Appunti di Analisi Matematica 2

Federico Cerutti
Mauro Conte

Dal corso del professor
Rinaldo M. Colombo

Università degli Studi di Brescia

Ultimo aggiornamento: 22 aprile 2020

Le sezioni di questo documento scritte in testo verde non son state trattate a lezione e son state riportate dal libro per completezza.

Indice

Capitolo 1

Spazi Metrici

1 Preliminari

Definizione 1.1 (Spazio Vettoriale)
Siano K un **campo** e V un **insieme**. Si dice che **Spazio Vettoriale** sul campo K se sono definite due operazioni:

1. **Somma**, operazione interna binaria
2. **Prodotto per scalari** operazione esterna

Nota. Questa definizione è stata riportata per ricordare il concetto, si consiglia la consultazione di un libro di Algebra Lineare per una definizione più precisa.

Definizione 1.2 (Spazio Metrico)
Si dice Spazio Metrico (X, d) un insieme X non vuoto in cui sia definita una **distanza** (o **metrica**), vale a dire una funzione $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in X \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X \qquad (\textit{simmetria})$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X \qquad (\textit{disuguaglianza triangolare})$

Nota. D'ora in poi, quando si userà d come metrica, dove non diversamente specificato, si intenderà la **Metrica Euclidea** di Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)

Unendo le due definizioni si giunge naturalmente a

Definizione 1.3 (Spazio Vettoriale Metrico)
Uno Spazio Vettoriale Metrico è uno spazio vettoriale V su cui è definito un prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ definito positivo, la sua **metrica**.

Nota. Analogamente si definisce il Sottospazio Vettoriale Metrico

Definizione 1.4 (Metrica Indotta)
Siano (X, d) spazio metrico e $S \subseteq X$ con $S \neq \emptyset$
Allora $d_{|S} = d_{|S \times S}$ è una metrica su S, cioè la metrica $d_{|S}$ è la **metrica indotta**, definita come la **restrizione** della metrica d ai soli elementi di S. Si definisce formalmente come

$$\begin{array}{cccc} d_{|S} & : & S \times S & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$$

Definizione 1.5 (Sottospazio Metrico)
Siano (X, d) spazio metrico e $S \subseteq X$ con $S \neq \emptyset$
Allora $(S, d_{|S})$ con la Definizione 1.4 (Metrica Indotta) è a sua volta Spazio Metrico ed è chiamato **Sottospazio Metrico di** (X, d)

Dimostrazione. La $d_{|S}$, essendo restrizione della metrica d, rispetta ancora tutti i punti della Definizione 1.2 (Spazio Metrico). $\square$

Proposizione 1.6
Sia (V) uno spazio vettoriale metrico sul campo K e sia $\emptyset \neq U \subseteq V$. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale metrico se, e soltanto se, sono verificate le seguenti condizioni:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U \quad \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in U$
2. $\forall \lambda \in K,\ \forall \mathbf{u} \in U \quad \lambda \cdot \mathbf{u} \in U$

Dimostrazione. Non richiesta, analoga a quella per Spazi Vettoriali reperibile in un libro di Algebra Lineare $\square$

Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)
Si dimostri che le seguenti funzioni sono distanze:

Nota. Si noti che alcuni degli esempi sottostanti sono relativi a metriche trattate molto più avanti e dunque potrebbe essere conveniente ignorarli temporaneamente per tornare qui quando saranno stati fatti i successivi argomenti.

1. $X = \mathbb{R}^2, \quad d(x, y) = d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ **Metrica Euclidea in $\mathbb{R}^2$**

   1 $d(x, y) \geq 0$ è verificata poiché l'argomento della radice è sempre positivo o al più nullo essendo una somma di quadrati, e la radice mantiene la positività.

   2 $d(x, y) = 0 \iff x = y$

$$
\begin{aligned}
d = 0 &\iff \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = 0 \\
&\iff (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = 0 \\
&\iff \begin{cases} (y_1 - x_1)^2 = 0 \\ (y_2 - x_2)^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \\
&\iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2)
\end{aligned}
$$

   3 $d(x, y) = d(y, x)$ invertendo le coordinate di x con quelle di y la somma non cambia, quindi la simmetria è rispettata

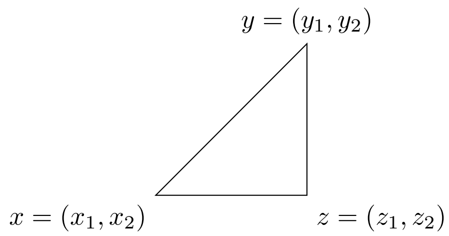
$$
d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big)\big) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = \sqrt{(y_2 - x_2)^2 + (y_1 - x_1)^2} = d\big((y_1, y_2), (x_1, x_2)\big)
$$

   4 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ da Proposizione 1.11 (Metrica Indotta da una Norma), la metrica indotta dalla norma (Definizione 1.8 (Norma)), applicata ad $\mathbb{R}^2$ è

$$
\|x - y\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}
$$

   che corrisponde alla metrica in oggetto. Dunque, grazie alle proprietà dell'operatore $\|\cdot\|$ (nello specifico la *disuguaglianza triangolare*), si ottiene

$$
d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)
$$



2. $X = \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |y - x|$ **Metrica Euclidea in $\mathbb{R}$**

   1. $d(x,y) \geq 0$ per definizione valore assoluto
   2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$ perché $|\cdot| = 0 \iff \cdot = 0$ per definizione valore assoluto
   3. $d(x,y) = d(y,x)$ perché $|x - y| = |y - x|$ per definizione valore assoluto
   4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ in quanto

$$d(x,y) = |x-y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x,z) + d(z,y)$$

3. $X = \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\quad d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ **Metrica Euclidea in $\mathbb{R}^n$**

   Analogo al primo esempio

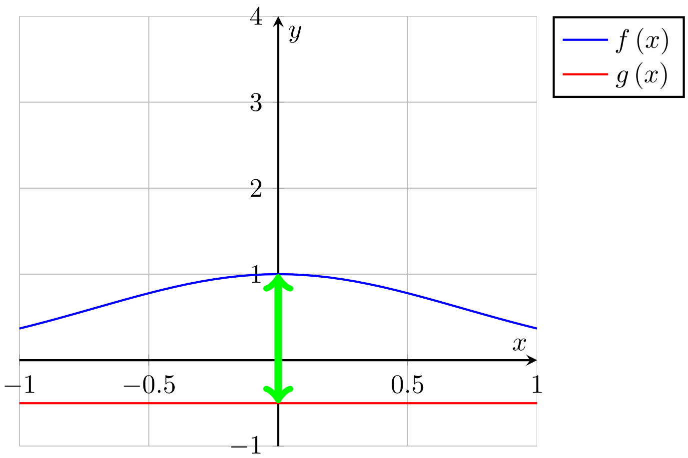
4. $X \neq \emptyset, \quad d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ **Metrica Discreta**

   1. $d(x,y) \geq 0$ per definizione
   2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$ per definizione
   3. $d(x,y) = d(y,x)$ per definizione (sia che $x = y$, sia che $x \neq y$)
   4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ perché $d(x,z) + d(z,y)$ può essere:
      - 0 se $x = y = z$, ma in questo caso anche $d(x,y) = 0$
      - 1 se $x = y \neq z$ o $x \neq y = z$, ma in questo caso $d(x,y) \leq 1$
      - 2 se $x \neq y \neq z$, quindi sicuramente $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

5. $X = \mathbf{C^0}([a,b], \mathbb{R})$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ $\quad d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$ **Distanza della Convergenza Infinita o Distanza della Convergenza Uniforme**

   Nota. La metrica viene trattata in Definizione 19.18 (Convergenza Uniforme)

   Nota. X contiene infiniti elementi (funzioni)



   1. $d(x,y) \geq 0$ per definizione, il valore è sicuramente appartenente a $[0, +\infty]$, ma $+\infty$ non è un valore accettabile, in quanto la metrica è definita come funzione a valori in $\mathbb{R}$ e $+\infty \notin \mathbb{R}$. D'alto canto, si nota che X è definito come l'insieme delle funzioni continue definite su un intervallo **chiuso e limitato** a valori in $\mathbb{R}$ ($\mathbf{C^0}([a,b], \mathbb{R})$). Questa definizione permette di applicare il Esercizio 3.16 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1) ed avere la certezza che esista sup finito.

2. $d(x,y)=0 \iff x=y$ per definizione, $d_\infty(f,g)=0 \iff \sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)-f(x)|=0$, cioè se e solo se le due funzioni hanno lo stesso dominio e, per ogni punto di esso, la stessa immagine.
3. $d(x,y)=d(y,x)$ semplicmente $d_\infty(f,g)=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f-g|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|g-f|=d_\infty(g,f)$
4. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ dalla disuguaglianza triangolare per $|\cdot|$ si ottiene

$$|g(x)-f(x)|\le|g(x)-h(x)|+|h(x)-f(x)|$$

Applicando il sup la disuguaglianza resta vera.

Nota. Si sottolinea che queste conclusioni sono valide finché $[a,b]$ chiuso e limitato, altrimenti non varrebbe più il Esercizio 3.16 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1) necessario per il punto 1.

6. $X=\mathbb{R}^2$, d distanza Euclidea e P punto arbitrario

$$d_P(x,y)=\begin{cases}0 & \text{se } x=y\\ d(x,P)+d(P,y) & \text{se } x\neq y\end{cases}$$

Distanza di Parigi
o
Distanza Ferroviaria Francese

1. $d(x,y)\ge 0$ per definizione
2. $d(x,y)=0 \iff x=y$ per definizione
3. $d(x,y)=d(y,x)$ essendo bassata sulla metrica Euclidea
4. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ essendo bassata sulla metrica Euclidea

7. $X=\mathbf{C^0}([a,b],\mathbb{R})$ $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$ $\quad d_2(f,g)=\sqrt{\int_a^b[g(x)-f(x)]^2\,\mathrm{d}x}$ **Distanza Quadratica**

Nota. La metrica viene trattata in Proposizione 19.46

1. $d(x,y)\ge 0$ per definizione, essendo integrale di un valore positivo (quadrato) tra estremi ordinati ($a<b$ per ipotesi)
2. $d(x,y)=0 \iff x=y$ Per definizione della metrica, $d_2(f,g)=0 \iff \sqrt{\int_a^b[g(x)-f(x)]^2\,\mathrm{d}x}=0$, cioè se e solo se le due funzioni hanno lo stesso dominio e, per ogni punto di esso, la stessa immagine.
3. $d(x,y)=d(y,x)$ semplicmente $d_2(f,g)=\sqrt{\int_a^b[g(x)-f(x)]^2\,\mathrm{d}x}=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x}=d_2(g,f)$
4. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ ...

Definizione 1.8 (Norma)
Dato uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$, si definisce **norma** una funzione $\|\cdot\|:V\mapsto\mathbb{R}$ con le proprietà:

1. $\|x\|\ge 0 \quad \forall x\in V$
2. $\|x\|=0 \iff x=0 \quad \forall x\in V$
3. $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\| \quad \forall x,y\in V$
4. $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\| \quad \forall x\in V,\lambda\in\mathbb{K}$

Nota. La funzione Norma associa dunque ad un vettore di qualsiasi dimensione uno scalare, fornendo (anche) una metrica per ordinare vettori tra loro.

Definizione 1.9 (Spazio Normato)
Uno spazio normato è uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ **in cui è definita una norma**.

Nota. Nel seguito verranno considerati esclusivamente spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, cioè $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Esempio 1.10 (Esempi di Spazi Normati)

1. $\mathbb{R}$ con $\|x\|=|x|$
2. $\mathbb{C}$ con $\|x\|=|x|$

3. $\mathbb{R}^n$ con $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \implies \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x \cdot x$

4. $\mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ con $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$

Proposizione 1.11 (Metrica Indotta da una Norma)
Sia V uno spazio normato. Allora (V, d) è uno spazio metrico con la distanza

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

ed inoltre la distanza così definita è:

1. Invariante per traslazioni:
$$\forall x, y, z \in V,\ d(x, y) = d(x + z, y + z)$$

2. Positivamente omogenea:
$$\forall x, y \in V \text{ e} \forall \lambda \in \mathbb{R},\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$$

Dimostrazione.

1. $d(x, y) = d(x + z, y + z) = \|y + z - x - z\| = \|y - x\| = d(x, y)$

2. Con la proprietà 4 della Definizione 1.8 (Norma)
$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda y - \lambda x\| = \|\lambda(y - x)\| = |\lambda|\, \|y - x\| = |\lambda|\, d(x, y)$$

□

Nota. Nel caso in cui $V = \mathbb{R}^n$, la metrica indotta è ovviamente la **Metrica Euclidea** di Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

Definizione 1.12 (Metriche Equivalenti)
Siano d_1 e d_2 due distanze sullo stesso insieme X.

$$d_1 \text{ e } d_2 \text{ sono } \textbf{equivalenti}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\exists c, C \in\ ]0, +\infty[\ :\ \forall x, y \in X \quad c \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C \cdot d_1(x, y)$$

Cioè se è sempre possibile "limitare" una metrica con l'altra (moltiplicata per un opportuno coefficiente). Questo implica che distanze infinite per una metrica devono esserlo anche per l'altra.

Nota. Dato uno spazio metrico (X, d), passare dalla distanza d ad un'altra ad essa equivalente è concettualmente analogo ad un cambio di unità di misura. Come esempio si veda Esercizio 2.43

Esempio 1.13
La Distanza Ferroviaria Francese da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche) e la Metrica Euclidea da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche) non sono equivalenti

Soluzione. Operando in $\mathbb{R}$ e avendo un $n \in \mathbb{N}$:

- $P = 0$
- $x = n$
- $y = n + 1$

Ora, per ogni n la $d = 1$, mentre la $d_P = 2n + 1$, dunque è impossibile trovare un $C \in]0, +\infty[$ (quindi finito) tale per cui

$$d_P(x, y) \leq C \cdot d(x, y)$$

■

Esempio 1.14
In $\mathbb{R}^2$, le distanze:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \\ d(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\ d_\infty(x, y) &= \max(|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|) \end{aligned}$$

sono tutte equivalenti tra di loro.

Definizione 1.15

Definizione 1.16 (Sfera)
Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $x_0 \in X$, $r > 0$. Si dice **Sfera** (o **Bolla**, o ancora **Palla**) **Aperta** di centro x_0 e raggio r l'insieme:

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, y) < r\}$$

Osservazione 1.17
Se $r = 0 \Rightarrow B(x_0, r) = \emptyset$
Se $r > 0 \Rightarrow x_0 \in B(x_0, r)$

Esempio 1.18 (Sfere ed Altri Enti)

- In $\mathbb{R}$ con d, $B(x_0, r)$ è un intervallo simmetrico centrato in x_0
- In $\mathbb{R}^2$ con d, $B(x_0, r)$ è una un cerchio con centro in x_0
- In $\mathbb{R}^3$ con d, $B(x_0, r)$ è una sfera con centro in x_0

Esercizio 1.19
Descrivere le sfere nelle distanze dell'Esempio 1.14.

Definizione 1.20 (Intorno)
Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $x \in X$. **Intorno di x** è un qualunque sottoinsieme di X che contenga una sfera aperta contentente x

Definizione 1.21 (Punti e Spazi Metrici)
Siano (X, d) uno Spazio Metrico, $A \subseteq X$ e $x_0 \in X$:

- x_0 **Interno** ad A $\quad \rightleftharpoons \quad \exists r > 0 : \ B(x_0, r) \subseteq A$
  Cioè è possibile individuare una sfera interamente contenuta in A
- x_0 **Esterno** ad A $\quad \rightleftharpoons \quad \exists r > 0 : \ B(x_0, r) \subseteq X \setminus A$
  Cioè è possibile individuare una sfera interamente contenuta in X e NON in A
- x_0 **di Frontiera** per A $\quad \rightleftharpoons \quad \forall r > 0, \ B(x_0, r) \nsubseteq A$ e $B(x_0, r) \nsubseteq X \setminus A$
  Cioè, per qualsiasi r, la sfera non appartiene completamente né ad A, né a $X \setminus A$
- x_0 **Isolato** per A $\quad \rightleftharpoons \quad \exists r > 0 : \ B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$
  Cioè è possible trovare un r per cui l'intersezione tra la sfera ed A contiene solo x_0 (Esempio: i numeri naturali con $r = 0,5$)
- x_0 **di Accumulazione** per A $\quad \rightleftharpoons \quad \forall r > 0, \ \big(B(x_0, r) \cap A\big) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$
  Cioè, per qualsiasi r, l'intersezione tra la sfera ed A è sempre non vuota (non considerando x_0 stesso)

Definizione 1.22
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Si definisce:

- $\mathring{A} = \{x \in X : \ x \text{ è interno ad } A\}$ **Parte Interna di *A***
- $\partial A = \{x \in X : \ x \text{ è di frontiera per } A\}$ **Frontiera di *A***
- $\overline{A} = \left\{ x \in X : \ x \left\{ \begin{array}{c} \text{appartiene ad } A \\ \text{o} \\ \text{è di accumulazione per } A \end{array} \right\} \right\}$ **Chiusura di *A***

Esempio 1.23
Siano $X = \mathbb{R}$ con $d(x, y) = |y - x|$, $A = \{1\} \cup [2, 3[$.
1 è un punto isolato per A, 5 è esterno ad A.
$\overline{A} = \{1\} \cup [2, 3]$, $\quad \mathring{A} =]2, 3[$, $\quad \partial A = \{1, 2, 3\}$

Esempio 1.24
Sia $X = \mathbb{R}$ con $d(x, y) = |y - x|$
Valgono le uguaglianze $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\quad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\quad \partial\mathbb{R} = \emptyset$

Proposizione 1.25
Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora

$$\overline{A} = \{x \in A \text{ è } \textbf{isolato} \text{ per } A\} \cup \{x \in A : x \text{ è } \textbf{di accumulazione} \text{ per } A\}$$

Dimostrazione. Un punto isolato, per definizione, appartiene ad A, e rientra quindi automaticamente nella definizione di $\overline{A}$. È dunque necessario dimostrare solo il caso x_* di accumulazione per A.
Partiamo dunque dall'ipotesi:

$$\begin{aligned} & x_* \in A \text{ e } x_* \textbf{ non} \text{ isolato per } A \\ \Longrightarrow\ & x_* \in A \text{ e } \textbf{non} \ [\exists r > 0 : \ B(x_*, r) \cap A = \{x_*\}] \\ \Longrightarrow\ & x_* \in A \text{ e } [\forall r > 0 : \ B(x_*, r) \cap A \neq \{x_*\}] \end{aligned}$$

Questo significa che in $B \cap A$ ci son sicuramente altri punti, che poi è come dire

$$\Longrightarrow x_* \in A \text{ e } \underbrace{B(x_*, r) \cap A \setminus X \neq \emptyset}_{\text{Definizione di punto di accumulazione}}$$

□

Proposizione 1.26
Siano (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora valgono le seguenti relazioni

1. x_0 **isolato** per $A \implies x_0 \in A$
2. x_0 **isolato** per $A \implies \begin{cases} A = \{x_0\} \\ \quad \text{o} \\ \inf\limits_{A \setminus \{x_0\}} d(x, x_0) > 0 \end{cases}$
3. x_0 **interno** ad $A \implies x_0 \in A$
4. x_0 **esterno** ad $A \iff \inf\limits_{A} d(x, x_0) > 0$

Proposizione 1.27 (Condizione Punti Accumulazione)
Siano (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora

$$x_0 \text{ è di } \textbf{accumulazione} \text{ per } A$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\inf\{d(x, x_0) : x \in A, x \neq x_0\} = 0$$

Cioè se la "minima distanza" tra x_0 ed un altro punto qualsiasi di A è 0.

Proposizione 1.28
Siano (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Valgono le seguenti relazioni:

1. $\overline{A} = \left\{ x_0 \in X : \inf_{x \in A} d(x, x_0) = 0 \right\}$
2. $\overline{\emptyset} = \emptyset$
3. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$
4. $\mathring{A} \cap \partial A \neq \emptyset$
5. $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

Esercizio 1.29
Dimostrare nel dettaglio le proposizioni Proposizione 1.25, Proposizione 1.26, Proposizione 1.27 (Condizione Punti Accumulazione), Proposizione 1.28.

Definizione 1.30 (Insieme Aperto)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Si definisce

$$A \text{ è } \textbf{aperto} \rightleftharpoons A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad A = \mathring{A}$$

Definizione 1.31 (Insieme Chiuso)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Si definisce

$$A \text{ è } \textbf{chiuso} \rightleftharpoons A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad A = \bar{A}$$

Osservazione 1.32
A **non chiuso** $\not\Rightarrow$ A aperto
A **non aperto** $\not\Rightarrow$ A chiuso

Esempio 1.33
L'insieme $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\} \setminus \{(1, 0)\}$ è né aperto né chiuso.

Soluzione.
Non è chiuso in quanto la sua frontiera è $\partial C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$, dunque $(1, 0) \in \partial C$, ma per definizione $(1, 0) \notin \partial C$
Non è aperto in quanto, prendendo $(0, 1) \in C$, è impossibile trovare un intorno di $(0, 1)$ contenuto completamente in C ■

Esercizio 1.34
Dimostrare che in uno spazio metrico (X, d):

1. Ogni sfera di raggio strettamente positivo è un aperto
2. $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$
3. X è aperto ed anche chiuso
4. $\emptyset$ è aperto ed anche chiuso
5. Sia $A \subseteq X$. Se A è aperto, allora il complementare di A in X è chiuso
6. Sia $A \subseteq X$. Se A è chiuso, allora il complementare di A in X è aperto
7. Sia $A \subseteq X$. Allora $\overline{A}$ è chiuso e $\mathring{A}$ è aperto

Proposizione 1.35
Sia (X, d) lo spazio metrico con la Metrica Discreta (da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)).
Allora, preso un $x_0 \in X$ ed un $r > 0$, l'inclusione $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ è stretta se e soltanto se $r = 1$

Esercizio 1.36
Esibire in un opportuno spazio metrico esempi di insiemi né aperti né chiusi.

Definizione 1.37 (Diametro Spazio Metrico)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Si definisce

$$\mathbf{diam}(A) \quad = \quad \sup_{x,y \in A} d(x, y)$$

Cioè la "distanza massima" tra due suoi qualsiasi elementi.

Definizione 1.38 (Spazio Metrico Limitato)
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora

$$A \text{ è } \textbf{Limitato} \quad \rightleftharpoons \quad \text{diam}(A) \text{ è finito}$$

$$A \text{ è } \textbf{Illimitato} \quad \rightleftharpoons \quad \text{diam}(A) \text{ è infinito}$$

Nota. L'insieme vuoto $\emptyset$ ha diametro nullo ed è dunque limitato.

Esempio 1.39 (Diametri e Limitatezza in Spazi Metrici)

1. $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = |y - x|$ è uno spazio metrico illimitato. Inoltre se $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, allora $\text{diam}(A) = \sup A - \inf A$
2. $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = \frac{|y-x|}{1-|y-x|}$ è uno spazio metrico limitato di diametro 1 (la distanza massima tra due punti con questa metrica è 1)
3. Sia X un insieme con almeno 2 elementi munito della Metrica Discreta (da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)) è uno spazio metrico limitato di diametro 1
4. $\mathbf{C^0}([0, 1] ; \mathbb{R})$ con $d(f, g) = \sup_{[0,1]} |g(x) - f(x)|$ è uno spazio metrico illimitato utilizzato in sottosezione 19.2 (Convergenza Uniforme)

Esercizio 1.40
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A, B \subseteq X$. Dimostrare le seguenti implicazioni:

1. $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ A \text{ illimitato} \end{array}\right\} \implies B \text{ illimitato}$
2. $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \text{ limitato} \end{array}\right\} \implies A \text{ limitato}$
3. $\left.\begin{array}{l} A \text{ limitato} \\ B \text{ limitato} \end{array}\right\} \implies A \cup B \text{ limitato}$

Esercizio 1.41
Dimostrare che in $\mathbb{R}$ le distanze

$$d(x, y) = |y - x| \quad \text{e} \quad d(x, y) = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|}$$

non sono equivalenti.

Soluzione. Suggerimento: utilizzare la nozione di limitatezza. ■

Esercizio 1.42
Dimostrare che in uno spazio metrico (X, d):

1. Se $x_0 \in X$ e $r > 0$, allora $\text{diam}\big(B(x_0, r)\big) \leq 2r$ (si veda Esercizio 1.44)
2. Se $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$, allora A è limitato se e solo se esiste un $r > 0 :\ A \subseteq B(x_0, r)$

Esercizio 1.43
Sia $X = \mathbb{R}$ con la distanza $d(x, y) = |y - x|$.
Dimostrare che $\operatorname{diam}\big(B(0, 1)\big) = 2$

Esercizio 1.44
Sia $X = [0, 2]$ con la distanza $d(x, y) = |y - x|$.
Dimostrare che $\operatorname{diam}\big(B(0, 1)\big) = 1$

Proposizione 1.45
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A, B \subseteq X$:

$$A \subseteq B \implies \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$$

Dimostrazione. Immediata □

Esercizio 1.46
Dimostrare con esempi che:

1. $A \subset B \;\not\Longrightarrow\; \operatorname{diam}(A) < \operatorname{diam}(B)$
2. $\operatorname{diam}(A) < \operatorname{diam}(B) \;\not\Longrightarrow\; A \subset B$
3. $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B) \;\not\Longrightarrow\; A \subseteq B$
4. $\operatorname{diam}(A) = 0 \;\not\Longrightarrow\; A = \emptyset$

Esercizio 1.47
Esibire in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ed in $\mathbf{C^0}([0, 1]\,; \mathbb{R})$ (con le metriche usuali) esempi di insiemi aperti/chiusi e limitati/illimtati.

Definizione 1.48 (Insieme Finito ed Infinito)
Un insieme si dice **Finito** se il numero dei suoi elementi è finito.
Un insieme si dice **Ininito** se non è finito.

Osservazione 1.49
Con la metrica Euclidea, ogni insieme finito è limitato e ogni insieme illimitato è infinito. Non valgono i viceversa.

2 Successioni e Completezza

Definizione 2.1 (Successione)
Sia X un insieme non vuoto. **Successione** in X è una funzione $x : \mathbb{N} \mapsto X$

> ***Nota.*** Altre possibili notazioni per le successioni sono: x_n, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{x_n :\; n \in \mathbb{N}\}$.
> Con x_n si indica spesso anche **il valore assunto** dalla successione x al suo $n-$*esimo* elemento.

Definizione 2.2 (Successione Limitata e Illimtata)
Una successione $x : \mathbb{N} \mapsto X$ di elementi di uno spazio metrico (X, d) si dice **Limitata** se il suo codominio $x(\mathbb{N})$ è limitato.
Una successione è **Illimitata** se il suo codominio $x(\mathbb{N})$ è illimitato.

Definizione 2.3 (Limite per Successioni)
Data una successione $x : \mathbb{N} \mapsto X$ di elementi di uno spazio metrico (X, d) e dato $x_\infty \in X$

$$\lim_{n\to+\infty} = x_\infty \quad \rightleftharpoons \quad \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_\infty) = 0$$

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} = x_\infty$, allora la successione x_n è **Convergente** a x_∞. Si può scrivere: $x_n \to x_\infty$ per $n \to \infty$.

Cioè la convergenza della successione $x : \mathbb{N} \mapsto X$ a x_∞ equivale alla convergenza a 0 della successione di numeri reali $\{d(x_n, x_\infty) :\; n \in \mathbb{N}\}$

> ***Nota.*** Essendo posto $x_\infty \in X$, x_∞ deve appartenere allo spazio metrico. In caso alternativo il limite non esiste.

Nota. Questa definizione è *implicita*, cioè non porta a nessun metodo *costruttivo* per calcolare il limite di una successione. La definizione di limite permette soltanto di verificare se una nota quantità è limite della successione data o meno.

Proposizione 2.4
Data la successione $x : \mathbb{N} \mapsto X$ di elementi dello spazio metrico (X, d) e dato $x_\infty \in X$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \text{ vale } d(x_n, x_\infty) < \varepsilon$$

Dimostrazione. □

Teorema 2.5 (Teorema di Unicità del Limite per Successioni)
Sia (X, d) uno spazio metrico e siano x_∞, x^∞ elementi di X e $x : \mathbb{N} \mapsto X$ una successione in X.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} x_n = x_\infty \\ \lim_{n\to+\infty} x_n = x^\infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_\infty = x^\infty$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, per la proprietà 4 da Definizione 1.2 (Spazio Metrico)

$$d(x_\infty, x^\infty) \le d(x_\infty, x_n) + d(n, x^\infty)$$

Passando al lim per $n \to +\infty$

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} d(x_\infty, x^\infty)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{Per def. distanza}}} \le \underbrace{\lim_{n\to+\infty} d(x_\infty, x_n)}_{\substack{\leq \varepsilon \\ \text{Per def. lim succ.}}} + \underbrace{\lim_{n\to+\infty} d(n, x^\infty)}_{\substack{\leq \varepsilon \\ \text{Per def. lim succ.}}} \le 2\varepsilon$$

Dovendo essere questa forma valida $\forall \varepsilon > 0$, si concludere che non può esser altro che

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_\infty, x^\infty) = 0$$

Che, per la proprietà 2 da Definizione 1.2 (Spazio Metrico), significa

$$x_\infty = x^\infty$$

□

Proposizione 2.6
Sia $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. In $\mathbb{R}^p$, con $d(x, y) = \|y - x\|$, una successione $x : \mathbb{N} \to X$ converge a x_∞ se e solo se le successioni delle componenti convergono alle rispettive componenti di x_∞.

Dimostrazione. Applicare la Definizione 2.3 (Limite per Successioni) ricordando che

$$|y_i| \le \|y\| \le \left| \sum_{i=1}^{p} |y_i| \right| \qquad \forall y \in \mathbb{R}^p \text{ e per } i = 1, \ \ldots \ , p$$

□

Esercizio 2.7
Esibire un esempio di successione in $\mathbb{R}^2$ convergente a $(1, 1)$ con le distanze introdotte ai punti 3 e 4 dell'Esempio 1.7 (Esempi di Metriche).

Esercizio 2.8
Esibire un esempio di successione in $\mathbb{C}$ convergente a $1 + i$ con la distanza $d(z, w) = |w - z|$.

Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione)
Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $x_* \in X$. Allora

$$x_* \text{ di accumulazione per } A \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{esiste una successione di elementi di } A, \\ \text{diversi da } x_*, \text{ convergente a } x_* \end{array} \right.$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Grazie alla Proposizione 1.27 (Condizione Punti Accumulazione)

$$\begin{aligned} & x_* \text{ è di accumulazione per } A \\ \Longrightarrow\ & \inf \{d(x, x_*) :\ x \in A, x \neq x_0\} = 0 \end{aligned}$$

Che equivale a scrivere

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A :\ x_\varepsilon \neq x_* \text{ e } d(x_\varepsilon, x_*) < \varepsilon$$

Quindi si può scegliere arbitrariamente un $\varepsilon = \frac{1}{n}$, ponendo $n \neq 0$ ed arrivare a

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists x_n \in A :\ x_n \neq x_* \text{ e } d(x_n, x_*) < \frac{1}{n}$$

La successione delle distanze è convergente a 0 per $n \to +\infty$, quindi con la Definizione 2.3 (Limite per Successioni) si può concludere che la successione x_n converge a x_*

$\Longleftarrow$ Dalla Definizione 2.3 (Limite per Successioni)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} :\ \forall n > \nu \quad x_n \in A,\ x_n \neq x_*, \quad d(x_n, x_*) < \varepsilon$$

Ma se $d(x_n, x_*) < \varepsilon$, allora si può anche scrivere $x_n \in B(x_*, \varepsilon)$, quindi sicuramente

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x_*, \varepsilon) \cap A \setminus \{x_*\} \neq \emptyset$$

Dunque stando alla Definizione 1.21 (Punti e Spazi Metrici)

$$\Longrightarrow x_* \text{ è di accumulazione per } A$$

□

Corollario 2.10
Siano (X, d) uno Spazio Metrico, $A \subseteq X$ e $x_* \in X$. Allora:

$$x_* \in \overline{A} \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{esiste una successione di elementi di } A, \\ \text{diversi da } x_*, \text{ convergente a } x_* \end{array} \right.$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$
- Se $x_* \in A$
  È sufficiente scegliere $x_n = x_*$, successione costante, dunque
  $$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_* = x_*$$
- Se x_* di accumulazione per A
  Per Definizione 1.22 e grazie alla Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione) si giunge direttamente alla tesi.

$\Longleftarrow$ Per Definizione 1.22 e grazie alla Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione) si giunge direttamente alla tesi.

□

Definizione 2.11 (Condizione di Cauchy)
Sia (X, d) uno spazio metrico e $x : \mathbb{N} \mapsto X$ una successione d in X.

$$x : \mathbb{N} \mapsto X \text{ è } \textbf{di Cauchy}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} :\ \forall n, m > \nu \text{ vale } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Cioè se la distanza tra due punti qualsiasi della successione, presi dopo un certo valore ν, è minore di un ε piccolo a piacere.

Nota. Questa definizione, differentemente dalla Definizione 2.3 (Limite per Successioni), è *esplicita* e *intrinseca*: dipende esclusivamente dalla successione e dalla distanza definita.

Proposizione 2.12
Sia (X, d) uno spazio metrico.

$$x : \mathbb{N} \mapsto X \text{ è } \textbf{convergente} \implies x : \mathbb{N} \mapsto X \text{ è } \textbf{di Cauchy}$$

Dimostrazione. Sia $x : \mathbb{N} \mapsto X$ convergente a x_∞. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \rightleftharpoons \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n > \nu \quad d(x_n, x_\infty) < \varepsilon$$

Prendendo dunque due elementi qualsiasi n e m con $n, m > \nu$, la distanza di ognuno di essi da x_∞ dovrà essere $< \varepsilon$. Applicando la proprietà 4 da Definizione 1.2 (Spazio Metrico), otteniamo

$$d(x_n, x_m) \le [d(x_n, x_\infty) + d(x_m, x_\infty)] < 2\varepsilon$$

Quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > \nu \quad d(x_n, x_m) \le [d(x_n, x_\infty) + d(x_m, x_\infty)] < 2\varepsilon$$

Cioè ci si è ricondotti alla definizione della Condizione di Cauchy □

Definizione 2.13 (Spazio Metrico Completo)
Uno Spazio Metrico (X, d) si dice **Completo** se e solo se **ogni successione di Cauchy in X ammette limite in X stesso**.

Esempio 2.14 (Esempi di Spazi Metrici Completi e non)

1. $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = |y - x|$ è uno spazio metrico completo

2. $\mathbb{Q}$ con $d(x, y) = |y - x|$ è uno spazio metrico *non* completo

3. $\mathbb{R}^n$ con $d(x, y) = \|y - x\|$ è uno spazio metrico completo.
   Altre distanze che rendono $\mathbb{R}^n$ uno spazio metrico completo sono, ad esempio

   - $d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |y_i - x_i|$

   - $d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ con $\alpha \in [1, +\infty[$

4. $]0, 1[$ con $d(x, y) = |y - x|$ è uno spazio metrico *non* completo.

   Dimostrazione. La successione $\left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$ è di Cauchy ma non ammette limite in $]0, 1[$ □

5. Sia X un insieme con almeno 2 elementi, munito della metrica discreta

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

   X è uno spazio metrico completo in cui le uniche successioni convergenti son le successioni **definitivamente costanti** (cioè costanti da un certo indice in poi).

6. $\mathbf{C^0}([0, 1]\,; \mathbb{R})$ è uno spazio metrico completo con la distanza

$$d(f, g) = \sup_{[0,1]} |g(x) - f(x)|$$

   Vedasi Proposizione 19.33 per la dimostrazione.

7. $\mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ è uno spazio metrico *non* completo con la distanza

$$d(f,g) = \sqrt{\int_0^1 [g(x) - f(x)]^2 \, \mathrm{d}x}$$

   Vedasi Proposizione 19.47 per la dimostrazione.

8. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è uno spazio metrico completo con la distanza $d(z,w) = |w - z|$

Esercizio 2.15
Esibire una successione di Cauchy di numeri razionali non convergente in $\mathbb{Q}$.

Soluzione. La seguente successione

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è convergente a $e \notin \mathbb{Q}$ ■

Proposizione 2.16
Siano (X,d) uno spazio metrico **completo** e $C \subseteq X$ un sottoinsieme **chiuso** di X. Allora $\boldsymbol{(C, d_{|C})}$ **è sottospazio metrico completo**, con $d_{|C}$ da Definizione 1.4 (Metrica Indotta).

Dimostrazione. Essendo C chiuso, per Definizione 1.31 (Insieme Chiuso):

$$C = \overline{C} \implies \forall x_* \in C \; x_* \in \overline{C}$$

Si può dunque applicare il Corollario 2.10 e concludere che

$$\forall x_* \in C \text{ esiste un successione di elementi di } C \text{ convergenti a } x_*$$

Questo permette di individuare tante successioni x_i quanti sono gli elementi di C e, grazie alla Proposizione 2.12, si sa che ognuna di queste successioni è di Cauchy.
Si giunge dunque alla Definizione 2.13 (Spazio Metrico Completo) □

Nota. La chiusura di C è fondamentale perché diversamente non sarebbe applicabile il Corollario 2.10 e dunque non si avrebbe certezza sulla convergenza in C delle successioni.

Proposizione 2.17
Sia (X,d) uno spazio metrico. Data la successione $x : N \mapsto X$ **di Cauchy**:

$$x : N \mapsto X \textbf{ di Cauchy} \implies x : N \mapsto X \textbf{ limitata}$$

Dimostrazione.

$$x : N \mapsto X \text{ di Cauchy}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \; \forall n, m > \nu \text{ vale } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

La dimostrazione prevede di dividere in due "parti" la successione

1. Per la definizione di cui sopra è sicuramente possibile individuare un certo $\overline{\nu}$ per cui

$$\exists \overline{\nu} : \; \forall n > \overline{\nu} \quad d(x_n, x_{\overline{\nu}}) < 1 \text{ (1 è scelto arbitrariamente)}$$

   In tal modo è stata esplicitata la limitatezza di x *da* $\overline{\nu}$ *in poi.*

2. Si ponga invece $K = \max\limits_{n=0,\,\dots\,,\overline{\nu}-1} d(x_n, x_{\overline{\nu}})$, cioè K è la massima tra tutte le distanze $d(x_n, x_{\overline{\nu}})$ con $n < \overline{\nu}$. Essendo $n < \overline{\nu}$, n è sicuramente finito, per cui anche K sarà finito. Infatti, avendo un numero finito n di valori x_n assunti dalla successione, anche il massimo di tali valori (cioè K) sarà finito.
   In questo modo si è trovato un valore K che limita la x *prima di* $\overline{\nu}$.

Quindi, concludendo, sicuramente
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x_{\overline{\nu}}) < \max\{K, 1\}$$
Cioè la successione è limitata. □

Esercizio 2.18
Definire in un opportuno spazio metrico una successione limitata non di Cauchy.

Soluzione. In $(\mathbb{N}, d)$ la successione $x(n) = (-1)^n$. ■

Corollario 2.19
Sia (X, d) uno spazio metrico. Data la successione $x : N \mapsto X$ **convergente**:
$$x : N \mapsto X \textbf{ convergente} \implies x : N \mapsto X \textbf{ limitata}$$

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 2.12 ed alla Proposizione 2.17
$$\text{convergente} \implies \text{di Cauchy} \implies \text{limitata}$$
□

Esercizio 2.20
Definire in un opportuno spazio metrico una successione limitata non convergente.

Soluzione. Come da Esercizio 2.18 ■

Esercizio 2.21
Siano (X, d) uno spazio metrico completo, $A \subseteq X$ chiuso e non vuoto. Allora, detta $d_{|A}$ la restrizione di d ad A, $(A, d_{|A})$ è uno spazio metrico completo.
È indispensabile l'ipotesi "*A chiuso*"?

Soluzione. Vedere nota alla Proposizione 2.16 ■

Esercizio 2.22
Dimostrare che ogni sottosuccessione di una successione di Cauchy è a sua volta una successione di Cauchy.

Esercizio 2.23
Dimostrare che se una successione ammette una sottosuccessione convergente, allora l'intera successione è convergente.

2.1 Insiemi Connessi

Concettualmente, un insieme è connesso se è *un pezzo solo*. Per dare una definizione formale conviene prima caratterizzare gli insiemi formati *da più pezzi* e poi definire come connessi quelli *non* formati *da più pezzi*.

Definizione 2.24 (Insiemi Separati)
Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$
$$A \text{ e } B \text{ sono } \textbf{Separati} \rightleftharpoons \overline{A} \cap B = \emptyset \text{ e } A \cap \overline{B} = \emptyset$$

Definizione 2.25 (Insiemi Connessi e Sconnessi)
Un insieme è **Sconnesso** se e solo se è **unione** di due insiemi **separati**.
Un insieme è **Connesso** se e solo se **non è Sconnesso**.

Nota. In uno spazio metrico un insieme può essere alternativamente connesso o sconnesso, ma sicuramente deve essere di un tipo o dell'altro. Ciò differisce con la classificazione Aperto/Chiuso secondo la quale potevano esistere insiemi né aperti né chiusi (vedasi Esempio 1.33)

Esempio 2.26
In $\mathbb{R}$ con l'usuale distanza Euclidea:

1. $[0,1]$ e $]1,2]$ non sono separati
2. $[0,1[$ e $]1,2]$ sono separati
3. $\{0\} \cup [1,2]$ è sconnesso
4. $\mathbb{R}$ è connesso

Esercizio 2.27
Dimostrare che gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono sottoinsiemi sconnessi di $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea.

Esercizio 2.28
Dimostrare che se due insiemi sono separati, allora sono disgiunti. Esibire un controesempio all'implicazione inversa.

Esercizio 2.29
Esibire esempi di insiemi:

1. connessi/sconnessi ed aperti/chiusi
2. connessi/sconnessi e limitati/illimitati

Proposizione 2.30
In $\mathbb{R}$ con la metrica Euclidea, sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$A \text{ è } \textbf{Connesso} \iff A \text{ è un } \textbf{Intervallo}$$

Dimostrazione. Omessa. □

Proposizione 2.31 (Poligonale Congiungente due Punti)
In $\mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea, sia A un **aperto connesso**. Allora, comunque scelti x e y in A, esiste una **poligonale** interamente contenuta in A con i lati paralleli agli assi e congiungente x a y.

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 2.32
Mostrare con un esempio che nella Proposizione 2.31 (Poligonale Congiungente due Punti) l'ipotesi "A *aperto*" è essenziale.

Soluzione. Dato lo spazio metrico $(\mathbb{R}^2, d)$, tutti i punti del sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ sono di frontiera, dunque non è un aperto. È impossibile individuare una poligonale che colleghi due qualsiasi punti della circonferenza in quanto, appunto circonferenza. ■

2.2 Insiemi Compatti

Definizione 2.33 (Insieme Compatto)
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. A è **Compatto** se e solo se **ogni successione di elementi di** A **ammette una sottosuccessione avente limite in** A.

Nota. Questa è la definizione di **Compattezza per Successioni**, in spazi più generali può essere necessario utilizzare una definizione più debole che, nel caso degli spazi metrici, coincide con la precedente.

Proposizione 2.34
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$

$$A \textbf{ compatto} \implies A \textbf{ chiuso e limitato}$$

Dimostrazione. Per assurdo negando una per una le conclusioni.

- A non è chiuso

$$\begin{aligned}&A \text{ non è chiuso}\\ \implies& A \neq \overline{A}\\ \implies& A \subset \overline{A}\\ \implies& \exists x_0 \in \overline{A},\ x_0 \notin A\end{aligned}$$

Dunque, per Definizione 1.22, si deve concludere che

$$\implies \exists x_0 \text{ di accumulazione per } A,\ x_0 \notin A$$

Quindi dalla Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione)

$$\implies x:\ \mathbb{N} \mapsto X \text{ con } \begin{cases} x_n \in A\ \forall n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0, x_0 \notin A \end{cases}$$

Cioè abbiamo ottenuto una successione non convergente in A, dunque negando l'ipotesi

$$\implies A \text{ non è compatto - } \textit{Assurdo}$$

- A non è limitato

$$\begin{aligned}&A \text{ non è limitato}\\ \implies& \sup\{d(x,y) : x,y \in A\} = +\infty\end{aligned}$$

Fissato dunque un $x_0 \in A$, continuerò ad aver distanza infinita, in quanto A non limitato per ipotesi.

$$\begin{aligned}\implies& \sup_{x\in A} d(x,x_0) = +\infty\\ \implies& \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in A:\ d(x_n,x_0) > n\end{aligned}$$

Dunque qualsiasi sottosuccessione di $x:\ \mathbb{N} \mapsto X$ è illimitata

$$\begin{aligned}\implies& x:\ \mathbb{N} \mapsto X \text{ è una successione in } A \text{ senza sottosuccessioni convergenti}\\ \implies& A \text{ non è compatto - } \textit{Assurdo}\end{aligned}$$

□

Proposizione 2.35
In $\mathbb{R}^n$ con l'usuale metrica Euclidea, sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora:

$$A \text{ è } \textbf{Compatto} \iff A \text{ è } \textbf{Chiuso e Limitato}$$

Dimostrazione. Omessa a lezione.
Nel caso $n = 1$, segue dalle (note) proprietà di $\mathbb{R}$. Nel caso $n > 1$, si veda Esercizio 2.36. □

Nota. La Proposizione 2.34 vale in ogni spazio metrico, mentre la Proposizione 2.35 solo in $A \subseteq R^n$

Esercizio 2.36
Completare la dimostrazione della Proposizione 2.35.
Suggerimento: utilizzare il caso $n = 1$ e la e la Proposizione 2.6

Esercizio 2.37
Confrontare la dimostrazione della Proposizione 2.35 con Esempio 19.21

Esercizio 2.38
In uno spazio metrico, esibire esempi di insiemi connessi/sconnessi e compatti/non compatti.

Esercizio 2.39
In $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea, esibire esempi di insiemi che siano itnervalli/non intervalli compatti/non compatti

Esercizio 2.40
Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano K_1 e K_2 due sottoinsiemi compatti di X. Allora $K_1 \cup K_2$ è compatto

Soluzione. Posto $K = K_1 \cup K_2$, per definizione di **unione**, ogni elemento di K è in K_1 o K_2.
Visto che, per ipotesi, K_1 e K_2 sono compatti, sappiamo che ogni successione in uno dei due avrà una sottosuccessione convergente nello stesso insieme. A questo punto possiamo concludere che ogni successione in K ammetterà una sottosuccessione convergente ad un elemento $x_\infty \in K_1$ oppure $x_\infty \in K_2 \implies x_\infty \in K$ ■

Proposizione 2.41
Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora

$$X \text{ è } \textbf{Compatto} \implies X \text{ è } \textbf{Completo}$$

Dimostrazione. Sia $x : \mathbb{N} \mapsto X$ una successione di Cauchy di elementi di X.
X è compatto quindi, per definizione, esiste una sottosuccessione convergente ad un $x_\infty \in X$. Ciò implica, grazie all'Esercizio 2.23, che l'intera successione converga a x_∞, dunque X è completo. □

Osservazione 2.42
Sia X un insieme munito di due distanze tra loro equivalenti d_1 e d_2 (si veda Definizione 1.12 (Metriche Equivalenti)). Allora *ciò che vale in* (X, d_1)*, vale in* (X, d_2)
Il seguente esercizio rende rigorosa questa affermazione

Esercizio 2.43
Sia X un insieme munito delle due distanze d_1 e d_2 tra loro equivalenti. **Se un insieme è aperto** (chiuso, compatto, connesso, limitato) **in (X, d_1)**, allora **lo è anche in (X, d_2)**.
Inoltre, **se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_\infty$ in (X, d_1)**, allora **$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_\infty$ anche in in (X, d_2)**

Esempio 2.44
Sia (X, d) lo spazio $\mathbb{R}^n$ munito della distanza Euclidea. Sia d_p come in Esempio 1.7 (Esempi di Metriche) con $p \in \mathbb{R}^n$
È interessante notare che in (X, d), d_p stessa non è continua e quindi gli insiemi aperti (chiusi) rispetto a d_p, possono non essere aperti (chiusi) rispetto alla distanza Euclidea. Di conseguenza son proprietà diverse nei due spazi metrici: convergenza di successioni, continuità di funzioni, connessione, compattezza, essere o meno punto di accumulazione, punto interno, punto esterno...

Esercizio 2.45
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un **compatto**. Dimostrare che se $C \subseteq A$ **è un chiuso**, allora è anche **compatto**.
L'ipotesi "*C chiuso*" è indispensabile?

3 Limiti e Continuità

Definizione 3.1 (Limite per Funzione)
Siano:

- (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici
- $A \subseteq X$
- x_0 di accumulazione per A
- $f : A \mapsto Y$ una funzione
- $l \in Y$

Allora si definisce

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

$$\rightleftharpoons$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } d_Y(f(x), l) < \varepsilon$$

Che si legge *il limite per x tendente a x_0 di $f(x)$ converge a l per x tendente a x_0*.

Esercizio 3.2
Sarebbe comodo definire

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\lim_{x \to x_0} d(f(x), l) = 0$$

Perché non è corretto farlo?

Soluzione. Non è corretto perché questa definizione implica $l = f(x)$ con $x \to x_0$ per proprietà 2 di Definizione 1.2 (Spazio Metrico). Ciò è diverso aalla Definizione 3.1 (Limite per Funzione) ed è inoltre più restrittivo, in quanto, con questa definizione "semplificata", sarebbe richiesto $x_0 \in A$, mentre x_0 deve essere solo di accumulazione nell'altro caso. Un punto di accumulazione non è necessariamente incluso nell'insieme a cui è riferito. ■

Teorema 3.3 (Teorema di Unicità del Limite per Funzioni)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, x_0 di accumulazione per A, $f: A \mapsto Y$ una funzione e $l', l'' \in Y$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = l' \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = l'' \end{aligned}\right\} \implies l' = l''$$

Dimostrazione.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = l' \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = l'' \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta' > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta' \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } d_Y(f(x), l') < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta'' > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta'' \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } d_Y(f(x), l'') < \varepsilon \end{cases}$$

Posto $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, si può sicuramente concludere

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } d_Y(f(x), l') < \varepsilon \text{ e vale } d_Y(f(x), l'') < \varepsilon \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad d_Y(l', l'') < 2\varepsilon \\ &\implies d_Y(l', l'') = 0 \end{aligned}$$

□

Proposizione 3.4 (Continuità per Successioni)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, x_0 di accumulazione per A, $f: A \mapsto Y$ e $l \in Y$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
$$\iff$$
$$\forall \text{ successione } x : \mathbb{N} \mapsto X \text{ tale che } \lim_{x \to +\infty} x_n = x_0 \text{ e } x_n \neq x_0$$
$$\text{vale } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

Nota. Specificare "$\forall$ *successione*" è fondamentale in quanto bisogna considerare tutti i punti $x \in A$, non solo le divisioni discrete degli $n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione.

$\implies$ Dalle Definizione 3.1 (Limite per Funzione) e Definizione 2.3 (Limite per Successioni)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \implies \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in A \\ d(x, x_0) < \delta,\ x \neq x_0 \quad d(f(x), l) < \varepsilon \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \implies \begin{cases} \forall \delta > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu,\ x_n \in A \\ x_n \neq x_0 \quad d(x_n, x_0) < \delta \end{cases}$$

Con il secondo limite per la successione x_n convergente a x_0 costruita appositamente e sicuramente sempre esistente, grazie alla Proposizione 2.9 (Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione).
Unendo le due definizioni di cui sopra, si ottiene la

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu,\ x_n \in A\ x_n \neq x_0$$
$$d(x_n, x_0) < \delta \quad d\big(f(x_n), l\big) < \varepsilon$$

Nota. La prima parte si può leggere come $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$. Il δ viene poi usato per scegliere un $\nu = \delta$ e per questo ν vale il resto dell'espressione.

Che corrisponde alla definizione di limite per funzione di $f(x_n)$

$\Longleftarrow$ Per assurdo, negando $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

$$\text{non} \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$$
$$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0:\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in A,\ x_\delta \neq x_0, \quad d(x_\delta, x_0) < \delta, \quad d\big(f(x_\delta), l\big) > \varepsilon$$

Ponendo $\delta = \frac{1}{n+1}$ si passa alla successione convergente a 0, dunque compatibile con il δ precedente

$$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0:\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in A,\ x_n \neq x_0, \quad d(x_n, x_0) < \frac{1}{n+1}, \quad d\big(f(x_n), l\big) > \varepsilon$$

Essendo $d\big(f(x_n), l\big) > \varepsilon$ si sa per certo che non avrò limite ad l

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Esiste una successione } x_n,\ x_n \in A,\ x_n \neq x_0, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \\ \text{e} \\ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \text{ o non esiste, oppure non è } l \end{cases}$$

Quindi l'ipotesi è contraddetta.

□

Definizione 3.5 (Funzione Continua)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$

$$f \text{ è } \textbf{continua} \text{ in } x_0 \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0: \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Inoltre

$$f \text{ è } \textbf{continua} \text{ in } A \rightleftharpoons f \text{ è continua } \textbf{in ogni punto} \text{ di } A$$

Nota. Non andrebbe detto semplicemente "*f è continua*" perché la continuità dipende in modo essenziale dall'insieme di punti su cui la funzione viene considerata. In assenza di ulteriori specificazioni, spesso si sottointende che l'insieme in esame è l'intero dominio della funzione.

Nota. Ha senso valutare la continuità di una funzione esclusivamente nell'insieme in cui è definita. Quindi una frase come:
la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ è discontinua in 0,
non è (a rigore) sensata. Andrebbe riformulata come:
la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ non può essere estesa ad una funzione definita e continua anche in 0.

Nota. La continuità di una funzione dipende in modo esssenziale anche dalla distanza adottata, tuttavia è prassi sottointendere questa precisazione, soprattutto per funzioni $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, se la distanza adottata è quella Euclidea.

Osservazione 3.6
Alcuni testi definiscono la continuità semplicemente attraverso la nozione di limite. Il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ è però definito solo se x_0 è punto di accumulazione del dominio di f, come da Definizione 3.1 (Limite per Funzione).
Una definizione di continuità basata sul limite non permetterebbe, ad esempio, di valutare la continuità della funzione $x \mapsto \sqrt{x^2(x-1)}$ su tutto il suo insieme di definizione.

Esercizio 3.7
Data

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x^2(x-1)} \end{array}$$

determinare l'insieme di definizione e l'insieme dei punti in cui è continua.

Esercizio 3.8 (Continuità in Punti Isolati)
Formulare con precisione e dimostrare: ogni funzione è continua in ogni suo punto isolato del suo insieme di definizione.

Soluzione.
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$ **Punto Isolato**. Allora f è **Continua in x_0**

Dimostrazione. Per Definizione 1.21 (Punti e Spazi Metrici)

$$\exists r > 0 : \ B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$$

Quindi esiste una sfera centrata in x_0 che non contenga altri punti oltre x_0. Ricordando la Definizione 3.5 (Funzione Continua)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Si vede che questo unico x_0 rispetta la condizione $d_X(x, x_0) < \delta$, inoltre è sicuramente valida la condizione $\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$, verificando la continuità in x_0

□

Proposizione 3.9
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$

$$f \text{ è } \textbf{Continua} \text{ in } x_0 \iff \begin{cases} x_0 \text{ è } \textbf{Isolato} \text{ per } A \\ \textit{oppure} \\ x_0 \text{ è } \textbf{di Accumulazione} \text{ per } A \text{ e } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Dimostrazione.

- x_0 di accumulazione: per definizione di f continua
- x_0 isolato: per Definizione 1.21 (Punti e Spazi Metrici)

  $$\exists r > 0 : \ B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$$

  Posto ora $r = \delta$, si ottiene che, per certo, $x = x_0$, che è quanto richiesto per verificare la continuità

□

Esercizio 3.10
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $k \in Y$. Sia $f : X \mapsto Y$ definita da $f(x) = k \ \forall x \in X$.
Dimostrare che f è continua su X

Proposizione 3.11 (Continuità e Continuità per Successioni)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$

$$f \text{ è } \textbf{Continua} \text{ in } x_0$$
$$\iff$$
$$\underbrace{\forall \text{ successione } x : \mathbb{N} \mapsto A : \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0}_{\text{cioè per ogni successione convergente a } x_0} \text{ vale } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Nota. Il primo limite è in X, il secondo in Y

Nota. Questo enunciato mostra l'equivalenza tra la Definizione 3.5 (Funzione Continua) e Proposizione 3.4 (Continuità per Successioni).

Dimostrazione.

$\implies$

$$f \text{ continua in } x_0 \iff \begin{cases} x_0 \text{ di accumulazione} \\ \textit{oppure} \\ x_0 \text{ isolato} \end{cases}$$

Dividendo nei due casi:

- x_0 di accumulazione:
  Sia $x : \mathbb{N} \mapsto X$ una successione convergente a x_0 con $x_0 \in A$, da cui, per Definizione 2.3 (Limite per Successioni)

  $$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \implies$$
  $$\implies \forall \delta > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \quad d_X(x_n, x_0) < \delta$$

  Essendo, per ipotesi, f continua in x_0

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \text{ vale } d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

  Procedendo come nella prima parte della dimostrazione di Proposizione 3.4 (Continuità per Successioni), si ottiene:

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n > \nu \text{ vale } d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

  Che è la definizione di $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$

- x_0 isolato:
  L'unica successione di elementi di A convergente a x_0 è la successione costante $x_n = x_0$, dunque sicuramente $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$

$\impliedby$ Dividendo ancora nei due casi:

- x_0 di accumulazione:
  Ponendo, per assurdo

  $$f \ \textit{non} \text{ continua in } x_0$$
  $$\implies \exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0\ \exists x \in A, \quad d_X(x, x_0) < \delta, \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) >$$

  limvarepsilon

  Procedendo di nuovo come nella dimostrazione di Proposizione 3.4 (Continuità per Successioni), posto $\delta = \frac{1}{n+1}$ si passa alla successione convergente a 0, dunque compatibile con il δ precedente

  $$\implies \exists \varepsilon > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A, \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n+1}, \quad d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) > \varepsilon$$

Quindi si è costruita una successione $x: \mathbb{N} \mapsto X$ (X generico) convergente a x_0, ma la successione $f \circ x$ (cioè la $\{f(x_n): n \in \mathbb{N}\}$) non convergerebbe a $f(x_0)$. Questo è contrario all'ipotesi da cui si è partiti, per cui $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$

– x_0 isolato:
Immediatamente da Esercizio 3.8 (Continuità in Punti Isolati)

$\square$

Corollario 3.12
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f: A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$ e $x: \mathbb{N} \in X$ una successione in A

$$\left.\begin{array}{c} f \textbf{ Continua} \text{ in } A \\ e \\ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in A \end{array}\right\} \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right)$$

Dimostrazione. Essendo f continua per ipotesi, dalla Proposizione 3.11 (Continuità e Continuità per Successioni) è noto che

$$\forall \text{ successione } x: \mathbb{N} \mapsto A: \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Inoltre $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \in A$ per ipotesi e, grazie alla continuità di f, $\exists f(x_0) \quad \forall x_0 \in A$.
Unendo le due conclusioni si ottiene la tesi

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right)$$

$\square$

Proposizione 3.13 (Continuità di f in un Insieme)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f: A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$.

$$f \textbf{ Continua} \text{ in } A$$
$$\iff$$
$$\underbrace{\forall x_0 \in A}_{\text{unica aggiunta}} \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Nota. Questa proposizione espande la Definizione 3.5 (Funzione Continua) di continuità su un insieme grazie alla stessa definizione di continuità in un punto

Dimostrazione. Segue direttamente dalla Definizione 3.5 (Funzione Continua) $\square$

Proposizione 3.14 (Continuità Funzioni Composte)
Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e siano

- $f: A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$
- $g: B \mapsto Z$ con $B \subseteq Y$
- $x_0 \in A$
- $f(x_0) \in B$

$$\left.\begin{array}{l} f \textbf{ Continua} \text{ in } x_0 \\ g \textbf{ Continua} \text{ in } f(x_0) \end{array}\right\} \implies (g \circ f) \text{ è } \textbf{Continua} \text{ in } x_0$$

Dimostrazione. Dalla Definizione 3.5 (Funzione Continua)

$$f \text{ continua in } x_0 \implies \forall \eta > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \eta$$

Da $d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \eta$ sappiamo che la distanza in Y è limitata, dunque possiamo utilizzarla nella seguente definizione

$$g \text{ continua in } f(x_0) \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 : \quad \forall y \in B \text{ con } d_Y\big(y, f(x_0)\big) < \eta \quad \text{vale} \quad d_Z\Big(g(y), g\big(f(x_0)\big)\Big) < \varepsilon$$

Nota. η è la lettera greca Eta

Dunque, posto $y = f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Z\Big(g\big(f(x)\big), g\big(f(x_0)\big)\Big) < \varepsilon$$

Oppure, ugualmente, utilizzando il formalismo delle composizioni di funzioni

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale} \quad d_Z\big((g \circ f)(x), (g \circ f)(x_0)\big) < \varepsilon$$

Che è, per Definizione 3.5 (Funzione Continua), la continuità di $g \circ f$ in x_0 □

Teorema 3.15 (Teorema generale di Weierstrass)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : K \mapsto Y$ con $K \subseteq X$.

$$\left.\begin{array}{l} K \textbf{ Compatto} \\ f \textbf{ Continua} \text{ su } K \end{array}\right\} \implies f(K) \textbf{ Compatto}$$

Dimostrazione. Siano le successioni

- $y : \mathbb{N} \mapsto Y$ tale che $y_n \in f(K) \ \forall n \in \mathbb{N}$, cioè $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in K : f(x_n) = y_n$
- $x : \mathbb{N} \mapsto X$ tale che $x_n \in K \ \forall n \in \mathbb{N}$

Nota. Abbiamo una successione che, attraverso la f (non direttamente: le successioni non sono $X \mapsto Y$!), associa indirettamente valori in $K \subseteq X$ a valori in $f(K) \subseteq Y$

La successione x ammettrà sicuramente una sottosuccessione x_{n_k} convergente ad un elemento $\overline{x} \in K$. Questo per Definizione 2.33 (Insieme Compatto), avendo K compatto per ipotesi, ed essendo x a valori in K.
Data la continuità di f in K, abbiamo $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \in f(K)$, ma essendo x_{n_k} convergente ad $\overline{x}$, anche y_{n_k} converge, verificando così la Definizione 2.33 (Insieme Compatto). □

Dimostrazione. (Alternativa)
La successione x ammette una sottosuccessione x_{n_k} convergente ad un elemento $\overline{x} \in K$, dunque da Proposizione 2.4:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_* \iff \forall \eta > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \nu \ \ d(x_n, x_*) < \eta$$

Dalla Definizione 3.5 (Funzione Continua) e sapendo che $f(x)$ è continua per ipotesi, si ottiene:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in K \ \ d_X(x, x_*) < \delta \ \ d_Y\big(f(x_n), f(x_*)\big) < \varepsilon$$

Unendo ora le due definizioni:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \nu \ \ d_Y\big(f(x_n), f(x_*)\big) < \varepsilon$$

Che equivale, per come è definita y_n, a

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = y_*$$

Cioè la definizione di successione convergente. Ho dunque individuato una sottosuccessione convergente per ogni successione in $f(K)$, verificando così la Definizione 2.33 (Insieme Compatto). □

Esercizio 3.16 (Teorema di Weierstrass - Analisi 1)
Cosa c'entra il Teorema 3.15 (Teorema generale di Weierstrass) con il "vecchio" Teorema di Weierstrass di Analisi 1?

Soluzione. Considerando il caso $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ (ma le stesse considerazioni valgono anche per $\mathbb{R}^n$) si ottiene

$$f : K \mapsto f(K) \text{ con } f(K) \text{ compatto.}$$

Il fatto che $f(K)$ sia compatto sia compatto implica, in $\mathbb{R}^n$, che sia **Chiuso** e **Limitato** per Proposizione 2.34.

- Essendo limitato, per certo $\exists \sup \in \mathbb{R} \neq \infty$ e $\exists \inf \in \mathbb{R} \neq \infty$
- Essendo chiuso, sicuramente $\sup = \max$ e $\inf = \min$

Dunque f ammette max e min $\in \mathbb{R} \neq \infty$, che è la conclusione del Teorema di Weierstrass in Analisi 1. ■

Proposizione 3.17
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : K \mapsto Y$ con $K \subseteq X$.

$$\left.\begin{array}{l} K \textbf{ Connesso} \\ f \textbf{ Continua} \text{ su } K \end{array}\right\} \implies f(K) \textbf{ Connesso}$$

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 3.18
Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che, fissato un punto $x_0 \in X$, la funzione:

$$\begin{array}{cccc} f & : & X & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & d(x, x_0) \end{array}$$

è continua in X

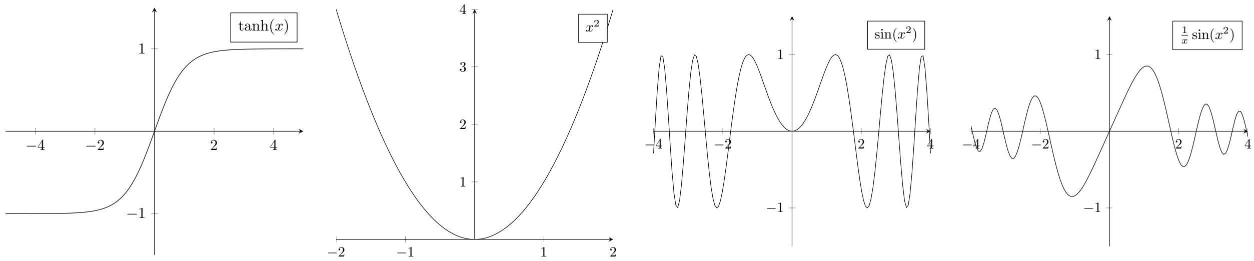
3.1 Uniforme Continuità

Definizione 3.19 (Funzione Uniformemente Continua)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$.

$$f \text{ è } \textbf{Uniformemente Continua} \text{ in } A$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x, x_0 \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \quad \text{vale } d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Cioè è una funzione continua per la quale piccole variazioni della x implicano piccole variazioni di $f(x)$.
Graficamente si può vedere che il grafico "non impenna" e non "oscilla liberamente". Buon indicatore della uniforme continuità è la presenza di asintoti orizzontali.

Esempio 3.20



(a) Sì unif. cont. (b) No unif. cont. (c) No unif. cont. (d) Sì unif. cont.

Esercizio 3.21
Confrontare la Proposizione 3.13 (Continuità di f in un Insieme) con la Definizione 3.19 (Funzione Uniformemente Continua)

Soluzione. In Proposizione 3.13 (Continuità di f in un Insieme) si definiva la continuità della funzione sull'insieme applicando la Definizione 3.5 (Funzione Continua) a ogni $x_0 \in A$, cioè ogni punto di A. Questo non ha particolari implicazioni sul comportamento della funzione, informa solamente sulla continuità in ogni punto di A.
Definizione 3.19 (Funzione Uniformemente Continua) invece prevede, per definizione, la possibilità di scegliere un qualsiasi x_0 quando ε è già stato scelto. Ciò implica che ε debba essere valido per ogni $x_0 \in A$, non scelto *a priori*. ■

Proposizione 3.22
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Sia $f : A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$.
Se f è **uniformemente continua** in A, allora f è **continua** in A.

Dimostrazione. Deriva da Esercizio 3.21 in quanto, se è possibile scegliere un qualsiasi x_0 quando ε è già stato fissato, sicuramente sarà possibile fare questa scelta anche in ordine inverso (la continuità è condizione condizione meno stringente). □

Esercizio 3.23
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $k \in Y$. Data $f : X \mapsto Y$ definita da $f(x) = k \ \ \forall x \in X$.
Dimostrare che f è uniformemente continua.

Esercizio 3.24
Formulare e dimostrare il teorema sulla uniforme continuità della composizione di funzioni uniformemente continue in spazio metrici.

Esempio 3.25
Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$. f è continua in $\mathbb{R}$, ma *non* è uniformemente continua in $\mathbb{R}$

Esercizio 3.26
Esibire esempi di funzioni $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ che siano limitate/illimitate ed uniformemente continue.

Esempio 3.27
Sia $f : \ ]0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
In $]0, 1]$, f è continua e limitata, ma non è uniformemente continua.

Proposizione 3.28 (Teorema di Cantor)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : K \mapsto Y$ con $K \subseteq X$.

$$\left.\begin{array}{l} K \textbf{ Compatto} \\ f \textbf{ Continua} \text{ su } K \end{array}\right\} \implies f \textbf{ Uniformemente Continua} \text{ su } K$$

Dimostrazione. Per assurdo negando la conclusione.

$$\begin{aligned} & f \text{ non è uniformemente continua in } K \\ \implies & \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' \in K \text{ con } d(x', x'') < \delta \text{ e } d\big(f(x'), f(x'')\big) > \varepsilon \end{aligned}$$

Ponendo $\delta = \frac{1}{n+1}$ si passa alla successione convergente a 0, dunque compatibile con il δ precedente

$$\implies \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x'_n, x''_n \in K \text{ con } \underbrace{d(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n+1}}_{(1)} \text{ e } \underbrace{d\big(f(x'_n), f(x''_n)\big) > \varepsilon}_{(2)} \tag{3.1}$$

Essendo K compatto per ipotesi, per le due successioni x'_n e x''_n esistono due sottosuccessioni x'_{n_k} e x''_{n_k} convergenti a $x'_\infty, x''_\infty \in K$.

Da (1) di Eq. (3.1) si sa che $\lim_{n\to+\infty} d(x'_n, x''_n) = 0$, dunque $x'_\infty = x''_\infty$ per $n \to +\infty$

Da (2) di Eq. (3.1), d'altro canto, è esplicitato che $d\big(f(x'_n), f(x''_n)\big)$ rimane sempre $> \varepsilon$ strettamente positivo, dunque è negata la Definizione 3.5 (Funzione Continua) in $x'_\infty = x''_\infty$. Così è negata l'ipotesi sulla continuità della funzione. □

Proposizione 3.29
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$ e $f : A \mapsto Y$ **Uniformemente Continua** su A. Allora, per ogni successione $x : \mathbb{N} \mapsto X$ **di Cauchy** in X, la successione $\boldsymbol{f \circ x}$ delle immagini $f(x_n)$ **è di Cauchy** in Y.

Dimostrazione. Omessa. □

Proposizione 3.30
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$ e $f : A \mapsto Y$ **Uniformemente Continua** su A. Allora esiste un'unica funzione

$$\overline{f} : \overline{A} \mapsto Y$$

continua su $\overline{A}$ e tale che $f_{|A} = f$ (cioè la f ristretta ad A, dove definita, corrisponde a f)

Dimostrazione. Omessa. □

3.2 Lipschitzianità

Definizione 3.31 (Funzione Lipschitziana)
Siano:

- (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici
- $A \subseteq X$
- $f : A \mapsto Y$

Allora

$$f \text{ è } \textbf{Lipschitziana}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\exists L > 0 : \ \forall x',\, x'' \in X, \quad d_Y\big(f(x''), f(x')\big) \le L \cdot d_X(x'', x')$$

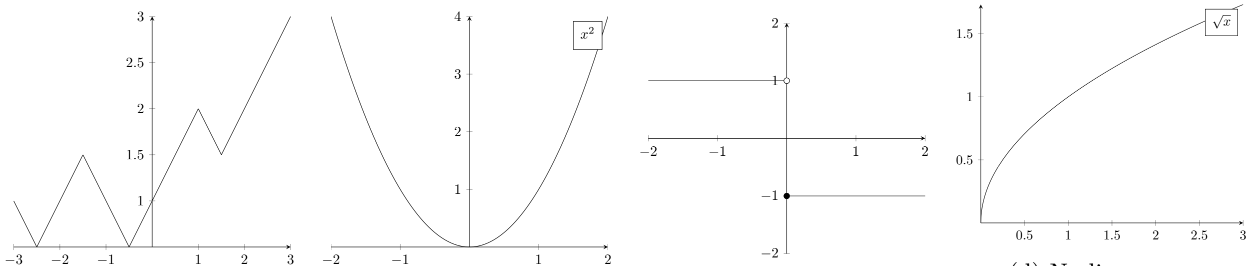
Nota. La costante L sopra introdotta non è univocamente determinata. Nei risultati seguenti non sarà mai rilevante *il valore* di L, ma il fatto stesso che L esista.

Definizione 3.32 (Costante di Lipschitz)
Fissate le distanze d_X e d_Y e la funzione f, allora la più piccola L positiva soddisfacente

$$d_Y\big(f(x''), f(x')\big) \le L \cdot d_X(x'', x') \qquad \forall x', x'' \in X$$

si definisce **Costante di Lipschitz** della funzione f in X

Esempio 3.33



(a) Sì lips. (b) No lips. (c) No lips. (d) No lips. (Sì unif. cont.)

Esempio 3.34
Sono dati gli spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) ed una funzione Lipschitziana $f : X \mapsto Y$.
Determinare una nuova distanza δ_X su X che sia equivalente a d_X ed in modo che la costante di Lipschitz di f rispetto a δ_X sia minore o uguale ad 1.

Esempio 3.35
Sono dati gli spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) ed una funzione Lipschitziana $f : X \mapsto Y$.
Determinare una nuova distanza δ_Y su Y che sia equivalente a d_Y ed in modo che la costante di Lipschitz di f rispetto a δ_Y sia minore o uguale ad 1.

Esercizio 3.36
Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Come si fa a capire se f è Lipschitziana o no dal suo grafico?

Proposizione 3.37
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme **Convesso** (Definizione 8.38 (Insieme Convesso)) e $f \in \mathbf{C^1}(A; \mathbb{R})$. Se tutte le derivate parziali sono limtate in A , allora f è Lipschitziana.

Dimostrazione. Segue direttamente da Definizione 8.38 (Insieme Convesso) e Teorema 8.36 (degli Accrescimenti Finiti) □

Proposizione 3.38
Sia $f : X \mapsto Y$ una funzione **Lipschitziana**. Allora f è **Uniformemente Continua** su X.

Dimostrazione. Dall'ipotesi di Lipschitzianità, applicando la Definizione 3.31 (Funzione Lipschitziana), si sa per certo che

$$d_Y\big(f(x''), f(x')\big) \leq L \cdot d_X(x'', x')$$

Posti ora

- $d_X(x'', x') < \delta$ senza perdere generalità (il δ nella unif. continuità è a scelta)
- $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ come semplice posizione

Si ottiene

$$d_Y\big(f(x''), f(x')\big) \leq L \cdot d_X(x'', x') < L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

Da cui, prendendo il primo e l'ultimo membro,

$$d_Y\big(f(x''), f(x')\big) < \varepsilon$$

che è la condizione di uniforme continuità. □

Esempio 3.39
La funzione

$$\begin{array}{cccc} f & : & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

è uniformemente continua ma non è Lipschitziana. Vedere grafico in Esempio 3.33

Esempio 3.40
La funzione

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

è uniformemente continua ma non è Lipschitziana.

Esempio 3.41
La funzione

$$\begin{array}{ccccc} f & : & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C}^\infty$ ma non è Lipschitziana. Vedere grafico in Esempio 3.33

Esempio 3.42
La funzione

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

è Lipschitziana ma non è derivabile in 0.

Esercizio 3.43
La composizione di funzioni Lipschitziane è Lipschitziana?
Per funzioni reali di variabile reale, la somma/il prodotto di funzioni Lipschitziane è una funzione Lipschitziana? Enunciare formalmente e dimostrare.

Proposizione 3.44
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ con $A \subseteq X$.

$$f \text{ è } \textbf{Lipschitziana} \iff \textbf{ogni componente di } f \textbf{ è Lipschitziana}$$

Dimostrazione. Immediata. □

Definizione 3.45 (Norma di Matrice)
Sia $A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$. **Norma** di A è la quantità

$$\|A\| = \max_{x \in \overline{B(0,1)}} \|A\, x\|$$

con x vettore $\in \mathbb{R}^n$ e $A\, x \in \mathbb{R}^m$ risultato del prodotto righe per colonne.

Esercizio 3.46
Verificare che la norma introdotta in Definizione 3.45 (Norma di Matrice) soddisfi alle condizioni della Definizione 1.8 (Norma) con $V = \mathrm{Mat}(m \times n)$

Esercizio 3.47
Con la notazione della Definizione 3.45 (Norma di Matrice), verificare le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \in \overline{B(0,1)}} \|A\, x\| &&= \sup_{x \in B(0,1)} \|A\, x\| \\ &= \max_{\|x\|=1} \|A\, x\| &&= \sup_{\|x\|=1} \|A\, x\| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A\, x\|}{\|x\|} \end{aligned}$$

Proposizione 3.48
Sia $A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$. Allora

$$\|A\, x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Dimostrazione. Sia $x = 0$ la tesi è immediata.
Sia $x \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} \|A\, x\| &= \left\| A\, x \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|} \right\| = \left\| \|x\| \cdot \left(A \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \\ &= \|x\| \cdot \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \end{aligned}$$

Essendo $\frac{x}{\|x\|}$ il versore di x, esso ha, per definizione, norma unitaria e, grazie a Esercizio 3.47, si sa che $\|A\| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|A\, x\|$, dunque

$$\leq \|A\| \cdot \|x\|$$

□

Esercizio 3.49
Esibire una matrice $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 3)$ tale che $\|A\| = 2$

Esercizio 3.50
Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ una funzione lineare. Allora è Lipschitziana (rispetto alla metrica Euclidea). Suggerimento: utilizzare la Proposizione 3.48

Nota. In spazi più generali di $\mathbb{R}^n$ (spazi di dimensione *infinita*) l'affermazione contenuta in questo esercizio può essere falsa. Vedasi Proposizione 19.20

Esercizio 3.51
Se A e B sono matrici tali che se ne possa fare il prodotto (regole del prodotto righe per colonne), dimostrare che

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

4 Il Teorema delle Contrazioni

Definizione 4.1 (Contrazione)
Sia (X, d) uno spazio metrico. Si dice **Contrazione** una funzione T: $X \mapsto X$ soddisfacente a:

$$\exists K \in [0,1[\text{ tale che } \forall x', x'' \in X \quad \text{vale} \quad d_X\big(T(x''), T(x')\big) \leq K \cdot d_X(x'', x') \tag{4.1}$$

Una contrazione è quindi una funzione con insieme di partenza e di arrivo coincidenti e Lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1.
È generalmente inutile considerare contrazioni definite tra spazi diversi. Infatti, data una funzione $T : X \to Y$ Lipschitziana, sarebbe sempre possibile riscalare la distanza in uno dei due spazi X o Y per ottenere una costante di Lipschitz minore di 1.

Nota. D'ora in poi si utilizzerà spesso la notazione Tx per intendere $T(x)$

Esempio 4.2 (Esempi di Contrazioni)

1. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{x}{2}$. f è una contrazione.
2. $f : [0, 2] \mapsto [0, 2]$ data da $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$. f è una contrazione
3. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. f è una contrazione

Esercizio 4.3
La composizione di contrazioni è una contrazione. Enunciare formalmente e dimostrare.
Esibire esempi che mostrino come la somma ed il prodotto di contrazioni possano non essere contrazioni.

Soluzione.
Sia (X, d) uno spazio metrico, siano $f, g : X \mapsto X$ **due contrazioni** in X. Allora $f \circ g$ è una **contrazione**

Dimostrazione. Sappiamo che:

$$\forall x', x'' \in X,\ d\big(f(x''), f(x')\big) \leq K_f \cdot d(x'', x')$$
$$\forall x', x'' \in X,\ d\big(g(x''), g(x')\big) \leq K_g \cdot d(x'', x').$$

$f \circ g = f\big(g(x)\big)$, quindi presi $x', x'' \in X$ si ha

$$d\Big(f\big(g(x'')\big), f\big(g(x')\big)\Big) \leq K_f \cdot d\big(g(x''), g(x')\big) \leq K_f K_g \cdot d(x'', x')$$

□

Esempi: ■

Proposizione 4.4
Sia $f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Se esiste $k \in [0,1[$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale $\|Df(x)\| < k$, allora f è **contrazione**.

Dimostrazione. Segue dal Teorema 8.36 (degli Accrescimenti Finiti) □

Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni)

Nota. Questo teorema è anche noto come *Teorema di Banach-Cacioppoli*

Sia (X,d) uno spazio metrico e $T : X \mapsto X$. Allora

$$\left.\begin{array}{l} X \textbf{ Completo} \\ T \textbf{ Contrazione} \end{array}\right\} \implies \exists!\, x_* \in X : \quad T(x_*) = x_*$$

Cioè esiste un **unico punto fisso** di T in X.

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in 3 passaggi

1. *Individuazione di una Successione di Cauchy*
   Dato un generico $x_0 \in X$ si costruisce una successione x nel seguente modo:

$$x_0 \in X \qquad x_1 = T(x_0) \qquad x_2 = T(x_1) \qquad \dots \qquad x_{n+1} = T(x_n) \tag{4.2}$$

   La successione $x : \mathbb{N} \mapsto X$ è sicuramente ad elementi in X in quanto T, contrazione, è per definizione $T : X \mapsto X$. È necessario dimostrare che la x sia di Cauchy (Definizione 2.11 (Condizione di Cauchy)) cioè che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > \nu \text{ vale } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

   Presi ora due qualunque n e m e sfruttando il modo in cui è definita T

$$d(x_n, x_m) = d\big(T(x_{n-1}), T(x_{m-1})\big)$$

   Grazie al fatto che T è contrazione per definizione, esiste un $K \in [0,1[$

$$\begin{aligned} &\le K \cdot d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ &= d\big(T(x_{n-2}), T(x_{m-2})\big) \\ &\le K^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{m-2}) \end{aligned}$$

   Ipotizzando ora $n < m$, sicuramente dopo un n numero di passi analoghi si arriverà a 0

$$\le K^n \cdot d(x_0, x_{m-n})$$

   Quindi, andando dal primo all'ultimo passaggio, si è ottenuta la disuguaglianza

$$d(x_n, x_m) \le K^n \cdot d(x_0, x_{m-n}) \tag{4.3}$$

   Ora, applicando ripetutamente la disuguaglianza triangolare al secondo membro della Eq. (4.3)

$$K^n \cdot d(x_0, x_{m-n}) \le K^n \cdot \Big(d(x_0,x_1) + d(x_1,x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\Big)$$

   Applicando ora quanto ottenuto in Eq. (4.3) a tutti gli addendi tranne il primo (che avrebbe $n = 0$)

$$\begin{aligned} &\le K^n \cdot \Big(d(x_0,x_1) + K \cdot d(x_0,x_1) + \dots + K^{m-n-1} \cdot d(x_0,x_1)\Big) \\ &\le K^n \cdot (1 + K + \dots + K^{m-n-1}) \cdot d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

   Quindi riassumento, partendo dal primo membro dalla Eq. (4.3), si è arrivati a

$$d(x_n, x_m) \le K^n \cdot (\underbrace{1 + K + \dots + K^{m-n-1}}_{(1)}) \cdot d(x_0, x_1) \tag{4.4}$$

   Posta ora la (1) di Eq. (4.4) come s si ha:

$$s = 1 + K + \dots + K^{m-n-1} \qquad \text{e, moltiplicando per } K, \qquad K \cdot s = K + K^2 + \dots + K^{m-n}$$

Da cui, eseguendo la differenza tra s e $K \cdot s$

$$\begin{aligned} & s - K \cdot s \\ =& (1 + \cancel{K} + \cancel{\dots} + K^{m-n-1}) - (\cancel{K} + \cancel{K^2} + \cancel{\dots} + K^{m-n}) \\ =& 1 - K^{m-n} \end{aligned}$$

si ottiene l'equivalenza

$$\begin{aligned} s - K \cdot s &= 1 - K^{m-n} \\ s(1-K) &= 1 - K^{m-n} \\ s &= \frac{1 - K^{m-n}}{1-K} \end{aligned}$$

Sostituendo la formulazione di s appena trovata in Eq. (4.4) si ottiene

$$d(x_n, x_m) \leq K^n \cdot \frac{1 - K^{m-n}}{1-K} \cdot d(x_0, x_1) \tag{4.5}$$

Essendo $k \in [0, 1[$, eseguendone l'elevamento a potenza otterrò un numero ancor più piccolo. È dunque certo che

$$1 - K^{m-n} \geq 1 - K \implies \frac{1 - K^{m-n}}{1-K} \leq 1$$

per cui è sicuramente possibile minorare la Eq. (4.5) che diventa

$$d(x_n, x_m) \leq K^n \cdot d(x_0, x_1) \tag{4.6}$$

Nota. La Eq. (4.6), per come è scritta, fornisce un importante risultato. Grazie a questa equazione, noto n e calcolando solo la distanza tra gli elementi 0 ed 1 della successione (facilmente individuabili) si ha un limite superiore per la $d(x_n, x_m)$ $\forall n, m$. Non sarebbe stato invece possibile calcolare la $d(x_0, x_{n-m})$ trovata ancora prima.

Questa minorazione permette di verificare la definizione di successione di Cauchy, dunque la x definita in Eq. (4.2) è di Cauchy. □

2. *Individuazione del Punto Fisso*
La successione x definita in Eq. (4.2) ammette sicuramente $\lim x \in X$ per Definizione 2.13 (Spazio Metrico Completo), essendo stata dimostrata di Cauchy nel passo precedente. Inoltre

$$T \text{ Contrazione} \overset{\substack{\text{Come da} \\ \text{Definizione 4.1 (Contrazione)}}}{\implies} T \text{ Lipschitziana} \overset{\substack{\text{Per} \\ \text{Proposizione 3.38}}}{\implies} T \text{ Unif. Cont.} \overset{\substack{\text{Per} \\ \text{Proposizione 3.22}}}{\implies} T \text{ Continua}$$

Posto quindi

$$T(x_*) = T\big(\lim_{n \to +\infty} x_n \big)$$

Grazie alla continuità di T

$$= \lim_{n \to +\infty} \big(T(x_n)\big)$$

Dunque, per come è definita x

$$= \lim_{n \to +\infty} (x_{n+1})$$

Dunque, essendo x di Cacuhy

$$= x_*$$

□

3. *Dimostrazione unicità punto fisso*
   Si suppone non sia unico

$$x_0, y_0 \in X \quad x_0 \neq y_0 \qquad T(x_0) = x_0,\ T(y_0) = y_0$$

Calcolando la distanza tra i due punti, sfruttando il fatto che siano punti fissi per definizione ed, infine, essendo T contrazione si ottiene

$$d(x_0, y_0) = d\big(T(x_0), T(y_0)\big) \leq K \cdot d(x_0, y_0)$$
$$\Longrightarrow$$
$$d(x_0, y_0) - K \cdot d(x_0, y_0) \leq 0$$

$$(1 - K)\big(d(x_0, y_0)\big) \leq 0 \tag{4.7}$$

Però

- $1 - k > 0$ strettamente positivo perché, per Definizione 4.1 (Contrazione) $k \in [0, 1[$
- $d(x_0, y_0) \geq 0$ per Definizione 1.2 (Spazio Metrico)

Allora deve essere per forza $d(x_0, y_0) = 0$ per non contraddire la Eq. (4.7), dunque per proprietà delle distanze $x_0 = y_0$.

□

Esercizio 4.6
I passaggi da Eq. (4.3) a Eq. (4.6) sono necessari?

Soluzione. Vedere nota alla dimostrazione del Teorema delle Contrazioni ■

Esempio 4.7
Se X *non* è completo:
Siano $X =]0, 1[$ e $T : X \mapsto X$ data $T(x) = \frac{x}{2}$. T è una contrazione senza punti fissi in X

Esempio 4.8
Se T è *quasi* una contrazione possono non esserci punti fissi:
Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $T : X \mapsto X$ data da $T(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Grazie al Teorema di Lagrange (da Analisi 1, essendo in $\mathbb{R}$) si può facilmente dimostrare che $\forall x', x'' \in X$

$$|T(x'') - T(x')| < |x'' - x'|$$

però T non è una contrazione ed infatti non ammette punti fissi.

Esempio 4.9
Se T è *quasi* una contrazione possono esserci infiniti punti fissi:
Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $T : X \mapsto X$ data da $T(x) = x$. Evidentemente

$$|T(x'') - T(x')| = |x'' - x'|$$

e T ammette infiniti punti fissi.

Esercizio 4.10
Sia $f\,[0, 1] \mapsto [1, 2]$ data da $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$
f è una funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz $\frac{1}{2}$ definita tra spazi metrici completi ma senza punti fissi. È in contraddizione con il Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni)?

Esercizio 4.11
Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ derivabile su $\mathbb{R}$ e tale che $f'(x) \leq \frac{1}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Dimostrare che allora esiste un unico $x_* \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_*) = x_*$

Osservazione 4.12
È utile considerare **contrazioni** che dipendono da uno o più **parametri**. Siano (X, d) uno spazio metrico completo, P un **insieme** di parametri e $T : X \times P \mapsto X$.
Grazie al Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni) è data l'esistenza di un punto fisso di T indipendentemente dal parametro. È dunque possibile definire una funzione $\varphi : P \mapsto X$ che ad ogni parametro $p \in P$ associa $\varphi(p)$, unico punto fisso della contrazione.
In generale, la regolarità della funzione φ è la stessa con cui T dipende dal parametro p. Vedasi Teorema 4.14 e Teorema 4.16

Definizione 4.13 (Contrazione con Parametro)
Siano (X, d) uno spazio metrico e P un **Insieme**

$$T \text{ è una } \textbf{Contrazione} \text{ in } x \in X \ \textbf{Uniformemente} \text{ in } p \in P$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\exists K \in [0, 1[: \ \forall p \in P, \ \forall x', x'' \in X \quad \text{vale} \quad d\Big(T\big(x', p\big), T\big(x'', p\big)\Big) \le K \cdot d(x', x'')$$

Cioè, indipendentemente da qualsiasi $p \in P$, la T rimane contrazione.

Teorema 4.14
Siano

- (X, d_X) uno spazio metrico completo
- (P, d_P) uno spazio metrico
- $T : X \times P \mapsto X$ una contrazione in $x \in X$ uniformemente in $p \in P$
- T continua

Allora $\forall p \in P$ esiste un unico punto fisso x_p per la funzione $x \mapsto T(x, p)$ e la funzione $p \mapsto x_p$ è continua.

Dimostrazione. Come già detto in Osservazione 4.12, il Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni) assicura l'esistenza di una funzione $\varphi : P \mapsto X$ che ad ogni $p \in P$ associa un unico punto fisso di $x \mapsto T(x, p)$. φ è continua. Infatti se $p_n \to p_0$

$$d_X\left(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\right) =$$

Essendo $\varphi(p_n)$ per definizione punto fisso di T con parametro p_n

$$= \ d_X\Big(T\big(\varphi(p_n), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Applicando la disuguaglianza triangolare

$$\le \ d_X\Big(T\big(\varphi(p_n), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_n\big)\Big) + d_X\Big(T\big(\varphi(p_0), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Con la definizione di contrazioni

$$\le \ K \cdot d_X\left(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\right) + d_X\Big(T\big(\varphi(p_0), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Dunque

$$d_X\left(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\right) \le K \cdot d_X\left(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\right) + d_X\Big(T\big(\varphi(p_0), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Da cui, infine

$$d_X\left(\varphi(p_n), \varphi(p_0)\right) \le \frac{1}{1-K} \cdot d_X\Big(T\big(\varphi(p_0), p_n\big), T\big(\varphi(p_0), p_0\big)\Big)$$

Ed il secondo membro tende a 0 per $n \to +\infty$ grazie alla continuità di T, quindi da Proposizione 3.11 (Continuità e Continuità per Successioni) la φ è continua. □

Definizione 4.15 (Contrazione Lipschitziana in Parametro)
Siano (X, d_X) e (P, d_P) spazi metrici

$$T \text{ è una } \textbf{Contrazione} \text{ in } x \in X \textbf{ Lipschitziana} \text{ in } p \in P$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\exists K \in [0,1[\,, \exists L > 0 : \ \forall p', p'' \in P, \forall x', x'' \in X \text{ vale}$$
$$d_X\big(T(x', p'), T(x'', p'')\big) \leq K \cdot d_X(x', x'') + L \cdot d_P(p', p'')$$

Cioè, si aggiunge la Lipschitzianità rispetto al parametro

Teorema 4.16
Siano

- (X, d_X) uno spazio metrico completo
- (P, d_P) uno spazio metrico
- $T : X \times P \mapsto X$ una contrazione in $x \in X$ Lipschitziana in $p \in P$

Allora esiste un'unica funzione Lipschitziana $\varphi : P \mapsto X$ tale che $\varphi(p)$ è l'unico punto fisso della funzione $x \mapsto T(x, p)$

Nota. L'unicità del punto fisso implica automaticamente l'unicità della funzione φ

Dimostrazione. Come già detto in Osservazione 4.12, il Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni) assicura l'esistenza di una funzione $\varphi : P \mapsto X$ che ad ogni $p \in P$ associa un unico punto fisso di $x \mapsto T(x, p)$. φ è Lipschitziana. Infatti

$$d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) =$$

Essendo $\varphi(p)$ per definizione punto fisso di T con parametro p

$$= \ d_X\Big(T\big(\varphi(p'), p'\big), T\big(\varphi(p''), p''\big)\Big)$$

Applicando la Definizione 4.15 (Contrazione Lipschitziana in Parametro)

$$\leq \ K \cdot d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) + L \cdot d_P(p', p'')$$

Dunque

$$d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) \leq K \cdot d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) + L \cdot d_P(p', p'')$$

Da cui, infine

$$d_X\big(\varphi(p'), \varphi(p'')\big) \leq \frac{L}{1-K} \cdot d_P(p', p'')$$

Che dimostra la Lipschitzianità di φ □

Esercizio 4.17
Nel presente capitolo, ambientato in spazi metrici, non viene trattata la derivabilità del punto fisso rispetto al parametro. Perché?

Definizione 4.18 (Funzione Iterata)
Data $F : X \mapsto X$, si dice **Funzione Iterata** n volte di F la F^n che corrisponde all'**applicazione** n volte di F **su sè stessa**. Formalmente:

$$f^{n+1} = f \circ f^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Se $n = 0$, per definizione, $f^0 = \mathrm{Id}_X$ con Id_X funzione identità su X

Teorema 4.19 (Teorema dell'Iterata Contrazione)
Sia (X, d_X) uno spazio metrico completo e sia $T : X \mapsto X : \exists n \in \mathbb{N}, T^n$ **Iterata** è contrazione.
Allora T ammette un unico punto fisso in X

Nota. La n non è univocamente definita e non potrebbe esserlo.
Se infatti T^n è contrazione, allora anche T^{2n}, T^{3n}, $\cdots$, $T^{\alpha n}$ lo sono.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni) esiste un unico punto fisso $x_* \in X$ per T^n, quindi

$$T^n x_* = x_*$$

applicando T ad entrambi i membri

$$T(T^n x_*) = Tx_*$$

e per la Definizione 4.18 (Funzione Iterata)

$$T(T^n x_*) = T^n(Tx_*) = Tx_*$$

Dunque Tx_* è punto fisso della T^n. Avevamo però già trovato che x_* era punto fisso della T^n e, per il Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni), può esistere un unico punto fisso. Ciò permette di concludere che $Tx_* = x_*$ □

Esercizio 4.20
Enunciare e dimostrare formalmente il *Teorema dell'Iterata Contrazione con Parametro*

5 Funzioni a Valori in $\mathbb{R}^n$

In tutto questo paragrafo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$. Con $\mathbb{R}^n$ viene indicato lo spazio metrico $\mathbb{R}$ dotato dell'usuale metrica Euclidea: $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (y_i - x_i)^2}$ da Esempio 1.7 (Esempi di Metriche). Questo spazio si dice anche Definizione 1.3 (Spazio Vettoriale Metrico)

Nota. Diverse dimostrazioni di questo capitolo sono omesse in quanto estremamente simili a quelle di Analisi 1.

5.1 Il Caso Generale

Proposizione 5.1
Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$, $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ e $g : A \mapsto \mathbb{R}^n$. Sia x_0 di accumulazione per A

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{ esiste finito} \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ esiste finito} \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) & \exists \text{ finito e} & \lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) & \exists \text{ finito e} & \lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \end{array}\right.$$

Nota. $f \cdot g$ indica il prodotto scalare $f \cdot g = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 5.2
Dimostrare la Proposizione 5.1

Soluzione. Dalla Definizione 3.1 (Limite per Funzione)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_f > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta_f \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } \|f(x) - l_f\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_g > 0 :\ \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta_g \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } \|g(x) - l_g\| < \varepsilon$$

Fissato ε, si può scegliere $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ e quindi è possibile dire che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta : \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \text{ e } x \neq x_0 \text{ vale } \|(f+g)(x) - (l_f + l_g)\| < \varepsilon \tag{5.1}$$

Essendo

$$\begin{aligned} &\|(f+g)(x) - (l_f + l_g)\| \\ &= \big\|\big(f(x) - l_f\big) + \big(g(x) - l_g\big)\big\| \end{aligned}$$

Per proprietà 3 da Definizione 1.8 (Norma)

$$\leq \|f(x) - l_f\| + \|g(x) - l_g\|$$

Quest'ultima forma è sicuramente $< \varepsilon$ per Eq. (5.1), quindi la somma dei limiti corrisponde al limite della somma.
Analogamente si svolge per il prodotto. ■

Esercizio 5.3
Enunciare e dimostrare un analogo della Proposizione 5.1 per il prodotto vettoriale

Proposizione 5.4
Siano:

- (X, d) spazio metrico
- $A \subseteq X$
- x_0 di accumulazione per A
- $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ e $g : A \mapsto \mathbb{R}^m$ funzioni
- $F : A \mapsto \mathbb{R}^{n+m}$ definita da $F(x) = \big(f(x),\ g(x)\big)$

Allora

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{ esiste finito} \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ esiste finito} \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to x_0} F(x) \quad \text{esiste finito} \\ e \\ \lim\limits_{x\to x_0} F(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right) \end{array}\right.$$

Dimostrazione. Omessa □

Esercizio 5.5
Dimostrare la Proposizione 5.4

Capitolo 2

Calcolo Differenziale

In questo capitolo sono trattate funzioni $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dove $r, m \in \mathbb{N}$ e $n, m \geq 1$.
Generalmente, effetuata una dimostrazione per $m = 1$ è abbastanza semplice passare ad un $m > 1$ *affiancando* le componenti, mentre non è altrettanto triviale il passaggio a $n > 1$.

6 Preliminari

In $\mathbb{R}^n$ verranno usate le (note) strutture vettoriale con la metrica Euclidea di Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)

La base canonica di R^n è indicata con $(e_1, \ldots, e_n)$, e_i è il vettore di R^n con tutte le componenti nulle tranne la i-esima che vale 1. È dunque possibile scrivere un generico vettore x si può quindi scrivere come combinazione lineare dei vettori della base canonica $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Nel caso $n = 2$ è usata la notazione $(x, y) = xi+yj$. Nel caso $n = 3$ è usata la notazione $(x, y, z) = xi+yj+zk$

Alcune classi di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hanno nomi particolari:

- $n = 1$,$m = 1$: f è una *funzione reale di una variabile reale*;
- $n = 1$,$m > 1$: f è una *curva* in R^m (purché f sia almeno continua e A su un intervallo)
- $n > 1$,$m = 1$: f è un *campo scalare*
- $n > 1$,$m > 1$: f è un *campo vettoriale* (soprattutto nei casi $n = m = 2$ e $n = m = 3$)

7 Derivate Parziali e Direzionali

Direttamente dalla nozione di Analisi 1 di derivata, cioè

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \qquad \text{(\textbf{NB}. Analisi 1!)}$$

si estende il concetto di derivata alle funzioni in spazi *n-dimensionali* mediante la seguente

Definizione 7.1 (Derivata Parziale e Direzionale)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo. Quando il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

esiste finito, il suo valore è la **Derivata Direzionale** di f in x_0 nella direzione v e si indica con $\boldsymbol{D_v f(x_0)}$

Nota. **Non** è richiesto che la funzione sia **continua nello spazio** per calcolarne la derivata direzionale, è sufficiente sia continua nella direzione considerata. Vedasi Esempio 7.2

Nota. L'introduzione del vettore v permette di eseguire un'operazione "sensata" in quanto sottrare uno scalare, come in Analisi 1, non avrebbe avuto significato per una funzione $f : A \mapsto \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$.

Nel caso in cui $v = e_i$, allora $\boldsymbol{D_{e_i} f(x_0)}$ è la **Derivata Parziale *i-esima***, che può anche essere indicata con $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}$. Quindi le derivate parziali sono *un caso particolare* delle derivate direzionali.

Una funzione derivabile parzialmente in ogni direzione è detta **Derivabile**.

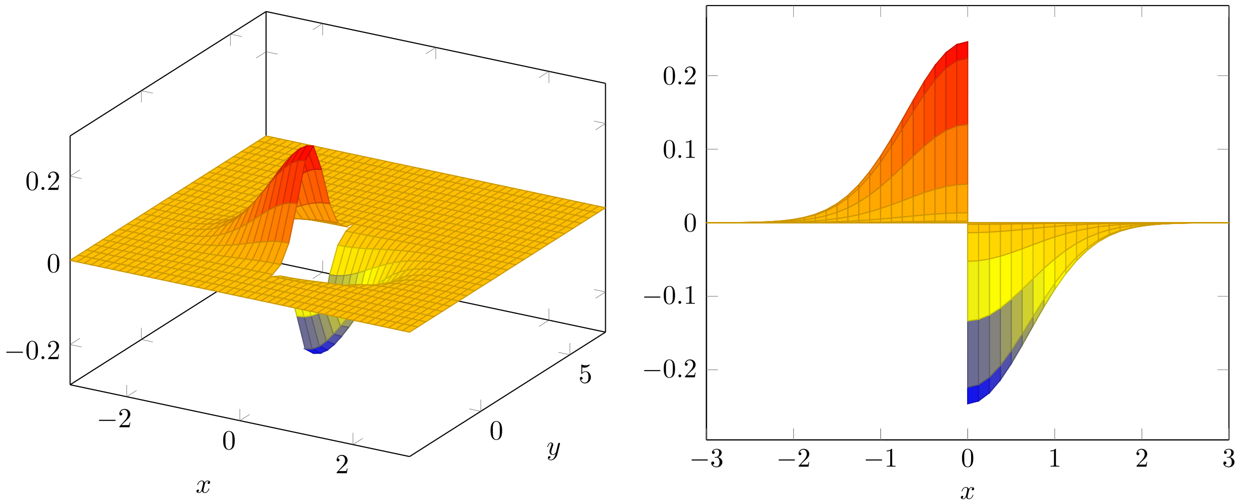
Nota. Altre notazioni comunemente utilizzate per le derivate direzionali sono: $D_i f$, $D_{x_i} f$, $\partial_i f$, $\partial_{x_i} f$, f_{x_i}

Nota. Nel calcolo delle derivate parziali è bene distinguere tra la variabile rispetto a cui si deriva ed il valore in cui la derivata viene calcolata.

Nota. Per una funzione $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la derivata direzionale di f in x_0 lungo una qualunque direzione, se esiste, è un vettore con m componenti.

Nota.
Nel caso $n = 2$ le derivate parziali di f si indicano $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ o, equivalentemente, $\partial_x f$ e $\partial_y f$.
Nel caso $n = 3$ le derivate parziali di f si indicano $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ o, equivalentemente, $\partial_x f$, $\partial_y f$ e $\partial_z f$.
Nel caso $n > 3$, notazioni usate sono $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ o $\partial_{x_i} f$ per $i = 1, \dots, n$.

Esempio 7.2
La funzione del seguente grafico è derivabile in $(0, 0)$ solo lungo y perché non presenta discontinuità. Scegliendo una qualsiasi altra direzione non risulta continua e, dunque, nemmeno derivabile.



Esercizio 7.3
Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^m$ derivabile in x_0, con $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Sia $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^m$ definita da $g(x, y) = f(y, x)$
Come sono legate le derivate parziali di f e g in x_0?

Esercizio 7.4
Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, derivabile in $x_0 \in \mathring{A}$. Determinare le derivate parziali in x_0 delle funzioni

- $F : A \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\big(f(x), f(x)\big)$
- $G : A \times A \mapsto \mathbb{R}$ definita da $G(x, y) = f(x) + f(y)$

Proposizione 7.5
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathring{A}$. f è **derivabile parzialmente** rispetto alla i-esima coordinata se e solo **se esiste** finito il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t} \tag{7.1}$$

Dimostrazione. Da Definizione 7.1 (Derivata Parziale e Direzionale), scegliendo $v = e_i$ della base canonica si ottiene la Eq. (7.1) □

Esercizio 7.6
Formulare in modo rigoroso e dimostrare:

1. La somma di funzioni parzialmente derivabili è parzialmente derivabile.

2. La composizione di funzioni parzialmente derivabili è parzialmente derivabile.

3. Prodotto e rapporto, quando definiti, di funzioni parzialmente derivabili sono funzioni parzialmente derivabili.

Esempio 7.7
Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ \sin(xy^2) \\ e^{xy} \end{bmatrix}$$

La funzione f è derivabile parzialmente su tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{bmatrix} 2 \\ y^2\cos(xy^2) \\ ye^{xy} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2xy\cos(xy^2) \\ xe^{xy} \end{bmatrix}$$

Proposizione 7.8
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$. Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$, allora

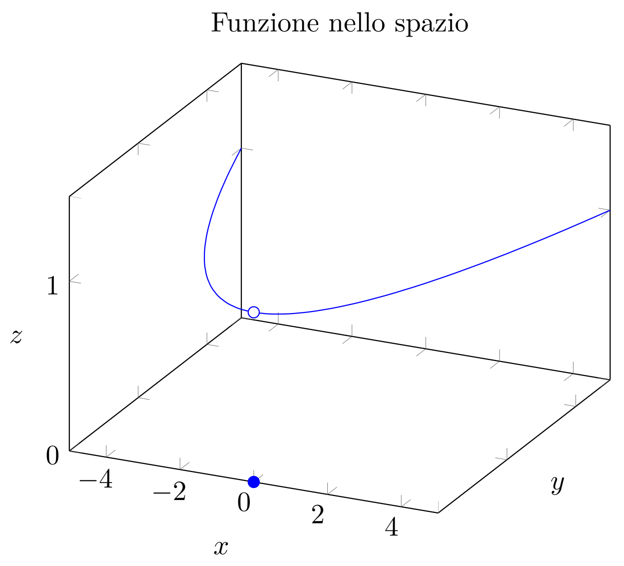
$$f \text{ è } \textbf{Derivabile} \text{ in } x_0 \text{ nella direzione } v$$
$$\iff$$
$$\forall i = 1, \ldots, m \quad \text{la } \textbf{componente } f_i \textbf{ è derivabile} \text{ in } x_0 \text{ nella direzione } v$$

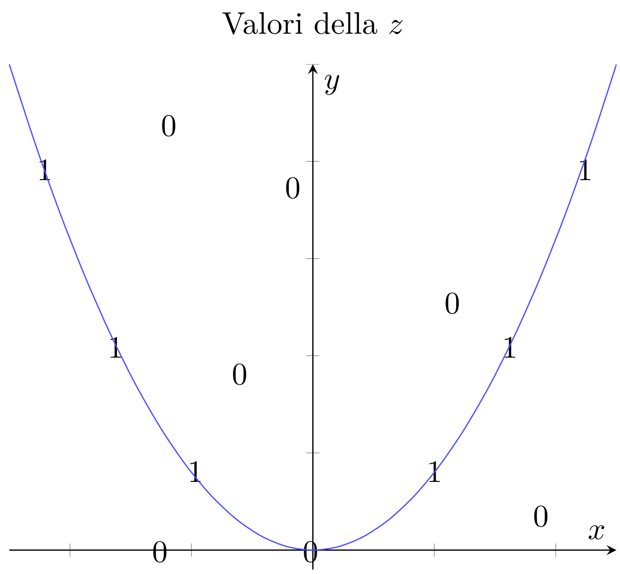
Dimostrazione. Applicando Proposizione 2.6 e Proposizione 3.11 (Continuità e Continuità per Successioni) □

Esercizio 7.9
La derivabilità in ogni direzione non implica la continuità. Verificare che la funzione

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array}$$

ammette nell'origine derivate direzionali in ogni direzione ma che *non* è continua nell'origine.





Soluzione. Le derivate direzionali sono

$$\begin{aligned}\partial_x f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = 0\\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = 0\\ D_v f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t_1,0+t_2)-f(0,0)}{t} = 0\end{aligned}$$

Dunque, per ogni derivata parziale o direzionale in $(0,0)$ il valore della derivata sarà 0.
D'altro canto f in 0 *non* è continua in $(0,0)$, quindi si è verificato che la derivabilità non implichi la continuità con $\dim A > 1$ ■

Esercizio 7.10
Esibire una funzione $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ che ammetta in (almeno) un punto una derivata parziale rispetto ad x ma non rispetto a y

Soluzione. La

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ & & (x,y) & \mapsto & x+\sqrt{y}\end{array}$$

È derivabile parzialmente rispetto a x ma non rispetto a y in $(0,0)$, infatti

$$\begin{aligned}\partial_x f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{t-0}{t} = 1\\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \frac{\sqrt{t}-0}{t} = +\infty \implies \nexists \text{ limite finto}\end{aligned}$$

■

8 Derivata Totale

Definizione 8.1 (o piccolo)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Siano $f, g : A \mapsto \mathbb{R}^m$ due funzioni.

$$f = o(g) \text{ per } x \to x_0 \qquad \rightleftharpoons \lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}$$

che si legge f è **o piccolo** di g.

Nota. Scrivere $f(x) = o(x^k)$ per $x \to 0$ significa che $f = o(g)$ con $g = x^k$

Nota. Con $o(1)$ per $x \to x_0$ si intende una qualunque funzione tendente a 0 per $x \to x_0$.

Esercizio 8.2
Perché son state utilizzate le norme nella Definizione 8.1 (o piccolo)?

Soluzione. Perché l'operazione di divisione è sensata solo tra due scalari, non tra vettori. ■

Esercizio 8.3
Quali tra le seguenti uguaglianze sono vere? (In tutte, $x \to 0$)

- $o(x) = o(x) + o(x)$
- $o(x^2) = o(x) \cdot o(x)$
- $o(x^2) = o(x) - o(x)$
- $\sqrt{x} = o(x)$
- $o(x) = |o(x)|$
- $x = o(\sqrt{x})$
- $o(x) = 10^6 o(x)$
- $x + x^2 = o(x)$
- $x = o(x + x^2)$

La seguente definizione è da ritenersi già nota da Analisi 1

Definizione 8.4 (Derivata in $\mathbb{R}$)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$

$$f \textbf{ Derivabile} \text{ in } x_0 \quad \rightleftharpoons \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ esiste finito}$$

Direttamente dalla nozione di Analisi 1 di derivata, si ottiene la seguente relazione tra derivata e coefficiente angolare della retta tangente in un punto

Proposizione 8.5 (Derivata Analisi 1)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$

$$f \text{ è derivabile in } x_0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists m \in \mathbb{R} : \; f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h) \text{ per } h \to 0$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
& f \text{ è derivabile in } x_0 \\
\Longleftrightarrow\ & \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ esiste finito} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{R} : \; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m \\
\Longleftrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{R} : \; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - m = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{R} : \; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - mh}{h} = 0
\end{aligned}$$

Per la nota alla Definizione 8.1 (o piccolo)

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{R} : \; f(x_0 + h) - f(x_0) - mh = o(h) \text{ per } h \to 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{R} : \; f(x_0 + h) = f(x_0) - mh + o(h) \text{ per } h \to 0
\end{aligned}$$

□

Analogamente a quanto fatto nella Proposizione 8.5 (Derivata Analisi 1), si definisce

Definizione 8.6 (Differenziale)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$

$$f \text{ è } \textbf{Differenziabile} \text{ in } x_0$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\exists M \in \mathrm{Mat}(m \times n) : \; f(x_0 + h) = f(x_0) + Mh + o(h) \text{ per } h \to 0$$

La matrice M è la **Derivata Totale** di f calcolata in x_0 e si indica con $Df(x_0)$. $Df(x_0)$ è l'applicazione *lineare* che meglio approssima la variazione di f nelle vicinanze di x_0.

Osservazione 8.7 (Matrici Derivata Totale Particolari)
Data la matrice $Df(x_0)$ con m righe e n colonne:

- Se $n = 1$ e $m = 1$ $Df(x_0)$ è **Derivata** di Analisi 1, uno scalare
- Se $n > 1$ e $m = 1$ $Df(x_0)$ è **Gradiente** di f e si indica con $\nabla f(x_0)$ (*nabla* f) o $\operatorname{grad} f(x_0)$
- Se $n = 1$ e $m > 1$ $Df(x_0)$ è **Vettore Tangente** alla f
- Se $n > 1$ e $m > 1$ $Df(x_0)$ è **Matrice Jacobiana** di f e si può anche indicare con $J_f(x_0)$

Come si vedrà in Corollario 8.14, il Gradiente della *i-esima* variabile è la *i-esima* colonna di $Df(x_0)$.
Il Vettore Tangente della *j-esima* variabile è invece la *j-esima* riga di $Df(x_0)$.

Esempio 8.8
Esempi relazioni tra Derivata Totale e derivate parziali

$$
\begin{aligned}
&n=2 \quad m=1 \qquad Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}\\
&n=3 \quad m=1 \qquad Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}\\
&n=1 \quad m=2 \qquad Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{bmatrix}\\
&n=2 \quad m=2 \qquad Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}\\
&n>2 \quad m>2 \qquad Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Esercizio 8.9
Perché non è stata data una definizione di derivata attraverso il limite del rapporto incrementale?

Esempio 8.10
Siano $M \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ una matrice fissata, $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ data da $f(x) = Mx$.
Allora f è differenziabile ovunqe e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $Df(x_0) = M$

Proposizione 8.11 (Unicità della Derivata Totale)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$, $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$ e $M_1, M_2 \in \mathrm{Mat}(m \times n)$

$$\left.\begin{matrix} M_1 \text{ derivata totale di } f \text{ in } x_0 \\ M_2 \text{ derivata totale di } f \text{ in } x_0 \end{matrix}\right\} \implies M_1 = M_2$$

Dimostrazione. Sia $h \in \mathbb{R}$. Fissato un vettore e_i della base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$M_2 e_i - M_1 e_1 =$$

Moltiplicando e dividendo per h

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} M_2 e_i h - \frac{1}{h} M_1 e_i h \\
&= \frac{1}{h}[M_2 e_i h - M_1 e_i h]
\end{aligned}
$$

Grazie alla Definizione 8.6 (Differenziale)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}[f(x_0 + he_i) - f(x_0) + o(h)] - \frac{1}{h}[f(x_0 + he_i) - f(x_0) + o(h)] \\
&= o(h) \text{ per } t \to 0
\end{aligned}
$$

Passando al limite per $t \to 0$, si deduce che le applicazioni lineari M_1 e M_2 hanno le stesse immagini sui vettori della base canonica, quindi coincidono. □

Proposizione 8.12
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$

$$f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \implies f \textbf{ Continua} \text{ in } x_0$$

Dimostrazione. Per ipotesi $x_0 \in \mathring{A}$, dunque x_0 è di accumulazione. A questo punto, grazie alla Proposizione 3.9 basta verificare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Dalla Definizione 8.6 (Differenziale)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Mh + o(h) \text{ per } h \to 0$$

Quindi, posto $h = x - x_0$ ed essendo $M = Df(x_0)$ per Definizione 8.6 (Differenziale)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right] = f(x_0)$$

□

Proposizione 8.13
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$

$$f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \implies \begin{cases} f \text{ ammette ogni } \textbf{Derivata Direzionale} \text{ in } x_0 \\ \qquad e \\ \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ D_v f(x_0) = Df(x_0)v \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ non nullo. Partendo dalla Definizione 7.1 (Derivata Parziale e Direzionale)

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Sostituendo ora $f(x_0 + tv)$ con il secondo membro della Definizione 8.6 (Differenziale), dopo aver posto $h = tv$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + Df(x_0)(tv) + o(tv) - \cancel{f(x_0)}}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{Df(x_0)(tv)}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{o(tv)}{t} \\ &= Df(x_0)v \end{aligned}$$

□

Corollario 8.14
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$

$$f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } x_0 \implies \begin{cases} f \text{ ammette ogni } \textbf{Derivata Parziale} \text{ in } x_0 \\ \qquad e \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = Df(x_0) \cdot e_i \end{cases}$$

Dove $Df(x_0) \cdot e_i$ non è altro che

$$Df(x_0) \cdot e_i = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (0 & \dots & 1 & \dots & 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & x_{1i} & 0 \\ 0 & \dots & x_{2i} & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & x_{ni} & 0 \end{bmatrix}$$

Cioè l'*i-esima* colonna della $Df(x_0)$, come da Osservazione 8.7 (Matrici Derivata Totale Particolari)

> ***Nota.*** Per quanto detto, il presente corollario offre il principale metodo di calcolo della **Derivata Totale**
> Inoltre è anche una dimostrazione alternativa della Proposizione 8.11 (Unicità della Derivata Totale)

Dimostrazione. Direttamente dalla Proposizione 8.13 e dalla Definizione 7.1 (Derivata Parziale e Direzionale) (sezione sulle derivate parziali) □

Osservazione 8.15
Sia Proposizione 8.13 che Corollario 8.14 non possono essere invertiti, come verificato in Esercizio 7.9.

Corollario 8.16
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$

$$f \textbf{ Differenziabile in } x_0 \implies f \textbf{ Derivabile in } x_0$$

Dimostrazione. Mediante il Corollario 8.14 si vede immediatamente che rispetta la Definizione 7.1 (Derivata Parziale e Direzionale) □

Corollario 8.17
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$. Sia f derivabile parzialmente in x_0 e sia M la $Df(x_0)$, matrice dei coefficienti $M_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

$$f \textbf{ Differenziabile in } x_0$$
$$\iff$$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Mh = o(h) \text{ per } h \to 0$$

Dimostrazione. Direttamente dalla Definizione 8.6 (Differenziale), per mezzo del Corollario 8.14. □

Esercizio 8.18
Verificare che, nel caso $n = 2$ ed $m = 1$ il Corollario 8.17 si scrive

$$f \textbf{ Differenziabile in } x_0$$
$$\iff$$
$$f(x_0 + h, y_o + k) - f(x_0, y_0) - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = o(\sqrt{h^2 + k^2}) \text{ per } h, k \to 0$$

Esercizio 8.19
Scrivere il Corollario 8.17 nel caso $n = 3$ ed $m = 1$

Teorema 8.20 (del Differenziale Totale)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$.

$$\left.\begin{array}{c} \text{Per } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ è } \textbf{definita} \text{ in un } \textbf{intorno} \text{ di } x_0 \text{ e } \textbf{Continua} \text{ in } x_0 \end{array}\right\} \implies f \text{ è } \textbf{Differenziabile} \text{ in } x_0$$

Nota. È specificata la necessità di continuità in un intorno di x_0 in quanto, come detto in Definizione 7.1 (Derivata Parziale e Direzionale), l'esistenza di derivate parziali non garantisce la continuità.

Dimostrazione. Si può supporre $n = 2$ e $m = 1$ in quanto il caso più generale è del tutto analogo.
È necessario verificare la Definizione 8.6 (Differenziale), dunque in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ si ha

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o(h, k) \text{ per } h, k \to 0 \tag{8.1}$$

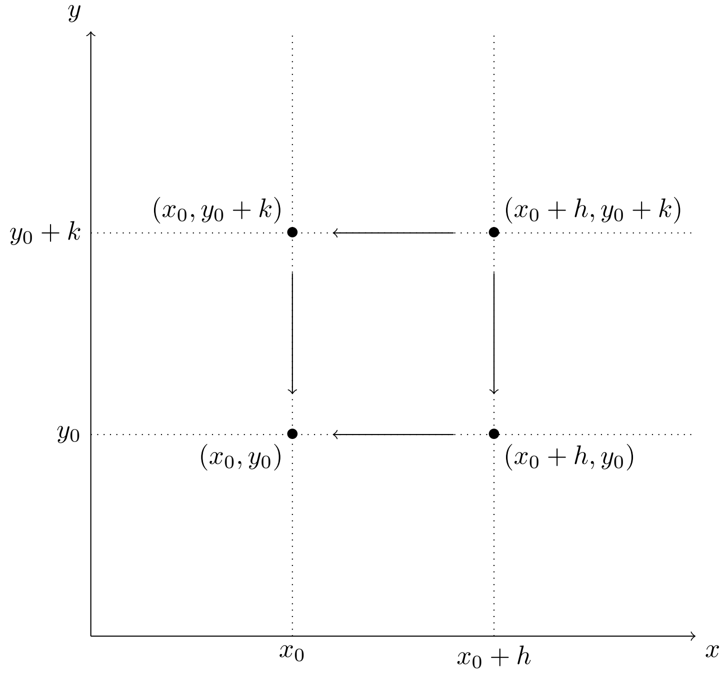
Considerando solo i primi due addendi, aggiungendo e sottraendo la stessa quantità, si ottiene

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}_{(1)} + \underbrace{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}_{(2)} \tag{8.2}$$

Considerando la (1) e la (2) di Eq. (8.2) come funzioni in una sola variabile, si può applicare il Teorema di Lagrange di Analisi 1

- La (1) rispetto a y, con $x_0 + h$ fissato
- La (2) rispetto a x, con y_0 fissato

Spostandosi lungo le direzioni parallele agli assi è possibile andare da $(x_0 + h, y_0 + k)$ a (x_0, y_0)



Quindi, applicando il teorema di Lagrange (vedere Nota al termine della dimostrazione):

$$\exists \alpha, \beta \in]0,1[\textbf{ per cui } \quad \begin{array}{lrcl} (1) & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) & = & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k)k \\ (2) & f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) & = & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0)h \end{array}$$

Tornando alla Eq. (8.1), si ottiene

$$\begin{aligned} & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}_{(1)} + \underbrace{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}_{(2)} - Df(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k)k}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0)h}_{(2)} - Df(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si esegue il prodotto tra matrice Derivata Totale e vettore, infine si separano i termini

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0)\right)k + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)h$$

Si passa dunque alla norma

$$\left\| f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right\|$$

Separando come fatto prima ed applicando la disguguaglianza triangolare

$$\leq \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0)\right)k \right\| + \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)h \right\|$$

Per proprietà 4 da Definizione 1.8 (Norma)

$$= \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) \right\| |k| + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right\| |h|$$

Presa ora la norma del vettore (h,k), cioè $\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}$, sicuramente $|h| \leq \|(h,k)\|$ e $|k| \leq \|(h,k)\|$, dunque

$$\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\beta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) \right\| \sqrt{h^2+k^2} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right\| \sqrt{h^2+k^2}$$

Essendo $h, k \to 0$ da Eq. (8.1) e graze alla continuità delle derivate, le due norme tendono a 0. Inoltre, per Definizione 8.1 (o piccolo)

$$= o(1)\sqrt{h^2+k^2} \text{ per } \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \to 0$$
$$= o(\sqrt{h^2+k^2}) \text{ per } \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \to 0$$

Da cui la tesi, avendo verificato la Definizione 8.6 (Differenziale).

Nota. Il **Teorema di Lagrange** (o del **Valor Medio Differenziale**)

$$c \in \,]a,b[\, : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Alternativamente, nella forma

$$\xi \in \,]0,1[\, : f'(x_0+\xi h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

□

Esercizio 8.21
Data la funzione

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Verificare che f è differenziabile su $\mathbb{R}$ ma non ha derivata continua su $\mathbb{R}$.

Definizione 8.22 (Funzioni di Classe $\mathbf{C^1}$)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**.

$\mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m)$ è l'insieme delle funzioni $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$
con **tutte** le **Derivate Parziali prime** in ogni punto di A

Si può anche leggere f *è di classe* $\mathbf{C^1}$ *su* A *con valori in* $\mathbb{R}^m$.

Corollario 8.23
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**. Se $f \in \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m)$ allora f è **Differenziabile** su A.

Dimostrazione. Applicare la Teorema 8.20 (del Differenziale Totale) □

Proposizione 8.24
Siano $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **Aperto**

$$f \in \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m) \iff \forall i = 1, \ldots, m \quad f_i \in \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R})$$

Dimostrazione. Immediata. □

Esercizio 8.25
Dimostrare la Proposizione 8.24.

Esercizio 8.26
Dimostrare che $\mathbf{C^1}(A;\mathbb{R})$ non coincide con l'insieme delle funzioni differenziabili su A con valori in $\mathbb{R}$.

Proposizione 8.27
Siano $I \in \mathbb{R}$ un intervallo reale e $f(x)$ una funzione **Derivabile** in I. Se la $f'(x)$ è una **Funzione Limitata** in I, allora f è **Uniformemente Continua** in I

Dimostrazione. Omessa. □

8.1 Regole di Derivazione

Proposizione 8.28
Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$
f differenziabile in x_0, g differenziabile in x_0 allora $f+g$ differenziabile in x_0 e $D(f+g)(x_0) = Df(x_0)+Dg(x_0)$

Dimostrazione. f è differenziabile, allora $f(x_0+h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
anche g lo è, quindi $g(x_0+h) = g(x_0) + Dg(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
sommando membro a membro si ottiene $(f+g)(x_0+h) = (f+g)(x_0) + [Df(x_0) + Dg(x_0)]h + o(h)$ per $h \to 0$
Questa è la definizione di differenziabilità, allora $f+g$ è differenziabile e $D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$ ☐

Proposizione 8.29
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
f differenziabile in x_0 allora λf differenziabile in x_0 e $D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0)$

Dimostrazione. f è differenziabile, allora $f(x_0+h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
valuto ora $(\lambda f)(x_0+h) = (\lambda f)(x_0) + \lambda Df(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
Questa è la definizione di differenziabilità, allora λf è differenziabile e $D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0)$ ☐

Proposizione 8.30
Sia $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$
Sia $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ e $g(x_0) \in \mathring{B}$
f differenziabile in $g(x_0)$, g differenziabile in x_0 allora $f \circ g$ differenziabile in x_0 e $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) * Dg(x_0)$

Dimostrazione. g è differenziabile in x_0, allora $g(x_0+h) = f(x_0) + Dg(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
f è differenziabile in $g(x_0)$ allora $g(g(x_0)+k) = f(g(x_0)) + Df(g(x_0))k + o(k)$ per $k \to 0$
valuto ora

$$(f \circ g)(x_0+h) = f(g(x_0+h) + Dg(x_0)h + o(h)) =$$

$$= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))(Dg(x_0)h + o(h)) + o(Dg(x_0)h + o(h)) =$$

$$= (f \circ g)(x_0) + Df(g(x_0))Dg(x_0)h + Df(g(x_0))o(h) + Dg(x_0)o(h) + o(h)$$

con h un vettore $n \times 1$
con Dg una matrice $m \times n$
con Df una matrice $p \times m$

da rivedere un pochino ....
Questa è la definizione di differenziabilità, allora $f \circ g$ è differenziabile e $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0)$ ☐

Proposizione 8.31
DERIVATA DEL PRODOTTO

8.2 La Formula degli Accrescimenti Finiti

Definizione 8.32 (Segmento)
Siano $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, si dice **Segmento** di estremi x_0 e x_1 l'insieme che li unisce, cioè

$$S = \{tx_1 + (1-t)x_0 \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\}$$

Osservazione 8.33
La Definizione 8.32 (Segmento) può essere formulata in ogni spazio affine o vettoriale

Esercizio 8.34
Dimostrare che ogni **Segmento** in $\mathbb{R}^n$ è **Compatto** e **Connesso**.

Soluzione. Posta

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \mapsto & tx_1 + (1-t)x_0 \end{array}$$

- $[0,1] \subset \mathbb{R}^n$, essendo sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, grazie alla Proposizione 2.35, è compatto. Inoltre, grazie al Teorema 3.15 (Teorema generale di Weierstrass), $\varphi([0,1])$ è sicuramente compatto a sua volta, dunque il segmento S è compatto.

- Dalla Proposizione 3.17, essendo φ continua, il segmento S è sicuramente Connesso.

■

Esercizio 8.35
Ispirandosi alla Definizione 8.32 (Segmento) è possibile dare una possibile definizione di Semiretta uscente da x_0 e passante per x_1?

Soluzione.

$$s = \{x_0 + (x_1 - x_0)t \in \mathbb{R}^n : t \in [0, +\infty[\ \}$$

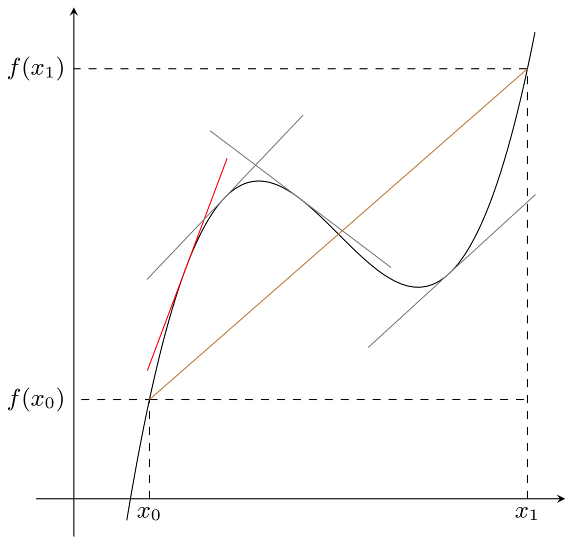
■

Teorema 8.36 (degli Accrescimenti Finiti)
Sia $f \in \mathbf{C^1}(A; \mathbb{R}^m)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Siano $x_0, x_1 \in \mathring{A}$ tali che il **Segmento** S di estremi x_0 e x_1 sia **interamente contenuto** in $\mathring{A}$. Allora

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{\xi \in S} \|Df(\xi)\| \cdot \|x_1 - x_0\| \tag{8.3}$$

Nota. Con $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^1$ e $A \subseteq \mathbb{R}^1$ è come dire

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq M \cdot |x_1 - x_0| \quad \text{con} \quad M = \sup \left\{ \begin{array}{c} \textit{coefficiente angolare di tutte le} \\ \textit{rette tangenti alla curva} \end{array} \right\}$$



Dimostrazione. Si può dare per scontato che $x_1 \neq x_0$, in quanto, se $x_1 = x_0$, allora $f(x_1) = f(x_0)$ e la Eq. (8.3) diventerebbe $0 \leq 0$. La tesi sarebbe quindi verificata direttamente.
Fissato un qualsiasi $v \in \mathbb{R}^m$, si definisce così la funzione F legata ad f tramite la Definizione 8.32 (Segmento):

$$\begin{array}{rcccc} F & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & v \cdot f\big(tx_1 + (1-t)x_0\big) \end{array} \tag{8.4}$$

Nota. Nella Eq. (8.4), $\cdot$ è Prodotto Scalare tra due vettori di dimensione $\mathbb{R}^m$, dunque il risultato è correttamente uno scalare.

F è continua e derivabile sull'intervallo di definizione $[0,1]$. È dunque possibile utilizzare il Teorema di Lagrange da Analisi 1, che garantisce:

$$\exists c \in \,]0,1[\,: \quad F(1) - F(0) = F'(c)\,(1-0)$$

Tornando dunque a f dalla definizione di F

$$v \cdot f(x_1) - v \cdot f(x_0) = v \cdot Df\big(cx_1 + (1-c)x_0\big)(x_1 - x_0)$$

Ricordando che la F è a valori in $\mathbb{R}$, si può calcolare il valore assoluto mantenendo l'uguaglianza

$$|v \cdot f(x_1) - v \cdot f(x_0)| = \big|v \cdot Df\big(cx_1 + (1-c)x_0\big)(x_1 - x_0)\big|$$

Essendo il secondo membro il valore assoluto di un prodotto scalare, si può applicare ad esso la **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz** ed ottenere

$$\big|v \cdot \big(f(x_1) - f(x_0)\big)\big| \leq \|v\| \cdot \big\|Df\big(cx_1 + (1-c)x_0\big)(x_1 - x_0)\big\|$$

Dunque, seaparando ulteriormente le norme si arriva alla:

$$\big|v \cdot \big(f(x_1) - f(x_0)\big)\big| \leq \|v\| \cdot \big\|Df\big(cx_1 + (1-c)x_0\big)\big\| \cdot \|x_1 - x_0\| \tag{8.5}$$

Essendo, come detto all'inzio, $f(x_1) \neq f(x_0)$ è ora possibile scegliere un v "comodo", come:

$$v = \frac{1}{\|f(x_1) - f(x_0)\|} \cdot \big(f(x_1) - f(x_0)\big)$$

Nota. La norma di v, grazie poi alla proprietà 4 da Definizione 1.8 (Norma), è

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \left\| \underbrace{\frac{1}{\|f(x_1) - f(x_0)\|}}_{\text{Scalare}} \cdot \underbrace{\big(f(x_1) - f(x_0)\big)}_{\text{Vettore}} \right\| \\
&= \left| \frac{1}{\|f(x_1) - f(x_0)\|} \right| \cdot \big\|\big(f(x_1) - f(x_0)\big)\big\| \\
&= \frac{1}{\|f(x_1) - f(x_0)\|} \cdot \big\|\big(f(x_1) - f(x_0)\big)\big\| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Sostituendo dunque in Eq. (8.5) si ottiene

$$\left\| \frac{1}{\|f(x_1) - f(x_0)\|} \cdot \big(f(x_1) - f(x_0)\big) \cdot \big(f(x_1) - f(x_0)\big) \right\| \leq \cdot \big\|Df\big(cx_1 + (1-c)x_0\big)\big\| \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Dal punto 3 di Esempio 1.10 (Esempi di Spazi Normati), si ottiene

$$\left\| \frac{1}{\|f(x_1) - f(x_0)\|} \cdot \|f(x_1) - f(x_0)\|^2 \right\| \leq \big\|Df\big(cx_1 + (1-c)x_0\big)\big\| \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Da cui

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \big\|Df\big(cx_1 + (1-c)x_0\big)\big\| \cdot \|x_1 - x_0\|$$

e passando al sup su $t \in \,]0,1[$ si ottiene la tesi. □

Il seguente esercizio mostra come il Teorema di Lagrange di Analisi 1 non possa essere esteso al caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$.

Esercizio 8.37
Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ data da $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Mostrare che non esiste nessun numero reale c tale che

$$f(2\pi) - f(0) = Df(c) \cdot 2\pi$$

Definizione 8.38 (Insieme Convesso)
Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$

$$C \text{ è } \textbf{Convesso}$$
$$\rightleftharpoons$$
$$\forall x_0, y_1 \in C \quad \{tx_1 + (1-t)x_0 : \ t \in [0,1]\} \subseteq C$$

Cioè un insieme è Convesso se, dati qualsiasi due suoi punti, contiene anche il segmento che li congiunge.

Esercizio 8.39
Dimostrare la Proposizione 3.37

Esercizio 8.40
In $\mathbb{R}^n$ dimostrare che ogni segmento è convesso, così come anche ogni sfera.
Esibire un esempio di insieme non convesso.

Corollario 8.41
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \mapsto \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A \textbf{ Aperto Convesso} \\ f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } A \\ \forall x \in A \quad \nabla f(x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ è } \textbf{Costante} \text{ su } A$$

Nota. Come da Osservazione 8.7 (Matrici Derivata Totale Particolari), $\nabla f(x) = Df(x) \in \mathrm{Mat}(1 \times n)$, cioè un vettore riga.

Dimostrazione. Se $\nabla f(x) = Df(x) = 0$, la Eq. (8.3) da Teorema 8.36 (degli Accrescimenti Finiti) diventa

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{\xi \in S} 0 \cdot \|x_1 - x_0\|$$
$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq 0$$
$$f(x_1) = f(x_0)$$

□

Esercizio 8.42
Dimostrare che un insieme **Convesso** è anche **Connesso**.
Esibire un controesempio al viceversa.

Soluzione. Supponendo, per assurdo, $C \in \mathbb{R}^n$ sconnesso. In questo caso, per Definizione 2.25 (Insiemi Connessi e Sconnessi), esistono due insiemi separati S_1 e S_2 che costituiscono C, inoltre $S_1 \cup S_2 = C$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Questo implica che

$$\exists t \in [0,1] : \ \forall x_1 \in S_1 \text{ e } \forall x_2 \in S_2 \quad tx_1 + (1-t)x_2 \notin S_1 \text{ e contemporaneamente } \notin S_2$$

Questo implica la non convessità di C - *Assurdo.*

Preso il cerchio di raggio unitario $S = (x, y) : x^2 + y^2 = 1$, questo verifica la Definizione 2.25 (Insiemi Connessi e Sconnessi) ma sicuramente non la Definizione 8.38 (Insieme Convesso). ■

Esercizio 8.43
Esibire esempi di insiemi convessi/non convessi e aperti/chiusi, limitati/illimitati.

Definizione 8.44 (Funzione Convessa)
Sia I un intervallo reale e $f : \ I \mapsto \mathbb{R}$.

$$f \text{ è } \textbf{Convessa} \quad \rightleftharpoons \quad \begin{cases} \forall x_0, x_1 \in I, \ \forall t \in [0,1] \\ f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \end{cases}$$

Cioè se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del suo grafico si trova al di sopra del grafico stesso.

Esercizio 8.45
Verificare che f è **Convessa** se e solo se il suo **Epigrafo** (cioè l'insieme di punti che stanno al di sopra o sul grafico della funzione) è un sottoinsieme **Convesso** di $\mathbb{R}^2$ nel senso della Definizione 8.38 (Insieme Convesso).

Proposizione 8.46
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f: A \mapsto \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A \textbf{ Aperto Connesso} \\ f \textbf{ Differenziabile} \text{ in } A \\ \forall x \in A \quad \nabla f(x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ è } \textbf{Costante} \text{ su } A$$

Nota. Si sta parlando di insiemi Con**nes**si

Dimostrazione. Sia $x_0 \in A$. Per la Proposizione 2.31 (Poligonale Congiungente due Punti), ogni punto $x \in A$ può essere unito a x_0 con una poligonale interamente contenuta in A dai lati paralleli agli assi. A questo punto è possibile applicare il Teorema 8.36 (degli Accrescimenti Finiti) ad ogni segmento della poligonale ed, essendo $\nabla f(x) = 0$, come in Corollario 8.41, la f è costante. □

9 Derivate Seconde

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sappiamo che $Df(x_0) \in Mat(m \times n)$, allora $Df : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$ cioè la derivata è una funzione a valori in $Mat(m \times n)$, ne segue che $D(D(F)) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n\times n}$

Definizione 9.1
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derivabile parzialmente in x_0 lungo e_i. Se la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è derivabile parzialmente lungo e_j in x_0, la quantità $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ è la derivata seconda di f in x_0 rispetto x_i, x_j e si indica $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

Definizione 9.2
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$
f differenziabile due volte in $xo \rightleftharpoons f$ è differenziabile in un intorno di x_0 e f è differenziabile in x_0

Osservazione 9.3
con la notazione della definizione precedente, f è una funzione definita in un intorno di x_0 con valori in $Mat(m\times n)$, spazio identificabile con $R^{m\times n}$

Osservazione 9.4
per una funzione scalare $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la derivata prima è un vettore (il gradiente ∇ in $R^{1\times n}$), la derivata seconda è una matrice in $R^{1\times n\times n}$, la derivata terza è una super matrice ...

Definizione 9.5
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$, f ammette tutte le derivate parziali seconde in x_0. La matrice di queste derivate seconde si chiama Matrice Hessiana di f in x_0

$$H_f(x_0) = D^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

ESEMPI:
...
...
...

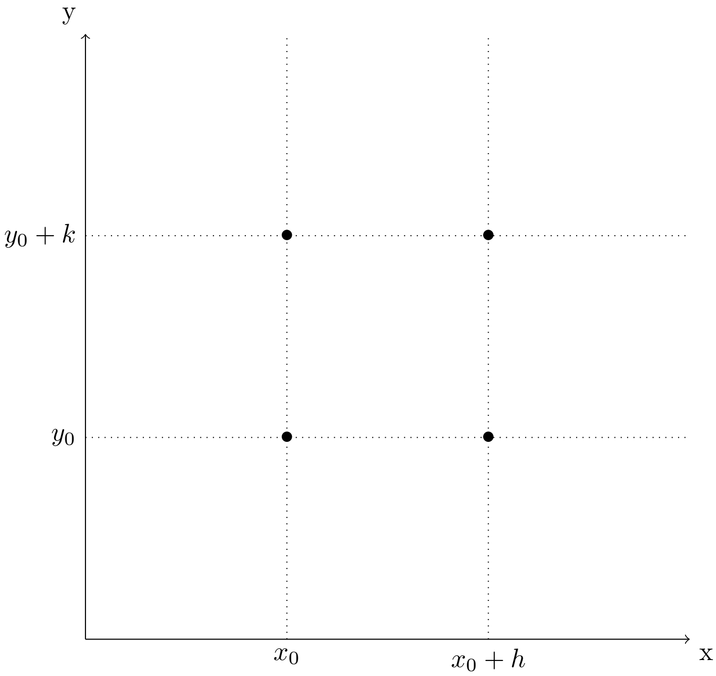
9.1 Il Lemma di Schwarz

Proposizione 9.6
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Fino ...
$\exists \partial^2_{ij} f(x)$ e $\exists \partial^2_{ji} f(x)$ in un intorno di x_0 e continue in $x_0 \Rightarrow$ ....

CASO n=2 m=1

Proposizione 9.7
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ e $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$. .....
$\exists \partial^2_{xy} f(x,y)$ e $\exists \partial^2_{yx} f(x,y)$ in un intorno di (x_0, Y_0) e continue in $(x_0, y_0) \Rightarrow$ ....

Dimostrazione. prendo una quantità $q = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$



L'idea è quella di calcolare q in due modi diversi e osservare che le due scritture rappresentano la stessa quntità quindi sono uguali.

$$q = [f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)] - [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)]$$

scelgo una funzione $\varphi(h) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$

$$q = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\alpha' h)h$$

valida per $\alpha' \in]0,1[$ e $\varphi'(h) = \partial_x f(x_0+h, y_0+k) - \partial_x f(x_0+h, y_0)$

$$q = [\partial_x f(x_0+\alpha' h, y_0+k) - \partial_x f(x_0 \alpha' h +, y_0)]h$$

scelgo una funzione $\Phi(k) = \partial x f(x_0+h, y_0+k)$

$$q = [\Phi(k) - \Phi(0)]h = \Phi'(\beta' k)hk$$

valida per $\beta' \in]0,1[$ e $\Phi'(k) = \partial_y \partial_x f(x_0+\alpha' h, y_0+k)$

$$q = \partial^2_{xy} f(x_0+\alpha' h, y_0+\beta' k)hk$$

Ma q può anche essere calcolata in un secondo modo

$$q = [f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)] - [f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

scelgo una funzione $\psi(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)$

$$q = \psi(k) - \varphi(0) = \psi'(\alpha'' k)k$$

valida per $\alpha'' \in]0,1[$ e $\psi'(k) = \partial_y f(x_0 + h, y_0 + k) - \partial_y f(x_0, y_0 + k)$

$$q = [\partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha'' k) - \partial_y f(x_0, y_0 + \alpha'' k)]k$$

scelgo una funzione $\Psi(h) = \partial y f(x_0 + h, y_0 + \alpha'' k)$

$$q = [\Psi(h) - \Phi(0)]k = \Psi'(\beta'' k)hk$$

valida per $\beta'' \in]0,1[$ e $\Psi'(h) = \partial_x \partial_y f(x_0 + h, y_0 + \beta'' k)$

$$q = \partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha'' h, y_0 + \beta'' k)hk$$

Abbiamo quindi trovato che

$$\partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha' h, y_0 + \beta' k)hk = \partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha'' h, y_0 + \beta'' k)hk$$

Ci sarebbe un disegno ...
...
Abbiamo trovato che le derivate parziali seconde miste coincidono in due punti ad esempio quelli segnati con il cerchio, poiché $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ li abbiamo scelti in $]0,1[$
poiché h, k li abbiamo scelti del tutto arbitrari allora facciamo il limite e poiché le due quantità sono uguali allora sono uguali anche i limiti.
allora per $(h,k) \to (0,0)$ anche $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ cambiano ma essendo limitati tra $]0,1[$ moltiplicandoli oer una quantità che tende a zero fa tutto zero.
Usando la continuità, per $(h,k) \to (0,0)$ ottengo $\partial^2_{xy} f(x_0, y_0) = \partial^2_{yx} f(x_0, y_0)$ □

Osservazione 9.8
$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$Df(x_0) = \nabla f(x_0) \in Mat(1 \times n)$
$H_f(x_0) \in Mat(n \times n)$
Il lemma di Schwarz dice che sotto opportune ipotesi la $H_f(x_0)$ è una matrice simmetrica, in questo caso non dobbiamo calcolare $n \times n$ termini, ma solo $\frac{n(n+1)}{2}$

9.2 Sviluppo in Serie di Taylor al II Ordine

9.3 Derivate di Ordine Superiore

10 Il Teorema della funzione Implicita

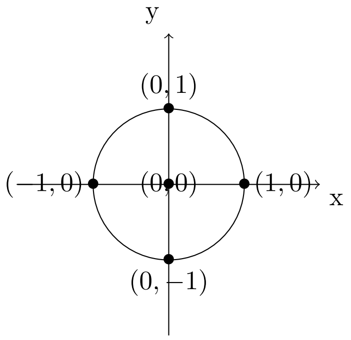
Definizione 10.1
sia $X \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in \mathbb{R}^m$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}^l$, $x_0 \in \mathring{X}$, $y_0 \in \mathring{Y}$.
L'equazone $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di $(x_0, y_0) \rightleftharpoons$

1. $f(x_0, y_0) = 0$, rappresenta un punto di partenza
2. $\exists \mathcal{X}$ intorno di x_0 e $\exists \mathcal{Y}$ intorno di y_0, in questo modo due intorno uno per punto, uno è l'insieme di partenza, l'altro l'insieme di arrivo
3. $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.: $f(x,y) = 0$ con $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y} \iff y = \varphi(x)$

ESEMPIO:
$m = n = l = 1$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, questa equazione non definisce mai una funzione implicita poiché non è mai nulla

ESEMPIO:

$m = n = l = 1,\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$



Per prima cosa osservo che s possono trovare dei punti che rendono vera $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ e sono tutti i punti della circonferenza di centro l'origine degli assi e raggio unitario.
il punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ con $\mathcal{X} = [-1, 1]$ e $\mathcal{Y} = [0, 1]$
un primo problema è dovuto alla scelta degli intervalli $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, per esempio posso scegliere $\mathcal{X} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $\mathcal{Y} = R^+$
un secondo problema è la scelta del punto (x_0, y_0), potrei scegliere il punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Osservazione 10.2
La stessa definizione può essere riscritta con la x funzione della y poiché a priori non c'è distinzione tra le variabili.

Proposizione 10.3
(caso lineare)
sia $f : R^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ che $(x, y) \to Ax + By - C$ con $A \in Mat(p \times n), B \in (p \times m), B \in (p \times 1)$. Se $p = m$ cioè B è un matrice quadrata, e $det(B) \neq 0$ cioè invertibile, allora
$\exists! \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.c.: $f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$

Dimostrazione. $f(x, y) = 0 \iff Ax + By = -C \iff By = -Ax + C \iff y = -B^{-1}Ax + B^{-1}C = \varphi(x)$ □

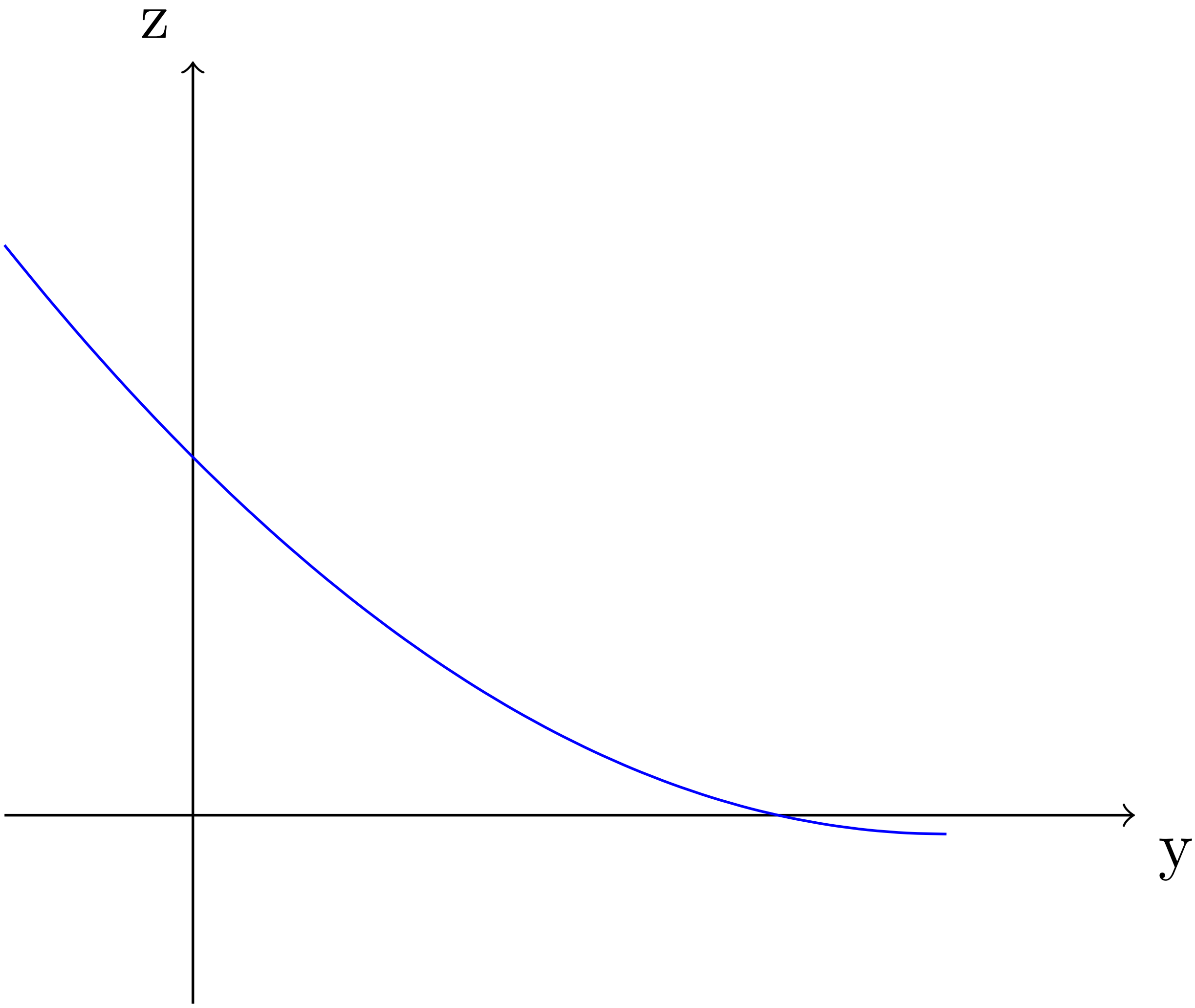
Teorema 10.4 (Teorema della Funzione Implicita)
Sia $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$
Preso un punto (x_0, y_0) con $x_0 \in \mathring{X}, y_0 \in \mathring{Y}$
se:

1. f continua in $X \times Y$
2. $f(x_0, y_0) = 0$
3. f differenziabile rispetto a $y \forall (x, y) \in X \times Y$ e $D_y f(x, y)$ continua.
4. $D_y f(x_0, y_0)$ invertibile .

$\Rightarrow$ si ha:
esistenza della funzione implicita
$\exists \mathcal{X} \subseteq X$ intorno di x_0(xstrano aperto)
$\exists \mathcal{Y} \subseteq Y$ intorno di y_0(ystrano aperto)
$\exists \varphi$ continua con $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c. $[\varphi(x_0) = y_0 e] f(x, y) = 0, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \iff y = \varphi(x)$ unicità di sostanza cioè a meno del dominio:
se $\varphi_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{Y}_i$ e $x_0 \in \mathcal{X}_i, y_0 \in \mathcal{Y}_i$
$f(x_0, y_0) = 0 \forall x \in \mathcal{X}_i, y \in \mathcal{Y} \iff y = \varphi_i(x)$ con $i = 1, 2$
Allora $\forall \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ vale $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

Osservazione 10.5
Le ipotesi 3 e 4 garantiscono che esiste una approssimazione lineare, l'ipotesi 4 è sensata poiché y e f hanno lo stesso numero di componenti quindi Dyf è un matrice qudrata.
la funzione $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ che $(x, y) \to f(x, y)$??????
cioè $\forall x \in X$ (sto fissando una x) $f^x : Y \to \mathbb{R}^m$ che $y \to f(x, y)$(sto variando la y), $Df^x \in Mat(m \times m)$

Osservazione 10.6
Metodo degli zeri di Newton per troare gli zeri di una funzione o metofo delle tangenti.



Scelgo un punto y_0 ne prendo il valore sulla curva, disegno la tangente e chiamo y_1 l'intersezione con l'asse y.
Itero il processo $y_n + 1 = y_n \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$
discorso al momento difficile per me....

Dimostrazione. Dobbiamo partire da $f(x, y) = 0$ arrivare a $y = \varphi(x)$,vogliamo applicare un raginamento simile a quello della Metodo di Newton, passando però per il concetto di punto fisso, il teorema delle Contrazioni ci assicura che esiste unico.
cerchiamo quindi una contrazione T il cui punto fisso sia soluzione di $f(x, y) = 0$. T è del tipo:
$T :? \times ? \to ?$
$(x, y) \to y - [D_y f(X_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$, nota che non avere nella derivata lo stesso punto in cui si calcola la funzione (come è nel metodo di Newton) ha effetti "tragici" sulla velocità di convergenza, ma a noi interessa l'esistenza.
bisgna capire quali insiemi usare come insiemi di partenza e arrivo, devo essere scelti in modo da poter applicare il teoremma delle contrazioni. Bisogna scegliere sottoinsiemi di R^n e R^m, scegliamo quindi delle sfere
$T : \overline{B(x_0, r_x)} \times \overline{B(y_0, r_y)} \to \overline{B(y_0, r_y)}$, scegliendo la chiusura delle sfere si è sicuri di lavorare in uno spazio metrico completo, poiché in R^l completo $\iff$ chiuso e limitato.
come vengono invece scelti i raggi? sono scelti in modo che:

1. T è ben definita

2. $\forall x \in \overline{B(x_0, r_x)} Tx : \overline{B(x_0, r_x)} \to \overline{B(y_0, r_y)}$ che $y \to T(x, y)$,

cioè T è una contrazione tale che $\forall x$ esiste un punto fisso, $\forall x$ associo a y una x, e quindi na funzione.
r_x, r_y devono essere sufficientemene piccoli per avere tali proprietà e per poterci lavorare sopra.
Abbiamo che $f(x, y) = 0 \iff T(x, y) = y$
$T(x, y) = y \iff y = y - [D_y F(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$
$[D_y F(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y) \iff f(x, y) = 0$
Per verificare che T è una contrazione ne stimo la norma
$\|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| \leq \sup_{\widetilde{y} \in segmento} \|D_y T(x, \widetilde{y})\| \|y_2 - y_1\|$ accrescimenti finiti.
Poichè le sfere sono insiemi convessi è stato possibile applicare il Teorema degli accresscimenti finiti.
Presa $T(x, y) = y - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$, la derivo rispetto a y:

$$D_y T(x, y) = I_{\mathbb{R}}^m - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} D_y f(x, y) =$$

$$= [D_y f(x_0, y_0)]^{-1}][D_y f(x_0, y_0) - D_y f(x, y)]$$

Osserviamo che abbiamo ottenuto una matrice come costante moltiplicativa, al secondo membro abbiamo la differenza di due valori di una funzione, che per ipotesi è una funzione continua ($D_y f(x, y)$ continua), allora per r_x e r_y sufficientemente piccoli ho che:
$\|D_y T(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$, è scelto questo valore poiché è comodo al fine di dimostrare la contrazione...

$$\|D_y T(x, y)\| \leq \left\|D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|D_y f(x_0, y_0) - D_y f(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$$

$$\|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| \leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\|$$

Se dimostriamo che T è ben definita abbiamo dimostrato che T è una contrazione.
Per verificare che T è en definita bisogna mostrare che $T(x, y) \subseteq \overline{B(y_0, r_y)}$ quindi si mostra che la distanza tra $T(x, y)$ e il centro è minore di r_y

$$\|T(x, y) - y_0\| \leq \|T(x, y) - T(x, y_0)\| + \|T(x, y_0) - y_0\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\|y_0 - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y_0) - y_0\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\|[D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|f(x, y_0) - 0\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\|[D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} r_y + \frac{1}{2} r_y \leq r_y$$

Allora T è ben definita perché $T(x, y) \in \overline{B(y_0, r_y)}$.
In conclusione con $\mathcal{X} = \overline{B(x_0, r_x)}$ e $\mathcal{Y} = \overline{B(y_0, r_y)}$ ho che $T : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ è tale che $\forall x \in \mathcal{X}$ la funzione $y \to T(x, y)$ è una contrazione e $\overline{B(y_0, r_y)}$ è completo.
quaolcosa sui completi.........
....
....
A questo punto può essere applicato il teorema delle contrazioni:
$\forall x \in \mathcal{X}, \exists y \in \mathcal{Y} : f(x, y) = 0$ allora chiamo $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ che $x \to y$ è unica quindi φ è una funzione.
Allora la funzione implicita esiste. La continuità direva direttamente dal teorema delle contrazioni: l'applicazione che al parametro associa il punto fisso è continua.
Per l'unicità si osservano le ipotesi 1 e 2, dove è scritto $\forall x$ ovvero scelta una qualunque x la y è unica quindi φ è univocamente definita.

$\square$

Proposizione 10.7
Sia $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ con $X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m$
Preso un punto (x_0, y_0) con $x_0 \in \mathring{X}$,$y_0 \in \mathring{Y}$
se:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $f \in \mathbf{C^1}(X \times Y, R^m)$.
3. $D_y f(x_0, y_0)$ invertibile .

$\Rightarrow$ si ha:

1. $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ definita implicitamente da $f(x_0, y_0) = 0$
2. φ continua su $\mathcal{X}$
3. φ è differenziabile e $D\varphi(x) = -[D_y f(x, \varphi(x))]^{-1} D_x f(x, \varphi(x))$

Dimostrazione. I punti 1 e 2 sono gli stessi del teorema della funzione implicita e si dimostrano allo stesso modo.
Per il punto 3 abbiamo che $f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$ e quindi $\forall x \in \mathcal{X}$ $f(x, \varphi(x)) = 0$
....
....

□

Proposizione 10.8
CASO N=1, M=1
Sia $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ con $X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}$
Preso un punto (x_0, y_0) con $x_0 \in \mathring{X}$,$y_0 \in \mathring{Y}$
se:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $f \in \mathbf{C^1}(X \times Y, R)$.
3. $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.

$\Rightarrow$ si ha:

1. $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ definita implicitamente da $f(x_0, y_0) = 0$
2. $\varphi \in \mathbf{C^0}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
3. φ è derivabile e $\varphi'(x) = -[\partial_y f(x, \varphi(x))]^{-1} \partial_x f(x, \varphi(x))$

Dimostrazione. $f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$, derivando $D(f(x, \varphi(x))) = 0$
$\partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$
allora $\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}$ □

Osservazione 10.9
Non essendoci motivo per preferire la x alla y o viceversa, esiste anche una versione di questo teorema in cui le ipotesi sono le stesse eccetto l'ultima che diventa $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$

1. $\exists \psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ definita implicitamente da $f(x, y) = 0$
2. $\psi \in \mathbf{C^0}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$
3. ψ è derivabile e $\psi'(y) = -[\partial_x f(\psi(y), y)]^{-1} \partial_y f(\psi(y), y)$

Qualche esempio qui

10.1 Il Teorema della funzione Inversa

Data una funzione f, poterla invertire ...... unico modo l'equazione (o sistema ....)... l'incognita x in funzione del parametro .....

Proposizione 10.10
(Teorema della funzione inversa caso lineare)
Sia $f : R^n \in \mathbb{R}^m$ data da $f(x) = Mx$ e $M \in Mat(m \times n)$, f è invertibile $\iff n = m$ e $detM \neq 0$

Proposizione 10.11
(caso generale)
sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ con $A \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbf{C^1}(A, R^n)$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $Df(x_0)$ invertibile.
Allora $\exists \mathcal{X} \in A, \exists \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^n$, $\exists \varphi \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ con la proprietà $f(x) = y \iff x = \varphi(y)$ con $x \in \mathring{\mathcal{X}}$ e $y \in \mathring{\mathcal{Y}}$ e $\varphi \in \mathbf{C^1}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ e $D\varphi(y) = [Df(x)]^{-1}$

Dimostrazione. $f(x) = y \iff f(x) - y = 0$. Allora introduco $F : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $F(x, y) = f(x) - y$.
Studio $F(x, y) = 0$ per ottenere $x = \varphi(y)$.
Per poter applicare il teorema della funzione implicita serve $D_xF(x_0, y_0)$ invertibile, ma $D_xF(x_0, y_0) = Df(x_0)$ che è invertibile per ipotesi.
Applico allora il teorema della funzione implicita , quindi gli intorni esistono e $x = \varphi(y)$.
resta da trovare la derivata totale di φ. Sappiamo che $f \in \mathbf{C^1}$ quindi $\varphi \in \mathbf{C^1}$.
Sappiamo che $\varphi(f(x)) = x$, applicando la derivata della funzione composta abbiamo che:
$D\varphi(f(x))Df(x) = I$
$D\varphi = [Df(x)]^{-1}$ quando $\varphi(y) = x$
si puo anche scrivere come $(Df^{-1})(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$ □

11 Massimi e Minimi Liberi

Definizione 11.1
Siano (X, d)s.m., $A \subseteq X$ e $f : A \to \mathbb{R}$, siano $x_0 \in A, B \in A$ e $m, M \in \mathbb{R}$ (L'insieme immagini deve essere R per poter parlare di massimi e minimi, R è un campo ordinato a differenza di R^n).
M è massimo di f su $B \rightleftharpoons M = \max f(B) \iff \forall x \in Bf(x_0) \geq f(x)$
M è minimo di f su $B \rightleftharpoons m = \min f(B) \iff \forall x \in Bf(x_0) \leq f(x)$
x_0 è punto di massimo assoluto per $f \rightleftharpoons f(x_0) = \max\limits_A f(x)$
x_0 è punto di minimo assoluto per $f \rightleftharpoons f(x_0) = \min\limits_A f(x)$
x_0 è punto di massimo locale relativo per $f \rightleftharpoons \exists r > 0 : f(x_0) = \max\limits_{x \in B(x_0, r)} f(x)$ con $B(x_0, r) \subseteq A$
x_0 è punto di minimo locale relativo per $f \rightleftharpoons \exists r > 0 : f(x_0) = \min\limits_{x \in B(x_0, r)} f(x)$ con $B(x_0, r) \subseteq A$

11.1 Condizioni Necessarie

Proposizione 11.2
Teorema di Fermat
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Se x_0 è punto di massimo(0 minimo) locale per f su A e f è differenziabile in x_0 allora $\nabla f(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$, la funzione $F(t) = f(x_0 + tv)$ che a $t \to x_0 + tv$ è il moto rettilineo uniforme che passa da x_0 all'istante 0 e si muove con velocità vettore costante v. cioè per tempi negativi mi avvicino a x_0 al tempo zero si è in x_0 e per tempi positivi si allontana da x_0. quindi $t = 0$ è punto di massimo per F, allora $F'(0) = 0$ per il teorema di Fermat di A1.
Ora abbiamo che $F'(t) = \nabla f(x_0 + tv)v$ quindi $F'(0) = \nabla f(x_0)v$ cioè $\nabla f(x_0)v = 0$.
Quindi $\forall v : \|v\| = 1$ vale $\nabla f(x_0) = 0$
OSS:: Vale anche che $D_v f(x_0) = 0$ □

Definizione 11.3
sia $f : A \subseteq r^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$
x_0 è punto stazionario .... $\rightleftharpoons$ f è differenziabile in x_0 e $\nabla f($ ......

Osservazione 11.4
nel caso $n = 2, m = 1, \nabla f(x_0, y_0) = [\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)]$ ..... i punti stazionari sono quelli che ......parziali.

Osservazione 11.5
Prima di continuare un paio di osservazioni sulle forme quadratiche.

Definizione 11.6
forma quadratica su $R^n \rightleftharpoons q : R^n \to \mathbb{R}$ che $x \to x^T Qx$ con $Q \in Mat(n \times n)$ simmetrica
ESEMPI:n=2

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO
SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO
SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO

Proposizione 11.7
se Q è una forma quadratica, allora

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \; q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
- $q(0) = 0$
- se q è limitata $\Rightarrow q \equiv 0$

Dimostrazione.

- $q(\lambda x) = (\lambda x)^T Q(\lambda x) = \lambda^2 x^T Qx = \lambda^2 q(x)$
- $q(0) = q(0x) = 0q(x) = 0$
- (contronominale $q \neq 0 \Rightarrow q$ non è limitata).
  se q è non nulla $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n \; q(x) \neq 0$
  allora $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ illimitata.
- ??

$\square$

Proposizione 11.8
se q è una forma quadratica $\Rightarrow \exists M \geq 0 : |q(x)| \leq M \|x\|^2 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dimostrazione. per $x \neq 0$ $|q(x)| = \left| q\left(\|x\| \frac{1}{\|x\|} x \right) \right| = \|x\|^2 \left| q\left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right| \leq$
$\leq \left(\sup_{\|x\|=1} |q(x)| \right) \|x\|^2 = \leq \left(\max_{\|x\|=1} |q(x)| \right) \|x\|^2 = M \|x\|^2$ $\square$

Proposizione 11.9
Sia q una forma quadratica, se $q(x) = o(\|x\|^2)$ per $x \to 0 \Rightarrow q \equiv 0$

Dimostrazione. sia $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| = 1$ e $t > 0$.
$q(x) = \frac{1}{t^2}$, $q(tx) = \frac{q(tx)}{\|tx\|^2} \to 0$ per $t \to 0$ per ipotesi.
Allora $\forall x$ con $\|x\|$ vale $q(x) = 0$ e allora $\forall x \neq 0, q(x) = q\left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \|x\|^2$ $\square$

Definizione 11.10
Sia $q : R^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica

- q è definita positiva $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \ q(x) > 0[Q > 0]$
- q è semidefinita positiva $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n \ q(x) \geq 0[Q \geq 0]$
- q è definita negativa $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \ q(x) < 0[Q >< 0]$
- q è semidefinita negativa $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n \ q(x) \leq 0[Q \leq 0]$

Proposizione 11.11
Sia $q : R^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica, se q è definita positiva $\Rightarrow \exists m > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) \geq m \|x\|^2$

Dimostrazione. Noto che $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
$q(x) = q\left(\frac{1}{\|x\|} x \|x\|^2\right) \geq \min\limits_{\|x\|=1} q(\lambda) \|x\|^2$ □

Ora dobbiamo cercare di capire se q è definita positiva

Ad esempio: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è facile capire che è semodefinita positiva poiché è in diagonale, quindi la prima cosa da fare è trovare una forma diagonale per Q
un procedimento pratico e veloce è il seguente:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\lambda = q_{11}, \quad \lambda_2 = \frac{detQ_2}{q_1 1} \quad \lambda_3 = \frac{detQ_3}{detQ_2} \quad ... \quad \lambda_i = \frac{detQ_i}{detQ_{i-1}}$$

Questo perché se dobbiamo valutare il segno dell'incremento della f ci servono le variazioni sulle quadriche. Se f è $\mathbf{C^2}$ scrivo lo sviluppo di Taylor al secondo ordine:

$$f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

max e min dove $\nabla f(x_0) = 0$ per Fermat, l'o piccolo è trascurabile, allora il segno della derivata dipende dalla forma quadratica al secondo membro.

Proposizione 11.12
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$ e x_0 punto di massimo locale per f su $A \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ e $H_f(x_0)$ è semidefinita negativa.

Dimostrazione. $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$ poiché $f \in \mathbf{C^2}$
il primo termine è negativo poiché per ipotesi x_0 è punto di massimo locale, ne segue che il termine $(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0)$ non può essere positivo. □

Proposizione 11.13
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$ e x_0 punto di minimo locale per f su $A \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ e $H_f(x_0)$ è semidefinita positiva.

Dimostrazione. $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$ poiché $f \in \mathbf{C^2}$
il primo termine è positivo poiché per ipotesi x_0 è punto di minimo locale, ne segue che il termine $(x - x_0)^T H_f(x - x_0)$ non può essere negativo. □

11.2 Condizioni Sufficienti

Proposizione 11.14
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$, $\nabla f(x_0) = 0$,$H_f(X_0)$ è definita negativa $\Rightarrow x_0$ è un punto di massimo locale per f

Dimostrazione. $f \in \mathbf{C^2}$ quindi possiamo scrivere:
$f(x_+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
$f(x_+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
Sappiamo che H_f è definita negativa per ipotesi, allora $h^T H_f(x_0)h \leq -m \|x_0\|$ allora $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ e quindi x_0 è punto di massimo locale per f. □

Proposizione 11.15
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$, $\nabla f(x_0) = 0$,$H_f(X_0)$ è definita positiva $\Rightarrow x_0$ è un punto di minimo locale per f

Dimostrazione. $f \in \mathbf{C^2}$ quindi possiamo scrivere:
$f(x_+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
....
....
□

QUALCHE DISEGNO E SPIEGAZIONE.....

11.3 Il Significato Geometrico del Gradiente n=2 m=1

Definizione 11.16
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$
La suferficie $z = f(x, y)$ è il grafico di f, è unsottoinsieme di R^3
Se $c \in \mathbb{R}$, la curva di livello c di f è l'insieme $f^{-1}(c)\{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$
Se f 'e differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ il piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ in (x_0, y_0) ha equazione:

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} (x - x0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix}$$
$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Osservazione 11.17
geometricamente, il gradiente di una funzione indica la direzione di R^n in cui si ha la massima variazione del valore di f, nel verso di incremento positivo di f,

Osservazione 11.18
osservazione col grafico che al momento non faccio.

Proposizione 11.19
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, l'incremento di $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ è massimo quando $[hk] = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ con $\lambda > 0$ ed è minimo con $[hk] = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ con $\lambda < 0$

Dimostrazione. so che posso approssimare la funzione quindi posso scrivere:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o(\sqrt{h^2 + k^2}) = = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \left\| [hk] \right\| cos(\theta) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$
dove θ è l'angolo tra $\nabla f(x_0, y_0)$ e $[hk]$ per $||[hk]||$ sufficientemente piccola, l'incremento $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$ è massimo se $cos(\theta) = 1$ ed è minimo se $cos(\theta) = -1$, da cui la tesi.
□

Proposizione 11.20
siano $f \in \mathbf{C^1}(A; R)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ e $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$[cioè stazionario]. Allora $nabla f(x_0, y_0)$ è perpendicolare alla curva di livello passante per .....

Osservazione 11.21
un vettore 1'e perpendicolare a una curva se è perpendicolare alla retta o al vettore tangente alla curva in quel punto.

Dimostrazione. La curva di livello è $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ cioè $f(x,y) - f(x_0,y_0) = 0$, per trovare la tangente a questa curva è piu facile se si ha $y = \varphi(x)$
Usiamo quindi il teorema della funzione implicita, mi serve che $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$, questa condizione non è assicurata dalle ipotesi, per ipotesi il gradiente è non nulla quindi almeno una delle due componenti è non nulla.
Inizio con il caso $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$.
Il T.F.IMPL. assicura che :
$\exists \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ con $x_0 \in \mathring{\mathcal{X}}, y_0 \in \mathring{\mathcal{Y}}$, $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.:
$f(x,y) = f(x_0,y_0), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \iff y = \varphi(x)$
La retta tangente in x_0 a $y = \varphi(x)$ è $y = y_0 + \varphi'(x_0)(x - x_0)$
questo vuole dire che un vettore tangente a $y = \varphi(x)$ in (x_0,y_0) è $\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi'(x_0) \end{bmatrix}$.
... calcolo il prodotto scalare

$$\nabla f(x_0,y_0) \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi'(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0,y_0) & \partial_y f(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\partial_x f(x_0,y_0)}{\partial_y f(x_0,y_0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \partial_x f(x_0,y_0) - \partial_y f(x_0,y_0) \frac{\partial_x f(x_0,y_0)}{\partial_y f(x_0,y_0)} = 0$$

Allora il graadiente è perpendicolare alla curva di livello.
Guardiamo ora al caso in cui $\partial_y f(x_0,y_0) = 0$ e $\partial_x f(x_0,y_0) \neq 0$ quindi il gradiente è non nullo.
Applicando lo stesso ragionamento id sopra, solo esplicitando la x in funzione della y. Quindi $x = \psi(x)$ e $\psi'(y_0) = -\frac{\partial_y f(x_0,y_0)}{\partial_x f(x_0,y_0)}$ □

12 Massimi e Minimi Vincolati

Spesso la ricerca di punti di massimo o minimo di una funzione $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ deve essere ristrettaad un sottoinsieme $B \subseteq A$ a causa di eventuali vincoli a cui le variabili indipendenti devono soddisfare. L0insieme B può essere generalmente descritto da una funzione $\varphi : A \to \mathbb{R}^p$, nel senso che $B = \{x \in A : \varphi(x) \leq 0\}$
NOTA::: direi n>1 poiché se ho una sola variabile e la vincolo ...??????? booooo .
Questo problema è usualmente abbreviato in:

$$\max_{\varphi \leq 0} \quad o \quad \min_{\varphi \leq 0}$$

può essere affrontato in due passi:

1. ricerca dei punti di estremo di f interni a B, problema gia affrontato.
2. ricerca dei punti di estremo di f sul bordo di B, affrontiamo ora.

Sotto opportune condizioni su φ, infatti, $\mathring{B} = \{x \in A : \varphi(x) < 0\}$ e $\partial B\{x \in A : \varphi(x) = 0\}$

Proposizione 12.1
Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_0,y_0) \in \mathring{A}, g(x_0,y_0) = 0, f, g \in \mathbf{C^1}(A;R)$, $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$
Se (x_0,y_0) è di max(o min) locale per f su $g = 0 \Rightarrow \exists \lambda in \mathbb{R}$ t.c: $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda g(x_0,y_0)$ (all fin fine posso dire che sono paralleli).

Osservazione 12.2
λ si chiama "moltiplicatore di lagrange"

Osservazione 12.3
Se abbiamo un problema del tipo $\max_{g(x,y)=0} f$ cioè il massimo di f sul vincolo $g(x,y) = 0$, ci dobbiamo ricondurre ad un sistema del tipo $\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \partial_x f(x_0, y_0) = \lambda \partial_x g(x_0, y_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0) = \lambda \partial_y g(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$
3 equazioni in 3 incognite(x, y, λ)
In certi casi si introduce una funzione $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ detta Lagrangiana, i punti stazionari vincolati di f sono punti stazonari liberi della Lagrangiana.

Dimostrazione. Sappiamo che $\nabla g(x_0, y_0) \neq$ quindi $\begin{bmatrix} \partial_x g(x_0, y_0) & \partial_y g(x_0, y_0) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ quindi o $\partial_x g(x_0, y_0) \neq 0$ o $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$. Mettiamoci nel caso in cui $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$,
Per il teorema della funzione implicita ho che :
$\exists \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ con $x_0 \in \mathring{\mathcal{X}}, y_0 \in \mathring{\mathcal{Y}}$, $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.:
$g(x, y) = f(x_0, y_0), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \iff y = \varphi(x)$
Osserviamo che dire (x_0, y_0) di massimo o minimo per f ristretta a $g(x, y) = 0 \iff x_0$ è di massimo o di minimo per la funzione $x \to f(x, \varphi(x))$.
Per il teorema di Fermat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x, \varphi(x)))\|_{x=x_0} = 0$, punto stazionario ha derivata nulla, e la derivata di quella funzione in x_0 è:

$$\partial_x f(x_0, \varphi(x_0)) + \partial_y f(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

allora

$$0 = \partial_x f(x_0, \varphi(x_0)) + \partial_y f(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) =$$
$$= \partial_x f(x_0, \varphi(x_0)) - \partial_y f(x_0, \varphi(x_0)) \frac{\partial_x g(x_0, \varphi(x_0))}{\partial_y g(x_0, \varphi(x_0))} =$$

$$= \partial_x f(x_0, \varphi(x_0)) \partial_y g(x_0, \varphi(x_0)) - \partial_y f(x_0, \varphi(x_0)) \partial_x g(x_0, \varphi(x_0)) = det \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \\ \partial_x g(x_0, y_0) & \partial_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 0$$

questo equivale a dire che i vettori riga della matrice sono paralleli quindi $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.
Non è uguale scrivere $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \nabla g(x_0, y_0) = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ poiché non c'è certezza sul valore di $\nabla f(x_0, y_0)$ che se nullo negherebbe l'ipotesi di $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$
Se guardiamo ora il caso in cui $\partial_y g(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_x g(x_0, y_0) \neq 0$.
Seguendo un ragionamento analogo si esplicita $x = \psi(y)$ così che cercare max(o min) di f ristretta a $g(x, y) = 0$ porti a $y \to f(\psi(y), y)$ □

Proposizione 12.4
Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange caso generale Sia $A \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbf{C^1}(A; R)$, $g \in \mathbf{C^1}(A; R^p)$ con $p < n$(n.vincoli<n.variabili), sia poi $x_0 \in \mathring{A}, g(x_0) = 0, Dg(x_0, y_0)$ di rango p.
Se x_0 è di max(o min) locale per f su $g = 0 \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p in \mathbb{R}$ t.c: $\nabla f(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g(x_0, y_0)$

13 Il caso $n = 2$, $m = 1$

14 Derivate e Integrali

Proposizione 14.1 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $x_0 \in I$. Data $f \in c^0(I; R)$ la funzione:

$$\begin{array}{rcl} F : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Si ha $F \in \mathbf{C^1}(I; R)$ e $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$

[]

Proposizione 14.2
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, data $f \in \mathbf{C^0}(A \times \mathbb{R}; R)$ la funzione
$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta, x) & \to & \int_\alpha^\beta f(x,t)\, \mathrm{d}t \end{array}$$
è di classe $\mathbf{C^0}(R \times \mathbb{R} \times A; R)$

Proposizione 14.3
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, data $f \in \mathbf{C^1}(A \times \mathbb{R}; R)$ la funzione
$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta, x) & \to & \int_\alpha^\beta f(x,t)\, \mathrm{d}t \end{array}$$
è di classe $\mathbf{C^1}(R \times \mathbb{R} \times A; R)$ ed inoltre, $\forall (\alpha, \beta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A$ e $\forall i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -f(x, \alpha)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = f(x, \beta)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\, \mathrm{d}t$$
$$\nabla F = \int_\alpha^\beta \nabla f(x,t)\, \mathrm{d}t$$

Corollario 14.4
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, date le funzioni $\alpha : x \to \mathbb{R}, \beta : x \to \mathbb{R}, f : x \to \mathbb{R}$, di classe $\mathbf{C^1}$, la funzione
$$\begin{array}{rcl} F : A & \to & \mathbb{R} \\ (x) & \to & \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\, \mathrm{d}t \end{array}$$
è di classe $\mathbf{C^1}(R \times \mathbb{R} \times A; R)$ ed inoltre, $\forall x_0 \in A$:

$$\nabla F(x_0, y_0) = f(x_0, \beta) \nabla \beta(x_0) - f(x_0, \alpha) \nabla \alpha(x_0) + \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \nabla f(x,t)\, \mathrm{d}t$$

15 Funzioni a Valori in $\mathbb{C}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto. Ogni funzione $A \mapsto \mathbb{C}$ può essere identificata in modo naturale con una funzione $A \mapsto \mathbb{R}^2$ e viceversa.ù

Nota. Quindi è possibile rappresentare una funzione $A \mapsto \mathbb{C}$ in un piano, detto **piano complesso** o **piano di Gauss**

Esercizio 15.1
Utilizzando questa identificazione, estendere al caso di funzioni $A \mapsto \mathbb{C}$ le definizioni di continuità, derivabilità, differenziabilità e degli spazi $\mathbf{C^k}$ date per funzioni $A \mapsto \mathbb{R}$

Proposizione 15.2
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $t_0 \in \mathring{A}$. Allora

- Se due funzioni $f, g : A \mapsto \mathbb{C}$ sono differenziabili in t_0, anche le funzioni $f + g$ e $f \cdot g$ sono differenziabili in t_0. Inoltre
$$(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0) \qquad \text{e} \qquad (f \cdot g)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0)$$
- Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, anche λf è differenziabile e
$$(\lambda f)'(t_0) = \lambda f'(t_0)$$

- Se $g(t_0) \neq 0$, anche $1/g$ e f/g sono differenziabili in t_0 e

$$(1/g)'(t_0) = -\frac{g'(t_0)}{g^2(t_0)} \qquad \text{e} \qquad (f/g)'(t_0) = \frac{f'(t_0)g(t_0) - f(t_0)g'(t_0)}{g^2(t_0)}$$

Dimostrazione. Omessa □

Esercizio 15.3
Dimostrare la Proposizione 15.2

Definizione 15.4 (Funzione Esponenziale con Esponente Complesso)
La Funzione Esponenziale con Esponente Complesso è così definita:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Proposizione 15.5
Qualunque sia $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

Dimostrazione. Omessa □

Esercizio 15.6
Dimostrare la Proposizione 15.5, direttamente o attraverso l'Esercizio 20.24

Esercizio 15.7
In questa sezione sulle funzioni a valori complessi non son stati considerati i problemi di massimo/minimo, perché?

Soluzione. Perché $\mathbb{C}$ non è ordinato, dunque non è possibile trovare massimi o minimi. ■

Capitolo 3

Integrali Doppi

Preliminari

Questo capitolo non è trattato in maniera approfondita poiché:

a tanti e lunghi teoremi fuori contesto per poter introdurre rigorosamente la teoria di Riemann

b tale teoria è ”superata” da tempo

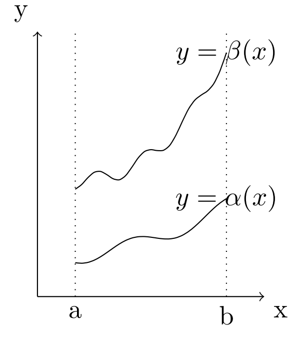
Il primo è più grosso problema di tale teoria è che non permette il passaggio del limite sotto il segno di integrale, cioè per poter scrivere

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)$$

sono necessarie tante ipotesi molto restrittive.
Si è passati così alla teoria dell'integrale secondo Lebesgue, molto diversa e piuttosto complicata.
ESEMPIO...............
disegni...........
....
Il concetto di integrale è quindi molto legato al concetto di area e anche di volume. La teoria di Lebesgue riparte da assiomi come questi definendoli e caratterizzandoli in modo da definire una volta per tutte in maniera sistematica e rigorosa cosa si può e cosa non si può integrare, e dove ha senso parlare di superfici. volumi, ipervolumi, ...

16 Regole di Calcolo

Queste formule permettono di ricondurre il calcolo di integrali doppi a quello di integrali semplici.



Se:
$a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$
$\alpha, \beta \in \mathbf{C^0}([a, b]; R), \forall x \in [a, b]\alpha(x) \leq \beta(x)$
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]ey \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$

$f \in \mathbf{C^0}(A; R)$
Allora
$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$
Analogamente.
ALTRO GRAFICO....
Se:
$c, d \in \mathbb{R}$ con $c < d$
$\gamma, \delta \in \mathbf{C^0}([a,b]; R), \forall y \in [c,d] \gamma(y) \leq \delta(y)$
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [c,d] \mathrm{e} x \in [\gamma(y), \delta(y)]\}$
$f \in \mathbf{C^0}(A; R)$
Allora
$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$

17 Cambiamento di Variabili

Se:
$A \subseteq \mathbb{R}^2$
$\varPhi \in \mathbf{C^1}(A; R^2)$ $\varPhi$ è invertibile $\varPhi^{-1} \in \mathbf{C^1}(\varPhi(A); R^2)$
$det(D\varPhi) \neq 0$ su A
$f \in \mathbf{C^0}(\varPhi(A); R^2)$
Allora:

$$\iint_{\varPhi(A)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A ((f \circ g)(u,v))\,|det(D\varPhi(u,v))|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

La quantità $det(D\varPhi)$ è spesso chiamato DETERMINANTE JACOBIANO (o semplicemente JACOBIANO) della trasformazione $\varPhi$
Adesso spieghiamo perché il determinante JACOBIANO, ricordando A1:

$$\int_g (A) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(g(t))\,\mathrm{d}t$$

vari casi
...
...
...

Capitolo 4

Successioni e Serie di Funzioni

18 Preliminari

Definizione 18.1
Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione $(n \in \mathbb{N})$, la serie $\sum\limits_{n=09}^{+\infty} f_n$ indica la successione delle somme parziali $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i$

Osservazione 18.2
Qualunque affermazione fatta in riferimento ad una serie va quindi intesa riferita alla successione delle somme parziali

- La serie è limitata $\rightleftharpoons$ la successione delle somme parziali è limitata
- La serie è illimitata $\rightleftharpoons$ la successione delle somme parziali è illimitata
- La serie è convergente $\rightleftharpoons$ la successione delle somme parziali è convergente

Osservazione 18.3
Successioni e serie di funzioni possono essere viste:

1. come successioni e serie dipendenti da un parametro
2. come un mezzo per approssimare funzioni
3. come un primo passo verso lo studio di funzioni (a volte dette operatori o funzionali) che a funzioni associano o numeri o altre funzioni.

19 Tipi Di Convergenza

19.1 Convergenza Puntuale

Definizione 19.1
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni definite su A a valori in $\mathbb{R}$. Sia $B \subseteq A$

- la successione $\{f_n : n\mathbb{N}\}$ è puntualmente convergente su B se $\forall x \in B$, esiste finito il limite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. In tal caso la funzione $f : B \to \mathbb{R}$ definito da $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
- la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ è puntualmente convergente su B se $\forall x \in B$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ammette somma finita. In tal caso la funzione $F : B \to \mathbb{R}$ definito da $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è la somma della serie la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$

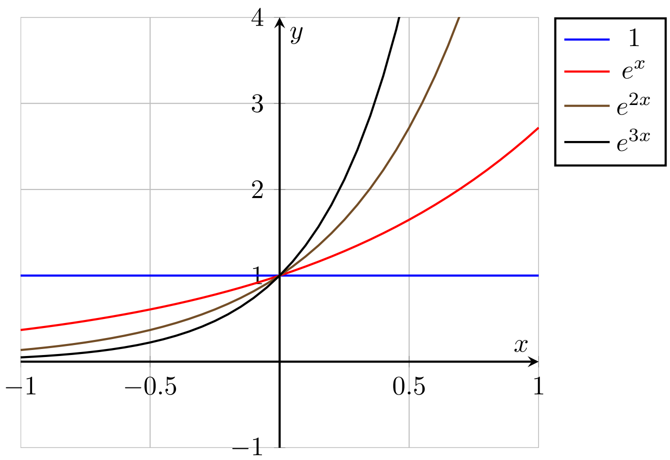
Osservazione 19.2
La convergenza puntuale su A della successione f_n verso f è indicata con

$$f_n \xrightarrow{\text{P}} f \quad suA$$

Proposizione 19.3
METAPROPOSIZIONE:
Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to A$
Se $f_n \xrightarrow{\text{P}} f$ su B e se f_n ha la proprietà P allora il limite f ha la proprietà P.

Esempio 19.4
$f_n(x) = \frac{1}{n} sin(x)$ con $A \equiv \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} sin(x) = 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{P}} 0$ su A.

Esempio 19.5
$f_n(x) = e^{nx}$ con $A \equiv \mathbb{R}$

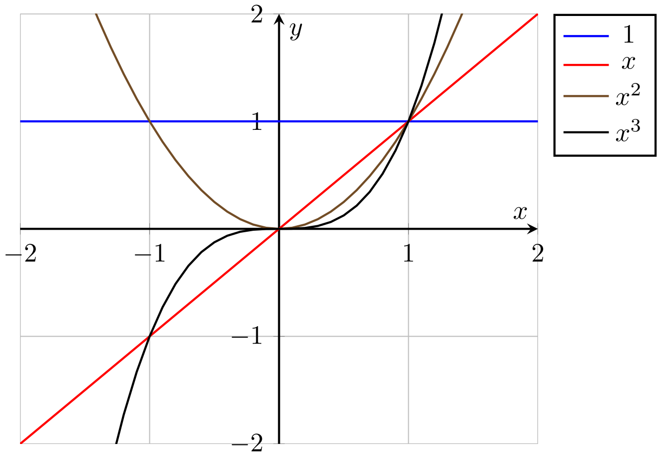


$$\lim_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{\text{P}} f \quad suB =]-\infty, 0]$$

Osservazione 19.6
La continuità non passa al limite come proprietà P

Esempio 19.7
$f_n(x) = x^n$ con $A \equiv \mathbb{R}$



$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & x \in \left]1, +\infty\right[\\ 1 & x \in \{1\} \\ 0 & x \in \left]-1, 1\right[\\ \nexists & x \in \left]-\infty, -1\right] \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{\text{P}} f \quad su B = \left]-1, 1\right]$$

Proposizione 19.8
PROPRIETÀ P:MONOTONIA
Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to A$
Se $f_n \xrightarrow{\text{P}} f$ su B e se f_n è debolmente crescente su B allora il limite f è debolmente crescente su B.

Dimostrazione. Dire che f_n è debolmente crescente su B significa che

$$\forall x_1, x_2 \in B \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow fn(x_1) \leq f_n(x_2)$$

se si fa tendere $n \to \infty$ si ha che $f(x_1) \leq f(x_2)$, e questo nell'insieme B dove i limiti puntuali delle funzioni esistono per ipotesi □

Osservazione 19.9
Questo vale anche nel caso di funzioni debolmente decrescenti

Osservazione 19.10
se f_n è strettamente crescente/decrescente con le stesse ipotesi non possiamo concludere che il limite puntuale mantenga la stessa proprietà

Esempio 19.11
x^n con $x \in \left[0, 1\right[$ è strettamente crescente ma il limite putuale è costante uguale a zero.

Proposizione 19.12
PROPRIETÀ P:NON NEGATIVA
Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to A$
Se $f_n \xrightarrow{\text{P}} f$ su B e se f_n è non negativa, $f_n \geq 0$, su B allora il limite f è non negativo, $f \geq 0$, su B.

Dimostrazione. Sappiamo che $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in B$. Ma f_n è una successione di valori non negativi quindi il limite esiste ed è non negativo. □

Osservazione 19.13
Questo vale anche nel caso di funzioni non positive

Osservazione 19.14
Questa proposizione non può essere estesa al caso di funzioni strettamente positive/negative.

Esempio 19.15
$-\frac{e^x}{n}$ con $x \in [0,1[$ è strettamente negativa ma il limite è costante uguale a zero.

Proposizione 19.16
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq A$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni definite su A con valori in $\mathbb{R}$. sia $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione
$f_n \xrightarrow{\text{p}} f$ su B per $n \to \infty \iff \forall x \in B, \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

Dimostrazione. direttamene dalla definizione... □

Proposizione 19.17
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq A$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni definite su A con valori in $\mathbb{R}$. Sia $F : B \to \mathbb{R}$ una funzione
$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xrightarrow{\text{p}} F$ su B per $n \to \infty \iff \forall x \in B, \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \quad \left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - F(x)\right| \leq \epsilon$

Dimostrazione. direttamene dalla definizione... □

19.2 Convergenza Uniforme

Definizione 19.18 (Convergenza Uniforme)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ e $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni definite su A a valori in $\mathbb{R}$.

- La **successione** $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ è uniformemente convergente su B se esiste una funzione $f : B \mapsto \mathbb{R}$ tale che:

  $$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

  La funzione f è il **limite uniforme della successione** f_n

- La **serie** $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ è uniformemente convergente su B se esiste una funzione $F : B \mapsto \mathbb{R}$ tale che:

  $$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in B} \left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| = 0$$

  la funzione F è il **limite uniforme della serie** $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

La convergenza uniforme su B della successione f_n verso f è indicata con "$f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ su B".

Osservazione 19.19
la convergenza uniforme equivale alla convergenza rispetto alla distanza $d_{\mathbf{C}^0}(f,g) = \sup_{x \in A} |g(x) - f(x)|$ ogniqualvolta questa distanza sia definita. La definizione di $d_{\mathbf{C}^0}(f,g)$ come *distanza* è dimostrata in Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)
La $d_{\mathbf{C}^0}(f,g)$ può anche essere definita attraverso la **norma** $\|k\|_{\mathbf{C}^0} = \sup_{x \in A} |k|$ con $k = f - g$ in quanto, in $\mathbb{R}$ norma e valore assoluto coincidono.

Proposizione 19.20

Esempio 19.21

Proposizione 19.22
sia $f_n : n \in \mathbb{N}$ con $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
$f_n \overset{u}{\to} f$ su B per$n \to \infty \iff \forall\epsilon > 0, \exists\nu \in \mathbb{N}$ t.c: $\forall n > \nu, \forall x \in B$ vale che $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

Proposizione 19.23
sia $f_n : n \in \mathbb{N}$ con $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $F : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \overset{u}{\to} F$ su $B \iff \forall\epsilon > 0, \exists\nu \in \mathbb{N}$ t.c: $\forall n > \nu, \forall x \in B$ vale che $\left|F(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq \epsilon$

Osservazione 19.24
La differenza tra queste due proposizioni e le due proposizioni analoghe nel caso di convergenza puntuale giustifica il fatto che la continuità non passa al limite puntuale. Infatti qui ν dipende solo dalla scelta di ϵ e le x si guardano tutte insieme, prima invece ν dipendeva oltre che alla ϵ anche dalla x questo porta a osservare le x una alla volta.

Proposizione 19.25
Relazione tra convergenza uniforme e puntuale.
Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
Se $fn \overset{u}{\to} f$ su B allora $fn \overset{p}{\to} f$ su B.

Dimostrazione. se $f_n \overset{u}{\to} f$ su b allora vale che: $\forall\epsilon, \exists\nu : \forall n > \nu, \forall x \in B$ vale $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ in questo modo si trova un ν che soddisfa la condizione $\forall x \in B$ quindi $\forall x \in B, \forall\epsilon, \exists\nu : \forall n > \nu$ vale $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ quindi $f_n \overset{p}{\to} f$ su B □

Proposizione 19.26
Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\overline{f}, f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
se $f_n \overset{u}{\to} f$ su B e $f_n \overset{u}{\to} \overline{f}$ su B allora $f = \overline{f}$

Dimostrazione. $f_n \overset{u}{\to} f$ e $f_n \overset{u}{\to} \overline{f}$, quindi è anche vero che $f_n \overset{p}{\to} f$ e $f_n \overset{p}{\to} \overline{f}$ ma il limite puntuale è unico poichè è il limite di una successione. Allora $f = \overline{f}$ □

Esempio 19.27
$f_n(x) = \frac{1}{n} sin(x)$ con $A \equiv \mathbb{R}$
Abbiamo gia calcolato che $f_n \overset{p}{\to} 0$ su A.
Sia ha anche convergenza uniforme :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \mathbb{R}\, |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n} sin(x)\right|$$

Osservo che $|asin(x)| \leq |a|$ quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n} sin(x)\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Allora $f_n \overset{u}{\to} f$ su A

Esempio 19.28
$f_n(x) = sin\left(\frac{1}{n}x\right)$ con $A \equiv \mathbb{R}$ ....
....

Proposizione 19.29
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : A \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni e $f : A \to \mathbb{R}$
$f_n \overset{u}{\to} f$ su A e $f_n \in \mathbf{C^0}(A; \mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $f \in \mathbf{C^0}(A; \mathbb{R})$

Dimostrazione. DISEGNO
DISEGNO
DISEGNO
DISEGNO
GIURO CHE LA FAROò (a distanza di tre anni non son sicurissimo che lo farò) □

Esempio 19.30
$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ con $A \equiv \mathbb{R}$
....
....

Definizione 19.31
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ e $\{f_n : A \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni.
La successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa alla condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su $B \rightleftharpoons \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu, \forall x \in B$ vale $|f_n(n) - f_m(x)| < \epsilon$

Proposizione 19.32
(Una successione di Cauchy per la convergenza uniforme è uniformemente convergente).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ e $\{f_n : A \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni.
La successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa alla condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su B allora $\exists$ una funzione $f : B \to \mathbb{R}$ t.c.: $f_n \stackrel{\text{u}}{\to} f$ su B

Dimostrazione. La successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa alla condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su B allora $\forall x \in B$ la successione $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ è di Cauchyin $\mathbb{R}$ allora $\forall x \in B$ la successione $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ha limite in $\mathbb{R}$.(cioè c'è il limite puntuale).
Sia $f(x)$ questo limite, f è anche il limite uniforme della successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, infatti:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall h, k > \nu \forall x \in B \quad |f_h - f_k| < \epsilon$$

$$\sup_B |f_h(x) - f_k(x)|, \forall h, k > \nu$$

$$\Rightarrow |f_h(x) - f_k| < \epsilon, \forall h.k > \nu, \forall x \in B$$

a questo punto si passa al limite e la disuguaglianza diventa debole.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} |f_h(x) - f_k(x)| \leq \epsilon, \forall h > \nu, \forall x \in B$$

$$\Rightarrow |f_h(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall h > \nu, \forall x \in B$$

$$\Rightarrow \sup_B |f_h - f| \leq \epsilon, \forall h > \nu$$

$$\Rightarrow f_n \stackrel{\text{u}}{\to} f \quad suB$$

□

Proposizione 19.33
Sia A un compatto in $\mathbb{R}$. In $\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ sia $d_{\mathbf{C^0}} = \sup_A |g(x) - f(x)|$. Allora $\left(\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R}); d_{\mathbf{C^0}}\right)$ è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione. prendo $f_n \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ successione di Cauchy in $\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ f_n sono di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme su $A \Rightarrow f_n : A \to \mathbb{R}$ e $f_n \stackrel{\text{u}}{\to} f$ su A e f è continua
$\Rightarrow \left(f \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})\right)$
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n = f$ in $\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} d_\infty(fn, f) = 0 \quad \Rightarrow f_n \to f \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ □

Corollario 19.34

ESEMPIO:: In dimensione finita non vi è differenza tra "chiuso e limitato" e "compatto", in dimensione infinita cambiamo molte cose. Prensiamo un insieme chiuso e limitato ma non compatto.
In $\mathbf{C^0}([0,1];\mathbb{R})$ con $d_\infty(f,g) = \sup_{[0,1]} |g(x) - f(x)|$, prendiamo l'insieme $C = \overline{B(0,1)} = \big\{f \in \mathbf{C^0}([0,1];\mathbb{R}) : |f(x)| \leq 1, \forall x \in$

1 C è limitato: ha diametro finito.

2 C è chiuso: contiene tutti i sui punti di accumualazione

Se c'è una successione $f_n \xrightarrow{u} f$ su $[0,1]$ allora voglio mostrare che $f \in C$
Se $f_n \xrightarrow{u} f$ su $[0,1]$ allora $f_n \xrightarrow{p} f$ su $[0,1]$. Sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in [0,1]$ vale che $-1 \leq f_n(x) \leq 1$.
Mandando n al limite si ha che $-1 \leq f_(x) \leq 1$.
Inolte f è continua perché limite uniforme di una successione di funzioni continue allora $f \in C$ poiché è una funzione continua compresa tra -1 e 1

3 C non è compatto, cioè esiste almeno una successione dalla quale non è possibie estrarre una sottosuccessione convergente nello stesso spazio.

Se ad esempio $f_n(x) = x^n$
so che $f_n \xrightarrow{p} f$ su $[0,1]$ e $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in \{1\} \end{cases}$
Tutta la successione di funzioni f_n converge puntualmente a f quindi se estraggo una sottosuccessione comunque venga scelta questa sottosuccessione converge ancora a f puntualmente. Ma la f non è continua mentre il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua allora nessuna sottosuccessione ammette limite uniforme.

ESEMPIO:: OPERATORE DERIVATA 0

$$D$$

ESEMPIO:: OPERATORE DERIVATA 1

$$D$$

ESEMPIO:: OPERATORE INTEGRALE

$$I$$

Proposizione 19.35
fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se la successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbf{C^0}([a,b], \mathbb{R}) \xrightarrow{u} f$ su $[a,b]$
f_n e f sono integrabili secondo Rimmmmmmmn allora lasuccessione $\left\{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x : n \in \mathbb{N}\right\}$ converge a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Osservazione 19.36
La convergenza uniforme passa sotto il segno di integrale

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} fn\right)(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b fn(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Proposizione 19.37
convergono le derivare allora convergono le funzioni
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si consideri una successione di funzioni $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathbf{C^1}([a,b]; \mathbb{R})$
2. $\exists x_0 \in [a,b] : \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$
3. $\exists g \in \mathbf{C^0}([a,b]; \mathbb{R}) : f_n' \xrightarrow{u} g$ su $[a,b]$

Allora

1. $\exists f \in \mathbf{C^1}([a,b]; \mathbb{R})$
2. $f_n \xrightarrow{u} f$ su $[a,b]$

3. $f'(x) = g(x) \ \forall x \in [a,b]$

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

per $n \to \infty$

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Quindi le f_n convergono puntualmente alla funzione $f(x)$, per la convergenza uniforme calcolo:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} (|f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \right|) \leq$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left[|f_n(x_0) - f(x_0)| + |b-a| \sup_{[a,b]} |f_n'(x) - g(x)| \right] =$$

Questo perché per ipotesi $f_n' = g$ e il limite fa 0. Allora $f_n \xrightarrow{\mathrm{u}} f$ su $[a,b]$
Inoltre si sa che $f_n \in \mathbf{C^1}$ allora $f_n' \in \mathbf{C^0}$ allora il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua allora g è una funzione continua.
La f è l'integrale di una funzione continua allora la f è derivabile con derivata continua quindi $f' = g$ $\square$

Osservazione 19.38
Necessaria l'ipotesi $f_n(x_0) \to l$.......

Osservazione 19.39
Serve $[a,b]$ limitato ....
....
....

Corollario 19.40
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si consideri una successione di funzioni $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $\exists x_0 \in [a,b] : \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) = L \in \mathbb{R}$
3. $\exists g \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}) : \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n' \xrightarrow{\mathrm{u}} g$ su $[a,b]$

Allora

1. $\exists f \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow{\mathrm{u}} f$ su $[a,b]$
3. $f'(x) = g(x) \ \forall x \in [a,b]$

Osservazione 19.41
In altre parole questa proposizione afferma che sotto opportune ipotesi

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

Definizione 19.42
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni con $f_n : A \to \mathbb{R}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su $A \rightleftharpoons \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_A |f_n(x)| < +\infty$(è convergente)

Osservazione 19.43
la $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_A |f_n(x)|$ è una serie numerica

Proposizione 19.44
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni con $f_n : A \to \mathbb{R}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su $A \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su A

Dimostrazione. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su A
$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in A} |f_n| < \epsilon$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sup_{x \in A} \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| < \epsilon$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sup_{x \in A} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| < \epsilon$
$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su A. □

Osservazione 19.45
Per le serie:
Convergenza Totale $\Rightarrow$ Convergenza Uniforme $\Rightarrow$ Convergenza Puntuale.

19.3 Convergenza Quadratica

Proposizione 19.46
La definizione di $d_2(f, g)$ come *distanza* è dimostrata in Esempio 1.7 (Esempi di Metriche)

Proposizione 19.47

20 Serie di Funzioni Particolari

Questa sezione è dedicata ad alcune tecniche di approssimazione basate su serie di funzioni particolari
In generale, un'approssimazione si riconduce ad una formula del tipo

$$[\text{quantità da calcolare}] = [\text{quantità approssimante}] + \mathit{errore}$$

La qualità dell'approssimazione è descritta dal senso in cui l'errore è piccolo.

20.1 Serie di Potenze

Definizione 20.1
Siano $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione con $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$.
Si dice serie di potenze centrata in $z_0 \rightleftharpoons \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Osservazione 20.2
è ovvio che in $z = z_0$ si ha convergenza....???? (dire a zero)

Osservazione 20.3
Per semplicità verrà considerato il caso $z_0 = 0$ ESEMPIO:: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n = e^x$ ESEMPIO:: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$

Proposizione 20.4
Siano $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione in $\mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$.
La serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge in w (cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ converge) quandi abbiamo la convergenza nella sfera aperta di centro l'origine e raggio $|w|$
Allora $\forall r$ con $0 < r < |w|$, la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge totalmente in $B(0, r)$

Dimostrazione. TIKZPICTURE:::::
devo dimostrare che $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{B(0,r)} |a_n z^n| < +\infty$.
Efacile vedere che $a_n z^n = a_n w^n \left(\frac{z}{w}\right)^n$.
Quindi passando al modulo e poi al sup si ottiene.

$$\sup_{B(0,r)} |a_n z^n| = \sup_{B(0,r)} |a_n w^n| \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq$$

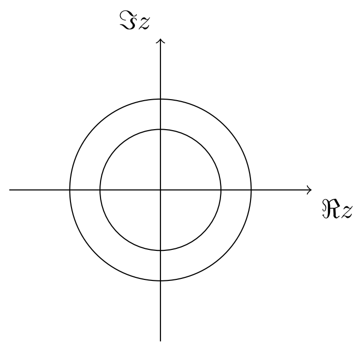
Siccome $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ converge quindi il suo termine generale tende a 0.

$$\leq \sup_{B(0,r)} \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq \left(\frac{r}{|w|}\right)^n$$

per ipotesi $r < |w|$ e questo è il termine generale di una serie geometrica convergente.
Ne segue che $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{B(0,r)} |a_n z^n|$ è maggiorato da $\left(\frac{r}{|w|}\right)^n$ e quindi la serie converge totalmente. □

Osservazione 20.5
Una volta che abbiamo la convergenza totale abbiamo anche quella uniforme.

Proposizione 20.6
la non convergenza in un punto implica la non convergenza fuori dal cerchio
Sia $a_n : n \in \mathbb{N}$ una successione a valori in $\mathbb{C}$
La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ non converge in w
Allora $\forall z \in \mathbb{C}$ con $|z| > |w|$ la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty}$ non converge in z



Dimostrazione.
Se per assurdo la serie converge in $z \Rightarrow$ per il teorema precedente avremmo convergenza in ogni sfera con raggio minore di $\left|\frac{1}{z}\right|$. e quindi anche in w questo nega l'ipotesi.ASSURDO. □

Osservazione 20.7
Come è fatto l'insieme su cui si ha convergenza??
segue da queste due ultime proposizioni che se $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione in $\mathbb{C}$ allora l'insieme $\left\{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n converge\right\}$ è un cerchio.
Sulla circonferenza non ci soffermaiamo a capire cosa accade poiché tutto può accadere.

Definizione 20.8
Raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \rightleftharpoons \rho = \sup\left\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n convergesuB(0,r)\right\}$

Osservazione 20.9
Il raggio di convergenza di una serie di potenze può essere 0, un numero reale positivo o $+\infty$.

Osservazione 20.10
una definizione come $\rho = \inf\left\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n nonconvergesuB(0,r)\right\}$ non sta in piedi poiché questo insieme potrebbe essere vuoto, mentre quello sopra non è mai vuoto, poerché $r = 0$ c'è sempre poiché in 0 si ha sempre convergenza. Ilsecondo potrebbe essere vuoto perché ci sono serie che convergono su tuttoil piano complesso e quindi non si avrebbe nessun r fuori da quale non sia ha convergenza.

Proposizione 20.11
CRITERIO DELLA RADICE.
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, sia $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Se questo limite esiste, allora il raggio di convergenza è $\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } l = +\infty \\ \frac{1}{l} & \text{se } l \in]0,+\infty[\\ +\infty & \text{se } l = 0 \end{cases}$

Proposizione 20.12
CRITERIO DEL RAPPORTO.
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, sia $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Se questo limite esiste, allora il raggio di convergenza è $\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } l = +\infty \\ \frac{1}{l} & \text{se } l \in]0,+\infty[\\ +\infty & \text{se } l = 0 \end{cases}$ ESEMPIO::$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$
$a_n = \frac{1}{n!} \cdots \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \stackrel{n\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \rho = +\infty$
ESEMPIO::$sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ quindi $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \ldots & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
...
...
...
ESEMPIO::$sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ quindi $a_n = \begin{cases} \ldots & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
...
...
...
ESEMPIO:: e^{iy} con $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}(iy)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(iy)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(y)^{2n} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(y)^{2n+1} = cos(y) + isin(y)$$

1. $i^{2n} = \left(i^2\right)^n = (-1)^n$
2. $i^{2n+1} = i\left(i^2\right)^n = i(-1)^n$

ESEMPIO:: $e^{i\pi} + 1 = cos(\pi) + i \cdot sin(\pi) = 0$
ESEMPIO:: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ con $\rho = 1$ ESEMPIO:: Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$
QUI GRAFICO ....
....
Questa serieconverge esclusivamente per $|x| < 1$, mentre la funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$, $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$
In $\mathbb{C}$, lafunzione $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ è la somma della serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}$ che ha raggio di convergenza $\rho = 1$. Infatti, $f(z)$ è singolare sia in $z = i$ sia in $z = -i$.
ALTRO GRAFICO:::::::::::::::
....

20.2 Serie di Taylor

ESEMPIO:: $ln(1 + z)$. Calcolare la Serie di Taylor.

$$D\left[ln(1+z)\right] = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$$

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$$

Lemma 20.13
Sia $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione a valori in $\mathbb{C}$. Le serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza

Dimostrazione. Omessa ☐

Definizione 20.14
Sia $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$. La funzione f si dice analitica su $]-r, r[\rightleftharpoons f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-r, r[$ per opportuni $a_n \in \mathbb{R}$

Osservazione 20.15
In altre parole chiamiamo analitica una funzione che può essere scritta come somma di una serie di potenze convergente su $]-r, r[$
ESEMPIO:: $x \to e^x$ è analitica su $\mathbb{R}$
ESEMPIO:: $x \to \frac{1}{1+x^2}$ è analitica su $]-1, 1[$

Proposizione 20.16
Se f è analitica su $]-r; r[$ per $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0 \Rightarrow f \in \mathbf{C^0}(]-r, r[\,; \mathbb{R})$

Dimostrazione. f è analitica allora posso scriverla come $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cioè la funzione è limite di una serie, se la serie converge totalmente allora converge uniformemente. Il limite uniforme di funzioni continue(in questo caso polinomi) è una funzione continua. cioè la f è continua. ☐

Proposizione 20.17
PROP+PROOF
Sia $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ e f analitica su $]-r, r[\rightleftharpoons f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Rightarrow$ ho convergenza totale $\Rightarrow$ ho convergenza uniforme di funzioni continue

$$\Rightarrow f \in \mathbf{C^0}(]-r, r[\,; \mathbb{R}), \quad a_0 = f(0)$$

La serie delle derivate $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ converge totalmente su $]-r, r[$ cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} \overset{u}{\to} g$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} fn(0) \to f(0), f_n \in ????????????$$

Allora la serie delle derivate converge alla derivata della serie

$$\Rightarrow \in \mathbf{C^1}(]-r, r[\,; \mathbb{R}), \quad a_1 = f'(0)$$

Questo ragionmento può essere ripetuto:

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathbf{C^k}(]-r, +r[), \quad a_k = k! f^{(k)}(0)$$

e analogamente

$$f \in \mathbf{C}^\infty(]-r, r[\,; \mathbb{R}), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

Osservazione 20.18
Qui abbiamo detto se f è analitica $\Rightarrow \ldots$, vorrei fare un qualche tipo di viceversa per poter capire se f è analitica o no.

Proposizione 20.19
Sia $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{c} f \in \mathbf{C}^\infty(]-r, r[\,; \mathbb{R}) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \text{ converge totalmente su }]-r, r[\end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ è analitica .....}$$

Per avere f analitica necessariamente come ipotesi deve esserci $f \in \mathbf{C}^\infty$ e f che si può scrivere come sviluppo in serie di Taylor,dalla proposizione precedente. Questo basta? NO
ESEMPIO:: $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$

1. $f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ converge totalmente su $\mathbb{R}$
3. $f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$

1. Vediamo se è $\mathbf{C^0}$, quindi calcolo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f \in \mathbf{C^0}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
   Ora calcoliamo la derivata fuori dallo zero, ne facciamo il limite per $x \to 0$ da destra e da sinitra e vediamo cosa succede.
   Se $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^3}}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} = 0 \Rightarrow f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R};\mathbb{R})$
   ....
   ancora una derivata.......
   ....
   Continuando a derivare avremmo sempre un rapporto di polinomi che moltiplica un esponenziale, e l'esponenziale vince sempre. quindi fa 0. itero il ragionamento......
   ....

2. In (1) abbiamo visto che tutte le derivate nello zero si annullavano, cioè
   $$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$
   è la serie identicamente nulla che banalmente converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$
3. Anche osservandoil grafico è chiaro che la f non è la funzione identicamente nulla cioè è diversa dal suo sviluppo in serie
   $$f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

Il Problema nasce dall'$o(x^n)$ che scriviamo alla fine dello sviluppo n-esimo di questa funzione, perché l'intorno in cui si ha $o(x^n)$ diventa sempre più piccolo. GRAFICO...
GRAFICO...
Mandando l'ordine n all'infinito, l'intervallo su cui si ha l'o piccolo tende a diventare un punto (lo zero). Quindi abbiamo l'ugualianza tra la funzione e il suo sviluppo solo nell'origine.????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
Completiamo le ipotesi con la prossima proposizione:

Proposizione 20.20
Sia $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathbf{C}^{\infty}(]-r,r[\,;\mathbb{R}) \\ \exists H, K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \sup\limits_{]-r,r[} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq HK^n \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

Osservazione 20.21
L'ipotesi centrale .... qui non c'è

Osservazione 20.22
Sia $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (z, w)^n$ una serie di potenze in due variabili.
Quando abbiamo due variabili, non si può parlare di raggio di convergenza. Questa serie è una serie geometrica che converge sse $|zw| < 1$. è difficile parlare di raggio di convergenza perché essendo $z, w \in \mathbb{C}$, se per una variabile servono due dimensioni per due variabili servono quattro dimensioni , e anche se non riusciamo a fare il disegno è evidente che l'insieme su cui la serie converge non è un cerchio(sfera).

Esempio 20.23 (Esempi di Sviluppi in serie di Taylor) $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}$$

$$sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{(2n)}$$

$$cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{(2n)}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

$$arctan(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{(2n+1)}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^2 n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} = \begin{cases} \text{converge sse } \lambda > 1 \\ \text{diverge sse } \lambda \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \text{converge sse } |q| < 1, S = \frac{1}{1-x} \\ \text{diverge sse } |q| > 1 \text{ o } q = 1 \\ \nexists \text{ sse } x = -1 \end{cases}$$

Esercizio 20.24
Determinare le derivate delle funzioni

- $x \to \sin x$
- $x \to \cos x$
- $x \to e^x$

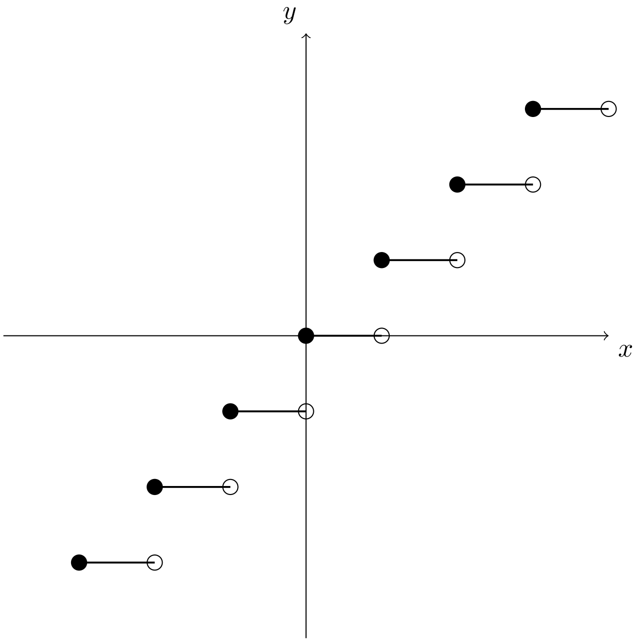
utilizzando Esempio 20.23 (Esempi di Sviluppi in serie di Taylor), il Lemma 20.13 ed il Corollario 19.40.

20.3 Serie di Fourier

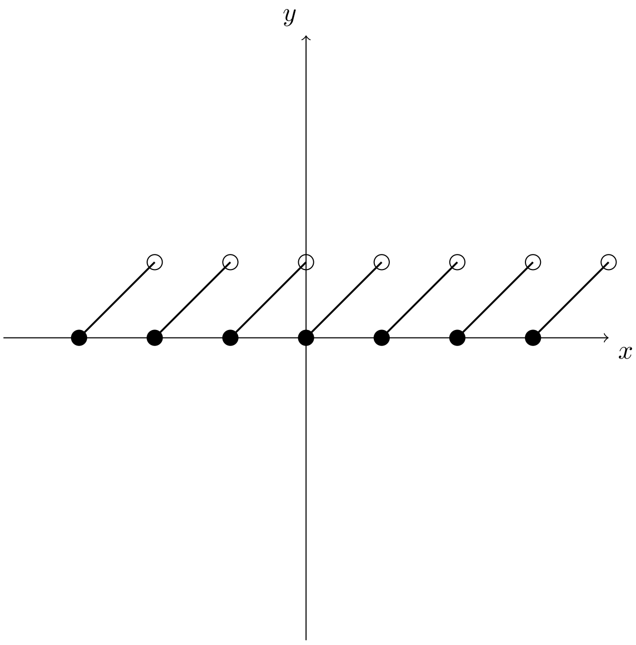
Definizione 20.25
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $T > 0$, f è T-periodica $\rightleftharpoons \forall x \in A \begin{cases} x + T \in A \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

ESEMPIO:: $\lfloor x \rfloor =$ parte intera $= \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1 \quad \lfloor -e \rfloor = -3$$



è 1-periodica. ESEMPIO:: $mant(x) =$ mantissa di x $= x - \lfloor x \rfloor$



è 1-periodica.

Osservazione 20.26
La funzione costante è T-periodica $\forall T > 0$, ma non ha un periodo minimo, per questo motivo non la consideriamo.

Osservazione 20.27
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ T-periodica. Allora possiamo definire $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ che sia 2π-periodica data da:

$$x \to f\left(\frac{T}{2\pi}x\right), \quad \overline{A} = \frac{2\pi}{T}A$$

Proposizione 20.28
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $T > 0$
f è T-periodica $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, f è nT-periodica.

Proposizione 20.29
Sia $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.: $\begin{cases} \hat{f} 2\pi - periodica \\ \hat{f}_{|[0,2\pi]} = f \end{cases}$

Dimostrazione. $\forall x \in \mathbb{R}. \exists! \hat{x} \in [0, 2\pi[$ t.c.: $x = 2\pi \cdot k + \hat{x}$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $k = [??????]$

$$\hat{f}(x) = f(\hat{x})$$

□

cioè se noi estendiamo una funzione definita su $[0, 2\pi[$ a tutto $\mathbb{R}$ otteniamo una funzione unica e periodica.

Osservazione 20.30
Con i polinomi di Taylor ....
....
....
....
....
....

Definizione 20.31
Dati $2n+1$ numeri reali $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ si dice polinomio trigonometrico di coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ la funzione:

$$\begin{array}{rcl} p : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx)) \end{array}$$

Osservazione 20.32
Essendo un'approssimazione, si deve aggiungere l'errore. Come è fatto?. Per far uscire conti giusti e comodi andrebbe usata la distanza quadratica , ma questo prevede una lunga parte introduttiva, noi allora lo stimiamo con la distanza infinita.

Definizione 20.33
Date due successioni di numeri reali $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,$\{b_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, si defininisce serie trigonometrica di coefficienti $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,$\{b_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ la serie

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{F} : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx)) \end{array}$$

LEMMA::
Se $h, k \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti uguaglianze:

$*$ $\int_{-\pi}^{\pi} cos(hx)cos(kx) = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ \pi & 0 \neq h = k \\ 2\pi & 0 = h = k \end{cases}$

$*$ $\int_{-\pi}^{\pi} cos(hx)sin(kx) = 0$

$*$ $\int_{-\pi}^{\pi} sin(hx)sin(kx) = \begin{cases} 0 & h \neq k \text{ oppure } h = k = 0 \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$

ESERCIZIO:: IL POLINOMIO DI FOURIER FORNISCE LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE NEL SENSO DELLA DISTANZA QUADRATICA.
Sia $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$, quale è la funzione a lei più vicina nel senso della distanza quadratica?
Fisso $N \in \mathbb{N}$ e prendo il polinomio trigonometrico di grado N

$$p_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, il problema è quello di minimizzare $d_2(f, p_n)$ quindi un problema di minimo.
Stiamo cercando i coefficienti del polinomio trigonometrico quindi studiamo una funzione $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - p_n(x)]^2 \, \mathrm{d}x}$.
Essendo la funzione radice quadrata monotona crescente ne studiamo solo il radicando:

$$\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 dx$$

Osservazione 20.34
con $f \in \mathbf{C^1}$:

$$F(\alpha, \beta, x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t) \, \mathrm{d}t$$
$$\partial_\alpha F(\alpha, \beta, x) = -f(x, \alpha) \, \mathrm{d}t$$
$$\partial_\beta F(\alpha, \beta, x) = f(x, \beta) \, \mathrm{d}t$$
$$\nabla_x F(\alpha, \beta, x) = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla_x f(x,t) \, \mathrm{d}t$$

Qudindi applicando al nostro caso otteniamo

$$\partial_{a_0} \varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{a_0} \left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} 2 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, \mathrm{d}x +$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} a_1 cos(x) \, \mathrm{d}x + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} a_N cos(Nx) \, \mathrm{d}x +$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} b_1 sin(x) \, \mathrm{d}x + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} b_N sin(Nx) \, \mathrm{d}x -$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x =$$

L'integrale di una sinusoide su un multiplo intero del periodo è 0 quindi

$$= \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{a_0 a_0} = \pi \quad \partial^2_{a_0 a_n} = 0 \quad \partial^2_{a_0 b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

$$\partial_{a_k}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{a_k}\left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right]^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2cos(kx)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 cos(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_1 cos(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} 2a_k cos(kx)cos(kx)\,\mathrm{d}x \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_N cos(Nx)cos(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_1 sin(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_k sin(kx)cos(kx)\,\mathrm{d}x} \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_N sin(Nx)cos(kx)\,\mathrm{d}x} -$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x =$$

E anche applicando il lemma

$$= 2\pi\left[a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x\right]$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{a_k a_0} = \pi \quad \partial^2_{a_k a_n} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2\pi & n = k \end{cases} \quad \partial^2_{a_k b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

$$\partial_{b_k}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{b_k}\left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right]^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2sin(kx)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x)\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 sin(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_1 cos(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_k cos(kx)sin(kx)\,\mathrm{d}x} \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_N cos(Nx)sin(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_1 sin(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} 2b_k sin(kx)sin(kx)\,\mathrm{d}x \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_N sin(Nx)sin(kx)\,\mathrm{d}x} -$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x =$$

E anche applicando il lemma

$$= 2\pi\left[b_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x\right]$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{b_k a_0} = \pi \quad \partial^2_{b_k a_n} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2\pi & n = k \end{cases} \quad \partial^2_{b_k b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

Si verifica la condizione $\nabla\varphi = 0$ con

* $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$
* $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x$

∗ $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x$

La matrice Hessiana di φ risulta

$$H_\varphi = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 2\pi \end{bmatrix}$$

è una matrice diagonale quindi si leggono direttamente tutti gli autovalori che sono strettamente positivi quindi la forma quadratica è definita positiva ed il punto in questione è un punto di minimo assoluto.

Definizione 20.35
Sia $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$, i coefficienti di Fourier di f sono (ovviamente f deve essere tale da ammetterli finiti):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

La serie di Fourier di f è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

Proposizione 20.36
Sia $F : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ la somma della serie trigono metrica definita dai coefficienti $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{a_n : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ e la serie trigonometrica converge uniformemente allora F è una funzione continua e

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

ESEMPIO+DIMOSTRAZIONE:::
sia $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$. Allora:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx)\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n cos(nx)\right)\mathrm{d}x$$

Poiché si ha convergenza uniforme si può portare l'integrale dentro la sommatoria.

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2} + \cancel{\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n cos(nx)\,\mathrm{d}x} + \cancel{\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_n cos(nx)\,\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{a_0}{2}\left(\pi - (-\pi)\right) = a_0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}cos(kx)\,\mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_n cos(nx)cos(kx)\right)\,\mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}b_n sin(nx)cos(kx)\right)\,\mathrm{d}x}\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{k-1}a_n cos(nx)cos(kx)\right)\,\mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi}a_k cos(kx)cos(kx)\,\mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty}a_n cos(nx)cos(kx)\right)\,\mathrm{d}x}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi a_k = a_k$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}sin(kx)\,\mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_n cos(nx)sin(kx)\right)\,\mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}b_n sin(nx)sin(kx)\right)\,\mathrm{d}x}\right] =$$

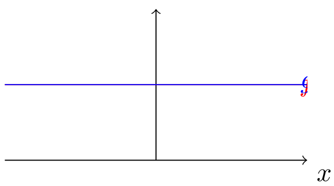
$$\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{k-1}a_n cos(nx)sin(kx)\right)\,\mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi}a_k cos(kx)sin(kx)\,\mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty}a_n cos(nx)sin(kx)\right)\,\mathrm{d}x}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi b_k = b_k$$

Osservazione 20.37
Se $d_2(f, \text{polinomio di Fourier})$ è minima $\Rightarrow$ il polinomio di Fourier è costruito con i coefficienti di Fourier di f.

Osservazione 20.38
Se f è somma di una serie di funzioni $\Rightarrow$ i coefficienti della serie sono i coefficienti di Fourier.

Osservazione 20.39
Funzioni diverse possono avere gli stessi coefficienti di Fourier, cioè $\exists f, g$ con $f \neq g$ ma f e g hanno gli stessi coefficienti di Fourier. ESEMPIO::



SISTEMARE,

Osservazione 20.40
I coefficienti di Fourier non possono identificare univocamente puntualmente una funzione.

Punto Di Vista Geometrico

In R^2 Ci sono 2 vettori $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ della base, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{v} = v_1 \cdot \hat{\imath} + v_2 \cdot \hat{\jmath}$ con v_1, v_2 componenti di $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$\underline{v} \cdot \hat{\imath} = v_1 \cdot \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + v_2 \cdot \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = v_1$$

$$\underline{v} \cdot \hat{\jmath} = v_1 \cdot \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + v_2 \cdot \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = v_2$$

Questo vale perché $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ è una base ortonormale. In R^3 Ci sono 3 vettori $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ della base, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \underline{v} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$ con v_1, v_2, v_3 componenti di $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$v_1 = \underline{v} \cdot \hat{\imath} \quad v_2 = \underline{v} \cdot \hat{\jmath} \quad v_3 = \underline{v} \cdot \hat{k}$$

In R^n Ci sono n vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{v} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \ldots + v_n \cdot e_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k \cdot e_k$ con $v_1, v_2, \ldots, v_n$ componenti di $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$v_k = \underline{v} \cdot e_k$$

Con le Serie di Fourier su esegue la stessa operazione sullo spazi $\mathbf{C^0}([-\pi, \pi]\,; \mathbb{R})$. Come elementi di base si ha un insieme di funzioni:

1. $c_0 : x \to 1$
2. $c_1 : x \to cos(x)$
3. $c_2 : x \to cos(2x)$
4. $\ldots$
5. $c_n : x \to cos(nx)$
6. $s_1 : x \to sin(x)$
7. $s_2 : x \to sin(2x)$
8. $\ldots$
9. $s_n : x \to sin(nx)$

Si possono osservare due cose:

1. Sono tutte funzioni linearmente indipendenti, poiché l'unica combinazione lineare di questi elementi che da l'elemento nullo è quella a coefficenti tutti nulli.

Definizione 20.41
Il prodotto scalare in $\mathbf{C^0} \risingdotseq \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ Altre simbologie usate sono: $f \bullet g$, $(f|g)$

Osservazione 20.42
linearità

$$\langle (\alpha \cdot f + \beta \cdot g), h \rangle = \int_{-\pi}^{pi} (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) \cdot h(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{pi} [\alpha \cdot f(x) \cdot h(x) + \beta \cdot g(x) \cdot h(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \alpha \int_{-\pi}^{pi} \cdot f(x) \cdot h(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_{-\pi}^{pi} \cdot g(x) \cdot h(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

Ripetiamolo stesso ragionamento applicato in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^n$ per ricavare le componenti, possiamo fare questo perché abbiamo una base e abbiamo definito un prodotto scalare.
Se $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) \Rightarrow$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dxs = \frac{1}{\pi} \langle f, c_0 \rangle$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \langle f, c_k \rangle$$

$$b_k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \langle f, s_k \rangle$$

Quindi come prima le componenti di un vettore si ottengono moltiplicando(prodotto scalare) il vettore per gli elementi della base.
PER IL LEMMA:

$$\langle c_h, c_k \rangle = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ 2\pi & 0 = h = k \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$$

$$\langle c_h, s_k \rangle = 0$$

$$\langle s_h, s_k \rangle = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$$

Il prodotto scalare di elementi diversi è nullo quindi la base è ortogonale, ma non è ortonormale in quanto il prodotto scalare tra due elementi diversi della base non è unitario.(ecco perché gli $\frac{1}{\pi}$) e $\frac{a_0}{2}$)
In generale in geometria non è difficile normalizzare una base, è sufficiente dividere tutti gli elementi per la loro norma. In questo caso decidiamo di non applicare questo ragionamento poiché la norma vale $\sqrt{\pi}$ e se normalizziamo dobbiamo aggiungere questo termini ......
Il prodotto scalare in $\mathbf{C^0}$ è molto legato alla d_2 infatti:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx}$$

Continuano le analogie:
In $\mathbb{R}^2$ ....
In $\mathbb{R}^3$ ....
.....
......
......
.....
Passando in dimensione infinita, abbiamo una funzione f (come vettore $\underline{v}$) nello spazio, e fare il polinomio di Fourier vuole dire proiettare la funzione f in uno spazio fatto dai primi $2n+1$ elementi della base che è uno spazio di dimensione finita.

Esempio:::: Non ogni funzione ammette coefficienti di Fourier finiti. La funzione

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

non ammette coefficienti di Fourier finiti.
Esempio::: Una funzione può ammettere tutti i coefficienti di Fourier finiti ed una serie di Fourier convergente, ma ad un limite diverso da f.La funzione.

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ha coefficienti di Fourier

$$a_k = 0 \quad \forall k, \qquad \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ pari} \end{cases}$$

e serie di Fourier

$$F_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{sin(2h+1)x}{2h+1}$$

questa serie converge puntualmente in 0 ma $F_f(0) \neq f(0)$

ESEMPIO:: Due funzioni diverse possono avere gli stessi coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \pi & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Osservazione 20.43
Sia f una funzione pari $\Rightarrow bn = 0 \forall n = 1, 2, \ldots, +\infty$

Osservazione 20.44
Sia f una funzione dispari $\Rightarrow an = 0 \forall n = 0, 1, , \ldots, +\infty$

Osservazione 20.45
Siano

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$$

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (\alpha_n cos(nx) + \beta_n sin(nx))$$

Allora

$$F(x) = (f + \varphi)(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (A_n cos(nx) + B_n sin(nx))$$

con $A_n = a_n + \alpha_n$. $B_n = b_n + \beta_n$. cioè i coefficienti di Fourier dipendono linearmente dalla funzione.
Esempio::: $B_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + \varphi(x)) sin(3x)\,\mathrm{d}x =$
$\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(3x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) sin(3x)\,\mathrm{d}x \right] = b_3 + \beta_3$
Sia $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \liminf_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n cos(nx))$ allora $F = 4f = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (A_n cos(nx) + B_n cos(nx))$ con $A_n = 4a_n$, $B_n = 4b_n$
ESEMPIO Esempio:::$B_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4f(x) sin(3x)\,\mathrm{d}x = 4b_3$

Definizione 20.46 (Funzione Continua a Tratti)
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, una funzione $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Allora f è **continua a tratti** se esiste un numero finito di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tali che:

1. In ogni punto di $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ f è continua
2. $i = 1, 2, \ldots, n$ esistono finiti entrambi i limiti:

$$\lim_{x \to x_i^-} f(x) \qquad \lim_{x \to x_i^+} f(x)$$

Osservazione 20.47
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e data una funzione $f : A \mapsto \mathbb{R}$, se x_0 è punto interno ad A, è comoda la notazione

$$f(x-) = \lim_{\xi \to x^-} f(\xi) \quad f(x+) = \lim_{\xi \to x^+} f(\xi)$$

Ovviamente se f è continua in x allora $f(x-) = f(x) = f(x+)$ ESEMPIII:::
GRAFICO::::

GRAFICO::::
....
....
....
....

Proposizione 20.48
Sia $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$, f è continua a tratti $\Rightarrow$ esistono finiti tutti i coefficienti di Fourier di f

Proposizione 20.49
Sia $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$,
-f è continua a tratti
-$\forall \overline{x} \in [-\pi, \pi]$, esistono finiti:

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} = \frac{f(x) - f(\overline{x}-)}{x - \overline{x}}$$

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} = \frac{f(x) - f(\overline{x}+)}{x - \overline{x}}$$

Allora:
La serie di Fourier di f converge puntualmente in $\overline{x}$ e $F_f(\overline{x}) = \frac{f(\overline{x}-) - \overline{x}+}{2}$ (che è il punto medio del salto.)

Osservazione 20.50
NIENTE CUSPIDI E NIENTE TANGENZE VERTICALI.

Corollario 20.51
Sia $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$,
f è continua a tratti.
Sia $\overline{x} \in [-\pi, \pi]$ un punto in cui f è derivabile. Allora la serie di Fourier F_f di f converge in $\overline{x}$ e $F_f(\overline{x}) = f(\overline{x})$

Proposizione 20.52
Sia $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$.Se:

- $f \in \mathbf{C^0}([-\pi, \pi]\,; \mathbb{R})$
- $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-\pi, \pi]$ t.c.:
  - f è derivabile in x
  - f' continua in x
- $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ e $\forall x \in [-\pi, \pi]$ esistono finiti

$$\lim_{x \to x_i^-} \frac{f(x) - f(x_i-)}{x - x_i} \qquad \lim_{x \to x_i^+} \frac{f(x) - f(x_i+)}{x - x_i}$$

Allora
La serie di Fourier F_f di f converge a f uniformemente su $[-\pi, \pi]$

Corollario 20.53
Sia $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$, e $f \in \mathbf{C^1}([-\pi, \pi]\,; \mathbb{R})$.
Allora la serie di Fourier di F_f di f converge uniformemente a f su $[-\pi, \pi]$.

Capitolo 5

Equazioni Differenziali

21 Preliminari

Equazione è un uguaglianza in cui c'è almeno una incognita.
Equazione **Funzionale** è un'equazione le cui incognite sono funzioni.

Nota. In un equazione funzionale si cerca l'uguaglianza di: insieme di arrivo, insieme di partenza, corrispondenza.

Equazione **Differenziale** è un particolare tipo di equazione (funzionale) che stabilisce una relazione tra la funzione incognita e le sue derivate.

Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria)
Si dice **Equazione Differenziale Ordinaria** (*Ordinary Differential Equation, ODE*) **di ordine** n nella funzione incognita $x \in \mathbb{R}^k$ un espressione del tipo:

$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \tag{21.1}$$

Nota. La dipendenza delle x dalla t non è indicata esplicitamente, ma si potrebbe scrivere $x(t)$, rigorosamente nella stessa variabile t per tutte le $x^{(i)}$.

Nella Eq. (21.1):

- $A \subseteq \mathbb{R}^{1+(1+n)k}$
- $t \in I$ con I intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$
- $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$

Dimensionalmente, si può osservare che m e k caratterizzano il problema e son dunque libere. La dimensione di partenza $1 + (1 + n)k$ del problema è obbligata e dovuta alla somma di:

- $1 = \dim(t)$
- $(1 + n)k$
  - $(1 + n)$ il numero totale delle funzioni: n derivate ed x stessa
  - k la dimensione dell'insieme **di arrivo** di ogni funzione incognita $x^{(i)}$

Nota. Alternativamente si può indicare f come $f : \boldsymbol{I} \times A \mapsto \mathbb{R}^m$ a patto di considerare $A \subseteq \mathbb{R}^{(1+n)k}$

Soluzione di questa equazione differenziale è una qualunque funzione $x : I \to \mathbb{R}^k$ (in quanto la x è funzione di $t \in I$) definita sull'intervallo I, derivabile n volte in I (e dunque continua in I) e tale che $\forall t \in I$

$$(t, x, x', \dots, x^{(n)}) \in A$$

$$f(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

Soluzione massimale di un equazione differenziale ordinaria è una soluzione $x_m : I_m \to \mathbb{R}^k$ tale che nessuna soluzione possa essere definita in un intervallo I con $I_m \subsetneq I$. Cioè è la soluzione definita sull'intervallo maggiore possibile.

Nota. Dalla definizione segue che $x(t) \in \mathring{A}$, in quanto se non fosse in $\mathring{A}$ sarebbe di frontiera, ma un punto di frontiera non può essere derivabile.

Nota. Un'equazione differenziale ammette, in generale, infinite soluzioni, come verificato in Esempio 21.2

Nota. La soluzione di un'equazione differenziale può, analiticamente, essere definita su un intervallo $J \supset I$ (I intervallo di definizione della funz. differenziale f). Non ha però senso considerare il suo comportamento al di fuori di I, in quanto non ha valore dal punto di vista del sistema. Per questo motivo J sarà sempre considerato $J \subseteq I$

Nota. dalla Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria) segue che l'insieme di definizione della soluzione di un'equazione differenziale può essere solo un intervallo

Esempio 21.2
Un'equazione differenziale ammette in generale infinite soluzioni. Ad esempio, $x' = 1$ è risolta da $x(t) = t + \alpha$ per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$

Esercizio 21.3
La soluzione di un'equazione differenziale ordinaria non può avere 3 asintoti.

Soluzione. La soluzione x è funzione continua. In quanto continua non può avere più di 2 asintoti verticali e in quanto funzione non può avere più di 2 asintoti orizzontali. ■

Definizione 21.4 (Equazione Differenziale Ordinaria in Forma Normale)
Un'equazione differenziale è in **Forma Normale** se e solo se si presenta nella forma

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$$

Cioè se la derivata di ordine più alto è isolata al primo membro.

Osservazione 21.5
Lo studio di un'equazione differenziale ordinaria in forma non normale inizia generalmente con l'utilizzo del Teorema 10.4 (Teorema della Funzione Implicita) insieme ai teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie in forma normale

Nota. Nel seguito saranno considerate **solo** Equazioni Differenziali Ordinarie in Forma Normale.

Proposizione 21.6
ogni equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine n è equivalente a una equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine 1, cioè in cui compaiono solamente derivate prime.

Dimostrazione. Data l'equazione

$$x^{(n)} = g(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$$

sia y il vettore $y = \begin{bmatrix} x & x' & x'' & \cdots & x^{(n-1)} \end{bmatrix}$. Abbiamo ora che le componenti del vettore sono

$$y_1 = x \qquad y_2 = x' \qquad y_3 = x'' \qquad \ldots \qquad y_n = x^{(n-1)}$$

ed al contempo

$$y_1' = x' = y_2 \qquad y_2' = x'' = y_3 \qquad y_3' = x''' = y_4 \qquad \cdots \qquad y_{n-1}' = x^{(n-1)} = y_n$$

Cioè, differenziando l'$i-esimo$ elemento (funzione) del vettore y, mi "sposto" all'elemento (funzione) $i + 1$ di y. A questo punto tutti gli elementi di y sono equazioni differenziali del primo ordine.
Quindi l'equazione può essere scritta come il seguente sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ \vdots & \\ y_n' &= g(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

□

Esempio 21.7
Posto $n = 2$, si ha $x'' = f(t, x, x')$. Come nella dimostrazione della Proposizione 21.6, si pongono $X' = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$
Da cui $X' = f(t, X)$

Definizione 21.8 (Problema di Cauchy del Primo Ordine)
Si dice Problema di Cauchy del Primo Ordine il problema di determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, soddisfacente ad una condizione iniziale.

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dove $f : I \times A \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $t_0 \in \mathring{I}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$.
Soluzione di un problema di Cauchy è una funzione $x : J \to \mathbb{R}^n$, definita in un intervallo J contenente t_0 nella sua parte interna, quindi $t_0 \in J \subseteq I$.
La funzione x è soluzione dell'equazione differenziale $x' = f(t, x)$ ed è tale che:

1. $x(t_0) = x_0$
2. $x(J) \subseteq A$
3. x derivabile (in quanto soluzione equazione differenziale)

Quindi il problema di Cauchy aggiunge un vincolo ad un'equazione differenziale, così da isolare una singola soluzione.

Nota. Si considera un intervallo perché l'idea è di studiare l'andamento nel tempo e sarebbe difficile far previsioni con "buchi" di tempo

Nota. La condizione $x(t_0) = x_0$ viene spesso definita condizione iniziale, malgrado la Definizione 21.8 (Problema di Cauchy del Primo Ordine) indichi che $t_0 \in \mathring{I}$, dunque a rigore non dovrebbe essere sulla frontiera di I. Questo è dovuto al fatto che, spesso, t_0 è proprio all'inizio dell'intervallo in cui si cerca la soluzione dell'equazione.
Comunque i risultati esposti continuano a valere con piccole modifiche alle dimostrazioni.

Definizione 21.9 (Problema di Cauchy di Ordine n)
Si dice problema di Cauchy di ordine n il seguente problema:
Determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n soddisfacente a n condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = \alpha_0 \\ x'(t_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Nota. Le condizioni iniziali devono essere assegnate tutte nello steso istante.

Esempio 21.10
il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ammette, tra le altre, anche le seguenti soluzioni, tecnicamente distinte tra loro

$$\begin{array}{cccccc} f_1 & : & [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^t \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} f_2 & : & [-2, 10] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^t \end{array}$$

La soluzione massimale è

$$\begin{array}{rccc} f_M & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & e^t \end{array}$$

con intervallo di partenza $\mathbb{R}$, avente evidentemente diametro maggiore possibile.

Proposizione 21.11
Ogni problema di Cauchy di ordine n è equivalente ad un problema di Cauchy del primo ordine

Dimostrazione. Dalla Proposizione 21.6 □

Proposizione 21.12
Ogni problema di Cauchy del primo ordine con secondo membro continuo

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è equivalente ad un'equazione integrale del tipo

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, x(\tau)\big)\Big)\,\mathrm{d}\tau \tag{21.2}$$

Dimostrazione. Integrando ambo i membri della prima equazione del problema di ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} (x')\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))\,\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))\,\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))\,\mathrm{d}\tau$$

□

Definizione 21.13 (Equazione di Volterra)
La Eq. (21.2) viene denominata **equazione integrale di Volterra**.

> ***Nota.*** Questa equazione ha senso anche per alcune funzioni f non non continue, ma solo misurabili nel primo argomento. Ne consegue che nei Teoremi di esistenza ed unicità (locali/globali) l'ipotesi "f continua" può essere sostituita da "f continua a tratti in $t, \forall x$, continua in x e limitata".

Esempio 21.14 (Un Problema di Cauchy senza soluzione)
Sia

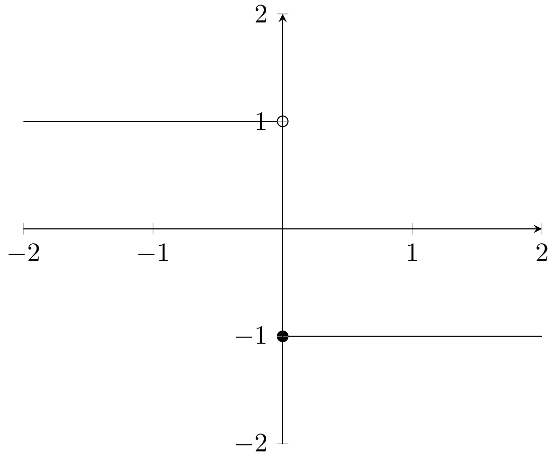
$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} +1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Non ammette soluzioni.

Soluzione.



La f è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma non è possibile trovare una funzione di primo grado, derivabile su tutto $\mathbb{R}$, la cui derivata prima assuma quei valori. Infatti la

$$\begin{cases} x & \text{se } t < 0 \\ -x & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

non è derivabile in $t = 0$, perché le derivate destra e sinistra assumono valori diversi. ■

Esempio 21.15 (Un Problema di Cauchy con infinite soluzioni)
Sia

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ammette le infinite soluzioni

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - a^2) & \text{se } t \in]-\infty, a] \\ 0 & \text{se } t \in [a, b] \\ \frac{1}{4}(t - b^2) & \text{se } t \in [b, +\infty[\end{cases}$$

dove $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq +\infty$

Soluzione. Vedere Esempio 22.6 (Il Baffo/Pennello di Peano) con $x_0 = 0$ e $t_0 = 0$ ■

Osservazione 21.16
Negli esempi precedenti è stata sfruttata la mancanza di regolarità nella dipendenza di f da x.

Viceversa, nella nota alla definizione di equazione di Volterra, si era notato come la dipendenza di f da t sia molto meno critica.

Esercizio 21.17
Sia $s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ data da

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti Problemi di Cauchy, al variare di t_0 (si supponga $t_0 \neq 0, 1$):

$$\begin{cases} x' = s(t) \\ x(t_0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' + x = s(t) \\ x(t_0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = s(t) \cdot s(1 - t) \\ x(t_0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' - x = s(t) \cdot s(1 - t) \\ x(t_0) = 1 \end{cases}$$

Esempio 21.18 (Un Problema non di Cauchy)
Il seguente è un **Problema ai Valori al Contorno**.

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases} \tag{21.3}$$

Questo problema ammette le infinite soluzioni $x(t) = \alpha \cdot \sin t$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sostituendo le condizioni $x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 1$ a quelle nella Eq. (21.3), si ottiene l'unica soluzione $x(t) = \sin t + \cos t$. Con $x(0) = x(\pi) = 1$ non ci sono soluzioni.

Osservazione 21.19 (Problema ben posto nel senso di Hadamard)
in generale un problema si dice **ben posto** o **ben posto nel senso di Hadamard** ogniqualvolta la soluzione:

1. esiste
2. è unica
3. dipende con continuità dai dati

22 Teoria Locale

Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana)
Una funzione $f : I \times A \to \mathbb{R}^n$, con I intervallo in $\mathbb{R}$ e A aperto in $\mathbb{R}^n$, si dice **Localmente lipschitziana** in $x \in A$ **uniformemente** rispetto a $t \in I$ se

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 e L > 0 : \forall x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A), \forall t \in I$$

vale che

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq L \cdot \|x_2 - x_1\| \qquad o, ugualmente \qquad \frac{\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|} \leq L$$

Una funzione è uniformemente lipschitziana (**unif. lips.**) in un'intervallo I se, in parole povere, è possibile individuare per ogni punto di I una sfera B di raggio r in cui la funzione è lipschitziana.

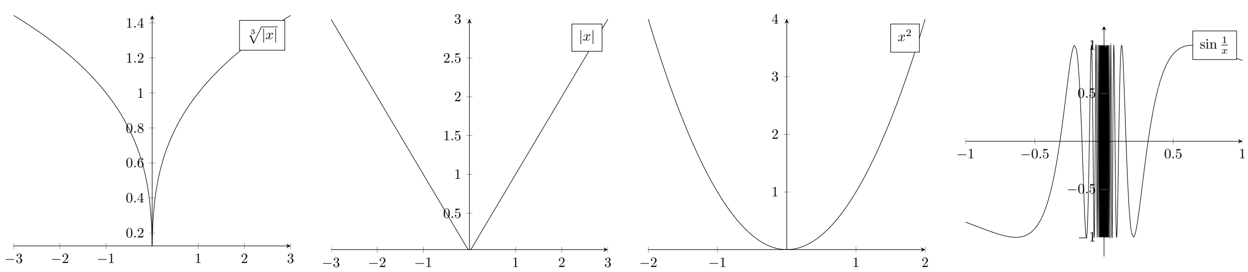
Nota. I termini *localmente* e *uniformemente* son giustificati dal fatto che:

- La località è data dalla limitazione di x_1, x_2 all'interno di $(B(x_0, r) \cap A)$
- L'uniformità è data da $\forall t \in I$

Quindi la f rimane lips. indipendentemente dalla variazione di t (quindi $\forall t \in I$), ma solo per $x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A)$ **non** $\forall x \in A$.

Nota. Se f **lips** su $A \implies f$ **loc. lips.** su A.
Concettualmente ci si porta nel caso della sfera B con r pari al raggio di $I \times A$ su cui è definita f

Esempio 22.2



(a) No Loc. lips. No lips.

(b) Sì loc. lips. Sì lips.

(c) Sì loc. lips. No lips.

(d) Sì loc. lips. No lips.

Esempio 22.3
La funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ è **loc. lips.** su $\mathbb{R}$ ma non è **globalmente lips.** su $\mathbb{R}$. Vedasi Definizione 3.31 (Funzione Lipschitziana) e grafico della f in Esempio 22.2

Proposizione 22.4
Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Ogni funzione $f \in \mathbf{C^1}(I \times A; \mathbb{R}^n)$ è loc. lips. in $x \in A$ uniformemente rispetto a $t \in I$

Dimostrazione. Il prodotto cartesiano $I \times A$, essendo prodotto cartesiano di aperti in $\mathbb{R}^n$ con metrica euclidea (si suppone sia in uso questa metrica), è a sua volta un aperto. Questo risultato è dovuto alla definizione stessa del prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con metrica euclidea.
Chiamiamo ora $S = I \times A$ l'insieme di partenza della f. Grazie alla Proposizione 2.31 (Poligonale Congiungente due Punti) sappiamo che esiste una poligonale interamente contenuta in S congiungente due qualunque punti dell'aperto S.
È ora possibile applicare il Teorema 8.36 (degli Accrescimenti Finiti) ad uno qualunque dei segmenti formanti la poligonale appena individuata. Vale quindi la

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{x \in S} \|Df(x)\| \, \|x_1 - x_0\|$$

che è direttamente comparabile alla Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana) della funzione in ciascuno dei segmenti della poligonale, da cui la tesi. □

22.1 Esistenza e Unicità

Proposizione 22.5 (Teorema di Peano)
Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $f : I \times A \in \mathbb{R}^n$ soddisfacente alle ipotesi:

1. $t_0 \in \mathring{I}, x_0 \in \mathring{A}$
2. $f \in \mathbf{C^0}(I \times A; R^n)$

inoltre $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$, per Definizione 21.8 (Problema di Cauchy del Primo Ordine).
Allora esiste un $\delta > 0$ tale che esiste soluzione $x : J \mapsto A$ del problema di Cauchy con $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

> ***Nota.*** δ è un valore arbitrario che serve solo ad identificare l'intervallo J a cui appartiene t_0, non è dato modo per identificare quel δ

Inoltre:

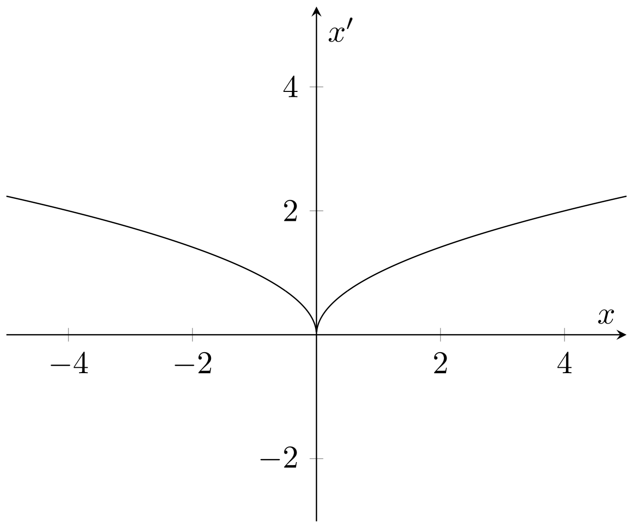
- $J \subseteq I$ da nota definizione 47, dunque $\varphi(J) \subseteq A$
- $\varphi(t_0) = x_0$
- φ derivabile e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

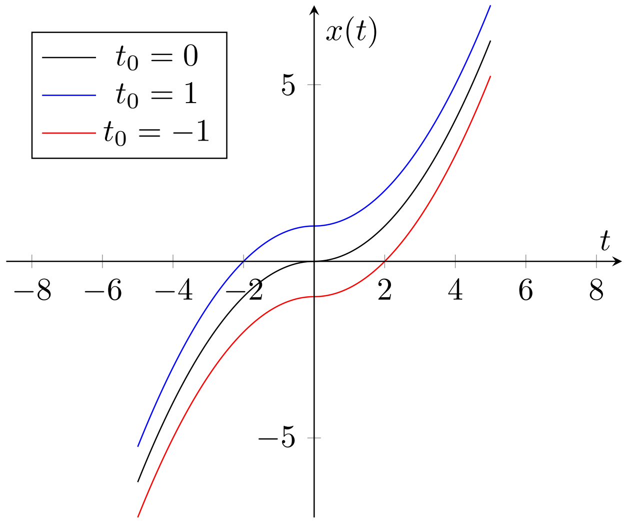
Dimostrazione. Non richiesta □

Esempio 22.6 (Il Baffo/Pennello di Peano)
Trovare le soluzioni del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Soluzione.





(a) Posto $x_0 = 0$

Nota. Con $t_0 = 0$ l'equazione non dipende da t, cioè il sistema è **Autonomo**. Vedere Definizione 24.1 (Equazione Autonoma) per le implicazioni nelle note.

Nota. Con $x_0 = 0$ si ha $x(t) = 0$, che è soluzione $\forall t$, si procede però nel cercare altre soluzioni.

f è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, dunque per Proposizione 22.5 (Teorema di Peano) esiste una soluzione del Problema. Essendo $x' = \sqrt{|x|}$ un'equazione a variabili separabili, si ottiene (considerando $x \geq 0$, quindi $|x| = x$):

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} = 1$$
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)}{\sqrt{x(\tau)}} \, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} 1 \, \mathrm{d}\tau$$
$$2\big(\sqrt{x(t)} - \sqrt{x(t_0)}\big) + c_1 = t - t_0 + c_2$$

Riunendo c_1 e c_2 in un'unica costante b

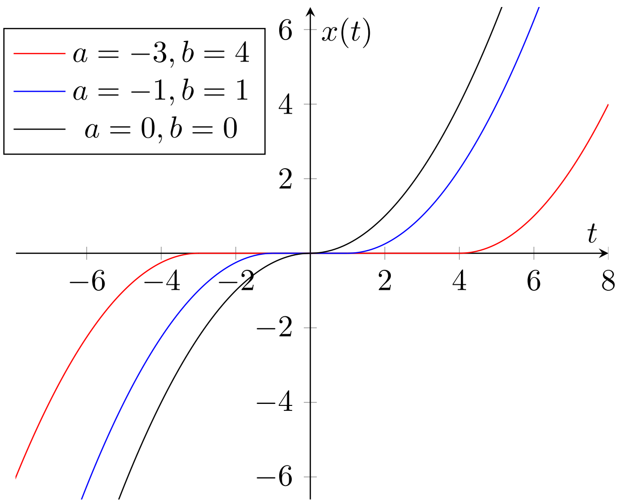
$$2\big(\sqrt{x(t)} - \sqrt{x(t_0)}\big) + b = t - t_0$$
$$2\big(\sqrt{x(t)} - \sqrt{x(t_0)}\big) = t - t_0 - b$$
$$x_a(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{1}{2}(t - t_0 - b)\right)^2$$
$$x_a(t) = x_0 + \frac{1}{4}(t - t_0 - b)^2$$

Aggiungendo anche la soluzione per $x < 0$ (con la costante a, stavolta), si ottiene

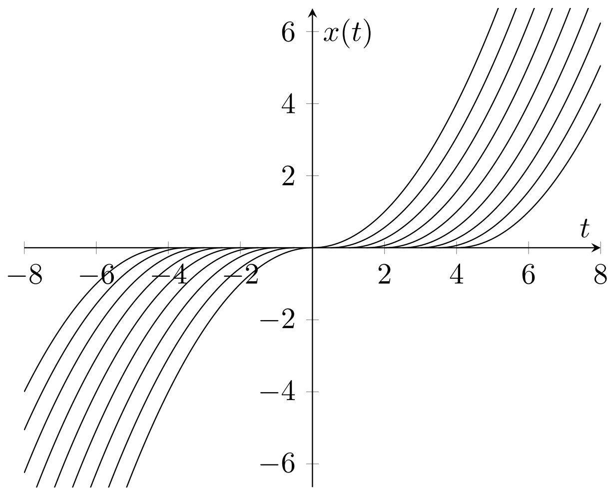
$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{4}(t - t_0 - a)^2 & \text{se } t \in \,]-\infty, a] \\ x_0 & \text{se } t \in [a, b] \\ x_0 + \frac{1}{4}(t - t_0 - b)^2 & \text{se } t \in [b, +\infty[\end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato infinite soluzioni, ciò evidenzia come il teorema di Peano non garantisca affatto unicità.

I seguenti grafici son tracciati con $x_0 = 0$ e $t_0 = 0$



(a) Differenti valori di a e b



(b) Il comportamento "a pennello" con molteplici a e b

■

Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte)
Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $f : I \times A \to \mathbb{R}^n$ soddisfacente le ipotesi:

1. $t_0 \in \mathring{I}$, $x_0 \in \mathring{A}$. Inoltre da Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria) e note successive: I intervallo e $I \subseteq \mathbb{R}^n$, inoltre $A \subseteq \mathbb{R}^n$
2. $f \in \mathbf{C^0}(I \times A; \mathbb{R}^n)$
3. f è localmente Lipschitziana in $x \in A$ uniformemente rispetto a $t \in I$

Nota. Le prime due ipotesi garantiscono l'esistenza, grazie al Proposizione 22.5 (Teorema di Peano). La terza ipotesi rende il teorema più restrittivo, ma permette anche di giungere ad una conclusione più forte (ed utile).

Nota. Per verificare l'ultima ipotesi si ricordino Proposizione 22.4 e se f **lips.** $\implies$ f **loc. lips.**

Allora ho i seguenti risultati:

1. **Esistenza**:
   da Proposizione 22.5 (Teorema di Peano) $\exists \delta > 0$, con cui si identifica un $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Inoltre $\exists\, \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ è soluzione con le proprietà date da Peano:
   - $J \subseteq I$ da nota definizione 47, dunque $\varphi(J) \subseteq A$
   - $\varphi(t_0) = x_0$
   - φ derivabile e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$
2. **Unicità**
   Se $\exists\, J_1, J_2$ intervalli con $J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I$ e $\exists\, \varphi_1 : J_1 \to \mathbb{R}^n, \varphi_2 : J_2 \to \mathbb{R}^n$ soluzioni con le seguenti proprietà
   - $J_1 \subseteq I$, $J_2 \subseteq I$ da nota definizione 47, dunque $\varphi_1(J_1) \subseteq A$ e $\varphi_2(J_2) \subseteq A$

     Nota. Si può osservare che, sicuramente, $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, poiché entrambi gli insiemi contengono almeno t_0 nella loro parte interna.
   - $\varphi_1(t_0) = x_0$, $\varphi_2(t_0) = x_0$

  - φ_1, φ_2 derivabili e $\left\langle \begin{array}{l} \varphi_1'(t) = f(t, \varphi_1(t))\, \forall t \in J_1 \\ \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_2(t))\, \forall t \in J_2 \end{array} \right.$

   Allora $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \quad \forall t \in (J_1 \cap J_2)$
   Cioè, se esistono due soluzioni, allora esse coincidono ovunque siano entrambe definite.

3. **Dipendenza continua dai dati**
   Questa tesi verrà esposta successivamente in Teorema 22.13 (Teorema di Cauchy Locale - Seconda Parte)

Dimostrazione. (**Tesi 2**)

> ***Nota.*** L'idea alla base della dimostrazione è che vogliamo riuscire a trasformare il problema di Cauchy in un problema di punto fisso mediante una funzione avente come parametro x stesso.

Da Definizione 21.13 (Equazione di Volterra) sappiamo che la prima equazione del problema in ipotesi corrisponde all'integrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, x(\tau)\big) \Big)\, \mathrm{d}\tau$$

Definiamo quindi T, funzione del tipo

$$\begin{array}{cccc} T & : & X & \to & X \\ & & \big(T(x)\big)(t) & \mapsto & x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau \end{array} \tag{22.1}$$

Abbiamo così ottenuto un problema di punto fisso $(x = T(x))$. Ora bisogna determinare l'insieme di partenza e l'insieme di arrivo in maniera utile per la dimostrazione. Per poter applicare il Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni) serve che lo spazio di partenza e di arrivo corrispondano.
Prendiamo:

- $\delta_1 > 0$ tale che $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \subseteq I$
- $\rho > 0$ tale che $\overline{B(x_0, \rho)} \subseteq A$
- L costante di Lipshitz di f in $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \times \overline{B(x_0, \rho)}$. È possibile individuare L in quanto f loc. lips. per ipotesi in $I \times A$, e dunque **loc. lips. in sottointervalli/insiemi**

Sia ora

$$V = \sup \Big\{ \|f(t, x)\| \ : \ t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]\,, x \in \overline{B(x_0, \rho)} \Big\}$$

> ***Nota.*** V è il maggiore tra i valori assunti dalla derivata prima $\big(x' = f(t, x)\big)$ di una qualsiasi delle soluzioni x contenute nella sfera $\overline{B(x_0, \rho)}$. È massimo di funzione continua (per ipotesi 2) in un compatto (per ipotesi 1, essendo in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e per Proposizione 2.34).

Definiamo dunque un generico $\delta > 0$

$$\delta < \min \left\{ \delta_1, \frac{\rho}{V}, \frac{1}{L} \right\} \tag{22.2}$$

> ***Nota.*** δ è strettamente minore del min perché poi servirà a trovare una contrazione, dunque dovrò avere sicuramente $\delta L < 1$

- δ_1 è raggio di un generico intervallo incluso in I di partenza. δ deve essere minore di δ_1 in quanto non è possibile uscire dall'intervallo I

- $\frac{\rho}{V}$ è rapporto tra il raggio di $\overline{B(x_0, \rho)}$, sfera interamente contenuta in A, e V, valore massimo di f ridotta all'intervallo di cui sopra e alla sfera $\overline{B}$.
  Considerando il reciproco $\frac{V}{\rho}$, possiamo vederlo come una sorta di nuova costante di lips., riportata ad un intervallo più piccolo, non dipendente però da $\Delta f(x)$, ma dal valore di $f(x)$ stessa.

- $1/L = \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|f(t,x_2) - f(t,x_1)\|}$ dalla Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana), perché f loc. lips. per ipotesi. Dà un'idea di quanto vari la x rispetto alla variazione della $f(x)$

Questo δ, dunque, rappresenta, dal punto di vista concettuale, quale sia la più restrittiva (min) tra tutte le possibili variazioni della $f(x)$ rispetto alla x.
A questo punto, usando δ, definiamo lo spazio X, generato da tutte le funzioni continue sul nuovo intervallo a valori entro una sfera centrata in x_0 con lo stesso raggio di $\overline{B}$

$$X = \left\{ g \in \mathbf{C^0}([t_0 - \delta, t_0 + \delta]\,; \mathbb{R}^n) : \forall t\, \|g(t) - x_0\| \leq \rho \right\}$$

Nota. Si scelgono le funzioni continue ($\in \mathbf{C^0}$) perché serve x continua per rendere valida l'equivalenza della funzione di Volterra con il problema di Cauchy. Stando alla nota alla definizione di equazione di Volterra sarebbe possibile sceglierla non continua, ma non si considera il caso.

Possiamo passare al punto chiave della dimostrazione, verifichiamo le ipotesi del Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni):

- (X, d) è **spazio metrico completo**
  (X, d_X) è spazio metrico completo se considerato con la distanza della convergenza uniforme $d_X = d_{\mathbf{C^0}}$ per il Corollario 19.34. □

- T è **definita** (è possibile calcolarla)
  L'abbiamo definita all'inizio dall'equazione di Volterra □

- T è $\boldsymbol{X \mapsto X}$
  L'insieme di partenza è valido in quanto sottoinsieme dell'insieme su cui $f(t, xt)$ era definita.
  Per verificare che $y = T(x)$, bisogna verificare che $y \in \mathbf{C^0}([t_0 - \delta, t_0 + \delta]\,; \mathbb{R}^n)$ e che $y(t) \in \overline{B(x_0, \rho)}$ $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

  Dimostrazione. $y \in \mathbf{C^0}$ nell'intervallo specificato per il Teorema Fodamentale del Calcolo Integrale.
  La seconda condizione si verifica prendendo la Eq. (22.1) e calcolando la norma di entrambi i termini

  $$\|y(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right\|$$

  posso ora minorare con il valore assoluto della norma dell'argomento (spiegazione in Esercizio 22.8)

  $$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau \right| \tag{22.3}$$

  $\|f(\tau, x(\tau))\|$ è sicuramente minorato da V per definizione di quest'ultimo, dunque si ha integrale di costante

  $$\leq V \cdot |t - t_0|$$

  $|t - t_0| \leq \delta$ per definizione di δ

  $$\leq V \cdot \delta$$

  nel caso in cui $\min\left\{\delta_1, \frac{\rho}{V}, \frac{1}{L}\right\} = \frac{\rho}{V}$, allora minorato strettamente da ρ per definizione di δ, altrimenti sicuramente minore per min

  $$< \rho$$

  □

- T è **contrazione**
  Occorre verificare la Eq. (4.1)

Dimostrazione. Per definizione della T e per la proprietà addittiva degli integrali

$$\big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_1)\big)(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, x_2(\tau)\big) - f\big(\tau, x_1(\tau)\big)\Big)\, \mathrm{d}\tau$$

Dunque, passando alla norma di quanto calcolato sopra ed applicando la minorazione spiegata in Esercizio 22.8

$$\left\|\big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_1)\big)(t)\right\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau, x_2(\tau)\big) - f\big(\tau, x_1(\tau)\big)\right\|\, \mathrm{d}\tau\right| \tag{22.4}$$

Per Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana) passo alle funzioni incognite x_i di f (che son le soluzioni dell'equazione differenziale), minorando

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} L \cdot \|x_2(\tau) - x_1(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau\right|$$

Dalla Osservazione 19.19, $\|f-g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup_A |f-g| = d_{\mathbf{C^0}}(f,g)$

$$\begin{aligned} &= \left|\int_{t_0}^{t} L \cdot d_X(x_2, x_1)\, \mathrm{d}\tau\right| \\ &= L \cdot |t - t_0| \cdot d_X(x_2, x_1) \end{aligned} \tag{22.5}$$

Quindi, concludendo, possiamo passare dal primo membro della Eq. (22.4) alla distanza d_X, semplicemente per definizione della distanza, cioè

$$\left\|\big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_2)\big)(t)\right\| = d_X\big(T(x_2), T(x_1)\big)$$

Minoriamo questa distanza con la forma appena trovata Eq. (22.5). Per quanto riguarda $|t - t_0|$, passiamo al sup di t nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, cioè δ stesso

$$d_X\big(T(x_2), T(x_1)\big) \leq (\delta \cdot L) \cdot d_X(x_2, x_1)$$

Essendo, per definizione, δ al più pari ad $\frac{1}{L} \implies \delta \cdot L < 1 \implies T$ è contrazione per Definizione 4.1 (Contrazione). □

È ora possibile applicare il Teorema 4.5 (Teorema delle Contrazioni) che garantisce l'**unicità** del punto fisso $x_* \in X$ per la $x = T(x)$, questo implica ovviamente che $T(x)$ abbia un'unica soluzione. Si ha dunque l'unicità della soluzione x del problema di Cauchy in ipotesi sull'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, al quale T è equivalente per definizione in quanto T è Definizione 21.13 (Equazione di Volterra).

Tornando ai J_1, J_2 della Tesi 2:

- Se $(J_1 \cap J_2) \subseteq [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, allora $x_1 = x_2$ in quanto esiste unico punto fisso, come dimostrato sopra.
- Se $(J_1 \cap J_2) \supset [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, allora poniamo

$$t_M = \sup\left\{t \in (J_1 \cap J_2) : \forall \tau \in [t_0, t]\,, x_1(\tau) = x_2(\tau)\right\} \tag{22.6}$$

$$x_M = x_1(t_M) = x_2(t_M)$$

Quindi t_M è l'*ultimo istante* in cui x_1 e x_2 coincidono.

Essendo

- $t_M \in \mathring{J}_1$, $t_M \in \mathring{J}_2 \implies t_M \in \mathring{I}$ da nota definizione 47
- $x_M \in \mathring{A}$ per nota definizione equazione differenziale

ci ritroviamo nelle ipotesi di quanto appena dimostrato, solo che con dei nuovi t ed x. Possiamo dunque giungere alla conclusione che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_M) = x_M \end{cases}$$

ammetta unica soluzione definita in un intorno di t_M del tipo $[t_M - \delta, \boldsymbol{t_M + \delta}]$, cioé x_1 e x_2 coincidono in un intorno di t_M. Il fatto che esista un'unica soluzione oltre t_M (vedere parte in grassetto dell'intorno sopra) contraddice la Eq. (22.6), perché non dovrebbe essere possibile trovare una soluzione in comune *oltre* t_M per come è definito. Ripetendo iterativamente questo procedimento si può semplificare la definizione di t_M a

$$t_M = \min \{\sup J_1, \sup J_2\}$$

Ripetendo quanto fatto con il *primo istante* t_m in cui x_1 e x_2 coincidono, si ottiene

$$t_m = \max \{\inf J_1, \inf J_2\}$$

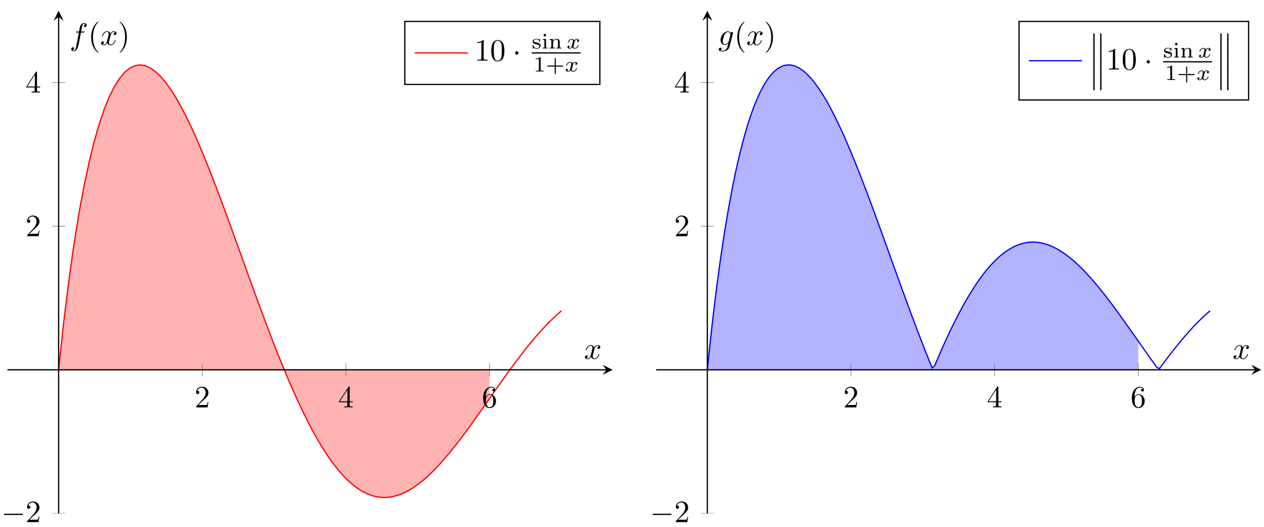
Quindi, prendendo $[t_m, t_M]$, abbiamo identificato $J_1 \cap J_2$ stessa.

Dunque x_1 e x_2 coincidono in $J_1 \cap J_2$, indipendente dalla relazione tra intersezione e intervallo. □

Nota. La scelta di δ in Eq. (22.2) potrebbe essere migliorata utilizzando il Teorema 4.19 (Teorema dell'Iterata Contrazione) e scegliendo $\delta < \min \left\{\delta_1, \frac{\rho}{V}\right\}$, indipendentemente dalla costante di lips. della f

Esercizio 22.8
È necessario il modulo in Eq. (22.3)?

Soluzione. Consideriamo, ad esempio, le seguenti due funzioni



I cui integrali (le aree sottese) assumono questi valori

$$f(x) = \left\| \int_0^6 10 \cdot \frac{\sin x}{1+x} \, \mathrm{d}x \right\| = 4,9413 \qquad g(x) = \left| \int_0^6 \left\| 10 \cdot \frac{\sin x}{1+x} \right\| \mathrm{d}x \right| = 11,935$$

Nella f, viene calcolata la norma del risultato dell'integrazione definita.
Nella g si ha invece la norma della funzione, cioè la parte "sotto l'asse x" della funzione viene ribaltata sopra l'asse dall'operatore norma, come si può vedere dal grafico. Questo implica che, sicuramente, $g \geq f$, in quanto $\int g$ è somma di soli infinitesimi positivi.

Infine, il valore assoluto nella Eq. (22.3) è necessario per evitare che, scambiando gli estremi d'integrazione, si ottenga un valore negativo, che non potrebbe mai essere risultato del primo integrale ■

Esercizio 22.9
Perchè il Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte) è chiamato Teorema di Cauchy **locale**?

Soluzione. È dovuto al fatto che il teorema fornisce informazioni solo in un intorno della condizione iniziale t_0, non è assicurata l'esistenza di un'unica funzione risolvente in un intervallo arbitrario. ∎

Esercizio 22.10
Confrontare l'**unicità** della soluzione di un'equazione differenziale (Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte)) con l'**unicità** della funzione implicita (Teorema 10.4 (Teorema della Funzione Implicita))

22.2 Dipendenza Continua

Nelle applicazioni fisiche, il ruolo della condizione iniziale di un problema di Cauchy è quello del valore assunto da una determinata grandezza fisica, diciamo u_0, misurata al tempo $t = t_0$. Poiché la misura di una grandezza fisica comporta inevitabilmente un errore di rilevazione (per quanto piccolo), è importante caratterizzare quei problemi di Cauchy tali che a fronte di piccole discrepanze $u_0 \neq v_0$ producano soluzioni (I, u) (J, v) che differiscano "poco" in $I \cap J$.

Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall)
Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano:

- $\delta_0 \in [0, +\infty[$
- $\left.\begin{array}{l} k,\, \delta : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \\ k(t) \geq 0,\, \delta(t) \geq 0 \text{ funzioni continue } \forall t \in [a, b] \end{array}\right\}$ cioè $\quad k,\, \delta \in \mathbf{C^0}([a, b], \mathbb{R}^+)$

con:

$$\delta(t) \leq \delta_0 + \int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Allora

$$\delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t k(\tau)\, \mathrm{d}\tau} \quad \forall t \in [a, b]$$

Questo lemma permette di limitare una funzione che soddisfa una disuguaglianza integrale con la soluzione della corrispondente equazione. Ci si porta da una stima implicita di δ (sotto il segno di integrale) ad una stima esplicita.

Dimostrazione. Dividiamo in due casi

- Se $\delta_0 > 0$
  Sia $\Delta(t) = \delta_0 + \int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\, \mathrm{d}\tau$. Prendiamo ora il logaritmo di $\Delta(t)$, cioè $\ln\big(\Delta(t)\big)$, e deriviamolo con le regole classiche

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln\big(\Delta(t)\big) &= \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}\delta_0 + \frac{d}{dt}\int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\, \mathrm{d}\tau}{\Delta(t)} \end{aligned}$$

  Il primo addendo è derivata di costante, il secondo corrisponde all'argomento dell'integrale per teorema fondamentale del calcolo integrale

$$= \frac{0 + k(t)\delta(t)}{\Delta(t)} = k(t)\frac{\delta(t)}{\Delta(t)}$$

  Essendo poi, per ipotesi, $\delta(t) \leq \Delta(t) \implies \frac{\delta(t)}{\Delta(t)} \leq 1$

$$\leq k(t)$$

Integrando il primo e l'ultimo termine

$$\int_a^t \left(\frac{d}{d\tau}\ln\big(\Delta(\tau)\big)\right) \mathrm{d}\tau \leq \int_a^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$\ln\big(\Delta(t)\big) - \ln\big(\Delta(a)\big) \leq \int_a^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

da definizione di $\Delta(t)$, $\Delta(a) = \delta_0$

$$\ln\big(\Delta(t)\big) \leq \ln(\delta_0) + \int_a^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Passando all'esponenziale

$$e^{\ln\left(\Delta(t)\right)} \leq e^{\left(\ln(\delta_0)+\int_a^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)}$$
$$\Delta(t) \leq e^{\ln(\delta_0)} \cdot e^{\int_a^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$
$$\Delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

Da cui la tesi

- Se $\delta_0 = 0$
  Minoriamo, poiché $\delta_0 = 0$, con un $\epsilon > 0$

  $$\delta(t) \leq 0 + \int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leq \epsilon + \int_a^t k(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \forall \epsilon > 0$$

  Essendo $\epsilon > 0$, mi trovo con una forma analoga al caso precedente, dunque

  $$\delta(t) \leq \epsilon \cdot e^{\int_a^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \qquad \forall \epsilon > 0$$

  Dovendo essere $\delta(t) \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$, posso concludere che

  $$\delta(t) \leq 0$$

  Ma, per ipotesi, $\delta(t) \geq 0 \implies \delta(t) = 0$

□

Esercizio 22.12
Verificare che la funzione Δ nella dimostrazione del Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall) è derivabile

Soluzione. È possibile derivare la Δ perché, da Esercizio 7.6, la somma di funzioni derivabili resta derivabile ed il secondo addendo è derivabile per Proposizione 14.1 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) ■

Teorema 22.13 (Teorema di Cauchy Locale - Seconda Parte)
Si considerino i seguenti problemi di Cauchy con condizione iniziale individuata nello stesso istante:

$$(1)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{22.7}$$

con $f, g : I \times A \to \mathbb{R}^n$ e soddisfacenti le ipotesi di Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte), cioè:

1. $t_0 \in \mathring{I}$, $x_0, y_0 \in \mathring{A}$. Inoltre da Definizione 21.1 (Equazione Differenziale Ordinaria) e note successive: I intervallo e $I \subseteq \mathbb{R}^n$, inoltre $A \subseteq \mathbb{R}^n$
2. $f, g \in \mathbf{C^0}(I \times A; \mathbb{R}^n)$

3. f, g sono localmente Lipschitziane in $x \in A$ uniformemente rispetto a $t \in I$

Allora esiste un $\delta > 0$ tale che sull'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ sono definite una soluzione φ di (1) ed una soluzione ψ di (2). Inoltre esiste $L > 0$ t.c. $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ vale:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \, \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}) e^{L|t-t_0|}$$

dove $\|f - g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup_{I \times A} \|f(t,x) - g(t,x)\|$

Nota. Questo significa che, con problemi diversi tra loro, se (x_0 e y_0), (f e g) sono vicine tra loro ("a coppie"), allora sono vicine anche le soluzioni, ma per t vicine. Pensando t come tempo, cioè una delle applicazioni più classiche, questo implica che non si possano fare previsioni a lungo termine con sistemi diversi.

Dimostrazione. Sia f che g soddisfano le ipotesi del Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte), quindi esistono due soluzioni:

- $\varphi : [t_0 - \delta_f, t_0 + \delta_f] \mapsto \mathbb{R}$ del problema (1)
- $\psi : [t_0 - \delta_g, t_0 + \delta_g] \mapsto \mathbb{R}$ del problema (2)

Sia dunque $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, da cui $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e, d'ora in poi, $t \in J$.
Gli insiemi $\varphi(J)$ e $\psi(J)$ sono compatti perché per Teorema 3.15 (Teorema generale di Weierstrass), essendo J compatto. La loro unione è dunque un compatto, come da Esercizio 2.40.
Utilizzando Definizione 21.13 (Equazione di Volterra), passiamo alle equazioni integrali delle Eq. (22.7)

$$(1)\ \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) \Big) \, \mathrm{d}\tau \qquad (2)\ \psi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(g\big(\tau, \psi(\tau)\big) \Big) \, \mathrm{d}\tau \tag{22.8}$$

Sottraiamo ora la (1) alla (2) (in norma)

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &= \left\| x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) \Big) \, \mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t} \Big(g\big(\tau, \psi(\tau)\big) \Big) \, \mathrm{d}\tau \right\| \\ &= \left\| x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big) \Big) \, \mathrm{d}\tau \right\| \end{aligned} \tag{22.9}$$

Minoriamo ora con la proprietà 3 da Definizione 1.8 (Norma)

$$\leq \|x_0 - y_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big) \Big) \, \mathrm{d}\tau \right\|$$

Minoriamo ulteriormente come da Esercizio 22.8

$$\leq \|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big) \right\| \, \mathrm{d}\tau \right|$$

Sommo e sottraggo nell'integrale la quantità $f\big(\tau, \psi(\tau)\big)$ (Si sarebbe potuto fare lo stesso con g)

$$\begin{aligned} &= \|x_0 - y_0\| + \\ &\quad \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) + f\big(\tau, \psi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big) \right\| \, \mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq \|x_0 - y_0\| + \\ &\quad \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - f\big(\tau, \psi(\tau)\big) \right\| \, \mathrm{d}\tau \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau, \psi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big) \right\| \, \mathrm{d}\tau \right| \end{aligned}$$

Possiamo minorare l'argomento del secondo integrale con il $\sup_{I\times A} \|f(t,x)-g(t,x)\|$, dunque può anche essere estratto in quanto sup è costante

$$\begin{aligned}
&\leq \|x_0-y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau,\varphi(\tau)\big)-f\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \left|\sup_{I\times A}\|f(t,\psi(\tau))-g(t,\psi(\tau))\| \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\right| \\
&= \|x_0-y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau,\varphi(\tau)\big)-f\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \left|\sup_{I\times A}\|f(t,\psi(\tau))-g(t,\psi(\tau))\| (t-t_0)\right|
\end{aligned}$$

Essendo sicuramente $t-t_0\leq\delta$ per definizione di quest'ultimo, minoriamo ulteriormente

$$\begin{aligned}
&\leq \|x_0-y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau,\varphi(\tau)\big)-f\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \left|\sup_{I\times A}\|f(t,\psi(\tau))-g(t,\psi(\tau))\| \,\delta\right|
\end{aligned}$$

Ricordando la Osservazione 19.19, sappiamo che $\|f-g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup_{I\times A}\|f(t,x)-g(t,x)\|$, dunque passiamo alla distanza su $\mathbf{C^0}$ e togliamo il valore assoluto, in quanto tutti i valori in esso contenuti sono positivi per definizione

$$\begin{aligned}
&= \|x_0-y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(\tau,\varphi(\tau)\big)-f\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \delta\,\|f-g\|_{\mathbf{C^0}}
\end{aligned}$$

Sia quindi L costante di Lipshitz di f su $J\times\big(\varphi(J)\cup\psi(J)\big)$, possiamo minorare con

$$\leq \|x_0-y_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} L\,\|\varphi(\tau)-\psi(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\right| + \delta\,\|f-g\|_{\mathbf{C^0}}$$

Riordinando

$$= \|x_0-y_0\| + \delta\,\|f-g\|_{\mathbf{C^0}} + \left|\int_{t_0}^{t} L\,\|\varphi(\tau)-\psi(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\right|$$

Applichiamo alla forma ottenuta il Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall). Per ipotesi del Lemma è necessario avere $t\in[a,b]$ con $a<b$. Nell'ultimo integrale rimasto abbiamo $a=t_0$, dunque imponiamo $t\geq t_0$ e procediamo.

Nota. Il procedimento è analogo nel caso opposto e verrà integrato sotto.

Applichamo le seguenti sostituzioni nella formula del Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall):

- $k(\tau)=L$
- $\delta(\tau)=\|\varphi(\tau)-\psi(\tau)\|$
- $\delta_0=\|x_0-y_0\|+\delta\,\|f-g\|_{\mathbf{C^0}}$ (tutti gli altri addendi)

Possiamo dunque minorare ulteriormente la formula precedente con

$$\begin{aligned}
&\leq (\|x_0-y_0\|+\delta\,\|f-g\|_{\mathbf{C^0}})e^{\int_{t_0}^{t} L\,\mathrm{d}\tau} \\
&= (\|x_0-y_0\|+\delta\,\|f-g\|_{\mathbf{C^0}})e^{L(t-t_0)}
\end{aligned}$$

Riprendendo il primo elemento del treno di disuguaglianze Eq. (22.9), si ottiene infine

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\| \leq (\|x_0-y_0\|+\delta\,\|f-g\|_{\mathbf{C^0}})e^{L(t-t_0)}$$

Inseriamo ora il valore assoluto all'esponente per tener in considerazione anche il caso in cui $t\leq t_0$

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\| \leq (\|x_0-y_0\|+\delta\,\|f-g\|_{\mathbf{C^0}})e^{L|t-t_0|}$$

$\square$

Nota. Con il Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte) ed il Teorema 22.13 (Teorema di Cauchy Locale - Seconda Parte) si verifica se un Problema di Cauchy rispetta la Osservazione 21.19 (Problema ben posto nel senso di Hadamard).

Esercizio 22.14
Esibire una dimostrazione dell'unicità della soluzione di un Problema di Cauchy alternativa al Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte) e basata sul Teorema 22.13 (Teorema di Cauchy Locale - Seconda Parte).

Esercizio 22.15
Enunciare il Teorema 22.13 (Teorema di Cauchy Locale - Seconda Parte) come risultato sulla continuità dell'**operatore di soluzione** di un Problema di Cauchy.

Esempio 22.16
Al variare di $p \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = p \end{cases}$$

ha soluzione $x_p(t) = p \cdot e^t$.

- Se $t \to T \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{p\to 0}\left(\lim_{t\to T}(p \cdot e^t)\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to T}\left(\lim_{p\to 0}(p \cdot e^t)\right) = 0$$
I risultati coincidono, quindi c'è continuità nel parametro.

- Se $T \to +\infty$:
$$\lim_{p\to 0}\left(\lim_{t\to +\infty}(p \cdot e^t)\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to +\infty}\left(\lim_{p\to 0}(p \cdot e^t)\right) = 0$$
I risultati son differenti, ma non solo, infatti stimando con parametri diversi mi troverei in questa situazione:
$$|x_{p_1}(t) - x_{p_2}(t)| = |p_1 - p_2|\, e^t \tag{22.10}$$
Cioè una distanza "esponenziale" tra le due soluzioni.

Nota. In questo esempio abbiamo $f(t,x) = x$, quindi $L = 1$, infatti L stessa non appare nella Eq. (22.10).

Esempio 22.17
Al variare di $p \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = p \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione $x_p(t) = p \cdot t$, cioè parametri p diversi danno rette con inclinazioni diverse.

- Se $t \to T \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{p\to 0}\left(\lim_{t\to T} x_p(t)\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to T}\left(\lim_{p\to 0} x_p(t)\right) = 0$$
I risultati coincidono, quindi c'è continuità nel parametro.

- Se $T \to +\infty$:
$$\lim_{p\to 0}\left(\lim_{t\to +\infty} x_p(t)\right) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to +\infty}\left(\lim_{p\to 0} x_p(t)\right) = 0$$
Essendo diversi, non c'è continuità.

Nota. Questo esempio evidenzia come la dipendenza continua sussista solo su intervalli finiti.

23 Teoria Globale

Esempio 23.1 (Un Problema di Cauchy senza soluzione globale)
Si trovi la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{23.1}$$

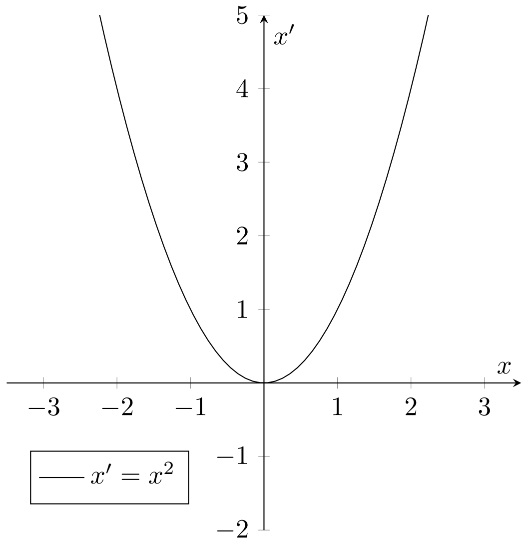
Essendo a variabili separabili, procediamo

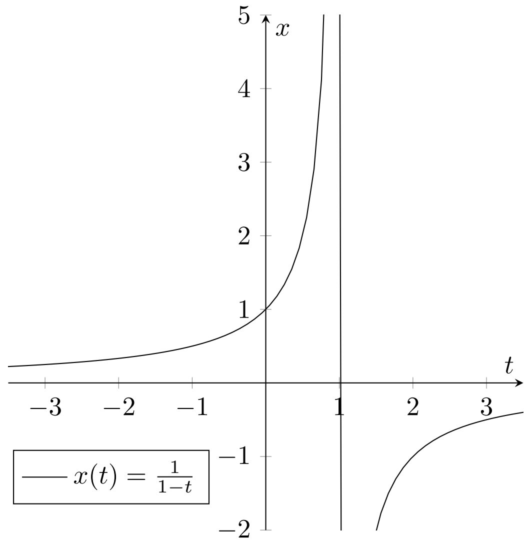
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2(t)\\ \frac{dx}{x^2(t)} &= dt\\ \int_0^t \frac{dx}{x^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Applicando al primo membro le normali regole d'integrazione delle funzioni composte otteniamo

$$-\frac{1}{x(t)}+1=t$$

Da cui si ricava $x(t)=\frac{1}{1-t}$, che è unica soluzione del Problema di Cauchy ed ha asintoto verticale in $t=1$.





Per via dell'asintoto, nonostante la $x(t)$ abbia come dominio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, la soluzione del Problema di Cauchy così definito si ferma a $t=1$. Ciò perché la condizione iniziale del Problema è $t=0\in\,]-\infty,1]$ e non avrebbe dunque senso considerare la situazione altrove. In questo intervallo di validità potrò applicare localmente il Teorema di Cauchy, ma non è possibile applicarlo globalmente.

Nota. L'argomento di questo capitolo sarà quindi capire quando un modello sia valido globalmente.

Esempio 23.2 (Un Problema di Cauchy con soluzione globale)
Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sin(x^2)\\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{23.2}$$

ammette soluzione globale $\forall x_0\in\mathbb{R}$, pur non soddisfacendo alle ipotesi del Teorema 23.4 (Teorema di Cauchy Globale per Lipschitziane)

Esempio 23.3
Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2-1\\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{23.3}$$

ammette soluzione globale per $x\in[-1,1]$, ma non per $x\in R\setminus[-1,1]$

23.1 Il Caso Lipschitziano

Teorema 23.4 (Teorema di Cauchy Globale per Lipschitziane)
Data la funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, se:

- $I \subset \mathbb{R}$ è **intervallo compatto**
- f è **continua** su $I \times \mathbb{R}^n$
- f è (globalmente) **Lipschitziana** in $x \in \mathbb{R}^n$ **uniformemente** rispetto a $t \in I$

Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{23.4}$$

ammette un'unica soluzione definita in tutto l'intervallo I

Dimostrazione. Analogamente a quanto fatto nel Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte), siano:

- $X = \mathbf{C^0}(I, \mathbb{R}^n)$
- T definita come la Eq. (22.1), cioè

$$\begin{array}{cccc} T & : & X & \to & X \\ & & \big(T(x)\big)(t) & \mapsto & x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \end{array}$$

I punti fissi di T sono tutte e sole le soluzioni di Eq. (23.4). Grazie al Teorema 4.19 (Teorema dell'Iterata Contrazione), per dimostare l'esistenza di un unico punto fisso, basta dimostrare che un'iterata di T (Definizione 4.18 (Funzione Iterata)) è contrazione.
Nel dettaglio andremo a dimostrare per induzione la seguente forma:

$$\left\| \big(T^m(x_2)\big)(t) - \big(T^m(x_1)\big)(t) \right\| \le \frac{\big(L \cdot |t - t_0|\big)^m}{m!} \cdot d_X(x_2, x_1) \tag{23.5}$$

Dove L è costante di Lipschitzianità di f

- $m = 1$: Come in dalla Eq. (22.5), sappiamo che

$$\left\| \big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_1)\big)(t) \right\| \le \big(L \cdot |t - t_0|\big) \cdot d_X(x_2, x_1)$$

- $m > 1$: Con un procedimento analogo a quello usato per giungere alla Eq. (22.5), possiamo ottenere

  Nota. Le spiegazioni dei passaggi invariati possono essere viste dal Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte)

$$\left\| \big(T^{m+1}(x_2)\big)(t) - \big(T^{m+1}(x_1)\big)(t) \right\| =$$

  Per Definizione 21.13 (Equazione di Volterra)

$$\begin{aligned} &= \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f\Big(\tau,\ \big(T^m(x_2)\big)(\tau)\Big) - f\Big(\tau,\ \big(T^m(x_1)\big)(\tau)\Big) \Big)\,\mathrm{d}\tau \right\| \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\Big(\tau,\ \big(T^m(x_2)\big)(\tau)\Big) - f\Big(\tau,\ \big(T^m(x_1)\big)(\tau)\Big) \right\| \,\mathrm{d}\tau \right| \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot \left\| \big(T^m(x_2)\big)(\tau) - \big(T^m(x_1)\big)(\tau) \right\| \,\mathrm{d}\tau \right| \end{aligned}$$

Grazie alla Lips. di f, dalla Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana), $\left\|\big(T(x_2)\big)(\tau)-\big(T(x_1)\big)(\tau)\right\| \leq L \cdot d_X(x_2,x_1)$, dunque essendo T^m iterata di T, si moltiplica L per sé stesso m volte, da cui L^m.
In modo analogo (penso) si ottiene $\frac{|\tau-t_0|^m}{m!}$. Non lo so...

$$= \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot \frac{(L \cdot |\tau - t_0|)^m}{m!} \cdot d_X(x_2,x_1)\, \mathrm{d}\tau \right|$$

Riordinando i termini

$$= \left| \int_{t_0}^{t} \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2,x_1) \cdot |\tau - t_0|^m \ \mathrm{d}\tau \right|$$

Essendo però i primi due fattori costanti moltiplicative non legate a τ

$$\begin{aligned}
&= \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2,x_1) \cdot \left| \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0|^m \ \mathrm{d}\tau \right| \\
&= \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2,x_1) \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \left| \ \Big[|\tau - t_0|^{m+1} \Big]_{t_0}^{t} \ \right| \\
&= \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2,x_1) \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \left| \ |t - t_0|^{m+1} - |t_0 - t_0|^{m+1} \ \right| \\
&= \frac{L^{m+1}}{m!} \cdot d_X(x_2,x_1) \cdot \frac{1}{m+1} \cdot |t - t_0|^{m+1} \\
&= \frac{\big(L \cdot |t - t_0|\big)^{m+1}}{m!} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot d_X(x_2,x_1) \\
&= \frac{\big(L \cdot |t - t_0|\big)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot d_X(x_2,x_1)
\end{aligned}$$

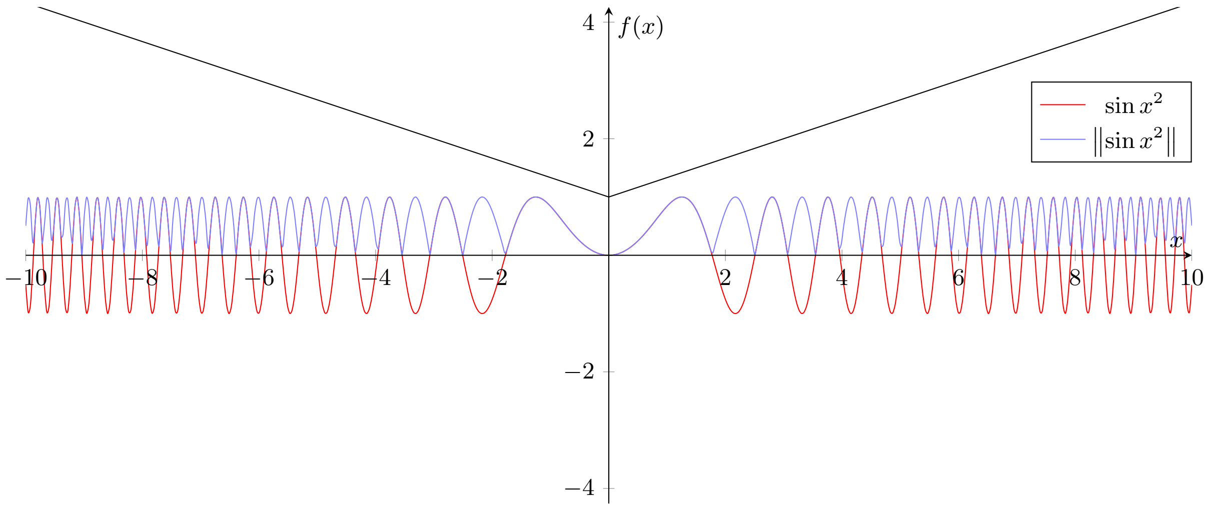
Avendo dimostrato che la minorazione vale per m e per $m+1$, la dimostrazione per induzione è conclusa. □

23.2 Il Caso Sublineare

Definizione 23.5 (Funzione Sublineare)
Una funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ con I intervallo in $\mathbb{R}$, si dice **sublineare** se esistono due costanti $A, B :\ \forall t \in I,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$\|f(t,x)\| \leq A + B\,\|x\|$$

Nota. In sostanza una funzione è sublineare se esiste una retta tale per cui il grafico della funzione è tutto nella regione di piano delimitata da questa retta, cioè il suo grafico "non si impenna".



Esempio 23.6
Le seguenti funzioni sono:

- $x \cdot sin(x)$: Sublineare
- $sin(x^2)$: Sublineare
- $\frac{\arctan x^{12}}{x}$: Sublineare
- $x^2 \cdot sin(x)$: Non sublineare
- x^2: Non sublineare
- e^x: Non sublineare

Esercizio 23.7
Dimostrare che se una funzione $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ è **(globalmente) Lipschitziana**, allora è **sublineare**

Soluzione.

$$\begin{aligned}&\|f(x)\| = \\ &= \|f(0) + f(x) - f(0)\| \\ &\leq \|f(0)\| + \|f(x) - f(0)\|\end{aligned}$$

Per Definizione 3.31 (Funzione Lipschitziana) minoriamo

$$\leq \|f(0)\| + L\,\|x\|$$

Ponendo ora $A = \|f(0)\|$ e $B = L$, si ottiene

$$= A + B\,\|x\|$$

■

Esercizio 23.8
Esibire un esempio di Definizione 22.1 (Funzione Localmente Lipschitziana), ma non **sublineare**

Soluzione. $f(x) = x^2$ è loc. lips. ma non sublineare. ■

Teorema 23.9 (Teorema di Cauchy Globale per Sublineari)
Data la funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, se

1. $I \subseteq \mathbb{R}$ è un **intervallo**
2. f è **continua** su $I \times \mathbb{R}^n$
3. f è **loc. lips.** in $x \in \mathbb{R}^n$ **uniformemente** rispetto a $t \in I$
4. f è **sublineare**

Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{23.6}$$

Ammette un'unica soluzione definita in tutto l'intervallo I

Nota. Non è necessario dimostare l'unicità in quanto la soluzione sarà localmente unica in ogni intorno di un punto e quindi si può espandere ad ogni intorno di ogni punto della soluzione.
È inoltre garantita anche la dipendenza continua, dunque è possibile scegliere un δ (dalla Teorema 22.13 (Teorema di Cauchy Locale - Seconda Parte)) grande a piacere

Dimostrazione. Il Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte) assicura esistenda ed unicità della soluzione su un intervallo centrato nell'istante iniziale. È necessario dimostrare che la soluzione può essere estesa a tutto l'intervallo I in questione. Come già parzialmente anticipato in Esempio 23.1 (Un Problema di Cauchy senza soluzione globale), questo non è possibile in due casi:

1. La soluzione ha asintoto verticale
2. La soluzione oscilla intorno ad un punto e non continua oltre

Quindi i casi in cui la soluzione non si può estendere su tutto l'intervallo sono quelli in cui non esiste il limite della soluzione. Si devono dunque evitare tali comportamenti.

Sia $\varphi : J \mapsto \mathbb{R}^n$ la soluzione di Eq. (23.6) e sia

$$T_M = \sup \left\{ \overline{t_M} \in I : \varphi \textit{ risolve Eq. } (23.6) \textit{ su } \left[t_0, \overline{t_M}\right[\right\} \tag{23.7}$$

Nota. T_M è, dunque, l'ultimo tempo fino a cui posso definire una soluzione e la t utilizzata in seguito è $t \in \left[t_0, \overline{t_M}\right[$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau$$

Da cui, passando alle norme e minorando per proprietà 3 della Definizione 1.8 (Norma)

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau \right\|$$

Grazie all'Esercizio 22.8

$$\leq \|x_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) \right\| \mathrm{d}\tau \right|$$

Si può poi togliere il valore assoluto, in quanto sicuramente $t \geq t_0$ per definizione e, utilizzando la Definizione 23.5 (Funzione Sublineare)

$$\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \Big(A + B \|\varphi(\tau)\| \Big)\, \mathrm{d}\tau$$

Separando l'integrale ed essendo il primo addendo indipendente dalla variabile d'integrazione τ

$$\leq \|x_0\| + A(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} B \|\varphi(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau$$

Si minora ulteriormente, passando a T_M

$$\leq \|x_0\| + A(T_M - t_0) + \int_{t_0}^{t} B \|\varphi(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau$$

Dunque, applicando il Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall) con

- $\delta_0 = \|x_0\| + A(T_M - t_0)$
- $\delta(t) = \|\varphi(\tau)\|$
- $\kappa(t) = B$
- $a = t_0$

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(\|x_0\| + A(T_M - t_0)\big)e^{\int_{t_0}^{t} B \,\mathrm{d}\tau}$$

Da cui, minorando ulteriormente con T_M

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(\|x_0\| + A(T_M - t_0)\big)e^{B(T_M - t_0)} \tag{23.8}$$

La $\varphi(t)$ è quindi limitata sull'intervallo $[t_0, T_M[$, dunque non è possibile abbia comportamento asintotico come quello di Esempio 23.1 (Un Problema di Cauchy senza soluzione globale). Ricordando che $\varphi(t)$ è soluzione della Eq. (23.6), otteniamo

$$\begin{aligned} \|\varphi'(t)\| &= \big\|f\big(t, \varphi(t)\big)\big\| \\ &\leq \sup_{t\in[t_0, T_M[} \|f(t,x)\| \end{aligned} \tag{23.9}$$

Quindi sia $\varphi(t)$ che $\varphi'(t)$ sono limitate, dunque la φ è **uniformemente continua** su $[t_0, T_M[$, come da Proposizione 8.27. Da Proposizione 3.22, se la $\varphi(t)$ è uniformemente continua, allora è **continua**, cioò implica che $\lim\limits_{t\to T_M^-} \varphi(t) = \varphi(T_M)$.

Essendo $\varphi(T_M) \in \mathbb{R}^n$, posso usare questo punto come condizione iniziale del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(T_M) = \varphi(T_M) \end{cases} \tag{23.10}$$

Se $T_M < \sup I$, Eq. (23.10) soddisfa le ipotesi del Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte), dunque φ può essere estesa oltre T_M ad una funzione definita almeno su $[t_0, T_M + \delta[$ con $\delta > 0$ scelto opportunamente. Questa possibilità di estendere la φ è però in contraddizione con la definizione di T_M in Eq. (23.7), dunque si deve concludere che

$$T_M = \sup I$$

Procedimento analogo si può svolgere per

$$T_m = \inf\big\{\overline{t_m} \in I : \varphi \textit{ risolve Eq. } (23.6) \textit{ su } \big]\overline{t_m}, t_0\big]\big\}$$

I passaggi rimangono uguali fino a Eq. (23.8) che diventa

$$\|\varphi(t)\| \leq \big(\|x_0\| + A(T_M - t_0)\big)e^{B(\boldsymbol{t_0 - T_m})}$$

E, a sua volta, Eq. (23.9) diventa

$$\begin{aligned} \|\varphi'(t)\| &= \big\|f\big(t, \varphi(t)\big)\big\| \\ &\geq \min_{t\in]T_m, t_0]} \|f(t,x)\| \end{aligned}$$

Dunque

$$T_m = \inf I$$

Grazie a come sono definiti T_M e T_m, è stata quindi trovata una soluzione sull'intervallo I che si può dire **globale** per quanto appena dimostrato. $\square$

Esempio 23.10 (Esempio critico al Teorema 23.9 (Teorema di Cauchy Globale per Sublineari))
Dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = (1-\cos x)x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Esempio 23.11
Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \cdot \sin x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi 1., 2. e 3. del Teorema 23.9 (Teorema di Cauchy Globale per Sublineari), ma $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ non è né **globalmente lipschitziana**, né **sublineare** su $\mathbb{R}$. tuttavia, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, questo problema ammette soluzioni globali definite su tutto $\mathbb{R}$

Esercizio 23.12
Sono date le funzioni $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, ciascuna soddisfacente alle ipotesi del Teorema 23.9 (Teorema di Cauchy Globale per Sublineari). Per un fissato $\overline{x}$ in $\mathbb{R}^n$, sia φ_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f_n(x) \\ x(0) = \overline{x} \end{cases}$$

Verificare che se le f_n convergono uniformemente (ricordando Definizione 19.18 (Convergenza Uniforme)), allora anche le φ_n convergono uniformemente.

24 Equazioni Autonome

Definizione 24.1 (Equazione Autonoma)
Un'**equazione differenziale ordinaria** si dice **autonoma** se e solo se la variabile indipendente (solitamente il tempo) non vi compare esplicitamente.

Nota. L'assenza della variabile indipendente significa, concettualmente, che l'istante iniziale non è importante ai fini dello studio dell'equazione, ma essa dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo.

Nota. In fisica le equazioni differenziali autonome spesso modellizzano sistemi isolati

Proposizione 24.2 (Invarianza per Traslazione Temporale)
Se la funzione $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ risolve il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Allora, qualunque sia $T \in \mathbb{R}$, la funzione $\psi : [a-T, b-T] \mapsto \mathbb{R}^n$ data da $\psi(t) = \varphi(t+T)$ è soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0 - T) = x_0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Posta la $\psi(t) = \varphi(t+T)$

$$\psi'(t_0) = \varphi'(t_0+T) = f(\varphi(t_0+T)) = f(\psi(t_0))$$
$$\psi(0) = \varphi(t_0) = x_0$$

□

Proposizione 24.3
Ogni equazione differenziale ordinaria in forma normale con secondo membro continuo è equivalente ad un'equazione autonoma.

Dimostrazione.

$$x' = f(t,x) \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ t' = 1 \end{cases}$$

□

Proposizione 24.4 (Teorema dell'Energia Cinetica)
Un punto materiale non vincolato P di massa m, si muove sotto l'azione di una forza F che dipende solo dalla posizione di P.
Allora la variazione di Energia Cinetica di P è uguale al lavoro compiuto su P da questa forza.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} = (x, y, z)$ la terna di coordinate di P. Per il Secondo Principio della Dinamica e per quanto assunto sulla forza F, il moto di P è descritto dalla seguente equazione differenziale ordinaria vettoriale del secondo ordine

$$m\mathbf{x}'' = F(\mathbf{x})$$

Dunque, moltiplicando ambo i membri

$$m\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}' = F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}'$$

Integrando a sinistra con la $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ posto $f(x) = \mathbf{x}'$

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\mathbf{x}')^2 = F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}'$$

Applicando ora integrazione definita tra 0 e t

$$\frac{1}{2} m \big(\mathbf{x}'(t)\big)^2 - \frac{1}{2} m \big(\mathbf{x}'(0)\big)^2 = \int_0^t F\big(\mathbf{x}(\tau)\big) \cdot \mathbf{x}'(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Passando alla soluzione x ed alla ξ, traiettoria di P

$$\frac{1}{2} m \big(\mathbf{x}'(t)\big)^2 - \frac{1}{2} m \big(\mathbf{x}'(0)\big)^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} F(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

□

Esercizio 24.5
Estendere la dimostrazione della Proposizione 24.4 (Teorema dell'Energia Cinetica) nel caso di n punti soggetti a forze dipendenti unicamente dalle posizioni dei punti.

Esercizio 24.6
Dedurre il Principio di Conservazione dell'Energia nel caso in cui F ammetta un potenziale

Esercizio 24.7
Come viene modificata la Proposizione 24.4 (Teorema dell'Energia Cinetica) se la forza F diopende anche dalla velocità $\mathbf{x}'$?

Esercizio 24.8
È possibile scrivere un'equazione differenziale ordinaria autonoma del primo ordine avente come soluzione la funzione $x(t) = \sin t$ per $t \in [0, \pi]$?
E la funzione $x(t) = t^3$ per $t \in [-1, 1]$?

25 Equazioni Differenziali Lineari

Di seguito verranno utilizzati l'identificazione ed i risultati della sezione 15 (Funzioni a Valori in $\mathbb{C}$), in particolare Esercizio 15.1

Definizione 25.1 (Equazione Differenziale Ordinaria Lineare)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $n \in \mathbb{N}$. Date le $n+1$ funzioni $a_0,\ a_1,\ \dots,a_{n-1},\ f \quad : I \mapsto \mathbb{C}$, si dice **Equazione Differenziale Ordinaria Lineare di ordine n** l'equazione differenziale

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t)$$

Se $f = 0$ l'equazione si dice **Omogenea**.

Proposizione 25.2 (Estensione in $\mathbb{C}$ del Teorema di Cauchy Globale per Lipschitziane)
Sia I un intervallo compatto tale che $\mathring{I} \neq \emptyset$, siano $a_0,\ a_1,\ \dots,a_{n-1},\ f \in \mathbf{C^0}(I;\mathbb{C})$.
Allora per ogni $t_0 \in \mathring{I}$ e $c_0,\ c_1,\ \dots,c_{n-1} \in \mathbb{C}$ il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} & = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) \cdot x^{(k)} + f(t) \\ x(t_0) & = c_0 \\ x'(t_0) & = c_1 \\ & \vdots \\ x^{(n-2)}(t_0) & = c_{n-2} \\ x^{(n-1)}(t_0) & = c_{n-1} \end{cases} \tag{25.1}$$

soddisfa alle ipotesi del Teorema 23.4 (Teorema di Cauchy Globale per Lipschitziane)

Dimostrazione. Introducendo la variable $X \in \mathbb{C}^n$ ed il dato $C \in \mathbb{C}^n$ definiti da

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Come da Proposizione 21.6, un'equazione differenziale lineare di ordine n può essere trasformata in un sistema di n equazioni del primo ordine, dunque la prima equazione di Eq. (25.1), può diventare

$$\begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = X_3 \\ \vdots \\ X_{n-1}' = X_n \\ X_n' = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \big(a_k(t) \cdot X_{k+1}\big) + f(t) \end{cases} \tag{25.2}$$

Passando dalle singole equazioni del nuovo sistema Eq. (25.2) alla variabile unica X in n coordinate, tutta la Eq. (25.1) è

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_{n-1}' \\ X_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \big(a_k(t) \cdot X_{k+1}\big) + f(t) \end{bmatrix} \\ X(t_0) = C \end{cases}$$

Infine la funzione

$$\begin{array}{rcl} F & : & I \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \\ (t, X) & \mapsto & \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} \end{array}$$

è lineare in X (compaiono solo elementi di grado 1) e globalmente lipschitziana in X uniformemente in t, infatti per ogni $X, Y \in \mathbb{C}^n$

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq \sqrt{1 + \left(\max_k \sup_I \|a_k\|\right)^2} \cdot \|X - Y\|$$

Sono quindi soddisfatte le ipotesi di Teorema 23.4 (Teorema di Cauchy Globale per Lipschitziane) e si ha la tesi. □

La locuzione **Lineare**, attribuita alle equazioni differenziali analizzate in questo capitolo, è giustificata dalla proposizione seguente.

Proposizione 25.3
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $n \in \mathbb{N}$. Date le $n+1$ funzioni $a_0, a_1, \ldots, , a_{n-1}, f : I \to \mathbb{C}$, l'operatore

$$\begin{array}{rcl} L & : & \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) \to \mathbf{C^0}(I; \mathbb{C}) \\ x & \mapsto & x^{(n)} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k(t) \cdot x^{(k)} \end{array}$$

è lineare

Dimostrazione. La linearità di L equivale a:

$$\begin{array}{ll} L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) & \forall x_1, x_2 \in \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) \\ L(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot L(x) & \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) \end{array}$$

Entrambe le condizioni seguono dalle regole di derivazione, come da sezione 15 (Funzioni a Valori in $\mathbb{C}$). □

Proposizione 25.4
L'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = 0 \tag{25.3}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C^n}(I; \mathbb{C})$ di dimensione n

Dimostrazione. Se x_1, x_2 sono soluzioni e se $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, allora anche $\lambda x_1 + \mu x_2$ è soluzione, infatti, per la Proposizione 25.3

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{C^n}(I; \mathbb{C}) = 0$$

Ciò permette, grazie alla Proposizione 1.6, di concludere che l'insieme delle soluzioni è sottospazio di $\mathbf{C^n}(I; \mathbb{C})$

Fissato $t_0 \in \mathring{I}$ e scelta una base $(E_1, \ldots, E_n)$ di $\mathbb{C}^n$, sia x_k, per $k = 1, \ldots, n$ la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) \cdot x^{(k)} \\ x(t_0) = (E_k)_1 \\ x'(t_0) = (E_k)_2 \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t_0) = (E_k)_{n-1} \\ x^{(n-1)}(t_0) = (E_k)_n \end{cases}$$

Si può concludere che $(x_1, \ldots, x_n)$ sia una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea Eq. (25.3).

Infatti se $\overline{x}$ è una soluzione della Eq. (25.3), allora esistono coefficienti $a_1, \ldots, a_n$ tali che $\overline{x}(t_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k E_k$. Quindi $\overline{x}$ risolve anche il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) \cdot x^{(k)} \\ x(t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (E_k)_1 \\ x'(t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (E_k)_2 \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (E_k)_{n-2} \\ x^{(n-1)}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (E_k)_{n-1} \end{cases}$$

Per costruzione anche la funzione $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k$ risolve lo stesso Problema di Cauchy. Quindi, per la Proposizione 25.2 (Estensione in $\mathbb{C}$ del Teorema di Cauchy Globale per Lipschitziane) ed il Teorema 23.4 (Teorema di Cauchy Globale per Lipschitziane), $\overline{x}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k(t)$ per ogni $t \in I$.

Se per opportuni scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k = 0 \\ \Longrightarrow & \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k(t) = 0 \quad \forall t \in I \\ \Longrightarrow & \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k^{(h)}(t) = 0 \quad \begin{cases} \forall t \in I \\ \forall h = 0, \ldots, n-1 \end{cases} \\ \Longrightarrow & \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k^{(h)}(t) = 0 \quad \forall h = 0, \ldots, n-1 \\ \Longrightarrow & \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot E_k = 0 \\ \Longrightarrow & \lambda_k = 0 \quad \forall h = 0, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

□

Nota. Utilizzando la notazione tipica dell'Algebra Lineare, l'insieme delle soluzioni è $\ker L$, il *nucleo* (*kernel*) dell'operatore lineare L

Definizione 25.5 (Sistema Fondamentale di Soluzioni)
Dato $\ker L$, lo spazio vettoriale delle soluzioni, una base di $\ker L$ è **Sistema Fondamentale di Soluzioni** dell'equazione omogenea

$$x^{(n)} + a_{a-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = 0$$

Definizione 25.6 (Soluzione Particolare)
Soluzione Particolare dell'equazione lineare non omogenea

$$x^{(n)} + a_{a-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t)$$

è una qualunque soluzione di questa equazione.

Proposizione 25.7
Nota una soluzione particolare $\overline{x}$ dell'equazione non omogenea

$$x^{(n)} + a_{a-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t)$$

e noto un sistema fondamentale di soluzioni $(x_1, \ldots, x_n)$ dell'equazione imogenea

$$x^{(n)} + a_{a-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = 0$$

ogni soluzione x dell'equazione non omogenea può essere scritta come

$$x = \overline{x} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

per opportune costanti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$

Dimostrazione. □

Esercizio 25.8
Risolvere il Problema di Cauchy per una generica equazione lineare del primo ordine

$$\begin{cases} x' + p(t) \cdot x = q(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $p, q \in \mathbf{C^0}(R; R)$.

Soluzione. Suggerimento: moltiplicare ambo i membri dell'equazione per $e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$ ed integrare ■

26 Equazioni Lineari a Coefficienti Costanti

Definizione 26.1 (Equazione Differenziale Ordinaria Lineare a Coefficienti Costanti)
Dati i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathbb{C}$ si dice **Equazione Differenziale Ordinaria Lineare di ordine n a Coefficienti Costanti** l'equazione differenziale

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b$$

Se $b = 0$, l'equazione si dice **omogenea**.
La sua **Equazione Caratteristica** è l'equazione algebrica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Osservazione 26.2
Nella risoluzione di equazioni differenziali lineari la funzione esponenziale $t \mapsto e^{\lambda t}$ riveste un ruolo molto particolare. Questa funzione è un *autovalore* dell'operatore di derivazione D relativo all'*autovalore* λ, risolve infatti $Dx = \lambda \cdot x$, come da Proposizione 15.5.

Proposizione 26.3
Data l'equazione

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b$$

allora

$$x(t) = e^{\lambda t} \text{ risolve l'equazione omogenea } \iff \lambda \text{ è soluzione dell'equazione caratteristica.}$$

Dimostrazione. Sia L l'operatore definito dal membro sinistro dell'equazione come nella Proposizione 25.3. Allora se $x(t) = e^{\lambda t}$, si ha che

$$\big(L(x)\big)(t) = \big(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\big)e^{\lambda t}$$

□

Lemma 26.4
Sia $x(t) = t \cdot e^{\lambda t}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ si ha

$$x^{(n)}(t) = \left(\lambda^n t + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda t}$$

Dimostrazione. Per induzione su n.
Se $n = 0$, allora $x^{(0)} = x$. Supposto vero che

$$x^{(n-1)}(t) = \left(\lambda^{n-1} t + (n-1)\lambda^{n-2}\right) e^{\lambda t}$$

Da cui, derivando rispetto a t, si ottiene la tesi. □

Proposizione 26.5
Data l'equazione

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ \dots \ + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b$$

allora

$$x(t) = t \cdot e^{\lambda t} \text{ risolve l'equazione omogenea}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lambda \text{ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità almeno 2}$$

Dimostrazione. Sia $P(\lambda) = \lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$. Sia ha

$$\begin{aligned}
\big(L(x)\big)(t) &= x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t) \\
&= \left(\lambda^n t + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda t} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \left(\lambda^k t + k\lambda^{k-1}\right) + a_0 t\right) e^{\lambda t} \\
&= \left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\right) t e^{\lambda t} + \left(n\lambda^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k k \lambda^{k-1}\right) e^{\lambda t} \\
&= \left(P(\lambda) t + \frac{dP}{d\lambda}(\lambda)\right) e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

□

Proposizione 26.6
Sia $m \in \mathbb{N}$. Data l'equazione

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ \dots \ + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b$$

allora

$$x(t) = t^m \cdot e^{\lambda t} \text{ risolve l'equazione omogenea}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lambda \text{ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità almeno } m$$

Dimostrazione. Omessa □

Esempio 26.7
L'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$x'' - 2x' + x = 0$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

ed integrale generale

$$\left(x_1(t) = e^t,\ x_2(t) = te^t\right)$$

27 Esempi

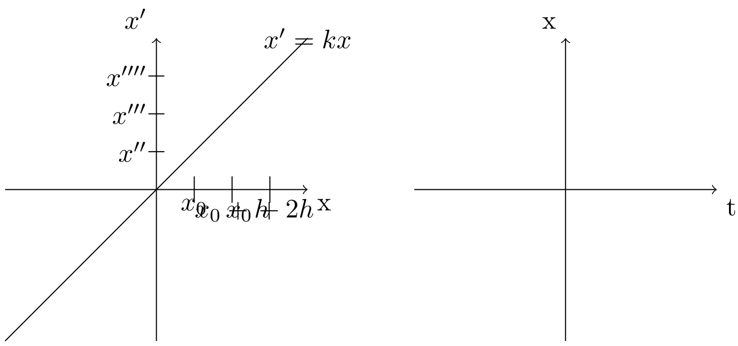
27.1 La Legge di Malthus

Una popolazione, dotata di tutto il necessario per vivere e riprodursi, cresce secondo la legge di Malthus: la velocità di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

$$x' = k \cdot x$$

dove x è il numero di membri della popolazione e k è una costante positiva legata alla prolificità della specie in esame, generalmente calcolata come differenza tra i tassi di natalità e di mortalità.
Il problema di Cauchy è quindi

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}, k > 0 \text{ e } x_0 = 0$$



blablabla ....
....
Limiti di questo modello:

- la variabile x dovrebbe variare in $\mathbb{N}$, poiché una popolazione ha un numero intero di elementi.
- In molte specie è verosimile che il numero di nati al tempo t dipenda dalla popolazione presente ad un tempo precedente $x(t-T), T > 0$
- Supporre che una popolazione abbia per sempre a disposizione risorse sufficienti può non essere realistico
- Questo modello va bene quando si considerano intervalli di tempo molto lunghi.

Capitolo 6

Calcolo delle Variazioni

28 Preliminari

Il calcolo delle variazioni si occupa dell'ottimizzazione di funzioni $F : X \mapsto \mathbb{R}$, dove X è un insieme di funzioni. In questo capitolo varranno considerati univocamente funzionali integrali del tipo

$$\begin{array}{rcl} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,\mathrm{d}t \end{array}$$

eventualmente soggetti a vincoli sui valori $x(a)$ e $x(b)$ o sul valore di un integrale del tipo $\int_a^b \varphi(x(t))\,\mathrm{d}t$.
Dove:

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$
$$X = \left\{x \in \mathbf{C^1}([a, b]); \mathbb{R}^n \text{ t.c.: } x(a) = x_a, x(b) = x_b\right\}, \text{ con } x_a, x_b \in \mathbb{R}^n$$

Proposizione 28.1
Sia $f \in \mathbf{C^1}(A \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ con $a \subseteq \mathbb{R}^n$
Se $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_\alpha^\beta f(x, t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ Allora:

$$F \in \mathbf{C^1}$$
$$\partial_\alpha F(\alpha, \beta, x) = -f(x, \alpha)$$
$$\partial_\beta F(\alpha, \beta, x) = f(x, \beta)$$
$$\nabla_x F(\alpha, \beta, x) = \int_\alpha^\beta \nabla_x f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

Definizione 28.2
?????????????? R OPPURE RN
Sia $I \in \mathbb{R}$ un intervallo. Curva su I $\mathbb{R} \rightleftharpoons$ una funzione $\gamma : I \subseteq \mathbb{R}^n$ che sia continua.

Osservazione 28.3
$\gamma(I)$ si chiama supporto della curva,ed 1'e certamente connesso.(una funzione continua manda intervalli connessi in connessi)

Definizione 28.4
Sia $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ una curva, lunghezza della curva $\rightleftharpoons l(\gamma) = \sup \left\{ \sum\limits_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : N \in \mathbb{N}\, N > 1, t_0 = a, t_N = b, t_{i-1} <\right.$
cioè prendo una curva e la approssimo con una spezzata, la più lunga di tutte le poligonali è la lunghezza della curva.
DISEGNO
DISEGNO

Definizione 28.5
Una curva $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ si dice rettificabile $\rightleftharpoons f(\gamma) < +\infty$

Osservazione 28.6

$$\sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

per il teorema del valore medio differenziale(accrescimenti finiti)

$$\sum_{i=1}^{N} \|\gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})\| =??$$

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Proposizione 28.7
Se $\gamma \in \mathbf{C^1}([a, b]\,; \mathbb{R}^n) \Rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$

Osservazione 28.8
Se γ è la traiettoria di un punto materiale,allora $\|\gamma\|$ è la norma della velocità istantanea, e quindi $l(\gamma)$ è lo spazio che si percorre, cioè l'integrale della velocità valutato tra $t??????t_i$ due istanti di tempo entro i quali si mantiene tale velocità.

Osservazione 28.9
Nel caso specifico sarà:

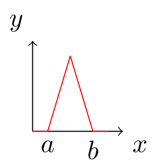
$$X = \left\{x \in \mathbf{C^1}([a, b]\,; \mathbb{R}2) : x(a) = A, x(b) = B\right\}$$

$$\begin{array}{lcc} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b \|x'(t)\| \, \mathrm{d}t \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t, x, x') & \to & \|x'(t)\| \end{array}$$

29 L'Equazione di Eulero

LEMMA:::LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI
Sia $f \in \mathbf{C^0}([0, 1]\,; \mathbb{R})$ t.c.: $\forall v \in \mathbf{C^0}([0, 1]\,; \mathbb{R})$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x)v(x) \, \mathrm{d}x = 0$
Allora $f(x) \equiv 0 \forall x \in [0, 1]$



Dimostrazione.
Per Assurdo, se $f \not\equiv 0$, allora $\exists\, [0, 1]$ t.c. $f(x_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 0$ allora $\exists \overline{x}_0 \in \,]0, 1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 1$ allora $\exists \overline{x}_0 \in \,]0, 1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$
Entrambe le osservazioni per la continuità di f, significa che se x_0 è un punto in cui la $f > 0$ allora per la continuità della funzione anche li vicino si hanno valori maggiori di zero.
Quindi si può pensare $x_0 \in \,]0, 1[$.
Allora $\exists a, b \in \,]0, 1[$ t.c. $x_0 \in \,]a, b[\, e \forall x \in \,]a, b[$ vale che $|f(x)| \geq |f(x_0)|$ sempre per la continuità di f.
Pensiamo $f(x_0) > 0$ in questo modo $|f(x_0)| = f(x_0)$ e scegliamo la funzione $v(x)$ come disegnata: $v(x) =$

$$\begin{cases} 0 & x \leq x_0 - \delta \\ \frac{x}{\delta} - \frac{x_0-\delta}{\delta} & x_0 - \delta < x < x_0 \\ 1 & x = x_0 \quad \text{POSSIBILIPLAUSIBILIERRORI} \\ -\frac{x}{\delta} + \frac{x_0+\delta}{\delta} & x_0 < x < x_0 + \delta \\ 0 & x \geq x_0 + \delta \end{cases}$$

Se calcoliamo

$$\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}f(x_0)\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x_0)\frac{b-a}{2} > 0$$

Se avessi preso $f(x_0) < 0$ prendo $v = -v$ e il resto segue... □

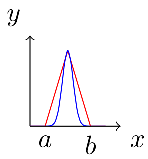
Osservazione 29.1
Questo lemma è concettualmente analogo al Teorema di Fermat nel capitolo delle derivate.

Corollario 29.2
LEMMA CASO VETTORIALE.
Sia $f \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ tale che $\forall v \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x) \bullet v(x)\,\mathrm{d}x = 0$ allora $f(x) \equiv 0\ \forall x \in [0,1]$.

Dimostrazione. Per questa dimostrazione si osservano componente per componente.
$\forall i = 1, 2, \ldots, n$ scelgo $v_j(x) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ v_i(x) & j = i \end{cases}$
A questo punto applico il lemma fondamentale alla componente i-esima f_i di f. □

Corollario 29.3
Sia $f \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall v \in \mathbf{C^k}([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = 0$ allora $f(x) \equiv 0\ \forall x \in [0,1]$.

Dimostrazione.



É sempre lo stesso lemma con l'aggiunta che la funzione v sia di classe $\mathbf{C^k}$.
Se si chiama u la funzione blu e v la funzione rossa abbiamo:

$$\int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

Se v è un po più regolare , prendiamo $v = u^(k+1)(x)$. cioè se vogliamo $v \in \mathbf{C^k}$ prendiamo.....
LA DINMOSTRAZIONE E A ME INCOMPRENSIBILE. □

Teorema 29.4
EQUAZIONE DI EULERO.
Sia $f \in \mathbf{C^2}\left([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}\right)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.
Sia $X = \left\{x \in \mathbf{C^2}\left([a,b]\,;\mathbb{R}^n\right) : x(a) = A, x(b) = B\right\}$ con $A, B \in \mathbb{R}^n$.
Sia $\begin{array}{ccc} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,\mathrm{d}t \end{array}$.
Se la funzione $x_* \in X$ è t.c. $F(x_*) = \max\{F(x) : x \in X\}$ [o min]
Allora $\partial_x f(t, x_*(t), x_*'(t)) - \frac{d}{\mathrm{d}t}\partial_{x'} f(t, x_*(t), x_*'(t)) = 0$.
Questa ultima equzione è l'equazione di Eulero-Lagrange del Funzionale F o a volte detta variazione prima del funzionale F. è un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine nella funzione incognita x_*.

Dimostrazione. Sia $\varphi(h) = F(x_* + hv)$, dove $x_* \in X$ e $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
L'equazione di Eulero-Lagrange in apparenza complicata è analoga ad un equazione di analisi1 del tipo $f' = 0$ oppure in analisi due a $\nabla f = 0$. solo che ora sono cavoli amari.
Come si sceglie la variazione v in modo che $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
X è l'insieme delle funzioni di $\mathbf{C^2}$, si sa che $x_* \in \mathbf{C^2}$, una scelta opportuna di v è $v \in \mathbf{C^2}(]a,b[\,;\mathbb{R}^n)$.

Inotre deve essere che $x_*(a) + hv(a) = A$ e $x_*(b) + hv(b) = B$ per restare dentro l'insieme X. Quindi $v(a) = v(b) = 0$. h è uno scalare e per ipotesi si sa che $F(x_*)$ è punto di massimo, quindi si conclude che $h = 0$ è punto di massimo per la funzione φ.
.... □

e qui finiscono gli appunti almeno per conto mio.

Parte I

Temi Esame

Capitolo 7

T.E. 2012/2013 scritto n.1

30 Esercizio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = e^{-|4 \cdot arctan(x \cdot y^2)|}$

A Nessuna delle altre affermazioni è esatta

B f ammette almeno un punto di minimo assoluto

C $\inf^2_R f = 0$

D f ha infiniti punti di massimo

L'esponensiale è una funzione monotona crescente quindi la ricerca di massimi a minimi si sposta alla ricerca dei massimi e minimi dell'esponente.
L'esponente assume sempre valori negativi. Inotre risulta essere una quantità limitata tra $[0; 4\frac{\pi}{0}[$, quindi $\sup^2_R f = e^0 = 1$ e $\inf^2_R f = e^{-2\pi}$
Sono quindi punti di massimo tutti i punti che rendono nullo l'esponente: $arctan(xy^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \forall y or y = 0, \forall x$ che sono i due assi. Essendo questi punti del dominio allora si può dire $\sup^2_R f = \max^2_R f = 0$
I punti di minimo si hanno per $\left|arctan(xy^2)\right| = \frac{\pi}{2}$ quindi per $x \to \pm\infty$ or $y \to \pm\infty$ essendo questi valori al limite il valore $e^{-2\pi}$ è inf per f
La risposta vera è quindi la D.

31 Esercizio

Sia (X, d) uno spazio metrico e siano A, B sottoinsiemi di X. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

1 $A \subseteq B \Rightarrow \partial A \subseteq \partial B$

2 $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

A Entrambe

B Solo la seconda

C Nessuna delle affermazioni è esatta

D Solo la prima

La prima affermazione è certamente falsa poiché se scelto come spazio metrico R^2 con distanza quella eclidea. Scelgo $A = B((0, 0), 2), A = B((0, 0), 1)$ allora si ha che $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (0, 0)) = 2\}$ e $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (0, 0)) = 1\}$ e questi due insiemi sono disgiunti.
la seconda è vera ma devo pensarci un po...