$
questo vuole dire che un vettore tangente a $y = \varphi(x)$ in (x_0, y_0) è $\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi'(x_0) \end{bmatrix}$.

... calcolo il prodotto scalare

$$\nabla f(x_0, y_0)\begin{bmatrix}1\\ \varphi'(x_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -\frac{\partial_x f(x_0,y_0)}{\partial_y f(x_0,y_0)}\end{bmatrix} =$$

$$= \partial_x f(x_0, y_0) - \partial_y f(x_0, y_0)\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)} = 0$$

Allora il graadiente è perpendicolare alla curva di livello.
Guardiamo ora al caso in cui $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$ quindi il gradiente è non nullo.
Applicando lo stesso ragionamento id sopra, solo esplicitando la x in funzione della y. Quindi $x = \psi(x)$ e $\psi'(y_0) = -\frac{\partial_y f(x_0,y_0)}{\partial_x f(x_0,y_0)}$ □

2.12 Massimi e Minimi Vincolati

Spesso la ricerca di punti di massimo o minimo di una funzione $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ deve essere ristrettaad un sottoinsieme $B \subseteq A$ a causa di eventuali vincoli a cui le variabili indipendenti devono soddisfare. L0insieme B può essere generalmente descritto da una funzione $\varphi : A \to \mathbb{R}^p$, nel senso che $B = \{x \in A : \varphi(x) \leq 0\}$
NOTA::: direi n¿1 poiché se ho una sola variabile e la vincolo ...??????? booooo .
Questo problema è usualmente abbreviato in:

$$\max_{\varphi \leq 0} \quad o \quad \min_{\varphi \leq 0}$$

può essere affrontato in due passi:

1. *ricerca dei punti di estremo di f interni a B, problema gia affrontato.*
2. *ricerca dei punti di estremo di f sul bordo di B, affrontiamo ora.*

Sotto opportune condizioni su φ, infatti, $\mathring{B} = \{x \in A : \varphi(x) < 0\}$ e $\partial B\{x \in A : \varphi(x) = 0\}$

Proposizione 36. *Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in \mathring{A}, g(x_0, y_0) = 0, f, g \in \mathbf{C^1}(A; R)$, $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$*
Se (x_0, y_0) è di max(o min) locale per f su $g = 0 \Rightarrow \exists \lambda in \mathbb{R}$ t.c: $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda g(x_0, y_0)$ (all fin fine posso dire che sono paralleli).

Osservazione 21. *λ si chiama "moltiplicatore di lagrange"*

Osservazione 22. *Se abbiamo un problema del tipo $\max\limits_{g(x,y)=0} f$ cioè il massimo di f sul vincolo $g(x, y) = 0$, ci dobbiamo ricondurre ad un sistema del tipo $\begin{cases}\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)\\ g(x_0, y_0) = 0\end{cases}$ =*
$\begin{cases}\partial_x f(x_0, y_0) = \lambda \partial_x g(x_0, y_0)\\ \partial_y f(x_0, y_0) = \lambda \partial_y g(x_0, y_0)\\ g(x_0, y_0) = 0\end{cases}$
3 equazioni in 3 incognite(x, y, λ)
In certi casi si introduce una funzione $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ detta Lagrangiana, i punti stazionari vincolati di f sono punti stazonari liberi della Lagrangiana.

Dimostrazione. Sappiamo che $\nabla g(x_0,y_0) \neq$ quindi $\begin{bmatrix}\partial_x g(x_0,y_0) & \partial_y g(x_0,y_0)\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$ quindi o $\partial_x g(x_0,y_0) \neq 0$ o $\partial_y g(x_0,y_0) \neq 0$. Mettiamoci nel caso in cui $\partial_y g(x_0,y_0) \neq 0$,
Per il teorema della funzione implicita ho che :
$\exists \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ con $x_0 \in \mathring{\mathcal{X}}, y_0 \in \mathring{\mathcal{Y}}$, $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.:
$g(x,y) = f(x_0,y_0), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$
Osserviamo che dire (x_0,y_0) di massimo o minimo per f ristretta a $g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x_0$ è di massimo o di minimo per la funzione $x \to f(x,\varphi(x))$.
Per il teorema di Fermat $\frac{d}{dx}(f(x,\varphi(x)))\|_{x=x_0} = 0$, punto stazionario ha derivata nulla, e la derivata di quella funzione in x_0 è:

$$\partial_x f(x_0,\varphi(x_0)) + \partial_y f(x_0,\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

allora

$$0 = \partial_x f(x_0,\varphi(x_0)) + \partial_y f(x_0,\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) =$$
$$= \partial_x f(x_0,\varphi(x_0)) - \partial_y f(x_0,\varphi(x_0)) \frac{\partial_x g(x_0,\varphi(x_0))}{\partial_y g(x_0,\varphi(x_0))} =$$

$$= \partial_x f(x_0,\varphi(x_0))\partial_y g(x_0,\varphi(x_0)) - \partial_y f(x_0,\varphi(x_0))\partial_x g(x_0,\varphi(x_0)) = det\begin{pmatrix}\partial_x f(x_0,y_0) & \partial_y f(x_0,y_0)\\ \partial_x g(x_0,y_0) & \partial_y g(x_0,y_0)\end{pmatrix} = 0$$

questo equivale a dire che i vettori riga della matrice sono paralleli quindi $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$.
Non è uguale scrivere $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \nabla g(x_0,y_0) = \lambda \nabla f(x_0,y_0)$ poiché non c'è certezza sul valore di $\nabla f(x_0,y_0)$ che se nullo negherebbe l'ipotesi di $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$
Se guardiamo ora il caso in cui $\partial_y g(x_0,y_0) = 0$ e $\partial_x g(x_0,y_0) \neq 0$.
Seguendo un ragionamento analogo si esplicita $x = \psi(y)$ così che cercare max(o min) di f ristretta a $g(x,y) = 0$ porti a $y \to f(\psi(y),y)$ □

Proposizione 37. *Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange caso generale Sia $A \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbf{C^1}(A;R)$, $g \in \mathbf{C^1}(A;R^p)$ con $p < n$(n.vincoli¡n.variabili), sia poi $x_0 \in \mathring{A}, g(x_0) = 0, Dg(x_0,y_0)$ di rango p. Se x_0 è di max(o min) locale per f su $g = 0 \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p in \mathbb{R}$ t.c: $\nabla f(x_0,y_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g(x_0,y_0)$*

2.13 Derivate e Integrali

Proposizione 38. *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $x_0 \in I$. Data $f \in c^0(I;R)$ la funzione:*

$$\begin{array}{rcl} F : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{array}$$

Si ha $F \in \mathbf{C^1}(I;R)$ e $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$

Proposizione 39. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, data $f \in \mathbf{C^0}(A \times \mathbb{R};R)$ la funzione*

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha,\beta,x) & \to & \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C^0}(R \times \mathbb{R} \times A;R)$

Proposizione 40. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, data $f \in \mathbf{C^1}(A \times \mathbb{R}; R)$ la funzione*

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta, x) & \to & \int_\alpha^\beta f(x,t)dt \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C^1}(R \times \mathbb{R} \times A; R)$ ed inoltre, $\forall (\alpha, \beta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A$ e $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -f(x, \alpha)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = f(x, \beta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)dt$$

$$\nabla F = \int_\alpha^\beta \nabla f(x,t)dt$$

Corollario 1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, date le funzioni $\alpha : x \to \mathbb{R}, \beta : x \to \mathbb{R}, f : x \to \mathbb{R}$, di classe $\mathbf{C^1}$, la funzione*

$$\begin{array}{rcl} F : A & \to & \mathbb{R} \\ (x) & \to & \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C^1}(R \times \mathbb{R} \times A; R)$ ed inoltre, $\forall x_0 \in A$:

$$\nabla F(x_0, y_0) = f(x_0, \beta)\nabla\beta(x_0) - f(x_0, \alpha)\nabla\alpha(x_0) + \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \nabla f(x,t)dt$$

Parte III

Integrali Doppi

Capitolo 3

Integrali Doppi

3.1 Preliminari

Questo capitolo non è trattato in maniera approfondita poiché:

a *tanti e lunghi teoremi fuori contesto per poter introdurre rigorosamente la teoria di Riemann*

b *tale teoria è "superata" da tempo*

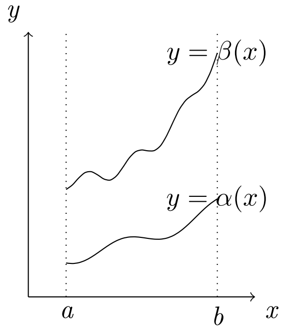
Il primo è più grosso problema di tale teoria è che non permette il passaggio del limite sotto il segno di integrale, cioè per poter scrivere

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)$$

sono necessarie tante ipotesi molto restrittive.
Si è passati così alla teoria dell'integrale secondo Lebesgue, molto diversa e piuttosto complicata.
ESEMPIO...............
disegni..........
....
Il concetto di integrale è quindi molto legato al concetto di area e anche di volume. La teoria di Lebesgue riparte da assiomi come questi definendoli e caratterizzandoli in modo da definire una volta per tutte in maniera sistematica e rigorosa cosa si può e cosa non si può integrare, e dove ha senso parlare di superfici. volumi, ipervolumi, ...

3.2 Regole di Calcolo

Queste formule permettono di ricondurre il calcolo di integrali doppi a quello di integrali semplici.



Se:
$a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$
$\alpha, \beta \in \mathbf{C^0}([a,b]; R), \forall x \in [a,b] \alpha(x) \leq \beta(x)$
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] ey \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$
$f \in \mathbf{C^0}(A; R)$
Allora
$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta x} f(x,y)dy \right) dx$
Analogamente.
ALTRO GRAFICO....
Se:
$c, d \in \mathbb{R}$ *con* $c < d$
$\gamma, \delta \in \mathbf{C^0}([a,b]; R), \forall y \in [c,d] \gamma(y) \leq \delta(y)$
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [c,d] ex \in [\gamma(y), \delta(y)]\}$
$f \in \mathbf{C^0}(A; R)$
Allora
$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta y} f(x,y)dx \right) dy$

3.3 Cambiamento di Variabili

Se:
$A \subseteq \mathbb{R}^2$
$\Phi \in \mathbf{C^1}(A; R^2)$ Φ *è invertibile* $\Phi^{-1} \in \mathbf{C^1}(\Phi(A); R^2)$
$det(D\Phi) \neq 0$ *su* A
$f \in \mathbf{C^0}(\Phi(A); R^2)$
Allora:

$$\iint_{\Phi(A)} f(x,y)dxdy = \iint_A ((f \circ g)(u,v)) \left| det(D\Phi(u,v)) \right| dudv$$

La quantità $det(D\Phi)$ *è spesso chiamato DETERMINANTE JACOBIANO (o semplicemente JACOBIANO) della trasformazione* Φ
Adesso spieghiamo perché il determinante JACOBIANO, ricordando A1:

$$\int_g (A) f(x)dx = \int_A f(g(t))dt$$

vari casi
...
...
...

Parte IV

Successioni e Serie di Funzioni

Capitolo 4

Successioni e Serie di Funzioni

4.1 Preliminari

Definizione 31. *Sia* $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una successione* $(n \in \mathbb{N})$ *, la serie* $\sum_{n=09}^{+\infty} f_n$ *indica la successione delle somme parziali* $S_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$

Osservazione 23. *Qualunque affermazione fatta in riferimento ad una serie va quindi intesa riferita alla successione delle somme parziali*

- *La serie è limitata* $\rightleftharpoons$ *la successione delle somme parziali è limitata*

- *La serie è illimitata* $\rightleftharpoons$ *la successione delle somme parziali è illimitata*

- *La serie è convergente* $\rightleftharpoons$ *la successione delle somme parziali è convergente*

Osservazione 24. *Successioni e serie di funzioni possono essere viste:*

1. *come successioni e serie dipendenti da un parametro*
2. *come un mezzo per approssimare funzioni*
3. *come un primo passo verso lo studio di funzioni (a volte dette operatori o funzionali) che a funzioni associano o numeri o altre funzioni.*

4.2 Tipi Di Convergenza

4.2.1 Convergenza Puntuale

Definizione 32. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni definite su* A *a valori in* $\mathbb{R}$*. Sia* $B \subseteq A$

- *la successione* $\{f_n : n\mathbb{N}\}$ *è puntualmente convergente su* B *se* $\forall x \in B$*, esiste finito il limite* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$*. In tal caso la funzione* $f : B \to \mathbb{R}$ *definito da* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

- *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *è puntualmente convergente su* B *se* $\forall x \in B$, *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *ammette somma finita. In tal caso la funzione* $F : B \to \mathbb{R}$ *definito da* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *è la somma della serie la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

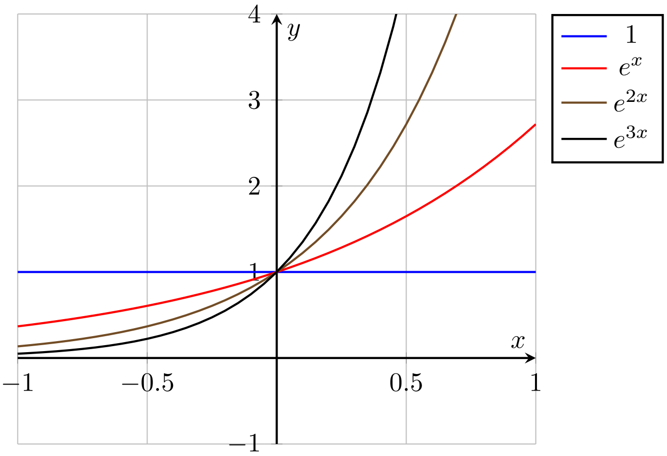
Osservazione 25. *La convergenza puntuale su* A *della successione* f_n *verso* f *è indicata con*

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad suA$$

Proposizione 41. *METAPROPOSIZIONE:*
Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to A$
Se $f_n \xrightarrow{p} f$ *su* B *e se* f_n *ha la proprietà* P *allora il limite* f *ha la proprietà* P.

Esempio 24. $f_n(x) = \frac{1}{n} sin(x)$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} sin(x) = 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f_n \xrightarrow{p} 0$ *su* A.

Esempio 25. $f_n(x) = e^{nx}$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$

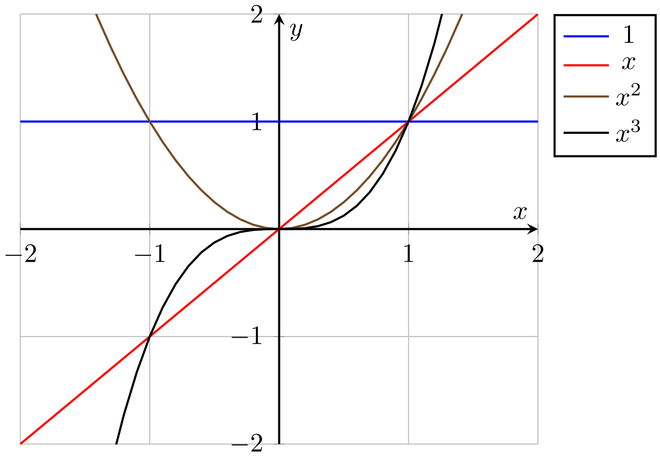


$$\lim_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad suB =]-\infty, 0]$$

Osservazione 26. *La continuità non passa al limite come proprietà* P

Esempio 26. $f_n(x) = x^n$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$



$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & x \in]1, +\infty[\\ 1 & x \in \{1\} \\ 0 & x \in]-1, 1[\\ \nexists & x \in]-\infty, -1] \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad suB =]-1, 1]$$

Proposizione 42. *PROPRIETÀ P:MONOTONIA*
Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to A$
Se $f_n \xrightarrow{p} f$ *su* B *e se* f_n *è debolmente crescente su* B *allora il limite* f *è debolmente crescente su* B.

Dimostrazione. Dire che f_n è debolmente crescente su B significa che

$$\forall x_1, x_2 \in B \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow fn(x_1) \leq f_n(x_2)$$

se si fa tendere $n \to \infty$ si ha che $f(x_1) \leq f(x_2)$, e questo nell'insieme B dove i limiti puntuali delle funzioni esistono per ipotesi □

Osservazione 27. *Questo vale anche nel caso di funzioni debolmente decrescenti*

Osservazione 28. *se* f_n *è strettamente crescente/decrescente con le stesse ipotesi non possiamo concludere che il limite puntuale mantenga la stessa proprietà*

Esempio 27. x^n *con* $x \in [0, 1[$ *è strettamente crescente ma il limite putuale è costante uguale a zero.*

Proposizione 43. *PROPRIETÀ P:NON NEGATIVA*
Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to A$
Se $f_n \xrightarrow{p} f$ *su* B *e se* f_n *è non negativa,* $f_n \geq 0$, *su* B *allora il limite* f *è non negativo,* $f \geq 0$, *su* B.

Dimostrazione. Sappiamo che $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in B$. Ma f_n è una successione di valori non negativi quindi il limite esiste ed è non negativo. □

Osservazione 29. *Questo vale anche nel caso di funzioni non positive*

Osservazione 30. *Questa proposizione non può essere estesa al caso di funzioni strettamente positive/negative.*

Esempio 28. $-\frac{e^x}{n}$ *con* $x \in [0,1[$ *è strettamente negativa ma il limite è costante uguale a zero.*

Proposizione 44. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq A$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni definite su* A *con valori in* $\mathbb{R}$. *sia* $f : B \to \mathbb{R}$ *una funzione*
$f_n \xrightarrow{p} f$ *su* B *per* $n \to \infty \Leftrightarrow \forall x \in B, \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

Dimostrazione. direttamene dalla definizione... □

Proposizione 45. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq A$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni definite su* A *con valori in* $\mathbb{R}$. *Sia* $F : B \to \mathbb{R}$ *una funzione*
$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xrightarrow{p} F$ *su* B *per* $n \to \infty \Leftrightarrow \forall x \in B, \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \quad \left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - F(x)\right| \leq \epsilon$

Dimostrazione. direttamene dalla definizione... □

4.2.2 Convergenza Uniforme

Definizione 33. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni definite su* A *a valori in* $\mathbb{R}$.

- *La successione* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *è uniformemente convergente su* B *se esiste una funzione* $f : B \to \mathbb{R}$ *t.c.:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

  la funzione f *è il limite uniforme della successione* fn

- *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *è uniformemente convergente su* B *se esiste una funzione* $F : B \to \mathbb{R}$ *t.c.:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} \left|F(x) - \sup_{n=0} f_n(x)\right| = 0$$

  la funzione F *è il limite uniforme della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

Osservazione 31. *La convergenza uniforme su* B *della successione* f_n *verso* f *è indicata con*

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad su \quad B$$

Osservazione 32. *la covergenza uniforme equivale alla convergenza rispetto alla distanza* $d_{\mathbf{C}^0}(f,g) = \sup_{x\in A} |g(x) - f(x)|$ *ogniqualvolta questa distanza è definita.*
Questa distanza può essere definita attraverso la norma $\|f\|_{c^0} = \sup_{x\in A} |f|$

Proposizione 46. *sia* $f_n : n \in \mathbb{N}$ *con* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
$f_n \xrightarrow{u} f$ *su* B *per*$n \to \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}$ *t.c:* $\forall n > \nu, \forall x \in B$ *vale che* $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

Proposizione 47. *sia* $f_n : n \in \mathbb{N}$ *con* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $F : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xrightarrow{u} F$ *su* $B \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}$ *t.c:* $\forall n > \nu, \forall x \in B$ *vale che* $\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq \epsilon$

Osservazione 33. *La differenza tra queste due proposizioni e le due proposizioni analoghe nel caso di convergenza puntuale giustifica il fatto che la continuità non passa al limite puntuale. Infatti qui ν dipende solo dalla scelta di ϵ e le x si guardano tutte insieme, prima invece ν dipendeva oltre che alla ϵ anche dalla x questo porta a osservare le x una alla volta.*

Proposizione 48. *Relazione tra convergenza uniforme e puntuale.*
Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
Se $fn \xrightarrow{u} f$ su B allora $fn \xrightarrow{p} f$ su B.

Dimostrazione. se $f_n \xrightarrow{u} f$ su b allora vale che: $\forall\epsilon, \exists\nu : \forall n > \nu, \forall x \in B$ vale $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ in questo modo si trova un ν che soddisfa la condizione $\forall x \in B$ quindi $\forall x \in B, \forall\epsilon, \exists\nu : \forall n > \nu$ vale $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ quindi $f_n \xrightarrow{p} f$ su B □

Proposizione 49. *Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\overline{f}, f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$*
se $f_n \xrightarrow{u} f$ su B e $f_n \xrightarrow{u} \overline{f}$ su B allora $f = \overline{f}$

Dimostrazione. $f_n \xrightarrow{u} f$ e $f_n \xrightarrow{u} \overline{f}$, quindi è anche vero che $f_n \xrightarrow{p} f$ e $f_n \xrightarrow{p} \overline{f}$ ma il limite puntuale è unico poichè è il limite di una successione. Allora $f = \overline{f}$ □

Esempio 29. $f_n(x) = \frac{1}{n} sin(x)$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$
Abbiamo gia calcolato che $f_n \xrightarrow{p} 0$ su A.
Sia ha anche convergenza uniforme :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \mathbb{R} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} sin(x) \right|$$

Osservo che $|asin(x)| \leq |a|$ quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} sin(x) \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Allora $f_n \xrightarrow{u} f$ su A

Esempio 30. $f_n(x) = sin\left(\frac{1}{n}x\right)$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$ ....
....

Proposizione 50. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : A \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni e $f : A \to \mathbb{R}$*
$f_n \xrightarrow{u} f$ su A e $f_n \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $f \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$

Dimostrazione. DISEGNO
DISEGNO
DISEGNO
DISEGNO
GIURO CHE LA FAROò (a distanza di tre anni non son sicurissimo che lo farò) □

Esempio 31. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$
....
....

Definizione 34. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ e $\{f_n : A \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni.*
La successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa alla condizione di Cauchy per la convergenzauniforme su $B \rightleftharpoons \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu, \forall x \in B$ vale $|f_n(n) - f_m(x)| < \epsilon$

Proposizione 51. *(Una successione di Cauchy per la convergenza uniforme è uniformemente convergente).*
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ e $\{f_n : A \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni.
La successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa alla condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su B allora $\exists$ una funzione $f : B \to \mathbb{R}$ t.c.: $f_n \stackrel{u}{\to} f$ su B

Dimostrazione. La successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa alla condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su B allora $\forall x \in B$ la successione $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ è di Cauchyin $\mathbb{R}$ allora $\forall x \in B$ la successione $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ha limite in $\mathbb{R}$.(cioè c'è il limite puntuale).
Sia $f(x)$ questo limite, f è anche il limite uniforme della successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, infatti:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall h, k > \nu \forall x \in B \quad |f_h - f_k| < \epsilon$$

$$\sup_B |f_h(x) - f_k(x)|, \forall h, k > \nu$$

$$\Rightarrow |f_h(x) - f_k| < \epsilon, \forall h.k > \nu, \forall x \in B$$

a questo punto si passa al limite e la disuguaglianza diventa debole.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} |f_h(x) - f_k(x)| \leq \epsilon, \forall h > \nu, \forall x \in B$$

$$\Rightarrow |f_h(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall h > \nu, \forall x \in B$$

$$\Rightarrow \sup_B |f_h - f| \leq \epsilon, \forall h > \nu$$

$$\Rightarrow f_n \stackrel{u}{\to} f \quad suB$$

□

Proposizione 52. *Sia A un compatto in $\mathbb{R}$. In $\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ sia $d_{\mathbf{C^0}} = \sup_A |g(x) - f(x)|$. Allora $\left(\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R}); d_{\mathbf{C^0}}\right)$ è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. prendo $f_n \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ successione di Cauchy in $\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ f_n sono di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme su $A \Rightarrow f_n : A \to \mathbb{R}$ e $f_n \stackrel{u}{\to} f$ su A e f è continua
$\Rightarrow \left(f \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})\right)$
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n = f$ in $\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} d_\infty(fn, f) = 0 \quad \Rightarrow f_n \to f \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ □

ESEMPIO:: In dimensione finita non vi è differenza tra "chiuso e limitato" e "compatto", in dimensione infinita cambiamo molte cose. Prensiamo un insieme chiuso e limitato ma non compatto. In $\mathbf{C^0}([0,1];\mathbb{R})$ con $d_\infty(f,g) = \sup_{[0,1]} |g(x) - f(x)|$, prendiamo l'insieme $C = \overline{B(0,1)} = \{f \in \mathbf{C^0}([0,1];\mathbb{R}) : |f(x)| \leq 1$

1 *C è limitato: ha diametro finito.*

2 *C è chiuso: contiene tutti i sui punti di accumualazione*

Se c'è una successione $f_n \xrightarrow{u} f$ su $[0,1]$ allora voglio mostrare che $f \in C$
Se $f_n \xrightarrow{u} f$ su $[0,1]$ allora $f_n \xrightarrow{p} f$ su $[0,1]$. Sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in [0,1]$ vale che $-1 \leq f_n(x) \leq 1$.
Mandando n al limite si ha che $-1 \leq f_(x) \leq 1$.
Inolte f è continua perché limite uniforme di una successione di funzioni continue allora $f \in C$ poiché è una funzione continua compresa tra -1 e 1

3 *C non è compatto, cioè esiste almeno una successione dalla quale non è possibie estrarre una sottosuccessione convergente nello stesso spazio.*

Se ad esempio $f_n(x) = x^n$
so che $f_n \xrightarrow{p} f$ su $[0,1]$ e $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in \{1\} \end{cases}$
Tutta la successione di funzioni f_n converge puntualmente a f quindi se estraggo una sottosuccessione comunque venga scelta questa sottosuccessione converge ancora a f puntualmente. Ma la f non è continua mentre il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua allora nessuna sottosuccessione ammette limite uniforme.

ESEMPIO:: OPERATORE DERIVATA 0

$$D$$

ESEMPIO:: OPERATORE DERIVATA 1

$$D$$

ESEMPIO:: OPERATORE INTEGRALE

$$I$$

Proposizione 53. *fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se la successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbf{C^0}([a,b], \mathbb{R}) \xrightarrow{u} f$ su $[a,b]$*
f_n e f sono integrabili secondo Rimmmmmmmn allora lasuccessione $\left\{\int_a^b f_n(x)dx : n \in \mathbb{N}\right\}$ converge a $\int_a^b f(x)dx$

Osservazione 34. *La convergenzauniforme passa sotto il segno di integrale*

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} fn\right)(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b fn(x)dx\right)$$

Proposizione 54. *convergono le derivare allora convergono le funzioni*
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si consideri una successione di funzioni $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathbf{C^1}([a,b]; \mathbb{R})$
2. $\exists x_0 \in [a,b] : \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$
3. $\exists g \in \mathbf{C^0}([a,b]; \mathbb{R}) : f_n' \xrightarrow{u} g$ *su* $[a,b]$

Allora

1. $\exists f \in \mathbf{C^1}([a,b]; \mathbb{R})$

2. $f_n \stackrel{u}{\to} f$ *su* $[a,b]$
3. $f'(x) = g(x)\ \forall x \in [a,b]$

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt$$

per $n \to \infty$

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Quindi le f_n convergono puntualmente alla funzione $f(x)$, per la convergenza uniforme calcolo:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} (|f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|\, dt \right|) \leq$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left[|f_n(x_0) - f(x_0)| + |b-a| \sup_{[a,b]} |f_n'(x) - g(x)| \right] =$$

Questo perché per ipotesi $f_n' = g$ e il limite fa 0. Allora $f_n \stackrel{u}{\to} f$ su $[a,b]$
Inoltre si sa che $f_n \in \mathbf{C^1}$ allora $f_n' \in \mathbf{C^0}$ allora il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua allora g è una funzione continua.
La f è l'integrale di una funzione continua allora la f è derivabile con derivata continua quindi $f' = g$ □

Osservazione 35. *Necessaria l'ipotesi* $f_n(x_0) \to l$*.......*

Osservazione 36. *Serve* $[a,b]$ *limitato ....*
....
....

Proposizione 55. *Fissati* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$*, si consideri una successione di funzioni* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *con* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $\exists x_0 \in [a,b] : \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) = L \in \mathbb{R}$
3. $\exists g \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}) : \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \stackrel{u}{\to} g$ *su* $[a,b]$

Allora

1. $\exists f \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \stackrel{u}{\to} f$ *su* $[a,b]$
3. $f'(x) = g(x)\ \forall x \in [a,b]$

Osservazione 37. *In altre parole questa proposizione afferma che sotto opportune ipotesi*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

Definizione 35. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni con* $f_n : A \to \mathbb{R}$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge totalmente su* $A \rightleftharpoons \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{A} |f_n(x)| < +\infty$*(è convergente)*

Osservazione 38. *la* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{A} |f_n(x)|$ *è una serie numerica*

Proposizione 56. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni con* $f_n : A \to \mathbb{R}$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge totalmente su* $A \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente su* A

Dimostrazione. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su A
$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x)| < +\infty$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n| < \epsilon$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sup\limits_{x\in A} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |f_n| < \epsilon$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sup\limits_{x\in A} \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right| < \epsilon$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su A. □

Osservazione 39. *Per le serie:*
Convergenza Totale ⇒ Convergenza Uniforme ⇒ Convergenza Puntuale.

4.3 Serie di Funzioni Particolari

Questa sezione è dedicata ad alcune tecniche di approssimazione basate su serie di funzioni particolari
In generale, un'approssimazione si riconduce ad una formula del tipo

$$[\textit{quantità da calcolare}] = [\textit{quantità approssimante}] + \textit{errore}$$

La qualità dell'approssimazione è descritta dal senso in cui l'errore è piccolo.

4.3.1 Serie di Potenze

Definizione 36. *Siano* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione con* $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in \mathbb{C}$.
Si dice serie di potenze centrata in $z_0 \rightleftharpoons \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Osservazione 40. *è ovvio che in* $z = z_0$ *si ha convergenza....???? (dire a zero)*

Osservazione 41. *Per semplicità verrà considerato il caso* $z_0 = 0$ *ESEMPIO::* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n = e^x$ *ESEMPIO::* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$

Proposizione 57. *Siano* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione in* $\mathbb{C}$ *e* $w \in \mathbb{C}$.
La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge in* w *(cioè* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ *converge) quandi abbiamo la convergenza nella sfera aperta di centro l'origine e raggio* $|w|$
Allora $\forall r$ *con* $0 < r < |w|$, *la serie di potenze* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge totalmente in* $B(0, r)$

Dimostrazione. TIKZPICTURE:::::
devo dimostrare che $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{B(0,r)} |a_n z^n| < +\infty$.
Efacile vedere che $a_n z^n = a_n w^n \left(\frac{z}{w}\right)^n$.
Quindi passando al modulo e poi al sup si ottiene.

$$\sup_{B(0,r)} |a_n z^n| = \sup_{B(0,r)} |a_n w^n| \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq$$

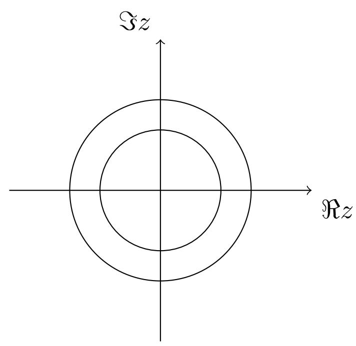
Siccome $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ converge quindi il suo termine generale tende a 0.

$$\leq \sup_{B(0,r)} \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq \left(\frac{r}{|w|}\right)^n$$

per ipotesi $r < |w|$ e questo è il termine generale di una serie geometrica convergente.
Ne segue che $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{B(0,r)} |a_n z^n|$ è maggiorato da $\left(\frac{r}{|w|}\right)^n$ e quindi la serie converge totalmente. □

Osservazione 42. *Una volta che abbiamo la convergenza totale abbiamo anche quella uniforme.*

Proposizione 58. *la non convergenza in un punto implica la non convergenza fuori dal cerchio*
Sia $a_n : n \in \mathbb{N}$ *una successione a valori in* $\mathbb{C}$
La serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *non converge in* w
Allora $\forall z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| > |w|$ *la serie di potenze* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ *non converge in* z



Dimostrazione.

Se per assurdo la serie converge in $z \Rightarrow$ per il teorema precedente avremmo convergenza in ogni sfera con raggio minore di $\left|\frac{1}{z}\right|$. e quindi anche in w questo nega l'ipotesi.ASSURDO. $\square$

Osservazione 43. *Come è fatto l'insieme su cui si ha convergenza??*
segue da queste due ultime proposizioni che se $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione in $\mathbb{C}$ allora l'insieme $\left\{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n converge\right\}$ è un cerchio.
Sulla circonferenza non ci soffermaiamo a capire cosa accade poiché tutto può accadere.

Definizione 37. *Raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \rightleftharpoons \rho = \sup\left\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n convergesuB(0,r)\right\}$*

Osservazione 44. *Il raggio di convergenza di una serie di potenze può essere 0, un numero reale positivo o $+\infty$.*

Osservazione 45. *una definizione come $\rho = \inf\left\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n nonconvergesuB(0,r)\right\}$ non sta in piedi poiché questo insieme potrebbe essere vuoto, mentre quello sopra non è mai vuoto, poerché $r = 0$ c'è sempre poiché in 0 si ha sempre convergenza. Ilsecondo potrebbe essere vuoto perché ci sono serie che convergono su tuttoil piano complesso e quindi non si avrebbe nessun r fuori da quale non sia ha convergenza.*

Proposizione 59. *CRITERIO DELLA RADICE.*
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, sia $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Se questo limite esiste, allora il raggio di convergenza è $\rho = \begin{cases} 0 & se\ l = +\infty \\ \frac{1}{l} & se\ l \in]0, +\infty[\\ +\infty & se\ l = 0 \end{cases}$

Proposizione 60. *CRITERIO DEL RAPPORTO.*
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, sia $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Se questo limite esiste, allora il raggio di convergenza è $\rho = \begin{cases} 0 & se\ l = +\infty \\ \frac{1}{l} & se\ l \in]0, +\infty[\\ +\infty & se\ l = 0 \end{cases}$ *ESEMPIO::*$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$

$a_n = \frac{1}{n!} ... \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \rho = +\infty$

ESEMPIO::sin$(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *quindi* $a_n = \begin{cases} 0 & se\ n\ è\ pari \\ ... & se\ n\ è\ dispari \end{cases}$

...

...

...

ESEMPIO::sin$(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ *quindi* $a_n = \begin{cases} ... & se\ n\ è\ pari \\ 0 & se\ n\ è\ dispari \end{cases}$

...

...

...

ESEMPIO:: e^{iy} *con* $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}(iy)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(iy)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(y)^{2n} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(y)^{2n+1} = cos(y) + isin(y)$$

1. $i^{2n} = \left(i^2\right)^n = (-1)^n$
2. $i^{2n+1} = i\left(i^2\right)^n = i(-1)^n$

ESEMPIO:: $e^{i\pi} + 1 = cos(\pi) + i \cdot sin(\pi) = 0$
ESEMPIO:: $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *con* $\rho = 1$ *ESEMPIO:: Sia* $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$
QUI GRAFICO ....
....
Questa serieconverge esclusivamente per $|x| < 1$*, mentre la funzione* f *è definita su tutto* $\mathbb{R}$, $f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$
In $\mathbb{C}$*, lafunzione* $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ *è la somma della serie* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}$ *che ha raggio di convergenza* $\rho = 1$*. Infatti,* $f(z)$ *è singolare sia in* $z = i$ *sia in* $z = -i$*.*
ALTRO GRAFICO::::::::::::::::
....

4.3.2 Serie di Taylor

ESEMPIO:: $ln(1+z)$*. Calcolare la Serie di Taylor.*

$$D\left[ln(1+z)\right] = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$$

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

Proposizione 61. *Sia* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione a valori in* $\mathbb{C}$*. Le serie:*

$$\left.\begin{array}{ll} * & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\ * & \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \\ * & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \end{array}\right\} \text{hanno lo stesso raggio di convergenza}$$

Definizione 38. *Sia* $r \in \mathbb{R}$ *con* $r > 0$*. La funzione* f *si dice analitica su* $]-r, r[\rightleftharpoons f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-r, r[$ *per opportuni* $a_n \in \mathbb{R}$

Osservazione 46. *In altre parole chiamiamo analitica una funzione che può essere scritta come somma di una serie di potenze convergente su* $]-r, r[$
ESEMPIO:: $x \to e^x$ *è analitica su* $\mathbb{R}$
ESEMPIO:: $x \to \frac{1}{1+x^2}$ *è analitica su* $]-1, 1[$

Proposizione 62. *Se* f *è analitica su* $]-r; r[$ *per* $r \in \mathbb{R}$ *e* $r > 0 \Rightarrow f \in \mathbf{C^0}(]-r, r[; \mathbb{R})$

Dimostrazione. f è analitica allora posso scriverla come $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cioè la funzione è limite di una serie, se la serie converge totalmente allora converge uniformemente. Il limite uniforme di funzioni continue(in questo caso polinomi) è una funzione continua. cioè la f è continua. □

Proposizione 63. *PROP+PROOF*
Sia $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ *e* f *analitica su* $]-r, r[\rightleftharpoons f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Rightarrow$ *ho convergenza totale* $\Rightarrow$ *ho convergenza uniforme di funzioni continue*

$$\Rightarrow f \in \mathbf{C^0}(]-r, r[; \mathbb{R}), \quad a_0 = f(0)$$

La serie delle derivate $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ *converge totalmente su* $]-r, r[$ *cioè*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \xrightarrow{u} g$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} fn(0) \to f(0), f_n \in ????????????$$

Allora la serie delle derivate converge alla derivata della serie

$$\Rightarrow \in \mathbf{C^1}(]-r, r[; \mathbb{R}), \quad a_1 = f'(0)$$

Questo ragionmento può essere ripetuto:

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathbf{C^k}(]-r, +r[), \quad a_k = k! f^{(k)}(0)$$

e analogamente

$$f \in \mathbf{C^\infty}(]-r, r[; \mathbb{R}), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

Osservazione 47. *Qui abbiamo detto se* f *è analitica* $\Rightarrow \ldots$*, vorrei fare un qualche tipo di viceversa per poter capire se* f *è analitica o no.*

Proposizione 64. *Sia* $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathbf{C^\infty}(]-r, r[; \mathbb{R}) \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \text{ converge totalmente su }]-r, r[\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è analitica .....}$$

Per avere f *analitica necessariamente come ipotesi deve esserci* $f \in \mathbf{C^\infty}$ *e* f *che si può scrivere come sviluppo in serie di Taylor,dalla proposizione precedente. Questo basta? NO*
ESEMPIO:: $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$

1. $f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ *converge totalmente su* $\mathbb{R}$

3. $f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$

1. *Vediamo se è* $\mathbf{C^0}$, *quindi calcolo* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f \in \mathbf{C^0}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
   Ora calcoliamo la derivata fuori dallo zero, ne facciamo il limite per $x \to 0$ *da destra e da sinitra e vediamo cosa succede.*
   Se $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^3}}$ *e* $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} = 0 \Rightarrow f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R};\mathbb{R})$
   ....
   ancora una derivata.......
   ....
   Continuando a derivare avremmo sempre un rapporto di polinomi che moltiplica un esponenziale, e l'esponenziale vince sempre. quindi fa 0. *itero il ragionamento......*
   ....

2. *In (1) abbiamo visto che tutte le derivate nello zero siannullavano, cioè*

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

   è la serie identicamente nulla che banalmente converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$

3. *Anche osservandoil grafico è chiaro che la* f *non è la funzione identicamente nulla cioè è diversa dal suo sviluppo in serie*

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

Il Problema nasce dall'o(x^n) *che scriviamo alla fine dello sviluppo n-esimo di questa funzione, perché l'intorno in cui si ha* $o(x^n)$ *diventa sempre più piccolo. GRAFICO...*
GRAFICO...
Mandando l'ordine n all'infinito, l'intervallo su cui si ha l'o piccolo tende a diventare un punto (lo zero). Quindi abbiamo l'ugualianza tra la funzione e il suo sviluppo solo nell'origine.????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
Completiamo le ipotesi con la prossima proposizione:

Proposizione 65. *Sia* $f :]-r,r[\to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathbf{C}^{\infty}(]-r,r[\,;\mathbb{R}) \\ \exists H,K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \sup\limits_{]-r,r[} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq HK^n \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

Osservazione 48. *L'ipotesi centrale .... qui non c'è*

Osservazione 49. *Sia* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(z,w)^n$ *una serie di potenze in due variabili.*
Quando abbiamo due variabili, non si può parlare di raggio di convergenza. Questa serie è una serie geometrica che converge sse $|zw| < 1$*. è difficile parlare di raggio di convergenza perché essendo* $z, w \in \mathbb{C}$*, se per una variabile servono due dimensioni per due variabili servono quattro dimensioni , e anche se non riusciamo a fare il disegno è evidente che l'insieme su cui la serie converge non è un cerchio(sfera). ESEMPI::*

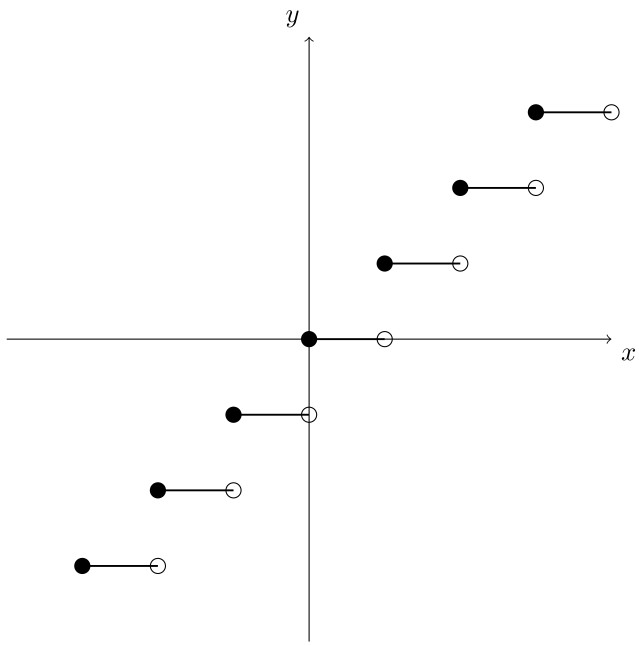
* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$
* $sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}$
* $sinh(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}$
* $cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{(2n)}$
* $cosh(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{(2n)}$
* $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$
* $ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$
* $arctan(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{(2n+1)}$
* $\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^2 n$
* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} = \begin{cases} \textit{converge sse } \lambda > 1 \\ \textit{diverge sse } \lambda \leq 1 \end{cases}$
* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \textit{converge sse } |q| < 1, S = \frac{1}{1-x} \\ \textit{diverge sse } |q| > 1 \ o \ q = 1 \\ \nexists \textit{ sse } x = -1 \end{cases}$

4.3.3 Serie di Fourier

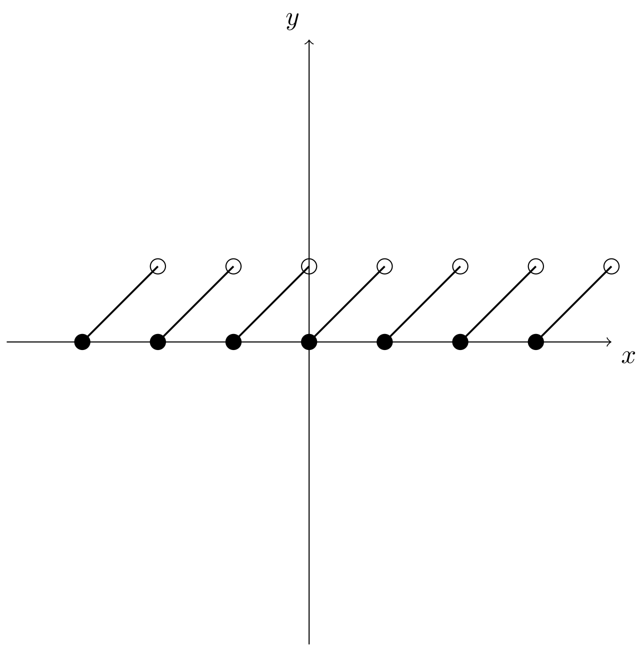
Definizione 39. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$*,* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $T > 0$*,* f *è* T*-periodica* $\rightleftharpoons \forall x \in A \begin{cases} x + T \in A \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

ESEMPIO:: $\lfloor x \rfloor =$ *parte intera* $= \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1 \quad \lfloor -e \rfloor = -3$$



è 1-*periodica. ESEMPIO:: mant*$(x) =$ *mantissa di* $x = x - \lfloor x \rfloor$



è 1-*periodica.*

Osservazione 50. *La funzione costante è* T*-periodica* $\forall T > 0$*, ma non ha un periodo minimo, per questo motivo non la consideriamo.*

Osservazione 51. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ T-periodica. Allora possiamo definire $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ che sia 2π-periodica data da:*

$$x \to f\left(\frac{T}{2\pi}x\right), \quad \overline{A} = \frac{2\pi}{T}A$$

Proposizione 66. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $T > 0$*
f è T-periodica $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, f è nT-periodica.

Proposizione 67. *Sia $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.:* $\begin{cases} \hat{f} 2\pi - periodica \\ \hat{f}_{|[0,2\pi]} = f \end{cases}$

Dimostrazione. $\forall x \in \mathbb{R}. \exists! \hat{x} \in [0, 2\pi[$ t.c.: $x = 2\pi \cdot k + \hat{x}$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $k = [??????]$

$$\hat{f}(x) = f(\hat{x})$$

□

cioè se noi estendiamo una funzione definita su $[0, 2\pi[$ a tutto $\mathbb{R}$ otteniamo una funzione unica e periodica.

Osservazione 52. *Con i polinomi di Taylor ....*
....
....
....
....
....

Definizione 40. *Dati $2n+1$ numeri reali $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ si dice polinomio trigonometrico di coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ la funzione:*

$$\begin{array}{rcl} p : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx)) \end{array}$$

Osservazione 53. *Essendo un'approssimazione, si deve aggiungere l'errore. Come è fatto?. Per far uscire conti giusti e comodi andrebbe usata la distanza quadratica , ma questo prevede una lunga parte introduttiva, noi allora lo stimiamo con la distanza infinita.*

Definizione 41. *Date due successioni di numeri reali $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,$\{b_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, si definisce serie trigonometrica di coefficienti $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,$\{b_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ la serie*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{F} : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx)) \end{array}$$

LEMMA::
Se $h, k \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti uguaglianze:

$* \int_{-\pi}^{\pi} cos(hx)cos(kx) = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ \pi & 0 \neq h = k \\ 2\pi & 0 = h = k \end{cases}$

$* \int_{-\pi}^{\pi} cos(hx)sin(kx) = 0$

$* \int_{-\pi}^{\pi} sin(hx)sin(kx) = \begin{cases} 0 & h \neq k \text{ oppure } h = k = 0 \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$

ESERCIZIO:: IL POLINOMIO DI FOURIER FORNISCE LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE NEL SENSO DELLA DISTANZA QUADRATICA.
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, quale è la funzione a lei più vicina nel senso della distanza quadratica?
Fisso $N \in \mathbb{N}$ e prendo il polinomio trigonometrico di grado N

$$p_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, il problema è quello di minimizzare $d_2(f, p_n)$ quindi un problema di minimo. Stiamo cercando i coefficienti del polinomio trigonometrico quindi studiamo una funzione $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - p_n(x)]^2} dx$.
Essendo la funzione radice quadrata monotona crescente ne studiamo solo il radicando:

$$\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right]^2 dx$$

Osservazione 54. *con $f \in \mathbf{C^1}$:*

$$F(\alpha, \beta, x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt$$

$$\partial_{\alpha} F(\alpha, \beta, x) = -f(x, \alpha) dt$$

$$\partial_{\beta} F(\alpha, \beta, x) = f(x, \beta) dt$$

$$\nabla_x F(\alpha, \beta, x) = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla_x f(x, t) dt$$

Qudindi applicando al nostro caso otteniamo

$$\partial_{a_0} \varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{a_0} \left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right]^2 \right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} 2 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_1 cos(x) dx + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} a_N cos(Nx) dx +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_1 sin(x) dx + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} b_N sin(Nx) dx -$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx =$$

L'integrale di una sinusoide su un multiplo intero del periodo è 0 *quindi*

$$= \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{a_0 a_0} = \pi \quad \partial^2_{a_0 a_n} = 0 \quad \partial^2_{a_0 b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \dots, N$$

$$\partial_{a_k} \varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{a_k} \left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 \right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2cos(kx) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right] dx =$$

$$= \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 cos(kx)dx} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_1 cos(x) cos(kx)dx} + \dots + \int_{-\pi}^{\pi} 2a_k cos(kx) cos(kx)dx \dots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_N cos(Nx) cos(kx)dx} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_1 sin(x) cos(kx)dx} + \dots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_k sin(kx) cos(kx)dx} \dots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_N sin(Nx) cos(kx)dx} -$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x) cos(kx)dx =$$

E anche applicando il lemma

$$= 2\pi \left[a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)dx \right]$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{a_k a_0} = \pi \quad \partial^2_{a_k a_n} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2\pi & n = k \end{cases} \quad \partial^2_{a_k b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \dots, N$$

$$\partial_{b_k} \varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{b_k} \left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 \right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2sin(kx) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right] dx =$$

$$= \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 sin(kx)dx} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_1 cos(x) sin(kx)dx} + \dots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_k cos(kx) sin(kx)dx} \dots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_N cos(Nx) sin(kx)dx} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_1 sin(x) sin(kx)dx} + \dots + \int_{-\pi}^{\pi} 2b_k sin(kx) sin(kx)dx \dots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_N sin(Nx) sin(kx)dx} -$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)sin(kx)dx =$$

E anche applicando il lemma

$$= 2\pi \left[b_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx \right]$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{b_k a_0} = \pi \quad \partial^2_{b_k a_n} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2\pi & n = k \end{cases} \quad \partial^2_{b_k b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \dots, N$$

Si verifica la condizione $\nabla\varphi = 0$ *con*

* $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
* $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx$
* $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx$

La matrice Hessiana di φ *risulta*

$$H_\varphi = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 2\pi \end{bmatrix}$$

è una matrice diagonale quindi si leggono direttamente tutti gli autovalori che sono strettamente positivi quindi la forma quadratica è definita positiva ed il punto in questione è un punto di minimo assoluto.

Definizione 42. *Sia* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*, i coefficienti di Fourier di* f *sono (ovviamente* f *deve essere tale da ammetterli finiti):*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

La serie di Fourier di f *è*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

Proposizione 68. *Sia* $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *la somma della serie trigono metrica definita dai coefficienti* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $\{a_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ *e la serie trigonometrica converge uniformemente allora* F *è una funzione continua e*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)cos(kx)dx \quad k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)sin(kx)dx \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

ESEMPIO+DIMOSTRAZIONE:::

sia $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$. *Allora:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx)\right)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n cos(nx)\right)dx$$

Poiché si ha convergenza uniforme si può portare l'integrale dentro la sommatoria.

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \cancel{\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n cos(nx)dx} + \cancel{\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_n cos(nx)dx} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{a_0}{2}(\pi - (-\pi)) = a_0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}cos(kx)dx} + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx)cos(kx)\right)dx + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(nx)cos(kx)\right)dx}\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{k-1} a_n cos(nx)cos(kx)\right)dx} + \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos(kx)cos(kx)dx + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n cos(nx)cos(kx)\right)dx}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi a_k = a_k$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}sin(kx)dx} + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx)sin(kx)\right)dx + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(nx)sin(kx)\right)dx}\right] =$$

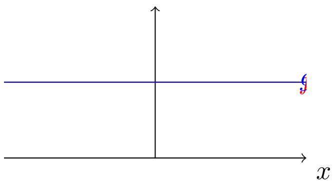
$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{k-1} a_n cos(nx)sin(kx)\right)dx} + \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos(kx)sin(kx)dx + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n cos(nx)sin(kx)\right)dx}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi b_k = b_k$$

Osservazione 55. *Se $d_2(f, \text{polinomio di Fourier})$ è minima $\Rightarrow$ il polinomio di Fourier è costruito con i coefficienti di Fourier di f.*

Osservazione 56. *Se f è somma di una serie di funzioni $\Rightarrow$ i coefficienti della serie sono i coefficienti di Fourier.*

Osservazione 57. *Funzioni diverse possono avere gli stessi coefficienti di Fourier, cioè* $\exists f, g$ *con* $f \neq g$ *ma* f *e* g *hanno gli stessi coefficienti di Fourier. ESEMPIO::*



SISTEMARE,

Osservazione 58. *I coefficienti di Fourier non possono identificare univocamente puntualmente una funzione.*

Punto Di Vista Geometrico

In R^2 *Ci sono 2 vettori* $\hat{i}, \hat{j}$ *della base, se* $\underline{v} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{v} = v_1 \cdot \hat{i} + v_2 \cdot \hat{j}$ *con* v_1, v_2 *componenti di* $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$\underline{v} \cdot \hat{i} = v_1 \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} + v_2 \cdot \hat{j} \cdot \hat{i} = v_1$$
$$\underline{v} \cdot \hat{j} = v_1 \cdot \hat{i} \cdot \hat{j} + v_2 \cdot \hat{j} \cdot \hat{j} = v_2$$

Questo vale perché $\hat{i}, \hat{j}$ *è una base ortonormale. In* R^3 *Ci sono 3 vettori* $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ *della base, se* $\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \underline{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$ *con* v_1, v_2, v_3 *componenti di* $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$v_1 = \underline{v} \cdot \hat{i} \quad v_2 = \underline{v} \cdot \hat{j} \quad v_3 = \underline{v} \cdot \hat{k}$$

In R^n *Ci sono* n *vettori* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *della base, se* $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{v} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + v_n \cdot e_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot e_k$ *con* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *componenti di* $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$v_k = \underline{v} \cdot e_k$$

Con le Serie di Fourier su esegue la stessa operazione sullo spazi $\mathbf{C^0}([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$. *Come elementi di base si ha un insieme di funzioni:*

1. $c_0 : x \to 1$
2. $c_1 : x \to cos(x)$
3. $c_2 : x \to cos(2x)$
4. $\dots$
5. $c_n : x \to cos(nx)$
6. $s_1 : x \to sin(x)$
7. $s_2 : x \to sin(2x)$
8. $\dots$
9. $s_n : x \to sin(nx)$

Si possono osservare due cose:

1. *Sono tutte funzioni linearmente indipendenti, poiché l'unica combinazione lineare di questi elementi che da l'elemento nullo è quella a coefficenti tutti nulli.*

Definizione 43. *Il prodotto scalare in* $\mathbf{C^0} \rightleftharpoons \langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ *Altre simbologie usate sono:* $f \bullet g$, $(f|g)$

Osservazione 59. *linearità*

$$\langle(\alpha \cdot f + \beta \cdot g), h\rangle = \int_{-\pi}^{pi} (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) \cdot h(x)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{pi} [\alpha \cdot f(x) \cdot h(x) + \beta \cdot g(x) \cdot h(x)]\, dx =$$

$$= \alpha \int_{-\pi}^{pi} \cdot f(x) \cdot h(x)dx + \beta \int_{-\pi}^{pi} \cdot g(x) \cdot h(x)dx =$$

$$\alpha \langle f, h\rangle + \beta \langle g, h\rangle$$

Ripetiamolo stesso ragionamento applicato in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, *e* $\mathbb{R}^n$ *per ricavare le componenti, possiamo fare questo perché abbiamo una base e abbiamo definito un prodotto scalare.*
Se $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) \Rightarrow$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dxs = \frac{1}{\pi} \langle f, c_0\rangle$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = \frac{1}{\pi} \langle f, c_k\rangle$$

$$b_k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx = \frac{1}{\pi} \langle f, s_k\rangle$$

Quindi come prima le componenti di un vettore si ottengono moltiplicando(prodotto scalare) il vettore per gli elementi della base.
PER IL LEMMA:

$$\langle c_h, c_k\rangle = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ 2\pi & 0 = h = k \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$$

$$\langle c_h, s_k\rangle = 0$$

$$\langle s_h, s_k\rangle = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$$

Il prodotto scalare di elementi diversi è nullo quindi la base è ortogonale, ma non è ortonormale in quanto il prodotto scalare tra due elementi diversi della base non è unitario.(ecco perché gli $\frac{1}{\pi}$) *e* $\frac{a_0}{2}$ *)*
In generale in geometria non è difficile normalizzare una base, è sufficiente dividere tutti gli elementi per la loro norma. In questo caso decidiamo di non applicare questo ragionamento poiché la norma vale $\sqrt{\pi}$ *e se normalizziamo dobbiamo aggiungere questo termini ......*
Il prodotto scalare in $\mathbf{C^0}$ *è molto legato alla* d_2 *infatti:*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot f(x)dx}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx}$$

Continuano le analogie:
In $\mathbb{R}^2$ ....
In $\mathbb{R}^3$ ....
.....
......
......
.....
Passando in dimensione infinita, abbiamo una funzione f *(come vettore* $\underline{v}$*) nello spazio, e fare il polinomio di Fourier vuole dire proiettare la funzione* f *in uno spazio fatto dai primi* $2n+1$ *elementi della base che è uno spazio di dimensione finita.*

Esempio:::: Non ogni funzione ammette coefficienti di Fourier finiti. La funzione

$$\begin{aligned} f:[-\pi,\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{x^2} & x\neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

non ammette coefficienti di Fourier finiti.
Esempio::: Una funzione può ammettere tutti i coefficienti di Fourier finiti ed una serie di Fourier convergente, ma ad un limite diverso da f*.La funzione.*

$$\begin{aligned} f:[-\pi,\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \end{aligned}$$

ha coefficienti di Fourier

$$a_k = 0 \quad \forall k, \qquad \begin{cases} 0 & k \ dispari \\ \frac{4}{k\pi} & k \ pari \end{cases}$$

e serie di Fourier

$$F_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{sin(2h+1)x}{2h+1}$$

questa serie converge puntualmente in 0 *ma* $F_f(0) \neq f(0)$

ESEMPIO:: Due funzioni diverse possono avere gli stessi coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} f:[-\pi,\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g:[-\pi,\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} -1 & x<0 \\ \pi & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \end{aligned}$$

Osservazione 60. *Sia* f *una funzione pari* $\Rightarrow bn = 0 \forall n = 1, 2, \ldots, +\infty$

Osservazione 61. *Sia* f *una funzione dispari* $\Rightarrow an = 0 \forall n = 0, 1, , \ldots, +\infty$

Osservazione 62. *Siano*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$$

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (\alpha_n cos(nx) + \beta_n sin(nx))$$

Allora

$$F(x) = (f + \varphi)(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (A_n cos(nx) + B_n sin(nx))$$

con $A_n = a_n + \alpha_n$. $B_n = b_n + \beta_n$. *cioè i coefficienti di Fourier dipendono linearmente dalla funzione.*
Esempio::: $B_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)sin(3x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) + \varphi(x))sin(3x)dx =$
$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(3x)dx + \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)sin(3x)dx\right] = b_3 + \beta_3$
Sia $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \liminf_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n cos(nx))$ *allora* $F = 4f = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (A_n cos(nx) + B_n cos(nx))$
con $A_n = 4a_n$, $B_n = 4b_n$
ESEMPIO Esempio:::$B_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)sin(3x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 4f(x)sin(3x)dx = 4b_3$

Definizione 44. *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, *una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R} \rightleftharpoons f$ *è continua a tratti se esiste un numero finito di punti* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *t.c.:*

1. *In ogni punto di* $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ f *è continua*
2. $i = 1, 2, \ldots, n$ *esistono finiti entrambi i limiti:*

$$\lim_{x \to x_i^-} f(x) \qquad \lim_{x \to x_i^+} f(x)$$

Osservazione 63. *Dato* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e data una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$, *se* x_0 *è punto interno ad* A, *è comoda la notazione*

$$f(x-) = \lim_{\xi \to x^-} f(\xi) \quad f(x+) = \lim_{\xi \to x^+} f(\xi)$$

Ovviamente se f *è continua in* x *allora* $f(x-) = f(x) = f(x+)$ *ESEMPIII:::*
GRAFICO::::
GRAFICO::::
....
....
....
....

Proposizione 69. *Sia* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, f *è continua a tratti* $\Rightarrow$ *esistono finiti tutti i coefficienti di Fourier di* f

Proposizione 70. *Sia* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*,*
-f *è continua a tratti*
-$\forall \overline{x} \in [-\pi, \pi]$*, esistono finiti:*

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} = \frac{f(x) - f(\overline{x}-)}{x - \overline{x}}$$

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} = \frac{f(x) - f(\overline{x}+)}{x - \overline{x}}$$

Allora:
La serie di Fourier di f *converge puntualmente in* $\overline{x}$ *e* $F_f(\overline{x}) = \frac{f(\overline{x}-)-\overline{x}+}{2}$ *(che è il punto medio del salto.)*

Osservazione 64. *NIENTE CUSPIDI E NIENTE TANGENZE VERTICALI.*

Corollario 2. *Sia* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*,*
f *è continua a tratti.*
Sia $\overline{x} \in [-\pi, \pi]$ *un punto in cui* f *è derivabile. Allora la serie di Fourier* F_f *di* f *converge in* $\overline{x}$ *e* $F_f(\overline{x}) = f(\overline{x})$

Proposizione 71. *Sia* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*.Se:*

* $f \in \mathbf{C^0}([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$
* $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-\pi, \pi]$ *t.c.:*
  - f *è derivabile in* x
  - f' *continua in* x
* $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ *e* $\forall x \in [-\pi, \pi]$ *esistono finiti*

$$\lim_{x \to x_i^-} \frac{f(x) - f(x_i-)}{x - x_i} \qquad \lim_{x \to x_i^+} \frac{f(x) - f(x_i+)}{x - x_i}$$

Allora
La serie di Fourier F_f *di* f *converge a* f *uniformemente su* $[-\pi, \pi]$

Corollario 3. *Sia* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*, e* $f \in \mathbf{C^1}([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$*.*
Allora la serie di Fourier di F_f *di* f *converge uniformemente a* f *su* $[-\pi, \pi]$*.*

Parte V

Equazioni Differenziali

Capitolo 5

Equazioni Differenziali

5.1 Preliminari

Equazione è un uguaglianza in cui c'è almeno una incognita.
Equazione differenziale è un particolare tipo di equazione e stabilisce una relazione tra la funzione incognita e le sue derivate.In un equazione funzionale si cerca l'uguaglianza di: insieme di arrivo, insieme di partenza, corrispondenza.
Non è necessario sapere il valore della soluzione ma sapere che ne esiste una.????????

Equazione differenziale ordinaria:
1- La funzione incognita è funzione di una sola variabile, solitamente il tempo.
2- La funzione incognita e le sue derivate sono calcolate allo stesso istante di tempo.

Definizione 45. *Si dice equazione differenziale ordinaria di ordine n nella funzione incognita $x \in \mathbb{R}^k$ un espressione del tipo:*

$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

dove $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^{1+(1+n)k}$ e $t \in \mathbb{R}$.
m e k caratterizzano il problema e son dunque libere. La dimensione di partenza $1 + (1 + n)k$ del problema è obbligata e dovuta alla somma di:

- $1 = dim(t)$
- $(1 + n)k$
  - $(1 + n)$ *il numero totale delle funzioni: n derivate ed x stessa*
  - k *la dimensione dell'insieme di partenza di ogni funzione incognita*

Soluzione di questa equazione differenziale è una qualunque funzione $x : I \to \mathbb{R}^k$ definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, derivabile n volte in I e tale che $\forall t \in I$

$$(t, x, x', \dots, x^{(n)}) \in A$$
$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

Soluzione massimale di un equazione differenziale ordinaria è una soluzione $x_m : I_m \to \mathbb{R}^k$ tale che nessuna soluzione possa essere definita in un intervallo I con $I_m \subseteq I$

Nota. Un'equazione differenziale ammette, in generale, infinite soluzioni.

Esempio 32. *Presa l'equazione differenziale $x' = 1$, essa è risolta da $x(t) = t + \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$*

Nota. dalla definizione 45 segue che l'insieme di definizione della soluzione di un'equazione differenziale può essere solo un intervallo

Esercizio 1. *La soluzione di un'equazione differenziale ordinaria non può avere 3 asintoti.*

Soluzione. *La soluzione x è funzione continua. In quanto continua non può avere più di 2 asintoti verticali e in quanto funzione non può avere più di 2 asintoti orizzontali.*

Definizione 46. *un'equazione differenziale è in forma normale se e solo se si presenta nella forma*

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$$

Osservazione 65. *lo studio di un'equazione differenziale ordinaria in forma non normale inizia generalmente con l'utilizzo del Teorema della Funzione Implicita insieme ai teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie in forma normale*

Proposizione 72. *ogni equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine n è equivalente a una equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine 1, cioè in cui compaiono solamente derivate prime.*

Dimostrazione. Data l'equazione

$$x^{(n)} = g(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$$

sia y il vettore $y = \begin{bmatrix} x & x' & x'' & \ldots & x^{(n-1)} \end{bmatrix}$. Abbiamo ora che le componenti del vettore sono

$$y_1 = x \qquad y_2 = x' \qquad y_3 = x'' \qquad \ldots \qquad y_n = x^{(n-1)}$$

ed al contempo

$$y_1' = x' = y_2 \qquad y_2' = x'' = y_3 \qquad y_3' = x''' = y_4 \qquad \ldots \qquad y_{n-1}' = x^{(n-1)} = y_n$$

Cioè, differenziando l'$i-esimo$ elemento (funzione) del vettore y, mi "sposto" all'elemento (funzione) $i + 1$ di y. A questo punto tutti gli elementi di y sono equazioni differenziali del primo ordine. Quindi l'equazione può essere scritta come il seguente sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots \\ y_n' & = & g(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

□

Esempio 33. *CASO n=2*
abbiamo che $x'' = f(t, x, x')$
introduco $X' = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$
quindi $X' = f(t, X)$

Definizione 47. *si dice problema di Cauchy del primo ordine il problema di determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, soddisfacente ad una condizione iniziale.*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dove $f : J \times A \to \mathbb{R}^n$, $J \subseteq \mathbb{R}$ *è un intervallo,* $t_0 \in \mathring{J}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$.
Soluzione di un problema di Cauchy è una funzione $x : I \to \mathbb{R}^n$, *definita in un intervallo* I *contenente* t_0 *nella sua parte interna, quindi* $t_0 \in I \subseteq J$.
Tale funzione x *è soluzione dell'equazione differenziale* $x' = f(t,x)$ *ed è tale che:*

1. $x(t_0) = x_0$
2. $x(I) \subseteq A$
3. x *derivabile*

Quindi il problema di Cauchy aggiunge un vincolo ad un'equazione differenziale, così si isola una singola soluzione

Nota. Si considera un intervallo perché l'idea è di studiare l'andamento nel tempo e sarebbe difficile far previsioni con "buchi" di tempo

Nota. La condizione $x(t_0) = x_0$ viene spesso definita condizione iniziale, malgrado la definizione 47 indichi che $t_0 \in \mathring{I}$, dunque a rigore non dovrebbe essere sulla frontiera di I. Questo è dovuto al fatto che, spesso, t_0 è proprio all'inizio dell'intervallo in cui si cerca la soluzione dell'equazione, ma i risultati esposti continuano a valere con piccole modifiche alle dimostrazioni.

Definizione 48. *soluzione massimale di un problema di Cauchy è una soluzione*

$$x_M : I_M \mapsto R^k$$

tale che nessun'altra soluzione della stessa equazione possa essere definita in un intervallo I *con* $I_M \subset I$. *Quindi è la soluzione definita sull'intervallo maggiore possibile.*

Definizione 49. *si dice problema di Cauchy di ordine* n *il seguente problema:*
Determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n *soddisfacente a* n *condizioni iniziali:*

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = \alpha_0 \\ x'(t_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Nota. Le condizioni iniziali devono essere assegnate tutte nello steso istante.

Esempio 34. *il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ammette, tra le altre, anche le seguenti soluzioni, tecnicamente distinte tra loro

$$f_1 : \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ \quad t \quad \mapsto e^t \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{l} [-2,10] \to \mathbb{R} \\ \quad t \quad \mapsto e^t \end{array}$$

La soluzione massimale è

$$\begin{aligned} f_M : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^t \end{aligned}$$

con intervallo di partenza $\mathbb{R}$, avente evidentemente diametro maggiore possibile.

Proposizione 73. *ogni problema di Cauchy di ordine n è equivalente ad un problema di Cauchy del primo ordine*

Dimostrazione. Dalla 72 □

Osservazione 66. *in generale un problema si dice **ben posto** o **ben posto nel senso di Hadamard** ogniqualvolta la soluzione:*

1. *esiste*
2. *è unica*
3. *dipende con continuità dai dati*

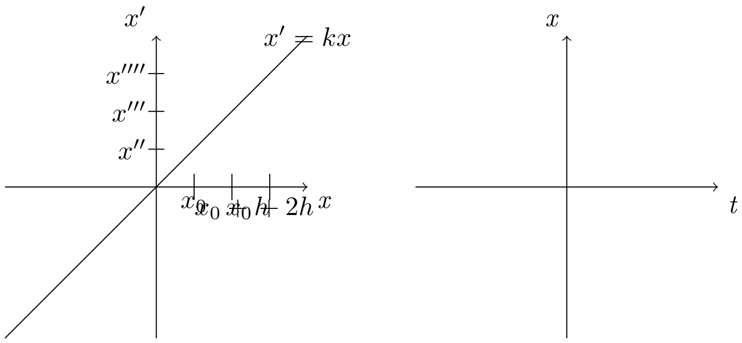
5.2 La Legge di Malthus

Una popolazione, dotata di tutto il necessario per vivere e riprodursi, cresce secondo la legge di Malthus: la velocità di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

$$x' = k \cdot x$$

dove x è il numero di membri della popolazione e k è una costante positiva legata alla prolificità della specie in esame, generalmente calcolata come differenza tra i tassi di natalità e di mortalità. Il problema di Cauchy è quindi

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}, k > 0 \text{ e } x_0 = 0$$



blablabla ....

....

Limiti di questo modello:

- *la variabile x dovrebbe variare in $\mathbb{N}$, poiché una popolazione ha un numero intero di elementi.*

- *In molte specie è verosimile che il numero di nati al tempo t dipenda dalla popolazione presente ad un tempo precedente $x(t-T), T > 0$*
- *Supporre che una popolazione abbia per sempre a disposizione risorse sufficienti può non essere realistico*
- *Questo modello va bene quando si considerano intervalli di tempo molto lunghi.*

5.3 Teoria Locale

Definizione 50. *Una funzione $f : I \times A \to \mathbb{R}^n$, con I intervallo in $\mathbb{R}$ e A aperto in $\mathbb{R}^n$, si dice **localmente lipshitziana** in $x \in A$ **uniformemente** rispetto a t se*

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 e L > 0 : \forall x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A), \forall t \in I$$

vale che

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq L \cdot \|x_2 - x_1\| \qquad o, ugualmente \qquad \frac{\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|} \leq L$$

*La lipschitzianità (**lips.**), in parole povere, valuta il rapporto tra incremento della f e delle x è minore di un valore fisso L*

Nota. La località è data da $x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A)$ e l'uniformità da $\forall t \in I$. Quindi la f rimane lips. in modo uniforme al variare di t (cioè $\forall t \in I$), ma questo non è garantito $\forall x \in A$, solo per $x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A)$.

Proposizione 74. *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto ed $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Ogni funzione $f \in \mathbf{C^1}(I \times A, R^n)$ è localmente lipschitziana??? ..... uniformemente rispetto a $t \in I$.*

Dimostrazione. sia $x \in A \Leftarrow \exists B(x_0, r) \subseteq A$ con $r > 0$, anche $\overline{B(x_0, r)} \subseteq A$ scelto r abbastanza piccolo, allora $\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| le \sup_{(t,x) \in I \times \overline{B(x_0, r)}} \|Df()\| \|x_2 - x_1\|$ per la formula degli accrescimenti finiti. □

5.3.1 Esistenza e Unicità

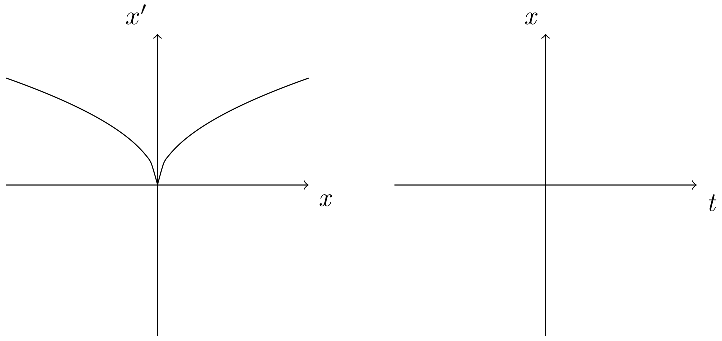
Proposizione 75. *Teorema di Peano Si consideri il seguente problema di Cauchy:* $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *con $f : I \times A \in \mathbb{R}^n$ soddisfacente alle ipotesi:*

1. *$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $A \subseteq \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathring{I}, x_0 \in \mathring{A}$*
2. *$f \in \mathbf{C^0}(I \times A; R^n)$*

Allora esiste una soluzione, cioè $\exists J \subseteq I$ intervallo e $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ con le proprietà:

- *$J \subseteq I, \varphi(J) \subseteq A$*
- *$t_0 \in \mathring{J}, \varphi(t_0) = x_0$*
- *φ derivabile e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$*

Osservazione 67. *??*
ESEMPIO Il Baffo/Pennello di Peano
$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$



Se $x_0 = 0$ *ho che* $\varphi(t) = 0$ *è soluzione* $\forall t$
Ma $x' = \sqrt{|x|}$ *è anche un'equazione a variabili separabili quindi risolvibile.*

$$\frac{x'}{\sqrt{|x|}} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{x'}{\sqrt{|x|}} dt = t$$

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = t$$

valuto ora il caso $x >= 0$ *quindi* $|x| = x$

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} = t$$

la soluzione cercata è quindi $x(t) = \frac{1}{4}t^2$*, estendendo il ragionamento ai tempi negativi si trova che la soluzione cercata è:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\frac{1}{4}t^2 & t > 0, \\ 0 & t = 0 \\ -\frac{1}{4}t^2 & t < 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato che per la condizione iniziale $x_0 = 0$ *il sistema ammette due soluzioni, si riesce estendere la soluzione a invinite funzioni.*

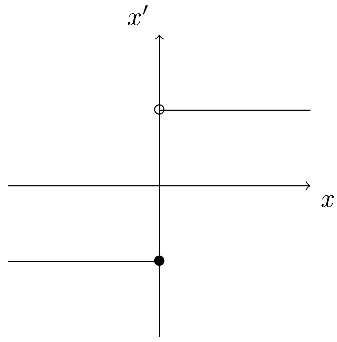
$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-a)^2 & t < a, \\ 0 & t \in [a, b] \\ +\frac{1}{4}(t-b)^2 & t > 0 \end{cases}$$

infatti:

$$\varphi'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{8}(t-a) & t < a, \\ 0 & t \in [a, b] \\ +\frac{1}{8}(t-b) & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{8}(t-a) = \frac{-\frac{1}{4}(t-a)^2}{\sqrt{-\frac{1}{4}(t-a)^2}} & t<a, \\ 0=0 & t\in[a,b] = ...?????sistema \\ +\frac{1}{8}(t-b) = \frac{\frac{1}{4}(t-b)^2}{\sqrt{\frac{1}{4}(t-b)^2}} & t>0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato infinite soluzioni.
Questo esempio per sottolineare che il teorema di Peano non garantisce l'unicità della soluzione
ESEMPIO CONTINUITÀ è IPOTESI NECESSARIA
Questo esempio mostra che se non c'è continuità, può?????????? non esserci la soluzione.
Dato il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} x' = \begin{cases} 1 & x<0 \\ -1 & x\geq 0 \end{cases} \\ x(0)=0 \end{cases}$



$x(t)=0$ *soddisfa la condizione iniziale ma ovviamente non può essere soluzione del problema poiché per* $x\neq 0$ *si ha che* $x'=\pm 1$ *che non è la derivata della funzione nulla.*
partendo sempre dalla condizione iniziale si può ipotizzare per esempio che la soluzione cresca, solo che questo contraddice $x'(0)=-1$
se invece si ipotizza che decresce da 0 *si ottiene che la funzione assume valori negativi, anche questo è un assurdo poiché la derivata per valori negativi della funzione è positiva.*
Precisiamo che se il problema fosse stato $\begin{cases} x' = \begin{cases} 1 & x<0 \\ -1 & x\geq 0 \end{cases} \\ x(0)=-3 \end{cases}$ *allora la funzione* $\varphi(x)=-x+3$
sarebbe stata soluzione nell'intervallo $J=\left]-\infty,0\right[$

Proposizione 76. *Teorema di Cauchy Locale In sostanza si dimostra che il problema di Cauchy è ben posto nel senso di Hadamard.*
Si consideri il problema di Cauchy: $\begin{cases} x'=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$
con $f: I\times A\to\mathbb{R}^n$ *soddisfacente le ipotesi:*

1. $I\subseteq\mathbb{R}^n$ *intervallo,* $t_0\in\mathring{I}, A\subseteq\mathbb{R}^n, x_0\in\mathring{A}$

2. $f\in\mathbf{C^0}(I\times A;\mathbb{R}^n)$ *queste prime due ipotesi garantiscono l'esistenza, Thm. Peano.*

3. f *è localmente Lipschitziana in* $x\in A$ *uniformemente rispetto a* $t\in I$

Allora:

1. *Esistenza*
   $\exists J \subseteq I, \exists \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ *con le proprietà*
   $$\varphi soluzione : \begin{cases} * & J \subseteq I, \varphi(J) \subseteq A \\ * & t_o \in \mathring{J}, \varphi(t_0) = x_0 \\ * & \varphi derivabile, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in J \end{cases}$$

2. *Unicità*
   Se $\exists J_1, J_2$ *intervalli con* $J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I$ *e* $\exists \varphi_1 : J_1 \to \mathbb{R}^n, \varphi_2 : J_2 \to \mathbb{R}^n$ *soluzioni, cioè*
   $$\varphi_1, \varphi_2 soluzione : \begin{cases} * & J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I, \varphi_1(J_1) \subseteq A, \varphi_2(J_2) \subseteq A \\ * & t_o \in \mathring{J}_1, t_o \in \mathring{J}_2 \varphi_1(t_0) = x_0, \varphi_2(t_0) = x_0 \\ * & \varphi_1, \varphi_2 derivabili, \varphi_1'(t) = f(t, \varphi_1(t)) \quad \forall t \in J_1 \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_2(t)) \quad \forall t \in J_2 \end{cases}$$
   Si può osservare che $J_1 \cap J_2$ *è non vuoto poiché entrambi gli insiemi contengono* t_0 *nella loro parte interna.*
   Allora $\forall t \in (J_1 \cap J_2)$ *vale* $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$*,cioè se esistono due soluzioni ovunque entrambe siano definite esse coincidono..*

3. *Dipendenza Continua Dai Dati*
   Si considerino i problemi di Cauchy che hanno la condizione iniziale nello stesso istante:
   $$(1) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
   con $f, g : I \times A \to \mathbb{R}^n$ *soddisfacenti le ipotesi allora esiste un* $\delta > 0$ *tale che sull'intervallo* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *sono definite una soluzione* φ *di (1) ed una soluzione* ψ *di (2). Inoltre esiste* $L > 0$ *t.c.* $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *vale:*
   $$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}) e^{L|t - t_0|}$$
   dove $\|f - g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_{I \times A} \|f(t, x) - g(t, x)\|$

Osservazione 68. *L'equazione integrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

viene spesso denominata EQUAZIONE DI VOLTERRA.
Questa equazione ha senso anche per alcune funzioni f non non continue ma solo misurabili nel primo argomento. Ne consegue che nei Teoremi di esistenza ed unicità (locali/globali) l'ipotesi "f continua" può essere sostituita da "f continua tratti in $t, \forall x$*, continua in x e limitata"*

Osservazione 69. *la norma dell'integrale è minore uguale dell'integrale della norma.*

Proposizione 77. *LEMMA DI GRONWALL*
Dati $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a \leq b$ *siano* $\delta_0 \in [0; +\infty]$ *e* $\delta, \kappa : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funzioni continue su* $[a, b]$ *con* $\delta(t) \geq 0, \kappa(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ *e* $\delta(t) \leq \delta_0 + \int_a^t \kappa(\tau) \delta(\tau) d\tau$ *Allora*

$$\delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t \kappa(\tau) d\tau}$$

Questo teorema porta da una stima implicita di δ *(sotto il segno di integrale) ad una stima esplicita*

Dimostrazione. sia $\delta_0 > 0$. Sia $\Delta(t) = \delta_0 + \int\limits_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$.

Vale per ipotesi che $\delta(t) \leq \Delta(t) = \delta_0 + \int\limits_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$

Sfruttando la derivata di $ln(\Delta(t))$ si ottiene $\frac{d}{dt}(ln(\Delta(t))) = \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} = \frac{\kappa(t)\delta(t)}{\Delta(t)}$, ed il termine $\frac{\delta(t)}{\Delta(t)} \leq 1$, Integrando il primo e l'ultimo termine

$$\int\limits_a^t \left(\frac{d}{dt}\left(ln(\Delta(t))\right)\right) \leq \int\limits_a^t \kappa(\tau)d\tau$$

$$ln(\Delta(t)) \leq ln(\delta_0) + \int\limits_a^t \kappa(\tau)d\tau$$

$$\Delta(t) \leq \delta_0 e^{\int\limits_a^t \kappa(\tau)d\tau}$$

Da cui la tesi. Se $\delta_0 = 0$, ponendo $\Delta(t) = \epsilon + \int\limits_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$ si ottiene $\delta(t)\epsilon$ .... e il mio cervello sta bruciando □

Dimostrazione. Cauchy Locale:
L'idea alla base della dimostrazione è che vogliamo riuscire a trasformare il problema di Cauchy in un problema di punto fisso.Prima di tutto serve una relazione che dal problema di Cauchy ci permetta di ottenere x in funzione di qualcosa che dipenda da x.
Integrando ambi i membri della prima equazione del problema di ottiene:

$$\int\limits_{t_0}^t (x')d\tau = \int\limits_{t_0}^t (f(\tau, x(\tau)))d\tau$$

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^t (f(\tau, x(\tau)))d\tau$$

T è una funzione del tipo: $\begin{array}{ccc} T :? & \rightarrow & ? \\ x & \rightarrow & Tx \end{array}$, con $y(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^t (f(\tau, x(\tau)))d\tau$

Abbiamo raggiunto un problema di punto fisso ($x = Tx$). Ora bisogna determinare l'insieme di partenza e l'insieme di arrivo in maniera utile per la dimostrazione. Per poter applicare il Teorema delle contrazioni serve che lo spazio di partenza e di arrivo siano uguali e chiamiamo $\mathcal{X}$.

$T : \mathcal{X} \;\; \rightarrow \;\; \mathcal{X}$ t.c.: $y(t) = (Tx)(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^t (f(\tau, x(\tau)))d\tau$ Bisogna quindi scegliere l'insieme $\mathcal{X}$.

è un insieme di funzioni, in cui l'equivalenza sopra deve avere senso, cioè serve x continua per avere l'equivalenza con il problema di Cauchy, quindi $\mathcal{X} = \mathbf{C^0}(\ldots)$.
Inoltre volendo una soluzione del problema di Cauchy, la funzione $x(pensosiay(t) = x)$ deve essere definita almeno su un intervallo contenente t_0 nella sua parte interna, non interessa l'estensione di tale intervallo quindi si può scegliere $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, inoltre deve avere valori in un insieme con x_0 nella sua parte interna, $\overline{B(x_0, r)}$. Quindi $\mathcal{X} = \mathbf{C^0}([t_0 - \delta, t_0 + \delta]\,; \overline{B(x_0, r)})$
Per δ, r abbastanza piccoli si ha $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq I$, $\overline{B(x_0, r)} \subseteq A$, quindi adesso il problema è quello di determinare δ, r.
Per poter applicare il teorema delle contrazioni:

a- Tx definita (possibilità di calcolarla)

b- $Tx \in \mathcal{X}$ (insiemi di partenza e arrivo)

c- Tx contrazione

d- $\mathcal{X}$ completo

Se tutti questi punti sono soddisfatti, si può trovare $x = Tx$, cioè una x che soddisfa l'equazione integrale e di conseguenza, per equivalenza, soluzione del problema di Cauchy.

a- Tx definita significa poter calcolare l'integrale,per poter calcolare l'integrale devo poter calcolare la f, per calcolare la f ho bisogno che τ e $x(\tau)$ stiano dentro gli insiemi su cui è definita la f, cioè I, A, per essere sicuri di non uscire dall'intervallo:

$$\delta > 0 \quad t.c: \quad [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq I$$

OSS:: Se si cambiano δ, r con valori minori tutto vale ancora.
OSS:: Per il problema x derivabile -¿ integrale ... mi sosto in $\mathbf{C^0}$

b- Tx deve appartenere a $\mathcal{X}$. L'insieme $\mathcal{X}$ sostanzialmente pone tre vincoli a Tx: deve essere $\mathbf{C^0}$, definita in $[t_o - \delta; t_0 + \delta]$ a valori in $\overline{B(x_0, r)}$.
Per iniziare si verifica che sia definita in $[t_o - \delta; t_0 + \delta]$
.... qualcosa che non comprendo.... $\mathbf{C^0}$
Resta da verificare che Tx è a valori nella sfera, cioè che

$$(Tx)(t) \in \overline{B(x_0, r)}$$

Valuto la distanza tra $(Tx)(t)$ e x_0. La differenza tra la posizione al tempo t e al tempo t_0, questa distanza può essere controllata con la velocità e il tempo per cui il punto si è mosso. Chiamata V la massima velocità alla quale può muoversi il punto, $V = \sup (t_0 \times X_0) \in ([to + \delta, t_0 - \delta] \times \overline{B(x_0, r)})$ $\{\|f(t, x(t))\|\}$ che è il sup della norma di f, cioè dei moduli dei vettori velocità, questo esiste sempre finito, non ∞ poiché f è continua, la norma è continua , t varia in un chiuso e limitato, x_0 varia in un chiuso e limitato, quindi stiamo calcolando il sup di una funzione continua su un chiuso e limitato allora per il teorema di Weierstrass $V = \max (t_0 \times X_0) \in ([to + \delta, t_0 - \delta] \times \overline{B(x_0, r)}) = \{\|f(t, x(t))\|\}$
Non potendo modificare V, δ poniamo una restrizione su r:$V\delta < r$, da cui $\delta < r \cdot V$

$$\|(Tx)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} V \cdot d\tau \right| = V \, |t - t_0| \leq V\delta < r$$

....aggiunto il modulo per $t < t_0$ e $t > t_0$ non lo si sa a priori
quindi $\|(Tx)(t) - x_0\|$ è minore di r scelto δ opportunamente piccolo.

c- Se Tx è una contrazione deve valere che

$$\|Tx_2 - Tx_1\|_{\mathbf{C^0}} \leq K \, \|x_2 - x_1\|_{\mathbf{C^0}} \quad k \in [0, 1[\quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

con $\|Tx_2 - Tx_1\|_{c^0} = \sup\limits_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\|$, partendo da questa utilizzando prima la definizione di f poi la linearità dell'integrale ....lipsh f... proprietà

$$\|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\| =$$

$$\left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_2(\tau))d\tau - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))d\tau \right) \right\| =$$
$$\left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_2(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))d\tau \right\| \leq$$
$$\left| \int_{t_0}^{t} \| f(\tau, x_2(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau)) \| \, d\tau \right| \leq$$
$$\left| \int_{t_0}^{t} L \, \| x_2(\tau) - x_1(\tau) \| \, d\tau \right| \leq$$
$$L \left| \int_{t_0}^{t} \| x_2 - x_1 \|_{\mathbf{C^0}([t_0-\delta, t_0+\delta]; R^n)} \, d\tau \right| =$$
$$L \cdot \| x_2 - x_1 \|_{\mathbf{C^0}([t_0-\delta, t_0+\delta]; R^n)} \, |t - t_0| \leq$$
$$L\delta \, \| x - x_0 \|_{\mathbf{C^0}([t_0-\delta, t_0+\delta]; R^n)}$$

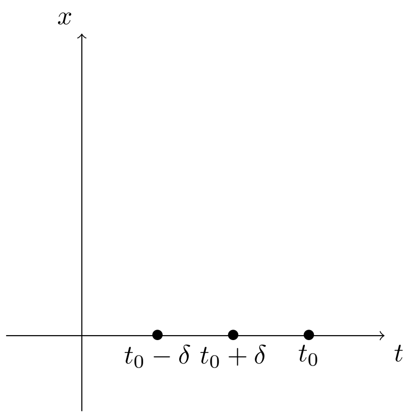
cioè $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ vale che $\|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\| \leq L\delta \, \|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C^0}([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}$ e poiché è vero $\forall t \Rightarrow$ passando all'estremo superiore

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_{\mathbf{C^0}([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)} \leq L\delta \, \|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C^0}([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}$$

A questo punto scelto δ t.c. $L\delta < 1$ ad esempio $\delta = \frac{1}{2L}$ così ottengo che per δ opportuno Tx è una contrazione.

d- Bisogna mostrare che $\mathcal{X}$ è completo.
Supponiamo che $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{C^0}([t_0 - \delta, t_0 + \delta]\, ; R^n)$, questo insieme è completo rispetto alla metrica $d_\infty = d_{\mathbf{C^0}}$, allora se abbiamo una successione x_n di Cauchy in $\mathcal{X}$ lo è anche su $\mathbf{C^0}([t_0 - \delta, t_0 + \delta]\, ; R^n)$, allora $\exists x_\infty \in \mathbf{C^0}([t_0 - \delta, t_0 + \delta]\, ; R^n)$ con $x_n \to x_\infty$ per $n \to \infty$, ma poiché $\forall t \in [t_0 - \delta, to + \delta]$ $x_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ e visto che $\forall t, \forall n \quad \|x_n(t) - x_0\| \leq r$ anche al limite vale $\|x_\infty(t) - x_0\| \leq r \Rightarrow x_\infty \in \mathcal{X}$ cioè $\mathcal{X}$ è completo.

Possimao a questo punto applicare il teorema delle Contrazioni allora T ha un unico punto fisso allora l'equazione integrale ha un unica soluzione allora esiste la soluzione del problema di Cauchy e su $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ possiamo gia dire che la soluzione è unica.
MA QUANTO CAZZO è LUNGA FORSE SONO A METà



FINIRE DISEGNO......

OSS:: Passando da (a-), (d-) abbiamo ristretto sempre più il range di valori che δ, r possono assumere, così che alla fine è rimasto un intervallo sul quale è applicabile il teorema delle Contrazioni. Abbiamo trovato un intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ in cui la soluzione esiste. Adesso osserviamo cosa accade prima a destra e poi a sinistra dell'intervallo con un ragionamento analogo.

Soluzioni che sono coincidenti(cioè unica) in un intervallo possono non esserlo al di fuori dello stesso. Cauchy locale ci assicura che questo non può succedere.

Sia per assurdo t_M l'ultimo istante fino a cui φ_1, φ_2 coincidono, cioè: $t_M = \sup \{t \in I : t \geq t_0, \varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau), \forall \tau \in [t_0, t[$

Cerchiamo di mostrare o che non c'è o che è alla fine dell'intervallo I.

Se si considera il problema di Cauchy: $\begin{cases} x' = f(t, x(t)) \\ x(t_M) = x_{t_M} \end{cases}$. Possiamo applicare quanto trovato per il punto uno della tesi, cioè esiste un intervallo contenente t_M nella sua parte interna in cui la soluzione esiste ed è unica.

OSS:: t_M esiste sempre poiché è il *sup* di un insieme non vuoto, inoltre $t_M \geq t_0 + \delta$ è certamente $t_M \in \overline{I}$

Possono verificarsi due casi, o t_M è sul bordo di I ed in questo caso la dimostrazione è finita poiché fino al bordo dell'intervallo le soluzioni coincidono. Oppure T_M è nella parte interna dell'intervallo quindi $t_m \neq \sup I \Rightarrow t_M \in \mathring{I}$, e se è u n punto interno per l'intervallo allora è anche un punto di accumulazione per lo stesso, è quindi possibile calcolare $\lim_{t \to t_M^-} \varphi_1(t) \quad \lim_{t \to t_M^-} \varphi_2(t)$ ma entrambi i limiti devono essere uguali a x_M poiché sia φ_1, φ_2 sono soluzioni al problema di Cauchy e devono quindi soddisfare la condizione iniziale, anche perché fino a t_M le due soluzioni coincidono e quindi il loro limite deve essere lo stesso.

Riguardo x_M si può dire che:

1. se $x_M = A \Rightarrow$ le soluzioni coincidono fino alla fine dell'insieme A.
2. se $x_m \in \mathring{A}$ abbiamo esattamente le ipotesi del teorema di Cauchy locale, per quanto visto si ha necessariamente che:
   $\exists \delta_M > 0, \exists \varphi_M : [t_M - \delta_M, t_0 + \delta_M] \to \mathbb{R}^n$ che è soluzione del nuovo problema impostato, UNICA per quanto detto sull'intervallo.

Applicando il ragionamento fino a quando non si raggiungono i bordi di I e di A abbiamo dimostrato che se esistono più soluzioni allora queste coincidono dove sono definite entrambe.

FATTO IL SECONDO PUNTO DEL TEOREMA.

Dati

$$(P_f) : \begin{cases} x' = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (P_g) : \begin{cases} y' = f(g, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Siano φ soluzione di P_f, ψ soluzione di P_g, bisogna stimare quanto queste due soluzioni di due problemi con la condizione iniziale allo stesso istante distano.

$$\varphi : [t_0 - \delta_f, t_0 + \delta_f] \to \mathbb{R}^n$$

$$\psi : [t_0 - \delta_g, t_0 + \delta_g] \to \mathbb{R}^n$$

chiamo $\delta = \min \delta_f, \delta_g$ che sicuramente soddisfa entrambe. Per stimare la distanza tra le soluzioni valuto:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau - y_0 - \int_{t_0}^{t} g(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right\|$$

linearità integrale disuguaglianza norma... modulo per i differenziali ....

$$\|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau)) - g(\tau, \psi(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$

adesso all'interno dell'integrale aggiungo e tolgo la quantità $f(\tau, \psi(\tau))$ e applico la disuguaglianza triangolare riarrangiando i termini

$$\|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))\| + \|f(\tau, \psi(\tau)) - g(\tau, \psi(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$

$$\|x_0 - y_0\| + \|f - g\|_{c^0} |t - t_0| + \left| \int_{t_0}^{t} L \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| \, d\tau \right|$$

per comodità restringiamo la trattazione al caso $t > t_0$ sparisce il modulo. Riscrivo il primo e l'ultimo membro della disuguaglianza

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq [\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{c^0}] + \left| \int_{t_0}^{t} L \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| \, d\tau \right|$$

$$\left(\delta(t) \leq \delta_0 + \int_{t_0}^{t} \kappa(\tau)\delta(\tau) d\tau \right) :: \textit{Gronwall}$$

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq [\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}] + e^{L|t - t_0|}$$

QUESTO TEOREMA è TROPPO DA PRO. □

ESEMPIO: DECADIMENTO RADIOATTIVO
Il decadimento di una sostanza radioattiva è ben descritto da $x' = -k \cdot x$ dove x è la quantità di sostanza radioattiva non ancora decaduta e k è una costante propria di ogni singolo materiale
....
ESEMPIO: LEGGE DEL CALORE DI NEWTON
......
ESEMPIO: CRESCITA LOGISTICA
......

5.4 Teoria Globale

Proposizione 78. *Siano (X, d_x) e (Y, d_y) spazi metrici, sia $f : A \subseteq X \to Y$. Se f è uniformemente continua su A allora $\exists! \overline{f} : \overline{A} \to Y$ t.c. $\overline{f}_{|A} = f$. cioè f può essere estesa in modo unico alla chiusura dell'insieme A.*

Definizione 51. *Una funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con I intervallo in R si dice sub lineare se esistono due costanti positive A e B t.c.: $\forall t \in I$*

$$\|f(t, x)\| \leq A + B \|x\|$$

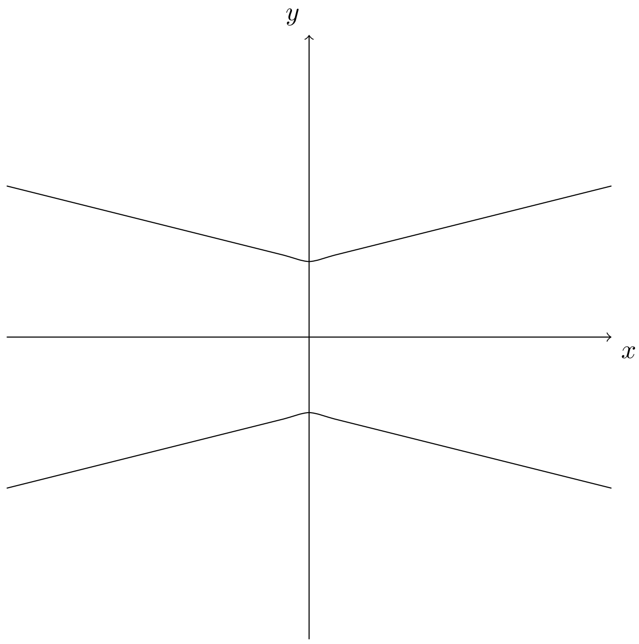
ESEMPIO:: $f(t, x) = x^2$ NON SUBLINEARE
ESEMPIO:: $f(t, x) = sin(x^2)$ SUBLINEARE

Osservazione 70. *Sia $f(t, x)$ globalmente Lipshitziana in x uniformemente in t allora f sublineare.*

$$\exists L \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, t \in I, \|f(t, 0)\| \leq A$$

$$\|f(t,x_2) - f(t,x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$$
$$\|f(t,x)\| \leq \|f(t,x_0)\| + \|f(t,x) - f(t,0)\| \leq A + L\,\|x\|$$

In sostanza una funzione è sublineare se esiste una retta tale per cui il grafico della funzione è tutto nella regione di piano delimitata da questa retta.



ESEMPIO::$x \cdot sin(x)$ *SUBLINEARE*
ESEMPIO::$x^2 \cdot sin(x)$ *NO SUBLINEARE*
ESEMPIO::e^x *NO SUBLINEARE*
Diciamo sublineare se il grafico non si impenna.

Proposizione 79. *Data la funzione* $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, se:*

1. $I \subseteq \mathbb{R}$ *è un intervallo, con* $t_0 \in \mathring{R}^n$
2. $f \in \mathbf{C^0}(I \times \mathbb{R}^n; R^n)$
3. f *è localmente Lipschitziana in* $x \in \mathbb{R}^n$ *uniformemente rispetto* $t \in I$
4. f *è sublineare*

allora il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *ammette un'unica soluzione definita sull'intervallo* I*.*

Dimostrazione. DISEGNO...
Il teorema di Cauchy Locale assicura che la soluzione esiste unica su un intervallo centrato all'istante iniziale. Bisogna dimostrare che la soluzione può essere estesa a tutto l'intervallo. Questo non si può fare in due casi:

1. c'è un asintoto verticale

2. oscilla tanto che a un certo punto non va più avanti

Quindi i casi in cui la soluzione non si può estendere su tutto l'intervallo sono quelli in cui non esiste il limite della soluzione. Quindi dobbiamo evitare tali comportamenti.
Ragionamento da t_0 in avanti.
Sia $T = sum\,\{t \in I : \exists soluzionesu\,[t_0, t[\}$ cioè prendo l'estremo superiore dei tempi per cui c'è una soluzione. Se $T = supI$ o $T = +\infty$ abbiamo la tesi.
Se T finito con $T < supI$, dimostrando che la derivata della soluzione è limitata si escludono i casi in cui l'estensione della soluzione non si può fare. quindi bisogna mostrare $x' = f(t, x)$ è limitata sull'insieme dove può arrivare la x
Sia ora φ soluzione del problema di Cauchy:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Valuto allora
$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau\right| = \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau))\|\, d\tau$ poiché $t \in [t_0, T[$
$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (A + B\,\|\varphi(\tau)\|)\, d\tau$ poiché f è sublineare.
$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + A(T - t_0) + \int_{t_0}^{t} B\,\|\varphi(\tau)\|\, d\tau$
...
applico il Gronwall e risulta che

$$\|\varphi(t)\| \leq (\|x_0\| + A(t - t_0))\, e^{B(t-t_0)} \leq (\|x_0\| + A(t - t_0))\, e^{B(T-t_0)}$$

Abbiamo quindi dimostrato che la f resta limitata.
Posso guardare alla funzione come segue:

$$\sup\left\{f(t, x) : t \in [t_0, T[\,, x \in \overline{B\left(x_0, [\|x_0\|\, A\,(T - t_0)]\, e^{B(T-t_0)}\right)}\right\}$$

$\overline{B\left(x_0, [\|x_0\|\, A\,(T - t_0)]\, e^{B(T-t_0)}\right)}$ è un insieme compatto poiché chiuso e limitato in R^n, φ è limitata, la f limitata, allora φ' limitata allora φ lipshitziana allora φ uniformemente continua.
Allora esiste finito $\lim\limits_{t \to T^-} \varphi(t) = X$. Ora possono verificarsi due casi:

1. Se $T = \sup I \Rightarrow$ dimostrazione conclusa

2. Se $T < \sup I \Rightarrow$ posso considerare il problema di Cauchy
$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(T) = X \end{cases}$ Questo è un assurdo poiché arriveremmo a trovare una soluzione definita oltre il tempo T. Questo nega la scelta fatta a inizio dimostrazione.

$\square$

5.5 Equazioni Autonome

Definizione 52. *Un'equazione differenziale ordinaria in forma normale si dice autonoma sse la variabile indipendente (solitamente il tempo) non vi compare esplicitamente.*

Osservazione 71. *Tipicamente, le equazioni differenziali ordinarie autonome modellizzano sistemi isolati.*

Osservazione 72. *Invarianza per traslazione temporale.*
Non è importante ai fini dello studio dell'equazione l'istante iniziale, ma solo la lunghezza dell'intervallo. Se $x = \varphi(t)$ *risolve* $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
Allora $x = \varphi(t + t_0)$ *risolve* $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Dimostrazione. Sia $\psi(t) = \varphi(t_0 + t)$
$\psi'(t) = \phi'(t_0 + t) = f(\varphi(t_0 + t)) = f(\psi(t))$
$\psi(0) = \varphi(t_0) = x_0$ □

Proposizione 80. *Teorema dell'energia cinetica*
Un punto materiale non vincolato P *di massa* m *si muove sotto l'azione di una forza* F *che dipende solo dalla posizione di* P*. Allora la variazione di energia cinetica di* P *è uguale al lavoro compiuto su* P *da questa forza.*

Dimostrazione. sia $\underline{x} = (x, y, z)$ la terna delle coordinate di P. Per il Secondo Principio della Dinamica e per quanto assunto sulla forza F, il moto di P è descritto dall'equazione(vettoriale) differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$m\underline{x''} = F(\underline{x})$$
$$m\underline{x''} \cdot \underline{x'} = F(\underline{x})\underline{x'}$$
$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left((\underline{x'})^2\right) = F(\underline{x})\underline{x'}$$
$$\int_0^t \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left((\underline{x'}(\tau))^2\right)d\tau = \int_0^t F(\underline{x}(\tau)) \cdot \underline{x'(\tau)}d\tau$$
$$\frac{1}{2}m\left(x'(t)\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(x'(0)\right)^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} F(\xi)d\xi$$

L'ultimo integrale è calcolato lungo la traiettoria di P. □

ESEMPIO:: Il Lancio di un Paracadutista
.....
.....
.....
ESEMPIO:: CADUTA IN UN LIQUIDO
.....
.....
.....

5.6 Equazioni Differenziali Ordinarie

Definizione 53. *Sia* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo e* $n \in N$*. Date le* $n+1$ *funzioni* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{C}$ *si dice equazione differenziale ordinaria lineare di ordine* n*, l'equazione differenziale:*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t)x = f(t)$$

Se $f \equiv 0$ *l'equazione si dice omogenea.*

Proposizione 81. *sia I un intervallo compatto e tale che $\mathring{I} \neq \emptyset$ siano $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f \in$ $\mathbf{C^0}(I; \mathbb{C})$. Allora $\forall t_0 \in \mathring{I}$ e $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} []x^{(n)} = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \\ x(t_0) = c_0 \\ x(t_2) = c_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1} \end{cases}$$

ammette soluzione unica definita su tutto l'intervallo I.

Dimostrazione. Un'equazione differenziale lineare di ordine n può essere trasformato in un sistema di equazioni al primo ordine. Introduciamo la variabile $X \in \mathbf{C^n}$ ed il dato iniziale $C \in \mathbf{C^n}$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \dots \\ x^{(n-1)} \\ x^{(n)} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

il problema di Cauchy per l'equazione lineare diventa:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \dots \\ X_{n-1}' \\ X_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} X(t_0) = C \end{cases}$$

La funzione
$$\begin{aligned} F : I \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n \\ (t, X) &\to \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$
è lineare in X e globalmente lipshitziana in X uniformemente in t, infatti per ogni $X, Y \in \mathbb{C}^n$

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq \sqrt{1 + \left(\max_k \sup_I \|a_k\|\right)^2} \cdot \|X - Y\|$$

Sono soddisfatte le ipotesi di Cauchy Globale allora si ha la tesi. □

Osservazione 73. *La locuzione lineare è giustificata dalla proposizione seguente.*

Proposizione 82. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $n \in \mathbb{N}$. Date le $n + 1$ funzioni $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f :$ $I \to \mathbb{C}$,l'operatore*
$$\begin{aligned} L : \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) &\to \mathbf{C^0}(I; \mathbb{C}) \\ x &\to x^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} \end{aligned}$$
è lineare

Dimostrazione. La linearità di L equivale a:

$$\begin{array}{cc} L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) & \forall x_1, x_2 \in \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) \\ L(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot L(x) & \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) \end{array}$$

Entrambe le condizioni seguono dalle regole di derivazione. □

5.7 Equazioni Lineari a Coefficienti Costanti

Definizione 54. *Dati i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in \mathbb{C}$, si dice equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n a coefficienti costanti l'equazione differenziale*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = b$$

se $b = 0$ l'equazione si dice omogenea. La sua Equazione caratteristica è l'equazione algebrica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n+1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Osservazione 74. *Nella risoluzione di equazioni differenziali lineari la funzione esponenziale $t \to e^{\lambda t}$ riveste un ruolo molto particolare. Questa funzione è un autovalore dell'operatore di derivazione D relativo all'autovalore, risolve infatti λ:$Dx = \lambda \cdot x$*

Proposizione 83. *Data l'equazione*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = b$$

$x(t) = e^{\lambda t}$ risolve l'equazione omogenea $\Leftrightarrow$ λ è soluzione dell'equazione caratteristica.

LEMMA:: Sia $x(t) = t \cdot e^{\lambda \cdot t}$. Allora , per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$x^{(n)}(t) = \left(\lambda^n t + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda t}$$

???????????????NON L?HO CAPITA BENE.......................

Proposizione 84. *Data l'equazione*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = b$$

$x(t) = te^{\lambda t}$ risolve l'equazione omogenea $\Leftrightarrow$ λ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità almeno ??????????.

Parte VI

Calcolo delle Variazioni

Parte VII

Chapter

5.8 Preliminari

Il calcolo delle variazioni si occupa dell'ottimizzazione di funzioni $F : X \to \mathbb{R}$, dove X è un insieme di funzioni.
In questo capitolo varranno considerati univocamente funzionali integrali del tipo

$$\begin{array}{rcl} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt \end{array}$$

eventualmente soggetti a vincoli sui valori $x(a)$ e $x(b)$ o sul valore di un integrale del tipo $\int_a^b \varphi(x(t))dt$.
Dove:

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$X = \left\{x \in \mathbf{C^1}([a, b]); \mathbb{R}^n \ t.c.: \ x(a) = x_a, x(b) = x_b\right\}, \ \ con \ x_a, x_b \in \mathbb{R}^n$$

Proposizione 85. *Sia $f \in \mathbf{C^1}(A \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ con $a \subseteq \mathbb{R}^n$*
Se $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_\alpha^\beta f(x, t)dt \end{array}$ *Allora:*

$$F \in \mathbf{C^1}$$

$$\partial_\alpha F(\alpha, \beta, x) = -f(x, \alpha)$$

$$\partial_\beta F(\alpha, \beta, x) = f(x, \beta)$$

$$\nabla_x F(\alpha, \beta, x) = \int_\alpha^\beta \nabla_x f(x, t)dt$$

Definizione 55. *?????????????? R OPPURE RN*
Sia $I \in \mathbb{R}$ un intervallo. Curva su I $\mathbb{R} \rightleftharpoons$ una funzione $\gamma : I \subseteq \mathbb{R}^n$ che sia continua.

Osservazione 75. *$\gamma(I)$ si chiama supporto della curva,ed 1'e certamente connesso.(una funzione continua manda intervalli connessi in connessi)*

Definizione 56. *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva, lunghezza della curva $\rightleftharpoons l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : N \in \mathbb{N} \, N >\right.$*
cioè prendo una curva e la approssimo con una spezzata, la più lunga di tutte le poligonali è la lunghezza della curva.
DISEGNO
DISEGNO

Definizione 57. *Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dice rettificabile $\rightleftharpoons f(\gamma) < +\infty$*

Osservazione 76.

$$\sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

per il teorema del valore medio differenziale(accrescimenti finiti)

$$\sum_{i=1}^{N} \|\gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})\| =??$$

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Proposizione 86. *Se* $\gamma \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R}^n) \Rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$

Osservazione 77. *Se* γ *è la traiettoria di un punto materiale,allora* $\|\gamma\|$ *è la norma della velocità istantanea, e quindi* $l(\gamma)$ *è lo spazio che si percorre, cioè l'integrale della velocità valutato tra* $t??????t_i$ *due istanti di tempo entro i quali si mantiene tale velocità.*

Osservazione 78. *Nel caso specifico sarà:*

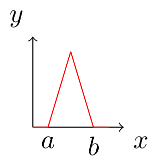
$$X = \{x \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R}2) : x(a) = A, x(b) = B\}$$

$$\begin{array}{ccc} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b \|x'(t)\|\,dt \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t,x,x') & \to & \|x'(t)\| \end{array}$$

5.9 L'Equazione di Eulero

LEMMA:::LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI
Sia $f \in \mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ *t.c.:* $\forall v \in \mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ *con* $v(0) = v(1) = 0$ *si abbia* $\int_0^1 f(x)v(x)dx = 0$
Allora $f(x) \equiv 0 \forall x \in [0,1]$



Dimostrazione.
Per Assurdo, se $f \not\equiv 0$, allora $\exists\,[0,1]$ t.c. $f(x_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 0$ allora $\exists \overline{x}_0 \in\,]0,1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 1$ allora $\exists \overline{x}_0 \in\,]0,1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$
Entrambe le osservazioni per la continuità di f, significa che se x_0 è un punto in cui la $f > 0$ allora per la continuità della funzione anche li vicino si hanno valori maggiori di zero.
Quindi si può pensare $x_0 \in\,]0,1[$.
Allora $\exists a, b \in\,]0,1[$ t.c. $x_0 \in\,]a,b[\, e \forall x \in\,]a,b[$ vale che $|f(x)| \geq |f(x_0)|$ sempre per la continuità di f.
Pensiamo $f(x_0) > 0$ in questo modo $|f(x_0)| = f(x_0)$ e scegliamo la funzione $v(x)$ come disegnata:

$$v(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 - \delta \\ \frac{x}{\delta} - \frac{x_0 - \delta}{\delta} & x_0 - \delta < x < x_0 \\ 1 & x = x_0 \\ -\frac{x}{\delta} + \frac{x_0 + \delta}{\delta} & x_0 < x < x_0 + \delta \\ 0 & x \geq x_0 + \delta \end{cases} \quad \text{POSSIBILIPLAUSIBILIERRORI}$$

Se calcoliamo

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \geq \frac{1}{2}f(x_0)\int_a^b v(x)dx = \frac{1}{2}f(x_0)\frac{b-a}{2} > 0$$

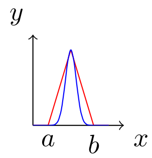
Se avessi preso $f(x_0) < 0$ prendo $v = -v$ e il resto segue... □

Osservazione 79. *Questo lemma è concettualmente analogo al Teorema di Fermat nel capitolo delle derivate.*

Corollario 4. *LEMMA CASO VETTORIALE.*
Sia $f \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ tale che $\forall v \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x) \bullet v(x)dx = 0$ allora $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0,1]$.

Dimostrazione. Per questa dimostrazione si osservano componente per componente.
$\forall i = 1, 2, \dots, n$ scelgo $v_j(x) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ v_i(x) & j = i \end{cases}$
A questo punto applico il lemma fondamentale alla componente i-esima f_i di f. □

Corollario 5. *Sia $f \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall v \in \mathbf{C^k}([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x)v(x)dx = 0$ allora $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0,1]$.*

Dimostrazione. 

É sempre lo stesso lemma con l'aggiunta che la funzione v sia di classe $\mathbf{C^k}$.
Se si chiama u la funzione blu e v la funzione rossa abbiamo:

$$\int_0^1 f(x)u(x)dx > 0$$

Se v è un po più regolare , prendiamo $v = u^(k+1)(x)$. cioè se vogliamo $v \in \mathbf{C^k}$ prendiamo.....
LA DINMOSTRAZIONE E A ME INCOMPRENSIBILE. □

Teorema 4. *EQUAZIONE DI EULERO.*
Sia $f \in \mathbf{C^2}\left([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}\right)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.
Sia $X = \left\{x \in \mathbf{C^2}\left([a,b]\,;\mathbb{R}^n\right) : x(a) = A, x(b) = B\right\}$ con $A, B \in \mathbb{R}^n$.
Sia $\begin{array}{lll} F : X & \to & \mathbb{R} \\ \quad x & \to & \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt \end{array}$.
Se la funzione $x_* \in X$ è t.c. $F(x_*) = \max\{F(x) : x \in X\}$ [o min]
Allora $\partial_x f(t, x_*(t), x_*'(t)) - \frac{d}{dt}\partial_{x'} f(t, x_*(t), x_*'(t)) = 0$.
Questa ultima equzione è l'equazione di Eulero-Lagrange del Funzionale F o a volte detta variazione prima del funzionale F. è un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine nella funzione incognita x_*.

Dimostrazione. Sia $\varphi(h) = F(x_* + hv)$, dove $x_* \in X$ e $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
L'equazione di Eulero-Lagrange in apparenza complicata è analoga ad un equazione di analisi1 del tipo $f' = 0$ oppure in analisi due a $\nabla f = 0$. solo che ora sono cavoli amari.
Come si sceglie la variazione v in modo che $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
X è l'insieme delle funzioni di $\mathbf{C^2}$, si sa che $x_* \in \mathbf{C^2}$, una scelta opportuna di v è $v \in \mathbf{C^2}(]a,b[\,;\mathbb{R}^n)$.
Inotre deve essere che $x_*(a) + hv(a) = A$ e $x_*(b) + hv(b) = B$ per restare dentro l'insieme X. Quindi $v(a) = v(b) = 0$. h è uno scalare e per ipotesi si sa che $F(x_*)$ è punto di massimo, quindi si conclude che $h = 0$ è punto di massimo per la funzione φ.
.... □

e qui finiscono gli appunti almeno per conto mio.

Parte VIII

Temi Esame

Capitolo 6

T.E. 2012/2013 scritto n.1

6.1 Esercizio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da* $f(x, y) = e^{-\left|4 \cdot arctan(x \cdot y^2)\right|}$

A *Nessuna delle altre affermazioni è esatta*

B f *ammette almeno un punto di minimo assoluto*

C $\inf_R^2 f = 0$

D f *ha infiniti punti di massimo*

L'esponensiale è una funzione monotona crescente quindi la ricerca di massimi a minimi si sposta alla ricerca dei massimi e minimi dell'esponente.
L'esponente assume sempre valori negativi. Inotre risulta essere una quantità limitata tra $[0; 4\frac{\pi}{0}[$, *quindi* $\sup_R^2 f = e^0 = 1$ *e* $\inf_R^2 f = e^{-2\pi}$
Sono quindi punti di massimo tutti i punti che rendono nullo l'esponente: $arctan(xy^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \forall y or y = 0, \forall x$ *che sono i due assi. Essendo questi punti del dominio allora si può dire* $\sup_R^2 f = \max_R^2 f = 0$
I punti di minimo si hanno per $\left|arctan(xy^2)\right| = \frac{\pi}{2}$ *quindi per* $x \to \pm\infty$ *or* $y \to \pm\infty$ *essendo questi valori al limite il valore* $e^{-2\pi}$ *è* inf *per* f
La risposta vera è quindi la D.

6.2 Esercizio

Sia (X, d) *uno spazio metrico e siano* A, B *sottoinsiemi di* X. *Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?*

1 $A \subseteq B \Rightarrow \partial A \subseteq \partial B$

2 $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

A *Entrambe*

B *Solo la seconda*

C *Nessuna delle affermazioni è esatta*

D *Solo la prima*

La prima affermazione è certamente falsa poiché se scelto come spazio metrico R^2 *con distanza quella eclidea. Scelgo* $A = B((0,0),2), A = B((0,0),1)$ *allora si ha che* $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) = 2\}$ *e* $\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) = 1\}$ *e questi due insiemi sono disgiunti. la seconda è vera ma devo pensarci un po...*