Appunti di Analisi 2

Mauro Conte, Federico Cerutti

Febbraio 2019

Indice

Parte I

Spazi Metrici

Capitolo 1

Spazi Metrici

1 Preliminari

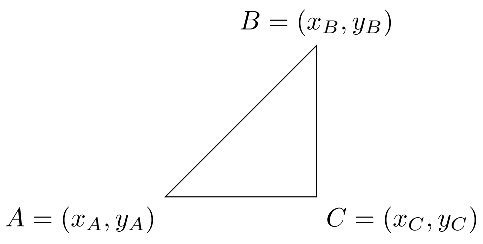
Definizione 1.1
Si dice spazio metrico un insieme X non vuoto in cui sia definita una distanza(metrica), vale a dire una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ con le proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ *simmetria*
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ *disuguaglianza triangolare*

Esempio 1.2

$$X = \mathbb{R}^2, \quad d((x_1, y_1),(X_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

si dimostra che la funzione così definita è una distanza:

1. $d(x_1, x_2) \geq 0$, *è verificata poiché l'argomento della radice è sempre positivo o al più nullo essendo una somma di quadrati, e la radice mantiene le quantità positive.*
2. $d((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0$
$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 - x_1)^2 = 0 \\ (y_2 - y_1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
3. *invertendo le prime componenti con le seconde, il quadrato non cambia quindi la simmetria è rispettata*
$d((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)} = d((x_2, y_2),(x_1, y_1))$
4. 

... ci vorrebbe anche una spiegazione ...

Esempio 1.3

$$X = \mathbb{R}, \quad d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$$

Le proprietà 1,2,3 sono soddisfatte per le proprietà del modulo.
La proprietà 4 si può dimostrare:

$$d(x_1, x_3) = |x_3 - x_1| \leq |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| = d(x_3, x_2) + d(x_2, x_1)$$

Esempio 1.4

$$X = \mathbb{R}^3 \quad d(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$$

Analogo al primo esempio

Esempio 1.5

$$X = \mathbb{R}^n$$
$$x = (x_1, \dots, x_n) \qquad y = (y_1, \dots, y_n)$$
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

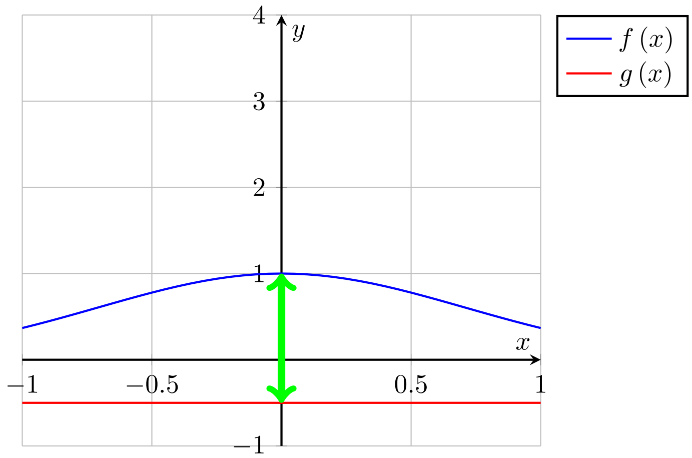
Analogo al primo esempio

Esempio 1.6

$$X = \mathbf{C^0}([a, b], \mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}, a < b$$
$$d_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$$

1. *X contiene infiniti elementi(funzioni)*

2. *d_∞ è detta distanza uniforme o distanza della convergenza infinita o distanza della convergenza uniforme*

3. 

Si verificano le 4 proprietà di distanza:

1. *Se* $\sup = \infty$ *non va bene poiché l'insieme di arrivo è* $\mathbb{R}$*, applicando il Thm. di Weierstrass, una funzione continua definita su un intervallo* $[a, b]$ *ammette massimo e minimo e quindi anche il* $\sup$ *....(le funzioni sono definite su un intervallo chiuso e limitato e sono continue)*

2. *se e solo se hanno lo stesso dominio e per ogni punto di esso entrambe le funzioni hanno la stessa immagine*

3. $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f - g| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f - g| = d_\infty(g, f)$

4. $|h(x) - f(x)| \leq |h(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$*, applicando il sup la disuguaglianza resta vera*

Osservazione 1.7
Tutto questo è valido finché $[a, b]$ *chiuso e limitato altrimenti non vale più Weierstrass*

UN CONTROESEMPIO

Esempio 1.8
ferrovia

Esempio 1.9
Metrica Discreta $X \neq \emptyset$, $\quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 0 & 1 \neq y \end{cases}$

1. $d(x, y) \geq 0$ *per definizione*

2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$*, per definizione (ragiona sul sse)*

3. $d(x, y) = d(y, x)$ *...per definizione (fai due casi x=y e l'altro)*

4. $d(x, y) \leq d(y - z) + d(z - x)$

Esempio 1.10

$$X = \mathbb{R}^2$$

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y - 1| + |x_2 - y - 2|$$

...

Esempio 1.11

Esempio 1.12

$$X = \mathbf{C^0}([0, 1], \mathbb{R})$$

$$d_2 = \int_0^1 |g(x) - f(x)|\, d(x)$$

Esempio 1.13

$$X = \mathbf{C^0}([a,b], \mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}, a < b$$
$$d_2 = \sqrt{\int_a^b [g(x) - f(x)]^2 \, d(x)}$$

Proposizione 1.14
Sia (X,d) *s.m. e* $A \subseteq X$ *e* $A \neq \emptyset$, *sia* $\begin{array}{rcl} d_{|A} : A \times A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightarrow & d(x,y) \end{array} \Rightarrow (A, d_{|A})$ *è uno spazio metrico*

Dimostrazione. .... □

Definizione 1.15
Un insieme è finito se il numero dei suoi elementi è finito

Definizione 1.16
Un insieme è infinito se non è finito

Definizione 1.17
Sia (X,d)*s.m.,* $A \subseteq X$*,* $A \neq \emptyset$ *si definisce diametro di A:*

$$diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

Definizione 1.18
A è limitato $\leftrightharpoons$ *diam(A) è finito (*$\in \mathbb{R}$*)*

Definizione 1.19
A è illimitato $\leftrightharpoons$ *diam(A) è infinito (*$= \infty$*)*

Esempio 1.20
...
...
...
..
....

Osservazione 1.21
Ogni insieme finito è limitato e ogni insieme illimitato è infinito. Non valgono i viceversa.

Esempio 1.22
.....
....
.....
......
.....
....

Definizione 1.23 (Norma)
Dato uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$*, si definisce* ***norma*** *una funzione* $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}$ *con le proprietà:*

1. $\forall x \in V, \quad \|x\| \geq 0$
2. $\forall x \in V, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x, y \in V, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4. $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Nota. La funzione Norma associa dunque ad un vettore di qualsiasi dimensione uno scalare, fornendo (anche) una metrica per ordinare vettori tra loro.

Definizione 1.24 (Spazio Normato)
Uno spazio normato è uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ ***in cui è definita una norma****.*

Nota. Nel seguito verranno considerati esclusivamente spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, cioè $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

X è uno spazio (vettoriale) normato sul campo $\mathbb{K}$ se:

Esempio 1.25

$$X = \mathbb{R} \quad \|x\| = |x|$$

Esempio 1.26

$$X = \mathbb{R}^2 \quad \left\| \begin{bmatrix} x \\ y+ \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Esempio 1.27

$$X = \mathbb{R}^n \quad x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

Esempio 1.28

$$X = \mathbb{C} \quad \|x\| = |x|$$

Esempio 1.29

$$X = \mathbf{C^0}([a, b], \mathbb{R}) \quad \|f\| \sup_{x \in [a,b]} |f|$$

Proposizione 1.30
Sia X uni spazio normato allora (X, d) è uno spazio metrico con $\begin{array}{rcl} d : X \times X & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \to & \|(\| x_1 - x_2) \end{array}$
Inoltre per la distanza così definita valgono le seguenti proprietà:

1. *INVARIANZA PER TRASLAZIONI*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X \quad d(x_1, x_2) = d(x_1 + x_3, x_2 + x_3)$$

2. *POSITIVAMENTE OMOGENEA*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathbb{R} \quad d(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda| \, d(x_1, x_2)$$

Dimostrazione. Per dimostrare che è uno spazio metrico si dimostra che valgono le proprietà di distanza

1.
2.
3.
4.

□

Definizione 1.31
Sia (X, d) *spazio metrico e siano* $x_0 \in X$ *e* $r \in \searrow$. *Si dice sfera aperta di centro* x_0 *e raggio* r *l'insieme:*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, y) < r\}$$

Osservazione 1.32
se $r = 0 \Rightarrow B(x_0, r) = \emptyset$
se $r > 0 \Rightarrow x_0 \in B(x_0, r)$

Esempio 1.33
In $\mathbb{R}$ *con* d_E, $B(x_0, r)$ *è un intervallo simmetrico centrato in* x_0

Esempio 1.34
In $\mathbb{R}^2$ *con* d_E, $B(x_0, r)$ *è una un cerchio con centro in* x_0

Esempio 1.35
In $\mathbb{R}^3$ *con* d_E, $B(x_0, r)$ *è una sfera con centro in* x_0

Esempio 1.36

Definizione 1.37
Sia (X, d) *spazio metrico, sia* $A \subseteq X$. *Si definisce*

$$A \text{ è } \textbf{aperto} \rightleftharpoons A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad A = \mathring{A}$$

Definizione 1.38
Sia (X, d) *spazio metrico, sia* $A \subseteq X$. *Si definisce*

$$A \text{ è } \textbf{chiuso} \rightleftharpoons A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad A = \bar{A}$$

Definizione 1.39
Siano (X, d_1) *e* (X, d_2) *spazi metrici.* d_1 *e* d_2 *sono equivalenti* $\leftrightharpoons \exists c, C \in \mathbb{R}, c_1 > 0, c_2 > 0$ *t.c:*

$$\forall x, y \in X \quad cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y)$$

2 Successioni e Completezza

Definizione 2.1

Definizione 2.2

Definizione 2.3

Proposizione 2.4
Data la successione $x : \mathbb{N} \mapsto X$ di elementi dello spazio metrico (X, d) e dato $x_\infty \in X$:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \nu \ \ d(x_n, x_\infty) < \varepsilon$$

Dimostrazione. □

2.1 Insiemi Compatti

Definizione 2.5 (Insieme Compatto)
Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subseteq X$. A è compatto se e solo se ogni successione di elementi di A ammette una sottosuccessione avente limite in A.

> **Nota.** Questa è la definizione di **Compattezza per Successioni**, in spazi più generali può essere necessario utilizzare una definizione più debole che, nel caso degli spazi metrici, coincide con la precedente.

Esercizio 2.6
Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano K_1 e K_2 due sottoinsiemi compatti di X. Allora $K_1 \cup K_2$ è compatto

Soluzione. Posto $K = K_1 \cup K_2$, per definizione di **unione**, ogni elemento di K è in K_1 o K_2. Visto che, per ipotesi, K_1 e K_2 sono compatti, sappiamo che ogni successione in uno dei due avrà una sottosuccessione convergente nello stesso insieme. A questo punto possiamo concludere che ogni successione in K ammetterà una sottosuccessione convergente ad un elemento $x_\infty \in K_1$ oppure $x_\infty \in K_2 \implies x_\infty \in K$ ■

3 Limiti e Continuità

Definizione 3.1
Siano (X, d_x) e (Y, d_y) spazi metrici, $A \subseteq X$,x_0 di accumulazione per A, $f : A \to Y$ una funzione e $l \in Y$
$\lim\limits_{x \to x_0} = l \rightleftharpoons \forall \varepsilon, \exists \delta : \forall x \in A : d_x(x, x_0) < \delta e x \neq x_0 : d_y(f(x), l) < \varepsilon$

Proposizione 3.2
Siano (X, d_x) e (Y, d_y) spazi metrici, $A \subseteq X$,x_0 di accumulazione per A, $f : A \to Y$ una funzione e $l' \in Y$,$l'' \in Y$

Definizione 3.3 (Funzione Continua)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : A \mapsto Y$ con $A \subseteq X$ e sia $x_0 \in A$

$$f \text{ è } \textbf{\textit{continua}} \text{ in } x_0 \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta \text{ vale } d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

$$f \text{ è } \textbf{\textit{continua}} \text{ in } A \rightleftharpoons$$
$$f \text{ è continua } \textbf{\textit{in ogni punto}} \text{ di } A$$

> **Nota.** Non andrebbe detto semplicemente *f è continua* perché la continuità dipende in modo essenziale dall'insieme di punti su cui la funzione viene considerata. In assenza di ulteriori specificazioni, spesso si sottointende che l'insieme in esame è l'intero dominio della funzione.

Nota. Ha senso valutare la continuità di una funzione esclusivamente nell'insieme in cui è definita. Quindi una frase come:
la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ *è discontinua in* 0,
non è (a rigore) sensata. Andrebbe riformulata come:
la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ *non può essere estesa ad una funzione definita e continua anche in* 0.

Nota. La continuità di una funzione dipende in modo esssenziale anche dalla distanza adottata, tuttavia è prassi sottointendere questa precisazione, soprattutto per funzioni $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, se la distanza adottata è quella Euclidea.

Teorema 3.4 (Teorema generale di Weierstrass)
Siano (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *spazi metrici e sia* $f : K \mapsto Y$ *con* $K \subseteq X$.

$$\left.\begin{array}{l} K \, \textit{compatto} \\ f \, \textit{continua su } K \end{array}\right\} \implies f(K) \, \textit{compatto}$$

Dimostrazione. Siano le successioni

- $y : \mathbb{N} \mapsto Y$ tale che $y_n \in f(K)\ \forall n \in \mathbb{N}$, cioè $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in K : f(x_n) = y_n$
- $x : \mathbb{N} \mapsto X$ tale che $x_n \in K\ \forall n \in \mathbb{N}$

Nota. Abbiamo una successione che, attraverso la f (non direttamente: le successioni non sono $X \mapsto Y$!), associa indirettamente valori in $K \subseteq X$ a valori in $f(K) \subseteq Y$

La successione x ammette una sottosuccessione x_{n_k} convergente ad un elemento $\overline{x} \in K$ dalla Definizione 2.5 (Insieme Compatto), avendo K compatto per ipotesi, ed essendo x a valori in K. Data la continuità di f in K, abbiamo $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \in f(K)$, ma essendo x_{n_k} convergente ad $\overline{x}$, anche y_{n_k} converge, verificando così la definizione di spazio Compatto. □

Dimostrazione. (Alternativa)
La successione x ammette una sottosuccessione x_{n_k} convergente ad un elemento $\overline{x} \in K$, dunque da Proposizione 2.4:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_* \iff \forall \eta > 0\ \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \nu \ \ d(x_n, x_*) < \eta$$

Dalla Definizione 3.3 (Funzione Continua) e sapendo che $f(x)$ è continua, sappiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in K \ \ d_X(x, x_*) < \delta \ \ d_Y\big(f(x_n), f(x_*)\big) < \varepsilon$$

Unisco ora le due definizioni:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \nu \ \ d_Y\big(f(x_n), f(x_*)\big) < \varepsilon$$

Che equivale, per come è definita y_n, a

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = y_*$$

Cioè la definizione di successione convergente. Ho dunque individuato una sottosuccessione convergente per ogni successione in $f(K)$, verificando così la definizione di spazio Compatto. □

4 Il Teorema delle Contrazioni

Definizione 4.1 (Contrazione)
Sia (X,d) uno spazio metrico. Si dice contrazione una funzione T: $X \mapsto X$ soddisfacente a:

$$\exists K \in [0,1[\text{ tale che } \forall x', x'' \in X \text{ vale} \tag{1.1}$$
$$d_X(T(x''), T(x')) \leq K \cdot d_X(x'', x'). \tag{1.2}$$

Una contrazione è quindi una funzione con insieme di partenza e di arrivo coincidenti e Lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1. E generalmente inutile considerare contrazioni definite tra spazi diversi. Data una funzione $T : X \to Y$ Lipschitziana, è sempre possibile riscalare la distanza in uno dei due spazi X o Y per ottenere una costante di Lipschitz minore di 1.

Nota. D'ora in poi si utilizzerà la notazione Tx per intendere $T(x)$

ESEMPI:

1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{x}{2}$. f è una contrazione.*
2. *$f : [0,2] \to [0,2]$ data da $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$.f è una contrazione*
3. *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ è una contrazione*

Proposizione 4.2
Sia (X,d) uno spazio metrico, siano $f, g : X \to X$ due contrazioni in $X \Rightarrow f \circ g$ è una contrazione

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\forall x', x'' \in X, d(fx'', fx') \leq K_f d(x'', x').$$
$$\forall x', x'' \in X, d(gx'', gx') \leq K_g d(x'', x').$$

$f \circ g = f(g(x))$, quindi presi $x', x'' \in X$ si ha che:

$$d(fg(x''), fg(x')) \leq K_f d(g(x''), g(x')) \leq K_f K_g d(x'', x').$$

□

Proposizione 4.3
Sia $f \in C1(R^n; R^n)$. Se $\exists k \in [0,1[$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vale $\|Df(x)\| < k$, allora f è una contrazione.

Teorema 4.4 (Teorema delle Contrazioni)
Sia (X,d) uno spazio metrico completo in cui è definita una contrazione $T : X \to X$. Allora esiste un unico punto fisso di T in X.

Dimostrazione. Costruisco una successione di elementi di X nel seguente modo:
scelgo $x_0 \in X$,
$x_1 = Tx_0$
$x_2 = Tx_1$

...
$x_n = Tx_{n-1}$

La successione $x_n : n \in N$ così costruita è una successione di Cauchy. Infatti, presi $n, m \in N$ con $m > n$ si ha:

$$d(x_m, x_n) = d(Tx_{m-1}, x_{n-1}) \leq Kd(x_{m-1}, x_{n-1}) =$$
$$= Kd(x_{m-1}, x_{n-1}) = Kd(Tx_{m-2}, x_{n-2}) \leq K^2 d(x_{m-2}, x_{n-2}) =$$
$$= ... =$$
$$= ... = K^n d(x_{m-n}, x_0) \leq$$
$$\leq K^n \sum_{0}^{m-n+1} (d(x_{m-n-i}, x_{m-n-i-1})) =$$
$$\leq \sum_{0}^{m-n+1} (d(Tx_{m-n-i-1}, Tx_{m-n-i-2}))$$

per ogni termine di questa sommatoria si può applicare lo stesso ragionamento

$$\leq K^n \sum_{0}^{m-n+1} (K^{m-n-2} d(Tx_0, x_0)) =$$

$$\leq K^n d(Tx_0, x_0) \sum_{0}^{m-n+1} K^{m-n-2} = K^n \frac{1 - K^{m-n-1}}{1-K} d(Tx_0, x_0) \leq \frac{K^n}{1-K} d(Tx_0, x_0)$$

Ho quindi trovato che $d(x_m, x_n) \leq \frac{K^n}{1-K} d(Tx_0, x_0)$
L'ultima espressione ottenuta può essere resa arbitrariamente piccola (in modulo) pur di prendere n, e quindi anche m, sufficientemente elevato. La completezza di X implica quindi che esiste il limite $\lim_{n \to +\infty} xn$. Sia x^* questo limite. x^* è un punto fisso per T. Infatti, grazie alla continuità di T:

$$T(x^*) = T \lim_{n \to +\infty} xn$$

□

Definizione 4.5 (Funzione Iterata)
Data $F : X \mapsto X$, si dice funzione iterata n volte di F la F^n che corrisponde all'applicazione n volte di F su sè stessa. Formalmente:

$$f^{n+1} = f \circ f^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Se $n = 0$, per definizione, $f^0 = \mathrm{Id}_X$ con Id_X funzione identità su X

Teorema 4.6 (Teorema dell'Iterata Contrazione)
*Sia (X, d_X) uno spazio metrico completo e sia $T : X \mapsto X : \exists n \in \mathbb{N}, T^n$ **iterata** è contrazione. Allora T ammette un unico punto fisso in X*

> **Nota.** La n non è univocamente definita e non potrebbe esserlo. Se infatti T^n è contrazione, allora anche T^{2n}, T^{3n}, $\cdots$, $T^{\alpha n}$ lo sono.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.4 (Teorema delle Contrazioni) esiste un unico punto fisso $x_* \in X$ per T^n, quindi

$$T^n x_* = x_*$$

applicando T ad entrambi i membri

$$T(T^n x_*) = Tx_*$$

e per la Definizione 4.5 (Funzione Iterata)

$$T(T^n x_*) = T^n(Tx_*) = Tx_*$$

Dunque Tx_* è punto fisso della T^n. Avevamo però già trovato che x_* era punto fisso della T^n e, per il Teorema 4.4 (Teorema delle Contrazioni), può esistere un unico punto fisso. Ciò permette di concludere che $Tx_* = x_*$ $\square$

5 Funzioni a Valori in $\mathbb{R}$

Parte II

Calcolo Differenziale

Capitolo 2

Calcolo Differenziale

6 Preliminari

La base canonica di R^n è indicata con $(e_1, ..., e_i)$, e_i è il vettore di R^n con tutte le componenti nulle tranne la i-esima che vale 1.
Un generico vettore x si può quindi scrivere come combinazione lineare dei vettori di base $x = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j e_j$.
Nel caso n=2 è usata la notazione $(x, y) = xi + yj$
Nel caso n=3 è usata la notazione $(x, y, z) = xi + yj + zk$
Alcune classi di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hanno nomi particolari:

- $n = 1$,$m = 1$:f *è una funzione reale di una variabile reale;*
- $n = 1$,$m > 1$:f *è una curva in R^m (purché sia almeno continua e definita su un intervallo)*
- $n > 1$,$m = 1$:f *è un campo scalare*
- $n > 1$,$m > 1$:f *è un campo vettoriale*

7 Derivate Parziali e Direzionali

Definizione 7.1
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, $h, k \in \mathbb{R}$ chiamo derivata parziale rispetto a x di f in (x_0, y_0) la quantità (se esiste finita)

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

chiamo derivata parziale rispetto a y di f in (x_0, y_0) la quantità (se esiste finita)

$$\partial_y f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Definizione 7.2
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$, $i = 1, ..., n$

$$\partial_i f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

dove $(e_1, ..., e_n)$ *rappresentano la base canonica di* R^n

Osservazione 7.3
nella prima definizione la derivata è un valore reale mentre nella seconda è un vettore di R^m

Osservazione 7.4
le proprietà e le regole di derivazione sono le stesse di Analisi 1

Definizione 7.5
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, *sia* $v \in \mathbb{R}^2$*con* $\|v\| = 1$ *diciamo derivata nella direzione* v *della funzione* f *nel punto* (x_0, y_0) *il limite (se esiste finito)*

$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

dove v_1, v_2 *sono le componenti di* $v(v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix})$

Definizione 7.6
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$, *sia* $v \in \mathbb{R}^n$*con* $\|v\| = 1$ *diciamo derivata nella direzione* v *della funzione* f *nel punto* x_0 *il limite (se esiste finito)*

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Proposizione 7.7
(ANALISI 1): sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
f *è differenziabile* $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ *t.c.* $f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h)$ *per* $h \to 0$ ...
...
...

Esercizio 7.8
Formulare in modo rigoroso e dimostrare:

1. *La somma di funzioni parzialmente derivabili è parzialmente derivabile.*
2. *La composizione di funzioni parzialmente derivabili è parzialmente derivabile.*
3. *Prodotto e rapporto, quando definiti, di funzioni parzialmente derivabili sono funzioni parzialmente derivabili.*

8 Derivata Totale

Definizione 8.1
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
f *è differenziabile in* $x_0 \rightleftharpoons \exists M \in Mat(mxn) : f(x_0 + h) = f(x_0) + Mh + o(h)$ *per* $h \to 0$

Definizione 8.2
siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* x_0 *di accumulazione per* A
$f = o(g)$ *per* $x \to x_0 \rightleftharpoons \lim\limits_{x->x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}$

Definizione 8.3
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$
f *è differenziabile in* $(x_0, y_0) \rightleftharpoons f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0) + m_1 h + m_2 k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$ *per* $(h, k) \to (0, 0)$

Definizione 8.4
siano $f, g :: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* (x_0, y_0) *di accumulazione per* A
$f = o(g)$ *per* $(x, y) \to (x_0, y_0) \rightleftharpoons \lim\limits_{(x,y)->(x_0,y_0)} \frac{\|f(x,y)\|}{\|g(x,y)\|}$

Proposizione 8.5
(Unicità della derivata totale) sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$, M_1,$M_2 \in Mat(mxn)$
$M1$ *derivata totale di* f *in* x_0,
$M2$ *derivata totale di* f *in* x_0,
allora $M1 = M2$

Dimostrazione. poiché M_1 e M_2 sono derivate totali di f nel punto x_0,
$f(x_0 + h) = f(x_0) + M_1 h + o(h)$ per $h \to 0$
$f(x_0 + h) = f(x_0) + M_2 h + o(h)$ per $h \to 0$
facendo la differenza membro a membro delle precedenti ottengo che $(M_1 - M_2)h = o(h)$ per $h \to 0$
Scelto $h = te_i$, dove e_i è un vettore della base canonica, si ottiene $(M_1 - M_2)te_i = o(h)$ quindi $\lim\limits_{t\to 0} \frac{(M_1 - M_2)te_i}{t\|e_i\|} = \lim\limits_{t\to 0}(M_1 - M_2)e_i = 0$, poiché e_i è un vettore non nullo deve essere $(M_1 - M_2) = 0$ quindi $M_1 = M_2$

□

Osservazione 8.6
L'ultima riga della dimostrazione dice che le applicazioni lineari M_1 *e* M_2 *hanno le stesse immagini sui vettori della base canonica, quindi coincidono.*

Proposizione 8.7
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$
f *è differenziabile in* $x_0 \Rightarrow f$ *è continua in* x_0
DIMOSTRAZIONE

..
..
..
..
..
..

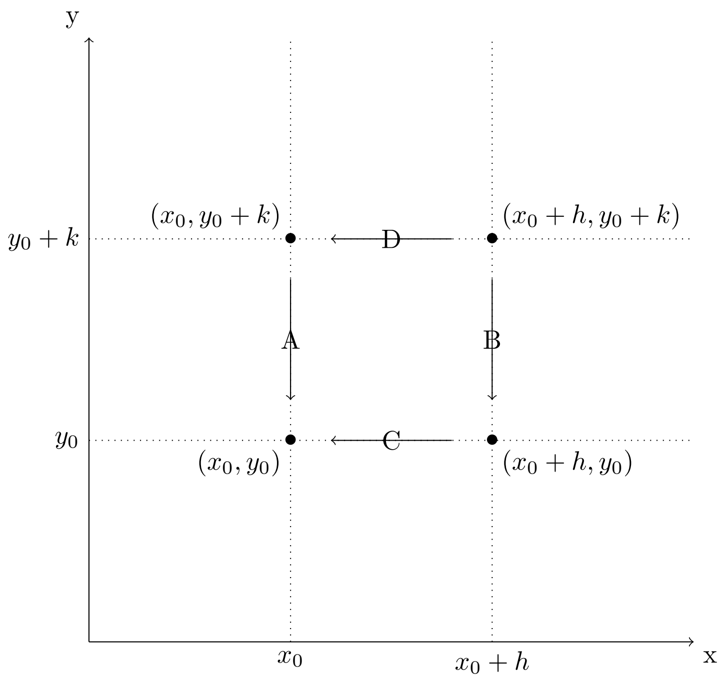
Teorema 8.8
Differenziale Totale sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$.
$\exists \partial_i f(x) \; \forall i = 1, ..., n definite \forall x$ *in un intorno di* x_0
$\partial i f$ *è continua in* x_0
$\Rightarrow f$ *è differenziabile in* x_0

Teorema 8.9
Differenziale Totale sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$.
$\exists \partial_x f(x, y)$ *e* $\exists \partial_y f(x, y)$ *definite* $\forall x$ *in un intorno di* (x_0, y_0)
$\partial_x f(x, y)$ *e* $\exists \partial_y f(x, y)$ *continue in* x_0
$\Rightarrow f$ *è differenziabile in* (x_0, y_0)

Dimostrazione. devo dimostrare che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0 \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix})}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

dove $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0, y, 0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{bmatrix}$



devo calcolare lo scarto della funzione tra i punti $(x_0 + h, y_0 + k)$ e (x_0, y_0). Ho a disposizione le derivate parziali che mi danno informazioni lungo le parallele agli assi quindi non muovo lungo la diagonale ma lungo i percorsi D,A e B,C
Il limite (¡-) fa zero se il numeratore è zero, allora guardo solo quello.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \partial x f(x_0, y_0)h - \partial y f(x_0, y_0)k$$

riscrivo tale quantità seguendo il percorso D,A

$$[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)]+[f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)]-\partial x f(x_0,y_0)h-\partial y f(x_0,y_0)k$$

chiamo $\varphi(x)=f(x,y_0)$ quindi $f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$
la funzione φ è una funzione reale di una variabile reale ed in virtù del teorema di Lagrange $\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\beta h)h$ per $\beta\in]0,1[$, per come definita φ si ha che $\varphi'(x_0+\beta h)h=\partial_x f(x_0+\beta h,y_0)h$
con un ragionamento del tutto analogo si può definire $\Psi(x)=f(x_0+h,y)$ e si ha che $\Psi(y_0+h)-\Psi(y_0)=\Psi'(y_0+\alpha k)k=\partial_y f(x_0+h,y_0+\alpha k)k$ per $\alpha\in]0,1[$
Quindi

$$[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)]+[f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)]-\partial x f(x_0,y_0)h-\partial y f(x_0,y_0)k=$$

$$=[\partial_x f(x_0+\beta h,y_0)h]+[\partial_y f(x_0+h,y_0+\alpha k)k]-\partial x f(x_0,y_0)h-\partial y f(x_0,y_0)k=$$

$$=[\partial_x f(x_0+\beta h,y_0)h-\partial x f(x_0,y_0)h]+[\partial_y f(x_0+h,y_0+\alpha k)k-\partial y f(x_0,y_0)k]$$

Adesso la riscrivo recuperando il denominatore 'e devo verificare che il limite per $(h,k)\to(0,0)$ tenda a zero.

$$[\partial_x f(x_0+\beta h,y_0)-\partial x f(x_0,y_0)]\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+[\partial_y f(x_0+h,y_0+\alpha k)-\partial y f(x_0,y_0)]\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Le derivate parziali sono continue quindi per $(h,k)\to(0,0)$ i numeratori tendono a zero
Inoltre le due frazioni per $(h,k)\to(0,0)$ sono quantità limitate tra -1 e 1 quindi si può dire che il limite cercato fa 0. □

8.1 Regole di Derivazione

Proposizione 8.10
Siano $f,g:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e $x_0\in\mathring{A}$
f differenziabile in x_0, g differenziabile in x_0 allora $f+g$ differenziabile in x_0 e $D(f+g)(x_0)=Df(x_0)+Dg(x_0)$

Dimostrazione. f è differenziabile, allora $f(x_0+h)=f(x_0)+Df(x_0)h+o(h)$ per $h\to0$
anche g lo è, quindi $g(x_0+h)=g(x_0)+Dg(x_0)h+o(h)$ per $h\to0$
sommando membro a membro si ottiene $(f+g)(x_0+h)=(f+g)(x_0)+[Df(x_0)+Dg(x_0)]h+o(h)$ per $h\to0$
Questa è la definizione di differenziabilità, allora $f+g$ è differenziabile e $D(f+g)(x_0)=Df(x_0)+Dg(x_0)$ □

Proposizione 8.11
Sia $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e $x_0\in\mathring{A}$ e $\lambda\in\mathbb{R}$
f differenziabile in x_0 allora λf differenziabile in x_0 e $D(\lambda f)(x_0)=\lambda Df(x_0)$

Dimostrazione. f è differenziabile, allora $f(x_0+h)=f(x_0)+Df(x_0)h+o(h)$ per $h\to0$
valuto ora $(\lambda f)(x_0+h)=(\lambda f)(x_0)+\lambda Df(x_0)h+o(h)$ per $h\to0$
Questa è la definizione di differenziabilità, allora λf è differenziabile e $D(\lambda f)(x_0)=\lambda Df(x_0)$ □

Proposizione 8.12
Sia $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
Sia $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *e* $g(x_0) \in \mathring{B}$
f *differenziabile in* $g(x_0)$, g *differenziabile in* x_0 *allora* $f \circ g$ *differenziabile in* x_0 *e* $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) * Dg(x_0)$

Dimostrazione. g è differenziabile in x_0, allora $g(x_0 + h) = f(x_0) + Dg(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
f è differenziabile in $g(x_0)$ allora $g(g(x_0) + k) = f(g(x_0)) + Df(g(x_0))k + o(k)$ per $k \to 0$
valuto ora

$$(f \circ g)(x_0 + h) = f(g(x_0 + h) + Dg(x_0)h + o(h)) =$$
$$= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))(Dg(x_0)h + o(h)) + o(Dg(x_0)h + o(h)) =$$
$$= (f \circ g)(x_0) + Df(g(x_0))Dg(x_0)h + Df(g(x_0))o(h) + Dg(x_0)o(h) + o(h)$$

con h un vettore $n \times 1$
con Dg una matrice $m \times n$
con Df una matrice $p \times m$

da rivedere un pochino ....
Questa è la definizione di differenziabilità, allora $f \circ g$ è differenziabile e $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0)$ □

Proposizione 8.13
DERIVATA DEL PRODOTTO

8.2 La Formula degli Accrescimenti Finiti

Definizione 8.14
Siano $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$*, si dice segmento di estremi* x_0 *e* x_1 *l'insieme* $S = tx_1 + (1-t)x_0 : t \in [0,1]$

Teorema 8.15 (Formula degli accrescimenti finiti)
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0, x_1 \in \mathring{A}$, S *il segmento di estremi* x_0, x_1*, sia* $f \in \mathbf{C^1}(A, \mathbb{R}^m)$ *allora* $\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{x \in S} \|Df(x)\| \, \|x_1 - x_0\|$

Osservazione 8.16
$\|A\|$ *con* $A \in Mat(n \times m)$, $\|A\| = \sup_{\|x\|=1 : x \in \mathbb{R}^n} \|Ax\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ *questa è chiamata norma operativa*

Nota.

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$
$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Dimostrazione. sia $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ che $t \to f(tx_1 + (1-t)x_0)$
La funzione F è una funzione reale di variabile reale , posso quindi applicare il teorema di Lagrange
$F(1) - F(0) = F'(\theta)1$ quindi $f(x_1) - f(x_0) = Df(\theta x_1 + (1-\theta)x_0)(x_1 - x_0)$
scelto $v \in \mathbb{R}^m$ con $v = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{\|f(x_1)-f(x_0)\|}$ moltiplico entrambi i membri per v si ottiene $v(f(x_1) - f(x_0)) = vDf(\theta x_1 + (1-\theta)x_0)(x_1 - x_0)$
... da finire per bene □

Definizione 8.17
Sia $C \in \mathbb{R}^n$, C *è convesso* $\rightleftharpoons \forall x_0, x_1 \in C$ *anche* $S_(x_0, x_1) = \{tx_1 + (1-t)x_0 : t \in [0,1]\} \subseteq C$*ù*

Proposizione 8.18
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A è aperto connesso e $f \in \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m)$ e $Df = 0$ allora f è costante su A
..... disegnino e bozza di dimostrazione

Proposizione 8.19
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A è aperto convesso e $f \in \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m)$ e $Df = 0$ allora f è costante su A
..... disegnino e bozza di dimostrazione

Proposizione 8.20
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A è aperto connesso e $f \in \mathbf{C^1}(A;\mathbb{R}^m)$ e $Df = 0$ allora f è costante su A
..... disegnino e bozza di dimostrazione

Osservazione 8.21
vale anche sugli insiemi connessi poiché in questi posso congiungere due qualunque punti con una poligonale interamente contenuta nell'insieme e con i lati paralleli agli assi. Attraverso la formula degli accrescimenti finiti posso calcolare la f nei due estremi passando per tutti gli spigoli della poligonale.(Uno spigolo è un segmento quindi si puòapplicare il teorema precedente)

si po dire qualcosa sulle funzioni lineari tipo c1, lips ....

9 Derivate Seconde

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sappiamo che $Df(x_0) \in Mat(m \times n)$, allora $Df : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$ cioè la derivata è una funzione a valori in $Mat(m \times n)$, ne segue che $D(D(F)) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n\times n}$

Definizione 9.1
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derivabile parzialmente in x_0 lungo e_i. Se la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è derivabile parzialmente lungo e_j in x_0, la quantità $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ è la derivata seconda di f in x_0 rispetto x_i, x_j e si indica $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

Definizione 9.2
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$
f differenziabile due volte in xo $\rightleftharpoons$ f è differenziabile in un intorno di x_0 e f è differenziabile in x_0

Osservazione 9.3
con la notazione della definizione precedente, f è una funzione definita in un intorno di x_0 con valori in $Mat(m \times n)$, spazio identificabile con $R^{m\times n}$

Osservazione 9.4
per una funzione scalare $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la derivata prima è un vettore (il gradiente ∇ in $R^{1\times n}$), la derivata seconda è una matrice in $R^{1\times n\times n}$, la derivata terza è una super matrice ...

Definizione 9.5
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$, f ammette tutte le derivate parziali seconde in x_0. La matrice di queste derivate seconde si chiama Matrice Hessiana di f in x_0

$$H_f(x_0) = D^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

ESEMPI:
...
...
...

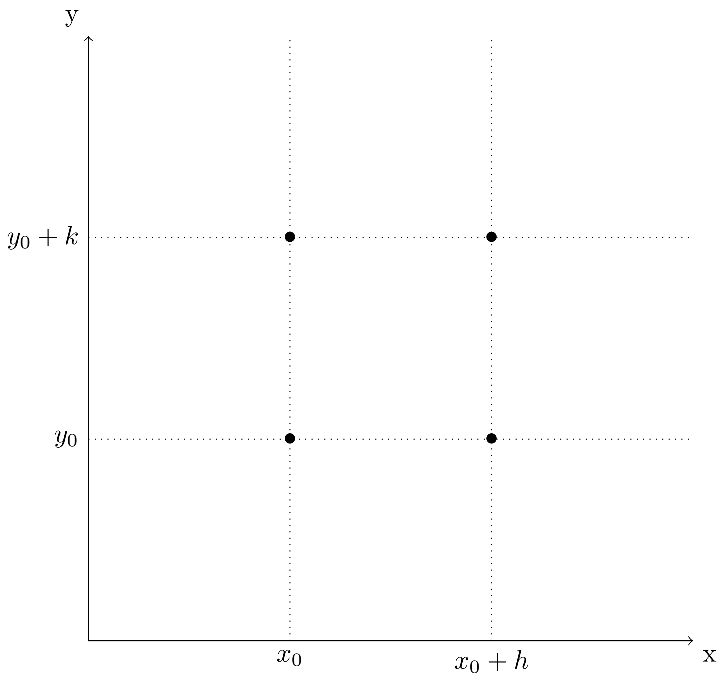
9.1 Il Lemma di Schwarz

Proposizione 9.6
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$. *Fino ...*
$\exists \partial^2_{ij} f(x)$ *e* $\exists \partial^2_{ji} f(x)$ *in un intorno di* x_0 *e continue in* $x_0 \Rightarrow$ *....*

CASO n=2 m=1

Proposizione 9.7
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$. *.....*
$\exists \partial^2_{xy} f(x,y)$ *e* $\exists \partial^2_{yx} f(x,y)$ *in un intorno di* (x_0, Y_0) *e continue in* $(x_0, y_0) \Rightarrow$ *....*

Dimostrazione. prendo una quantità $q = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$



L'idea è quella di calcolare q in due modi diversi e osservare che le due scritture rappresentano la stessa quntità quindi sono uguali.

$$q = [f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)] - [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)]$$

scelgo una funzione $\varphi(h) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$

$$q = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\alpha' h)h$$

valida per $\alpha' \in]0,1[$ e $\varphi'(h) = \partial_x f(x_0+h, y_0+k) - \partial_x f(x_0+h, y_0)$

$$q = [\partial_x f(x_0+\alpha' h, y_0+k) - \partial_x f(x_0\alpha' h+, y_0)]h$$

scelgo una funzione $\Phi(k) = \partial x f(x_0+h, y_0+k)$

$$q = [\Phi(k) - \Phi(0)]h = \Phi'(\beta' k)hk$$

valida per $\beta' \in]0,1[$ e $\Phi'(k) = \partial_y \partial_x f(x_0+\alpha' h, y_0+k)$

$$q = \partial^2_{xy} f(x_0+\alpha' h, y_0+\beta' k)hk$$

Ma q può anche essere calcolata in un secondo modo

$$q = [f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)] - [f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

scelgo una funzione $\psi(k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)$

$$q = \psi(k) - \varphi(0) = \psi'(\alpha'' k)k$$

valida per $\alpha'' \in]0,1[$ e $\psi'(k) = \partial_y f(x_0+h, y_0+k) - \partial_y f(x_0, y_0+k)$

$$q = [\partial_y f(x_0+h, y_0+\alpha'' k) - \partial_y f(x_0, y_0+\alpha'' k)]k$$

scelgo una funzione $\Psi(h) = \partial y f(x_0+h, y_0+\alpha'' k)$

$$q = [\Psi(h) - \Phi(0)]k = \Psi'(\beta'' k)hk$$

valida per $\beta'' \in]0,1[$ e $\Psi'(h) = \partial_x \partial_y f(x_0+h, y_0+\beta'' k)$

$$q = \partial^2_{xy} f(x_0+\alpha'' h, y_0+\beta'' k)hk$$

Abbiamo quindi trovato che

$$\partial^2_{xy} f(x_0+\alpha' h, y_0+\beta' k)hk = \partial^2_{xy} f(x_0+\alpha'' h, y_0+\beta'' k)hk$$

Ci sarebbe un disegno ...
...
Abbiamo trovato che le derivate parziali seconde miste coincidono in due punti ad esempio quelli segnati con il cerchio, poiché $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ li abbiamo scelti in $]0,1[$
poiché h, k li abbiamo scelti del tutto arbitrari allora facciamo il limite e poiché le due quantità sono uguali allora sono uguali anche i limiti.
allora per $(h,k) \to (0,0)$ anche $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ cambiano ma essendo limitati tra $]0,1[$ moltiplicandoli oer una quantità che tende a zero fa tutto zero.
Usando la continuità, per $(h,k) \to (0,0)$ ottengo $\partial^2_{xy} f(x_0, y_0) = \partial^2_{yx} f(x_0, y_0)$ □

Osservazione 9.8
$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$Df(x_0) = \nabla f(x_0) \in Mat(1 \times n)$
$H_f(x_0) \in Mat(n \times n)$
Il lemma di Schwarz dice che sotto opportune ipotesi la $H_f(x_0)$ è una matrice simmetrica, in questo caso non dobbiamo calcolare $n \times n$ termini, ma solo $\frac{n(n+1)}{2}$

9.2 Sviluppo in Serie di Taylor al II Ordine

9.3 Derivate di Ordine Superiore

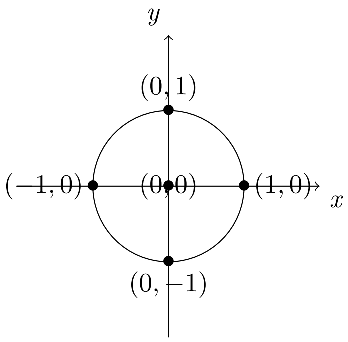
10 Il Teorema della funzione Implicita

Definizione 10.1
sia $X \in \mathbb{R}^n$ *e* $Y \in \mathbb{R}^m$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}^l$, $x_0 \in \mathring{X}$, $y_0 \in \mathring{Y}$.
L'equazone $f(x, y) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $y = \varphi(x)$ *in un intorno di* $(x_0, y_0) \rightleftharpoons$

1. $f(x_0, y_0) = 0$, *rappresenta un punto di partenza*
2. $\exists\mathcal{X}$ *intorno di* x_0 *e* $\exists\mathcal{Y}$ *intorno di* y_0, *in questo modo due intorno uno per punto, uno è l'insieme di partenza, l'altro l'insieme di arrivo*
3. $\exists\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *t.c.:* $f(x, y) = 0$ *con* $x \in \mathcal{X}$ *e* $y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

ESEMPIO:
$m = n = l = 1$, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, *questa equazione non definisce mai una funzione implicita poiché non è mai nulla*

ESEMPIO:
$m = n = l = 1$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$



Per prima cosa osservo che s possono trovare dei punti che rendono vera $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ *e sono tutti i punti della circonferenza di centro l'origine degli assi e raggio unitario.*
il punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ *definisce implicitamente una funzione* $y = \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *con* $\mathcal{X} = [-1, 1]$ *e* $\mathcal{Y} = [0, 1]$
un primo problema è dovuto alla scelta degli intervalli $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, *per esempio posso scegliere* $\mathcal{X} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *e* $\mathcal{Y} = R^+$
un secondo problema è la scelta del punto (x_0, y_0), *potrei scegliere il punto* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Osservazione 10.2
La stessa definizione può essere riscritta con la x *funzione della* y *poiché a priori non c'è distinzione tra le variabili.*

Proposizione 10.3
(caso lineare)
sia $f : R^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *che* $(x, y) \to Ax + By - C$ *con* $A \in Mat(p \times n), B \in (p \times m), B \in (p \times 1)$.
Se $p = m$ *cioè* B *è un matrice quadrata, e* $det(B) \neq 0$ *cioè invertibile, allora*
$\exists!\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *t.c.:* $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

Dimostrazione. $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = -C \Leftrightarrow By = -Ax + C \Leftrightarrow y = -B^{-1}Ax + B^{-1}C = \varphi(x)$ □

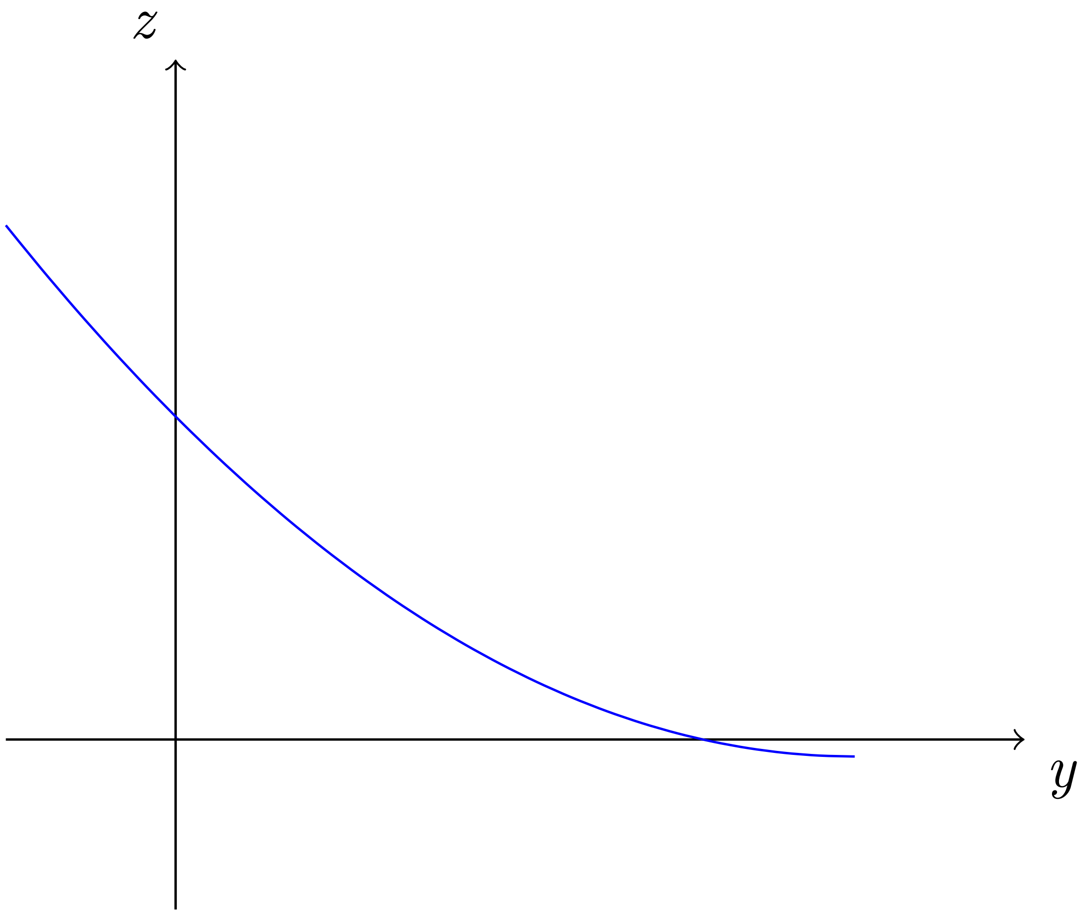
Teorema 10.4 (Teorema della Funzione Implicita)
Sia $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ *con* $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$
Preso un punto (x_0, y_0) *con* $x_0 \in \mathring{X}, y_0 \in \mathring{Y}$
se:

1. f *continua in* $X \times Y$
2. $f(x_0, y_0) = 0$
3. f *differenziabile rispetto a* $y \forall (x,y) \in X \times Y$ *e* $D_y f(x,y)$ *continua.*
4. $D_y f(x_0, y_0)$ *invertibile .*

$\Rightarrow$ *si ha:*
esistenza della funzione implicita
$\exists \mathcal{X} \subseteq X$ *intorno di* x_0*(xstrano aperto)*
$\exists \mathcal{Y} \subseteq Y$ *intorno di* y_0*(ystrano aperto)*
$\exists \varphi$ *continua con* $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *t.c.* $[\varphi(x_0) = y_0 e] f(x,y) = 0, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ *unicità di sostanza cioè a meno del dominio:*
se $\varphi_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{Y}_i$ *e* $x_0 \in \mathcal{X}_i, y_0 \in \mathcal{Y}_i$
$f(x_0, y_0) = 0 \forall x \in \mathcal{X}_i, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi_i(x)$ *con* $i = 1, 2$
Allora $\forall \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ *vale* $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

Osservazione 10.5
Le ipotesi 3 e 4 garantiscono che esiste una approssimazione lineare, l'ipotesi 4 è sensata poiché y e f hanno lo stesso numero di componenti quindi Dyf *è un matrice qudrata.*
la funzione $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ *che* $(x,y) \to f(x,y)$ *??????*
cioè $\forall x \in X$ *(sto fissando una x)* $f^x : Y \to \mathbb{R}^m$ *che* $y \to f(x,y)$*(sto variando la y),* $Df^x \in Mat(m \times m)$

Osservazione 10.6
Metodo degli zeri di Newton per troare gli zeri di una funzione o metofo delle tangenti.



Scelgo un punto y_0 ne prendo il valore sulla curva, disegno la tangente e chiamo y_1 l'intersezione con l'asse y. Itero il processo $y_n + 1 = y_n \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$
discorso al momento difficile per me....

Dimostrazione. Dobbiamo partire da $f(x, y) = 0$ arrivare a $y = \varphi(x)$,vogliamo applicare un ragionamento simile a quello della Metodo di Newton, passando però per il concetto di punto fisso, il teorema delle Contrazioni ci assicura che esiste unico.
cerchiamo quindi una contrazione T il cui punto fisso sia soluzione di $f(x, y) = 0$. T è del tipo:
T :?×? →?
$(x, y) \to y - [D_y f(X_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$, nota che non avere nella derivata lo stesso punto in cui si calcola la funzione (come è nel metodo di Newton) ha effetti "tragici" sulla velocità di convergenza, ma a noi interessa l'esistenza.
bisgna capire quali insiemi usare come insiemi di partenza e arrivo, devo essere scelti in modo da poter applicare il teoremma delle contrazioni. Bisogna scegliere sottoinsiemi di R^n e R^m, scegliamo quindi delle sfere
$T : \overline{B(x_0, r_x)} \times \overline{B(y_0, r_y)} \to \overline{B(y_0, r_y)}$, scegliendo la chiusura delle sfere si è sicuri di lavorare in uno spazio metrico completo, poiché in R^l completo ⇔ chiuso e limitato.
come vengono invece scelti i raggi? sono scelti in modo che:

1. T è ben definita
2. $\forall x \in \overline{B(x_0, r_x)} Tx : \overline{B(x_0, r_x)} \to \overline{B(y_0, r_y)}$ che $y \to T(x, y)$,

cioè T è una contrazione tale che $\forall x$ esiste un punto fisso, $\forall x$ associo a y una x, e quindi na funzione.
r_x, r_y devono essere sufficientemene piccoli per avere tali proprietà e per poterci lavorare sopra.
Abbiamo che $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow T(x, y) = y$
$T(x, y) = y \Leftrightarrow y = y - [D_y F(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$
$[D_y F(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) = 0$
Per verificare che T è una contrazione ne stimo la norma
$\|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| \leq \sup\limits_{\widetilde{y} \in segmento} \|D_y T(x, \widetilde{y})\| \, \|y_2 - y_1\|$ accrescimenti finiti.
Poichè le sfere sono insiemi convessi è stato possibile applicare il Teorema degli accresscimenti finiti.
Presa $T(x, y) = y - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$, la derivo rispetto a y:

$$D_y T(x, y) = I_{\mathbb{R}}^m - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} D_y f(x, y) =$$

$$= [D_y f(x_0, y_0)]^{-1}][D_y f(x_0, y_0) - D_y f(x, y)]$$

Osserviamo che abbiamo ottenuto una matrice come costante moltiplicativa, al secondo membro abbiamo la differenza di due valori di una funzione, che per ipotesi è una funzione continua ($D_y f(x, y)$ continua), allora per r_x e r_y sufficientemente piccoli ho che:
$\|D_y T(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$, è scelto questo valore poiché è comodo al fine di dimostrare la contrazione...

$$\|D_y T(x, y)\| \leq \left\|D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|D_y f(x_0, y_0) - D_y f(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$$

$$\|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| \leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\|$$

Se dimostriamo che T è ben definita abbiamo dimostrato che T è una contrazione.
Per verificare che T è en definita bisogna mostrare che $T(x, y) \subseteq \overline{B(y_0, r_y)}$ quindi si mostra che la distanza tra $T(x, y)$ e il centro è minore di r_y

$$\|T(x, y) - y_0\| \leq \|T(x, y) - T(x, y_0)\| + \|T(x, y_0) - y_0\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\|y_0 - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y_0) - y_0\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\|[D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|f(x, y_0) - 0\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\|[D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} r_y + \frac{1}{2} r_y \leq r_y$$

Allora T è ben definita perché $T(x, y) \in \overline{B(y_0, r_y)}$.
In conclusione con $\mathcal{X} = \overline{B(x_0, r_x)}$ e $\mathcal{Y} = \overline{B(y_0, r_y)}$ ho che $T : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ è tale che $\forall x \in \mathcal{X}$ la funzione $y \to T(x, y)$ è una contrazione e $\overline{B(y_0, r_y)}$ è completo.
quaolcosa sui completi.........
....

....
A questo punto può essere applicato il teorema delle contrazioni:
$\forall x \in \mathcal{X}, \exists y \in \mathcal{Y} : f(x, y) = 0$ allora chiamo $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ che $x \to y$ è unica quindi φ è una funzione.
Allora la funzione implicita esiste. La continuità direva direttamente dal teorema delle contrazioni: l'applicazione che al parametro associa il punto fisso è continua.
Per l'unicità si osservano le ipotesi 1 e 2, dove è scritto $\forall x$ ovvero scelta una qualunque x la y è unica quindi φ è univocamente definita.

□

Proposizione 10.7
Sia $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ *con* $X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m$
Preso un punto (x_0, y_0) *con* $x_0 \in \mathring{X}$,$y_0 \in \mathring{Y}$
se:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $f \in \mathbf{C^1}(X \times Y, R^m)$.
3. $D_y f(x_0, y_0)$ *invertibile* .

$\Rightarrow$ *si ha:*

1. $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *definita implicitamente da* $f(x_0, y_0) = 0$
2. φ *continua su* $\mathcal{X}$
3. φ *è differenziabile e* $D\varphi(x) = -[D_y f(x, \varphi(x))]^{-1} D_x f(x, \varphi(x))$

Dimostrazione. I punti 1 e 2 sono gli stessi del teorema della funzione implicita e si dimostrano allo stesso modo.
Per il punto 3 abbiamo che $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ e quindi $\forall x \in \mathcal{X}$ $f(x, \varphi(x)) = 0$
....
....

□

Proposizione 10.8
CASO N=1, M=1
Sia $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *con* $X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}$
Preso un punto (x_0, y_0) *con* $x_0 \in \mathring{X}$,$y_0 \in \mathring{Y}$
se:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $f \in \mathbf{C^1}(X \times Y, R)$.
3. $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.

$\Rightarrow$ *si ha:*

1. $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *definita implicitamente da* $f(x_0, y_0) = 0$
2. $\varphi \in \mathbf{C^0}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

3. *φ è derivabile e $\varphi'(x) = -[\partial_y f(x, \varphi(x))]^{-1} \partial_x f(x, \varphi(x))$*

Dimostrazione. $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$, derivando $D(f(x, \varphi(x))) = 0$
$\partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$
allora $\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}$ □

Osservazione 10.9
Non essendoci motivo per preferire la x alla y o viceversa, esiste anche una versione di questo teorema in cui le ipotesi sono le stesse eccetto l'ultima che diventa $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$

1. *$\exists \psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ definita implicitamente da $f(x, y) = 0$*

2. *$\psi \in \mathbf{C^0}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$*

3. *ψ è derivabile e $\psi'(y) = -[\partial_x f(\psi(y), y)]^{-1} \partial_y f(\psi(y), y)$*

Qualche esempio qui

10.1 Il Teorema della funzione Inversa

Data una funzione f, poterla invertire ...... unico modo l'equazione (o sistema ....)... l'incognita x in funzione del parametro .....

Proposizione 10.10
(Teorema della funzione inversa caso lineare)
Sia $f : R^n \in \mathbb{R}^m$ data da $f(x) = Mx$ e $M \in Mat(m \times n)$, f è invertibile $\Leftrightarrow n = m$ e $detM \neq 0$

Proposizione 10.11
(caso generale)
sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ con $A \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbf{C^1}(A, R^n)$, $x_0 \in \mathring{A}$ e $Df(x_0)$ invertibile.
Allora $\exists \mathcal{X} \in A, \exists \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^n$, $\exists \varphi \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ con la proprietà $f(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi(y)$ con $x \in \mathring{\mathcal{X}}$ e $y \in \mathring{\mathcal{Y}}$ e $\varphi \in \mathbf{C^1}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ e $D\varphi(y) = [Df(x)]^{-1}$

Dimostrazione. $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) - y = 0$. Allora introduco $F : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $F(x, y) = f(x) - y$.
Studio $F(x, y) = 0$ per ottenere $x = \varphi(y)$.
Per poter applicare il teorema della funzione implicita serve $D_x F(x_0, y_0)$ invertibile, ma $D_x F(x_0, y_0) = Df(x_0)$ che è invertibile per ipotesi.
Applico allora il teorema della funzione implicita , quindi gli intorni esistono e $x = \varphi(y)$.
resta da trovare la derivata totale di φ. Sappiamo che $f \in \mathbf{C^1}$ quindi $\varphi \in \mathbf{C^1}$.
Sappiamo che $\varphi(f(x)) = x$, applicando la derivata della funzione composta abbiamo che:
$D\varphi(f(x))Df(x) = I$
$D\varphi = [Df(x)]^{-1}$ quando $\varphi(y) = x$
si puo anche scrivere come $(Df^{-1})(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$ □

11 Massimi e Minimi Liberi

Definizione 11.1
Siano (X,d)*s.m.,* $A \subseteq X$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$*, siano* $x_0 \in A, B \in A$ *e* $m, M \in \mathbb{R}$ *(L'insieme immagini deve essere R per poter parlare di massimi e minimi, R è un campo ordinato a differenza di* R^n*).*
M *è massimo di* f *su* $B \rightleftharpoons M = \max f(B) \Leftrightarrow \forall x \in B f(x_0) \geq f(x)$
M *è minimo di* f *su* $B \rightleftharpoons m = \min f(B) \Leftrightarrow \forall x \in B f(x_0) \leq f(x)$
x_0 *è punto di massimo assoluto per* $f \rightleftharpoons f(x_0) = \max_A f(x)$
x_0 *è punto di minimo assoluto per* $f \rightleftharpoons f(x_0) = \min_A f(x)$
x_0 *è punto di massimo locale relativo per* $f \rightleftharpoons \exists r > 0 : f(x_0) = \max_{x \in B(x_0,r)} f(x)$ *con* $B(x_0,r) \subseteq A$
x_0 *è punto di minimo locale relativo per* $f \rightleftharpoons \exists r > 0 : f(x_0) = \min_{x \in B(x_0,r)} f(x)$ *con* $B(x_0,r) \subseteq A$

11.1 Condizioni Necessarie

Proposizione 11.2
Teorema di Fermat
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$*. Se* x_0 *è punto di massimo(0 minimo) locale per* f *su* A *e* f *è differenziabile in* x_0 *allora* $\nabla f(x_0) = 0$*.*

Dimostrazione. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$, la funzione $F(t) = f(x_0 + tv)$ che a $t \to x_0 + tv$ è il moto rettilineo uniforme che passa da x_0 all'istante 0 e si muove con velocità vettore costante v. cioè per tempi negativi mi avvicino a x_0 al tempo zero si è in x_0 e per tempi positivi si allontana da x_0. quindi $t = 0$ è punto di massimo per F, allora $F'(0) = 0$ per il teorema di Fermat di A1.
Ora abbiamo che $F'(t) = \nabla f(x_0 + tv)v$ quindi $F'(0) = \nabla f(x_0)v$ cioè $\nabla f(x_0)v = 0$.
Quindi $\forall v : \|v\| = 1$ vale $\nabla f(x_0) = 0$
OSS:: Vale anche che $D_v f(x_0) = 0$ □

Definizione 11.3
sia $f : A \subseteq r^n \to \mathbb{R}$*,* $x_0 \in \mathring{A}$
x_0 *è punto stazionario ....* $\rightleftharpoons$ f *è differenziabile in* x_0 *e* $\nabla f($ *......*

Osservazione 11.4
nel caso $n = 2, m = 1, \nabla f(x_0, y_0) = [\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)]$ *..... i punti stazionari sono quelli che ......parziali.*

Osservazione 11.5
Prima di continuare un paio di osservazioni sulle forme quadratiche.

Definizione 11.6
forma quadratica su $R^n \rightleftharpoons q : R^n \to \mathbb{R}$ *che* $x \to x^T Q x$ *con* $Q \in Mat(n \times n)$ *simmetrica*
ESEMPI:n=2

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO
SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO
SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO

Proposizione 11.7
se Q è una forma quadratica, allora

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
- $q(0) = 0$
- *se q è limitata* $\Rightarrow q \equiv 0$

Dimostrazione.

- $q(\lambda x) = (\lambda x)^T Q(\lambda x) = \lambda^2 x^T Q x = \lambda^2 q(x)$
- $q(0) = q(0x) = 0q(x) = 0$
- (contronominale $q \neq 0 \Rightarrow q$ non è limitata).
  se q è non nulla $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n \ q(x) \neq 0$
  allora $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ illimitata.
- ??

$\square$

Proposizione 11.8
se q è una forma quadratica $\Rightarrow \exists M \geq 0 : |q(x)| \leq M \|x\|^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dimostrazione. per $x \neq 0$ $|q(x)| = \left|q\left(\|x\| \frac{1}{\|x\|} x\right)\right| = \|x\|^2 \left|q\left(\frac{1}{\|x\|} x\right)\right| \leq$
$\leq \left(\sup\limits_{\|x\|=1} |q(x)|\right) \|x\|^2 = \leq \left(\max\limits_{\|x\|=1} |q(x)|\right) \|x\|^2 = M \|x\|^2$ $\square$

Proposizione 11.9
Sia q una forma quadratica, se $q(x) = o(\|x\|^2)$ per $x \to 0 \Rightarrow q \equiv 0$

Dimostrazione. sia $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| = 1$ e $t > 0$.
$q(x) = \frac{1}{t^2}$, $q(tx) = \frac{q(tx)}{\|tx\|^2} \to 0$ per $t \to 0$ per ipotesi.
Allora $\forall x$ con $\|x\|$ vale $q(x) = 0$ e allora $\forall x \neq 0, q(x) = q\left(\frac{1}{\|x\|} x\right) \|x\|^2$ $\square$

Definizione 11.10
Sia $q : R^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica

- *q è definita positiva* $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \ q(x) > 0[Q > 0]$
- *q è semidefinita positiva* $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n \ q(x) \geq 0[Q \geq 0]$
- *q è definita negativa* $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \ q(x) < 0[Q >< 0]$
- *q è semidefinita negativa* $\rightleftharpoons \forall x \in \mathbb{R}^n \ q(x) \leq 0[Q \leq 0]$

Proposizione 11.11
Sia $q : R^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica, se q è definita positiva $\Rightarrow \exists m > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) \geq m \|x\|^2$

Dimostrazione. Noto che $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
$q(x) = q\left(\frac{1}{\|x\|} x \|x\|^2\right) \geq \min\limits_{\|x\|=1} q(\lambda) \|x\|^2$ $\square$

Ora dobbiamo cercare di capire se q è definita positiva

Ad esempio: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *è facile capire che è semodefinita positiva poiché è in diagonale, quindi la prima cosa da fare è trovare una forma diagonale per Q*
un procedimento pratico e veloce è il seguente:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\lambda = q_{11}, \quad \lambda_2 = \frac{detQ_2}{q_1 1} \quad \lambda_3 = \frac{detQ_3}{detQ_2} \quad ... \quad \lambda_i = \frac{detQ_i}{detQ_{i-1}}$$

Questo perché se dobbiamo valutare il segno dell'incremento della f ci servono le variazioni sulle quadriche. Se f è $\mathbf{C^2}$ scrivo lo sviluppo di Taylor al secondo ordine:

$$f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

max e min dove $\nabla f(x_0) = 0$ per Fermat, l'o piccolo è trascurabile, allora il segno della derivata dipende dalla forma quadratica al secondo membro.

Proposizione 11.12
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$ e x_0 punto di massimo locale per f su $A \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ e $H_f(x_0)$ è semidefinita negativa.

Dimostrazione. $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$ poiché $f \in \mathbf{C^2}$
il primo termine è negativo poiché per ipotesi x_0 è punto di massimo locale, ne segue che il termine $(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0)$ non può essere positivo. □

Proposizione 11.13
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$ e x_0 punto di minimo locale per f su $A \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ e $H_f(x_0)$ è semidefinita positiva.

Dimostrazione. $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$ poiché $f \in \mathbf{C^2}$
il primo termine è positivo poiché per ipotesi x_0 è punto di minimo locale, ne segue che il termine $(x - x_0)^T H_f(x - x_0)$ non può essere negativo. □

11.2 Condizioni Sufficienti

Proposizione 11.14
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$.
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$, $\nabla f(x_0) = 0$,$H_f(X_0)$ è definita negativa $\Rightarrow x_0$ è un punto di massimo locale per f

Dimostrazione. $f \in \mathbf{C^2}$ quindi possiamo scrivere:
$f(x_+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \rightarrow 0$
$f(x_+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \rightarrow 0$
Sappiamo che H_f è definita negativa per ipotesi, allora $h^T H_f(x_0)h \leq -m \|x_0\|$ allora $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ e quindi x_0 è punto di massimo locale per f. □

Proposizione 11.15
sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$.
$f \in \mathbf{C^2}(A; R)$, $\nabla f(x_0) = 0$,$H_f(X_0)$ *è definita positiva* $\Rightarrow x_0$ *è un punto di minimo locale per* f

Dimostrazione. $f \in \mathbf{C^2}$ quindi possiamo scrivere:
$f(x_+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
....
....

□

QUALCHE DISEGNO E SPIEGAZIONE.....

11.3 Il Significato Geometrico del Gradiente n=2 m=1

Definizione 11.16
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$
La suferficie $z = f(x, y)$ *è il grafico di* f, *è unsottoinsieme di* R^3
Se $c \in \mathbb{R}$, *la curva di livello* c *di* f *è l'insieme* $f^{-1}(c)\{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$
Se f *'e differenziabile in* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ *il piano tangente alla superficie* $z = f(x, y)$ *in* (x_0, y_0) *ha equazione:*

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} (x - x0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix}$$
$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Osservazione 11.17
geometricamente, il gradiente di una funzione indica la direzione di R^n *in cui si ha la massima variazione del valore di f, nel verso di incremento positivo di* f,

Osservazione 11.18
osservazione col grafico che al momento non faccio.

Proposizione 11.19
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}$ *differenziabile in* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, *l'incremento di* $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$ *è massimo quando* $[hk] = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ *con* $\lambda > 0$ *ed è minimo con* $[hk] = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ *con* $\lambda < 0$

Dimostrazione. so che posso approssimare la funzione quindi posso scrivere:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o(\sqrt{h^2 + k^2}) = = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \left\| \begin{bmatrix} hk \end{bmatrix} \right\| cos(\theta) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$
dove θ è l'angolo tra $\nabla f(x_0, y_0)$ e $[hk]$ per $||[hk]||$ sufficientemente piccola, l'incremento $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ è massimo se $cos(\theta) = 1$ ed è minimo se $cos(\theta) = -1$, da cui la tesi.

□

Proposizione 11.20
siano $f \in \mathbf{C^1}(A; R)$ *con* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ *e* $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$*[cioè stazionario]. Allora* $nablaf(x_0, y_0)$ *è perpendicolare alla curva di livello passante per .....*

Osservazione 11.21
un vettore 1'e perpendicolare a una curva se è perpendicolare alla retta o al vettore tangente alla curva in quel punto.

Dimostrazione. La curva di livello è $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ cioè $f(x,y) - f(x_0,y_0) = 0$, per trovare la tangente a questa curva è piu facile se si ha $y = \varphi(x)$
Usiamo quindi il teorema della funzione implicita, mi serve che $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$, questa condizione non è assicurata dalle ipotesi, per ipotesi il gradiente è non nulla quindi almeno una delle due componenti è non nulla.
Inizio con il caso $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$.
Il T.F.IMPL. assicura che :
$\exists \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ con $x_0 \in \mathring{\mathcal{X}}, y_0 \in \mathring{\mathcal{Y}}$, $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.:
$f(x,y) = f(x_0,y_0), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$
La retta tangente in x_0 a $y = \varphi(x)$ è $y = y_0 + \varphi'(x_0)(x - x_0)$
questo vuole dire che un vettore tangente a $y = \varphi(x)$ in (x_0,y_0) è $\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi'(x_0) \end{bmatrix}$.
... calcolo il prodotto scalare

$$\nabla f(x_0,y_0) \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi'(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0,y_0) & \partial_y f(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\partial_x f(x_0,y_0)}{\partial_y f(x_0,y_0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \partial_x f(x_0,y_0) - \partial_y f(x_0,y_0) \frac{\partial_x f(x_0,y_0)}{\partial_y f(x_0,y_0)} = 0$$

Allora il graadiente è perpendicolare alla curva di livello.
Guardiamo ora al caso in cui $\partial_y f(x_0,y_0) = 0$ e $\partial_x f(x_0,y_0) \neq 0$ quindi il gradiente è non nullo.
Applicando lo stesso ragionamento id sopra, solo esplicitando la x in funzione della y. Quindi $x = \psi(x)$ e $\psi'(y_0) = -\frac{\partial_y f(x_0,y_0)}{\partial_x f(x_0,y_0)}$ □

12 Massimi e Minimi Vincolati

Spesso la ricerca di punti di massimo o minimo di una funzione $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ deve essere ristrettaad un sottoinsieme $B \subseteq A$ a causa di eventuali vincoli a cui le variabili indipendenti devono soddisfare. L0insieme B può essere generalmente descritto da una funzione $\varphi : A \to \mathbb{R}^p$, nel senso che $B = \{x \in A : \varphi(x) \leq 0\}$
NOTA::: direi n¿1 poiché se ho una sola variabile e la vincolo ...??????? booooo .
Questo problema è usualmente abbreviato in:

$$\max_{\varphi \leq 0} \quad o \quad \min_{\varphi \leq 0}$$

può essere affrontato in due passi:

1. *ricerca dei punti di estremo di f interni a B, problema gia affrontato.*
2. *ricerca dei punti di estremo di f sul bordo di B, affrontiamo ora.*

Sotto opportune condizioni su φ, infatti, $\mathring{B} = \{x \in A : \varphi(x) < 0\}$ e $\partial B\{x \in A : \varphi(x) = 0\}$

Proposizione 12.1
Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_0,y_0) \in \mathring{A}, g(x_0,y_0) = 0, f, g \in$ $\mathbf{C^1}(A;R)$, $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$
Se (x_0,y_0) è di max(o min) locale per f su $g = 0 \Rightarrow \exists \lambda in \mathbb{R}$ t.c: $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda g(x_0,y_0)$ (all fin fine posso dire che sono paralleli).

Osservazione 12.2
λ si chiama "moltiplicatore di lagrange"

Osservazione 12.3
Se abbiamo un problema del tipo $\max_{g(x,y)=0} f$ cioè il massimo di f sul vincolo $g(x,y)=0$, ci dobbiamo ricondurre ad un sistema del tipo $\begin{cases} \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0)=0 \end{cases} = \begin{cases} \partial_x f(x_0,y_0) = \lambda \partial_x g(x_0,y_0) \\ \partial_y f(x_0,y_0) = \lambda \partial_y g(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0)=0 \end{cases}$
3 equazioni in 3 incognite(x,y,λ)
In certi casi si introduce una funzione $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ detta Lagrangiana, i punti stazionari vincolati di f sono punti stazonari liberi della Lagrangiana.

Dimostrazione. Sappiamo che $\nabla g(x_0,y_0) \neq$ quindi $\begin{bmatrix} \partial_x g(x_0,y_0) & \partial_y g(x_0,y_0) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ quindi o $\partial_x g(x_0,y_0) \neq 0$ o $\partial_y g(x_0,y_0) \neq 0$. Mettiamoci nel caso in cui $\partial_y g(x_0,y_0) \neq 0$,
Per il teorema della funzione implicita ho che :
$\exists \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ con $x_0 \in \mathring{\mathcal{X}}, y_0 \in \mathring{\mathcal{Y}}$, $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.:
$g(x,y) = f(x_0,y_0), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$
Osserviamo che dire (x_0,y_0) di massimo o minimo per f ristretta a $g(x,y)=0 \Leftrightarrow x_0$ è di massimo o di minimo per la funzione $x \to f(x,\varphi(x))$.
Per il teorema di Fermat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x,\varphi(x)))\|_{x=x_0} = 0$, punto stazionario ha derivata nulla, e la derivata di quella funzione in x_0 è:

$$\partial_x f(x_0,\varphi(x_0)) + \partial_y f(x_0,\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

allora

$$0 = \partial_x f(x_0,\varphi(x_0)) + \partial_y f(x_0,\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) =$$
$$= \partial_x f(x_0,\varphi(x_0)) - \partial_y f(x_0,\varphi(x_0)) \frac{\partial_x g(x_0,\varphi(x_0))}{\partial_y g(x_0,\varphi(x_0))} =$$

$$= \partial_x f(x_0,\varphi(x_0))\partial_y g(x_0,\varphi(x_0)) - \partial_y f(x_0,\varphi(x_0))\partial_x g(x_0,\varphi(x_0)) = det \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0,y_0) & \partial_y f(x_0,y_0) \\ \partial_x g(x_0,y_0) & \partial_y g(x_0,y_0) \end{pmatrix} = 0$$

questo equivale a dire che i vettori riga della matrice sono paralleli quindi $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$.
Non è uguale scrivere $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \nabla g(x_0,y_0) = \lambda \nabla f(x_0,y_0)$ poiché non c'è certezza sul valore di $\nabla f(x_0,y_0)$ che se nullo negherebbe l'ipotesi di $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$
Se guardiamo ora il caso in cui $\partial_y g(x_0,y_0) = 0$ e $\partial_x g(x_0,y_0) \neq 0$.
Seguendo un ragionamento analogo si esplicita $x = \psi(y)$ così che cercare max(o min) di f ristretta a $g(x,y)=0$ porti a $y \to f(\psi(y),y)$ □

Proposizione 12.4
Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange caso generale Sia $A \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbf{C^1}(A;R)$, $g \in \mathbf{C^1}(A;R^p)$ con $p < n$(n.vincoli¡n.variabili), sia poi $x_0 \in \mathring{A}, g(x_0) = 0, Dg(x_0,y_0)$ di rango p.
Se x_0 è di max(o min) locale per f su $g=0 \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p in\mathbb{R}$ t.c: $\nabla f(x_0,y_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g(x_0,y_0)$

13 Il caso $n = 2$, $m = 1$

14 Derivate e Integrali

Proposizione 14.1 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $x_0 \in I$. Data $f \in c^0(I; R)$ la funzione:

$$\begin{array}{rcl} F : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Si ha $F \in \mathbf{C^1}(I; R)$ e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

[]

Proposizione 14.2
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, data $f \in \mathbf{C^0}(A \times \mathbb{R}; R)$ la funzione

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta, x) & \to & \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C^0}(R \times \mathbb{R} \times A; R)$

Proposizione 14.3
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, data $f \in \mathbf{C^1}(A \times \mathbb{R}; R)$ la funzione

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta, x) & \to & \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C^1}(R \times \mathbb{R} \times A; R)$ ed inoltre, $\forall (\alpha, \beta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A$ e $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -f(x, \alpha)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = f(x, \beta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

$$\nabla F = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Corollario 14.4
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, date le funzioni $\alpha : x \to \mathbb{R}, \beta : x \to \mathbb{R}, f : x \to \mathbb{R}$, di classe $\mathbf{C^1}$, la funzione

$$\begin{array}{rcl} F : A & \to & \mathbb{R} \\ (x) & \to & \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

è di classe $\mathbf{C^1}(R \times \mathbb{R} \times A; R)$ ed inoltre, $\forall x_0 \in A$:

$$\nabla F(x_0, y_0) = f(x_0, \beta)\nabla\beta(x_0) - f(x_0, \alpha)\nabla\alpha(x_0) + \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \nabla f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

15 Funzioni a Valori in $\mathbb{C}$

Parte III

Integrali Doppi

Capitolo 3

Integrali Doppi

Preliminari

Questo capitolo non è trattato in maniera approfondita poiché:

a *tanti e lunghi teoremi fuori contesto per poter introdurre rigorosamente la teoria di Riemann*

b *tale teoria è "superata" da tempo*

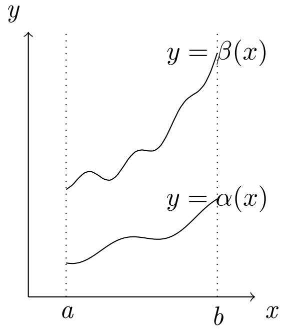
Il primo è più grosso problema di tale teoria è che non permette il passaggio del limite sotto il segno di integrale, cioè per poter scrivere

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)$$

sono necessarie tante ipotesi molto restrittive.
Si è passati così alla teoria dell'integrale secondo Lebesgue, molto diversa e piuttosto complicata.
ESEMPIO...............
disegni..........
....
Il concetto di integrale è quindi molto legato al concetto di area e anche di volume. La teoria di Lebesgue riparte da assiomi come questi definendoli e caratterizzandoli in modo da definire una volta per tutte in maniera sistematica e rigorosa cosa si può e cosa non si può integrare, e dove ha senso parlare di superfici. volumi, ipervolumi, ...

16 Regole di Calcolo

Queste formule permettono di ricondurre il calcolo di integrali doppi a quello di integrali semplici.



Se:
$a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$
$\alpha, \beta \in \mathbf{C^0}([a,b]; R), \forall x \in [a,b] \alpha(x) \leq \beta(x)$
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] ey \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$
$f \in \mathbf{C^0}(A; R)$
Allora
$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$
Analogamente.
ALTRO GRAFICO....
Se:
$c, d \in \mathbb{R}$ *con* $c < d$
$\gamma, \delta \in \mathbf{C^0}([a,b]; R), \forall y \in [c,d] \gamma(y) \leq \delta(y)$
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [c,d] ex \in [\gamma(y), \delta(y)]\}$
$f \in \mathbf{C^0}(A; R)$
Allora
$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$

17 Cambiamento di Variabili

Se:
$A \subseteq \mathbb{R}^2$
$\Phi \in \mathbf{C^1}(A; R^2)$ Φ *è invertibile* $\Phi^{-1} \in \mathbf{C^1}(\Phi(A); R^2)$
$det(D\Phi) \neq 0$ *su* A
$f \in \mathbf{C^0}(\Phi(A); R^2)$
Allora:

$$\iint_{\Phi(A)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A ((f \circ g)(u,v))\,|det(D\Phi(u,v))|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

La quantità $det(D\Phi)$ *è spesso chiamato DETERMINANTE JACOBIANO (o semplicemente JACOBIANO) della trasformazione* Φ
Adesso spieghiamo perché il determinante JACOBIANO, ricordando A1:

$$\int_g (A) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(g(t))\,\mathrm{d}t$$

vari casi
...
...
...

Parte IV

Successioni e Serie di Funzioni

Capitolo 4

Successioni e Serie di Funzioni

18 Preliminari

Definizione 18.1
Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una successione* $(n \in \mathbb{N})$ *, la serie* $\sum\limits_{n=09}^{+\infty} f_n$ *indica la successione delle somme parziali* $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i$

Osservazione 18.2
Qualunque affermazione fatta in riferimento ad una serie va quindi intesa riferita alla successione delle somme parziali

- *La serie è limitata* $\rightleftharpoons$ *la successione delle somme parziali è limitata*
- *La serie è illimitata* $\rightleftharpoons$ *la successione delle somme parziali è illimitata*
- *La serie è convergente* $\rightleftharpoons$ *la successione delle somme parziali è convergente*

Osservazione 18.3
Successioni e serie di funzioni possono essere viste:

1. *come successioni e serie dipendenti da un parametro*
2. *come un mezzo per approssimare funzioni*
3. *come un primo passo verso lo studio di funzioni (a volte dette operatori o funzionali) che a funzioni associano o numeri o altre funzioni.*

19 Tipi Di Convergenza

19.1 Convergenza Puntuale

Definizione 19.1
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni definite su* A *a valori in* $\mathbb{R}$*. Sia* $B \subseteq A$

- *la successione* $\{f_n : n\mathbb{N}\}$ *è puntualmente convergente su* B *se* $\forall x \in B$*, esiste finito il limite* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$*. In tal caso la funzione* $f : B \to \mathbb{R}$ *definito da* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

- *la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *è puntualmente convergente su* B *se* $\forall x \in B$*, la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *ammette somma finita. In tal caso la funzione* $F : B \to \mathbb{R}$ *definito da* $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *è la somma della serie la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$

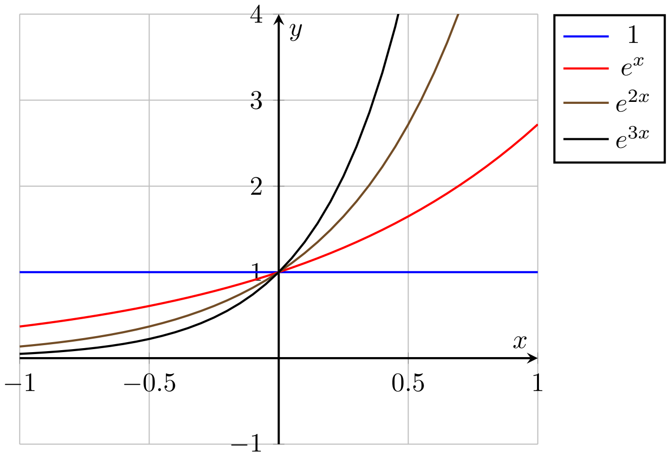
Osservazione 19.2
La convergenza puntuale su A *della successione* f_n *verso* f *è indicata con*

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad suA$$

Proposizione 19.3
METAPROPOSIZIONE:
Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to A$
Se $f_n \xrightarrow{p} f$ *su* B *e se* f_n *ha la proprietà* P *allora il limite* f *ha la proprietà* P.

Esempio 19.4
$f_n(x) = \frac{1}{n} sin(x)$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} sin(x) = 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f_n \xrightarrow{p} 0$ *su* A.

Esempio 19.5
$f_n(x) = e^{nx}$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$

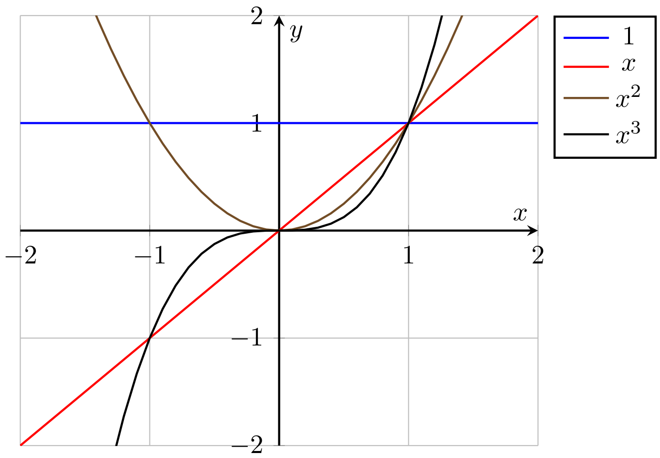


$$\lim_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad suB =]-\infty, 0]$$

Osservazione 19.6
La continuità non passa al limite come proprietà P

Esempio 19.7
$f_n(x) = x^n$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$



$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & x \in]1, +\infty[\\ 1 & x \in \{1\} \\ 0 & x \in]-1, 1[\\ \nexists & x \in]-\infty, -1] \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad suB =]-1, 1]$$

Proposizione 19.8
PROPRIETÀ P:MONOTONIA
Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to A$
Se $f_n \xrightarrow{p} f$ *su* B *e se* f_n *è debolmente crescente su* B *allora il limite* f *è debolmente crescente su* B.

Dimostrazione. Dire che f_n è debolmente crescente su B significa che

$$\forall x_1, x_2 \in B \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow fn(x_1) \leq f_n(x_2)$$

se si fa tendere $n \to \infty$ si ha che $f(x_1) \leq f(x_2)$, e questo nell'insieme B dove i limiti puntuali delle funzioni esistono per ipotesi □

Osservazione 19.9
Questo vale anche nel caso di funzioni debolmente decrescenti

Osservazione 19.10
se f_n *è strettamente crescente/decrescente con le stesse ipotesi non possiamo concludere che il limite puntuale mantenga la stessa proprietà*

Esempio 19.11
x^n *con* $x \in [0, 1[$ *è strettamente crescente ma il limite putuale è costante uguale a zero.*

Proposizione 19.12
PROPRIETÀ P:NON NEGATIVA
Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to A$
Se $f_n \overset{p}{\to} f$ *su* B *e se* f_n *è non negativa,* $f_n \geq 0$, *su* B *allora il limite* f *è non negativo,* $f \geq 0$, *su* B.

Dimostrazione. Sappiamo che $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall x \in B$. Ma f_n è una successione di valori non negativi quindi il limite esiste ed è non negativo. □

Osservazione 19.13
Questo vale anche nel caso di funzioni non positive

Osservazione 19.14
Questa proposizione non può essere estesa al caso di funzioni strettamente positive/negative.

Esempio 19.15
$-\frac{e^x}{n}$ *con* $x \in [0, 1[$ *è strettamente negativa ma il limite è costante uguale a zero.*

Proposizione 19.16
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq A$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni definite su* A *con valori in* $\mathbb{R}$. *sia* $f : B \to \mathbb{R}$ *una funzione*
$f_n \overset{p}{\to} f$ *su* B *per* $n \to \infty \Leftrightarrow \forall x \in B, \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

Dimostrazione. direttamene dalla definizione... □

Proposizione 19.17
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq A$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni definite su* A *con valori in* $\mathbb{R}$. *Sia* $F : B \to \mathbb{R}$ *una funzione*
$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \overset{p}{\to} F$ *su* B *per* $n \to \infty \Leftrightarrow \forall x \in B, \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \quad \left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - F(x)\right| \leq \epsilon$

Dimostrazione. direttamene dalla definizione... □

19.2 Convergenza Uniforme

Definizione 19.18
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni definite su* A *a valori in* $\mathbb{R}$.

- *La successione* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *è uniformemente convergente su* B *se esiste una funzione* $f : B \to \mathbb{R}$ *t.c.:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

la funzione f *è il limite uniforme della successione* fn

- *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *è uniformemente convergente su* B *se esiste una funzione* $F : B \to \mathbb{R}$ *t.c.:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} \left| F(x) - \sup_{n=0} f_n(x) \right| = 0$$

la funzione F *è il limite uniforme della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

Osservazione 19.19
La convergenza uniforme su B della successione f_n verso f è indicata con

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad su \quad B$$

Osservazione 19.20
la convergenza uniforme equivale alla convergenza rispetto alla distanza $d_{\mathbf{C^0}}(f,g) = \sup_{x\in A}|g(x) - f(x)|$ ogniqualvolta questa distanza sia definita.
Questa distanza $d_{\mathbf{C^0}}(f,g)$ può essere definita attraverso la norma $\|k\|_{\mathbf{C^0}} = \sup_{x\in A}|k|$ con $k = f - g$

Proposizione 19.21
sia $f_n : n \in \mathbb{N}$ con $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
$f_n \xrightarrow{u} f$ su B per$n \to \infty \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\nu \in \mathbb{N}$ t.c: $\forall n > \nu, \forall x \in B$ vale che $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

Proposizione 19.22
sia $f_n : n \in \mathbb{N}$ con $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $F : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xrightarrow{u} F$ su $B \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\nu \in \mathbb{N}$ t.c: $\forall n > \nu, \forall x \in B$ vale che $\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq \epsilon$

Osservazione 19.23
La differenza tra queste due proposizioni e le due proposizioni analoghe nel caso di convergenza puntuale giustifica il fatto che la continuità non passa al limite puntuale. Infatti qui ν dipende solo dalla scelta di ϵ e le x si guardano tutte insieme, prima invece ν dipendeva oltre che alla ϵ anche dalla x questo porta a osservare le x una alla volta.

Proposizione 19.24
Relazione tra convergenza uniforme e puntuale.
Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
Se $fn \xrightarrow{u} f$ su B allora $fn \xrightarrow{p} f$ su B.

Dimostrazione. se $f_n \xrightarrow{u} f$ su b allora vale che: $\forall\epsilon, \exists\nu : \forall n > \nu, \forall x \in B$ vale $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ in questo modo si trova un ν che soddisfa la condizione $\forall x \in B$ quindi $\forall x \in B, \forall\epsilon, \exists\nu : \forall n > \nu$ vale $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ quindi $f_n \xrightarrow{p} f$ su B □

Proposizione 19.25
Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\overline{f}, f : B \subseteq A \to \mathbb{R}$
se $f_n \xrightarrow{u} f$ su B e $f_n \xrightarrow{u} \overline{f}$ su B allora $f = \overline{f}$

Dimostrazione. $f_n \xrightarrow{u} f$ e $f_n \xrightarrow{u} \overline{f}$, quindi è anche vero che $f_n \xrightarrow{p} f$ e $f_n \xrightarrow{p} \overline{f}$ ma il limite puntuale è unico poichè è il limite di una successione. Allora $f = \overline{f}$ □

Esempio 19.26
$f_n(x) = \frac{1}{n} sin(x)$ con $A \equiv \mathbb{R}$
Abbiamo gia calcolato che $f_n \xrightarrow{p} 0$ su A.
Sia ha anche convergenza uniforme :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \mathbb{R}\,|f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n} sin(x)\right|$$

Osservo che $|asin(x)| \leq |a|$ *quindi*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n} sin(x)\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Allora $f_n \overset{u}{\to} f$ *su* A

Esempio 19.27
$f_n(x) = sin\left(\frac{1}{n}x\right)$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$ ....
....

Proposizione 19.28
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : A \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni e* $f : A \to \mathbb{R}$
$f_n \overset{u}{\to} f$ *su* A *e* $f_n \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *allora* $f \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$

Dimostrazione. DISEGNO
DISEGNO
DISEGNO
DISEGNO
GIURO CHE LA FAROò (a distanza di tre anni non son sicurissimo che lo farò) □

Esempio 19.29
$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ *con* $A \equiv \mathbb{R}$
....
....

Definizione 19.30
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ *e* $\{f_n : A \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni.*
La successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *soddisfa alla condizione di Cauchy per la convergenzauniforme su* $B \rightleftharpoons \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu, \forall x \in B$ *vale* $|f_n(n) - f_m(x)| < \epsilon$

Proposizione 19.31
(Una successione di Cauchy per la convergenza uniforme è uniformemente convergente).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ *e* $\{f_n : A \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni.*
La successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *soddisfa alla condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su* B *allora* $\exists$ *una funzione* $f : B \to \mathbb{R}$ *t.c.:* $f_n \overset{u}{\to} f$ *su* B

Dimostrazione. La successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa alla condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su B allora $\forall x \in B$ la successione $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ è di Cauchyin $\mathbb{R}$ allora $\forall x \in B$ la successione $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ha limite in $\mathbb{R}$.(cioè c'è il limite puntuale).
Sia $f(x)$ questo limite, f è anche il limite uniforme della successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, infatti:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall h, k > \nu \forall x \in B \quad |f_h - f_k| < \epsilon$$

$$\sup_B |f_h(x) - f_k(x)|, \forall h, k > \nu$$

$$\Rightarrow |f_h(x) - f_k| < \epsilon, \forall h.k > \nu, \forall x \in B$$

a questo punto si passa al limite e la disuguaglianza diventa debole.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |f_h(x) - f_k(x)| \leq \epsilon, \forall h > \nu, \forall x \in B$$

$$\Rightarrow |f_h(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall h > \nu, \forall x \in B$$
$$\Rightarrow \sup_B |f_h - f| \leq \epsilon, \forall h > \nu$$
$$\Rightarrow f_n \overset{u}{\to} f \quad suB$$

□

Proposizione 19.32
Sia A un compatto in $\mathbb{R}$. In $\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ sia $d_{\mathbf{C^0}} = \sup_A |g(x) - f(x)|$. Allora $\left(\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R}); d_{\mathbf{C^0}}\right)$ è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione. prendo $f_n \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ successione di Cauchy in $\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ f_n sono di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme su $A \Rightarrow f_n : A \to \mathbb{R}$ e $f_n \overset{u}{\to} f$ su A e f è continua
$\Rightarrow \left(f \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})\right)$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(fn, f) = 0 \quad \Rightarrow f_n \to f \in \mathbf{C^0}(A;\mathbb{R})$ □

Corollario 19.33

ESEMPIO:: In dimensione finita non vi è differenza tra "chiuso e limitato" e "compatto", in dimensione infinita cambiamo molte cose. Prensiamo un insieme chiuso e limitato ma non compatto. In $\mathbf{C^0}([0,1];\mathbb{R})$ con $d_\infty(f,g) = \sup_{[0,1]} |g(x) - f(x)|$, prendiamo l'insieme $C = \overline{B(0,1)} = \{f \in \mathbf{C^0}([0,1];\mathbb{R}) : |f(x)| \leq 1$

1 *C è limitato: ha diametro finito.*

2 *C è chiuso: contiene tutti i sui punti di accumualazione*

Se c'è una successione $f_n \overset{u}{\to} f$ su $[0,1]$ allora voglio mostrare che $f \in C$
Se $f_n \overset{u}{\to} f$ su $[0,1]$ allora $f_n \overset{p}{\to} f$ su $[0,1]$. Sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in [0,1]$ vale che $-1 \leq f_n(x) \leq 1$.
Mandando n al limite si ha che $-1 \leq f_(x) \leq 1$.
Inolte f è continua perché limite uniforme di una successione di funzioni continue allora $f \in C$ poiché è una funzione continua compresa tra -1 e 1

3 *C non è compatto, cioè esiste almeno una successione dalla quale non è possibie estrarre una sottosuccessione convergente nello stesso spazio.*

Se ad esempio $f_n(x) = x^n$
so che $f_n \overset{p}{\to} f$ su $[0,1]$ e $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in \{1\} \end{cases}$
Tutta la successione di funzioni f_n converge puntualmente a f quindi se estraggo una sottosuccessione comunque venga scelta questa sottosuccessione converge ancora a f puntualmente. Ma la f non è continua mentre il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua allora nessuna sottosuccessione ammette limite uniforme.

ESEMPIO:: OPERATORE DERIVATA 0

$$D$$

ESEMPIO:: OPERATORE DERIVATA 1

$$D$$

ESEMPIO:: OPERATORE INTEGRALE

I

Proposizione 19.34
fissati $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *se la successione* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *in* $\mathbf{C^0}([a,b],\mathbb{R}) \xrightarrow{u} f$ *su* $[a,b]$
f_n *e* f *sono integrabili secondo Rimmmmmmmn allora lasuccessione* $\left\{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x : n \in \mathbb{N}\right\}$ *converge a* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Osservazione 19.35
La convergenzauniforme passa sotto il segno di integrale

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} fn\right)(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b fn(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Proposizione 19.36
convergono le derivare allora convergono le funzioni
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, *si consideri una successione di funzioni* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *con* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathbf{C^1}([a,b];\mathbb{R})$
2. $\exists x_0 \in [a,b] : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$
3. $\exists g \in \mathbf{C^0}([a,b];\mathbb{R}) : f_n' \xrightarrow{u} g$ *su* $[a,b]$

Allora

1. $\exists f \in \mathbf{C^1}([a,b];\mathbb{R})$
2. $f_n \xrightarrow{u} f$ *su* $[a,b]$
3. $f'(x) = g(x)\ \forall x \in [a,b]$

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

per $n \to \infty$

$$f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Quindi le f_n convergono puntualmente alla funzione $f(x)$, per la convergenza uniforme calcolo:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{[a,b]}|f_n(x) - f(x)| \le \lim_{n\to+\infty}(|f_n(x_0) - f(x_0)| + \left|\int_{x_0}^x |f_n'(t) - g(t)|\ \mathrm{d}t\right|) \le$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[|f_n(x_0) - f(x_0)| + |b-a|\sup_{[a,b]}|f_n'(x) - g(x)|\right] =$$

Questo perché per ipotesi $f_n' = g$ e il limite fa 0. Allora $f_n \xrightarrow{u} f$ su $[a,b]$
Inoltre si sa che $f_n \in \mathbf{C^1}$ allora $f_n' \in \mathbf{C^0}$ allora il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua allora g è una funzione continua.
La f è l'integrale di una funzione continua allora la f è derivabile con derivata continua quindi $f' = g$ $\square$

Osservazione 19.37
Necessaria l'ipotesi $f_n(x_0) \to l$*.......*

Osservazione 19.38
Serve $[a,b]$ *limitato ....*
....
....

Proposizione 19.39
Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$*, si consideri una successione di funzioni* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *con* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $\exists x_0 \in [a,b] : \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) = L \in \mathbb{R}$
3. $\exists g \in \mathbf{C^0}([a,b]\,;\mathbb{R}) : \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \overset{u}{\to} g$ *su* $[a,b]$

Allora

1. $\exists f \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R})$
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \overset{u}{\to} f$ *su* $[a,b]$
3. $f'(x) = g(x)\ \forall x \in [a,b]$

Osservazione 19.40
In altre parole questa proposizione afferma che sotto opportune ipotesi

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

Definizione 19.41
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni con* $f_n : A \to \mathbb{R}$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge totalmente su* $A \rightleftharpoons \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{A} |f_n(x)| < +\infty$*(è convergente)*

Osservazione 19.42
la $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{A} |f_n(x)|$ *è una serie numerica*

Proposizione 19.43
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione di funzioni con* $f_n : A \to \mathbb{R}$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge totalmente su* $A \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente su* A

Dimostrazione. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su A
$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{x \in A} |f_n| < \epsilon$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sup\limits_{x \in A} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |f_n| < \epsilon$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n > \nu$ vale $\sup\limits_{x \in A} \left| \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \right| < \epsilon$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su A. □

Osservazione 19.44
Per le serie:
Convergenza Totale ⇒ Convergenza Uniforme ⇒ Convergenza Puntuale.

20 Serie di Funzioni Particolari

Questa sezione è dedicata ad alcune tecniche di approssimazione basate su serie di funzioni particolari
In generale, un'approssimazione si riconduce ad una formula del tipo

$$[\textit{quantità da calcolare}] = [\textit{quantità approssimante}] + \textit{errore}$$

La qualità dell'approssimazione è descritta dal senso in cui l'errore è piccolo.

20.1 Serie di Potenze

Definizione 20.1
Siano $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione con $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$.
Si dice serie di potenze centrata in $z_0 \rightleftharpoons \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Osservazione 20.2
è ovvio che in $z = z_0$ si ha convergenza....???? (dire a zero)

Osservazione 20.3
Per semplicità verrà considerato il caso $z_0 = 0$ ESEMPIO::$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n = e^x$
ESEMPIO::$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$

Proposizione 20.4
Siano $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione in $\mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$.
La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge in w (cioè $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ converge) quandi abbiamo la convergenza nella sfera aperta di centro l'origine e raggio $|w|$
Allora $\forall r$ con $0 < r < |w|$, la serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge totalmente in $B(0, r)$

Dimostrazione. TIKZPICTURE:::::
devo dimostrare che $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{B(0,r)} |a_n z^n| < +\infty$.

Éfacile vedere che $a_n z^n = a_n w^n \left(\frac{z}{w}\right)^n$.
Quindi passando al modulo e poi al sup si ottiene.

$$\sup_{B(0,r)} |a_n z^n| = \sup_{B(0,r)} |a_n w^n| \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq$$

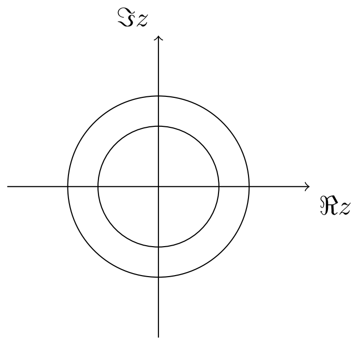
Siccome $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ converge quindi il suo termine generale tende a 0.

$$\leq \sup_{B(0,r)} \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq \left(\frac{r}{|w|}\right)^n$$

per ipotesi $r < |w|$ e questo è il termine generale di una serie geometrica convergente.
Ne segue che $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{B(0,r)} |a_n z^n|$ è maggiorato da $\left(\frac{r}{|w|}\right)^n$ e quindi la serie converge totalmente. □

Osservazione 20.5
Una volta che abbiamo la convergenza totale abbiamo anche quella uniforme.

Proposizione 20.6
la non convergenza in un punto implica la non convergenza fuori dal cerchio
Sia $a_n : n \in \mathbb{N}$ una successione a valori in $\mathbb{C}$
La serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ non converge in w
Allora $\forall z \in \mathbb{C}$ con $|z| > |w|$ la serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ non converge in z



Dimostrazione.
Se per assurdo la serie converge in $z \Rightarrow$ per il teorema precedente avremmo convergenza in ogni sfera con raggio minore di $\left|\frac{1}{z}\right|$. e quindi anche in w questo nega l'ipotesi.ASSURDO. □

Osservazione 20.7
Come è fatto l'insieme su cui si ha convergenza??
segue da queste due ultime proposizioni che se $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione in $\mathbb{C}$ allora l'insieme $\left\{z \in \mathbb{C} : \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n converge\right\}$ è un cerchio.
Sulla circonferenza non ci soffermaiamo a capire cosa accade poiché tutto può accadere.

Definizione 20.8
Raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \rightleftharpoons \rho = \sup\left\{r \geq 0 : \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n convergesuB(0,r)\right\}$

Osservazione 20.9
Il raggio di convergenza di una serie di potenze può essere 0*, un numero reale positivo o* $+\infty$*.*

Osservazione 20.10
una definizione come $\rho = \inf\left\{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n nonconvergesuB(0,r) \right\}$ *non sta in piedi poiché questo insieme potrebbe essere vuoto, mentre quello sopra non è mai vuoto, poerché* $r = 0$ *c'è sempre poiché in* 0 *si ha sempre convergenza. Ilsecondo potrebbe essere vuoto perché ci sono serie che convergono su tuttoil piano complesso e quindi non si avrebbe nessun r fuori da quale non sia ha convergenza.*

Proposizione 20.11
CRITERIO DELLA RADICE.
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$*, sia* $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$*.*
Se questo limite esiste, allora il raggio di convergenza è $\rho = \begin{cases} 0 & se\ l = +\infty \\ \frac{1}{l} & se\ l \in]0,+\infty[\\ +\infty & se\ l = 0 \end{cases}$

Proposizione 20.12
CRITERIO DEL RAPPORTO.
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$*, sia* $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$*.*
Se questo limite esiste, allora il raggio di convergenza è $\rho = \begin{cases} 0 & se\ l = +\infty \\ \frac{1}{l} & se\ l \in]0,+\infty[\\ +\infty & se\ l = 0 \end{cases}$ *ESEMPIO::*$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$
$a_n = \frac{1}{n!} \cdots \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \rho = +\infty$
ESEMPIO::sin(z) $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *quindi* $a_n = \begin{cases} 0 & se\ n\ è\ pari \\ \ldots & se\ n\ è\ dispari \end{cases}$
...
...
...
ESEMPIO::sin(z) $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ *quindi* $a_n = \begin{cases} \ldots & se\ n\ è\ pari \\ 0 & se\ n\ è\ dispari \end{cases}$
...
...
...
ESEMPIO:: e^{iy} *con* $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}(iy)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(iy)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(y)^{2n} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(y)^{2n+1} = cos(y) + isin(y)$$

1. $i^{2n} = \left(i^2\right)^n = (-1)^n$

2. $i^{2n+1} = i\left(i^2\right)^n = i(-1)^n$

ESEMPIO:: $e^{i\pi} + 1 = cos(\pi) + i \cdot sin(\pi) = 0$

ESEMPIO:: $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *con* $\rho = 1$ *ESEMPIO:: Sia* $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$

QUI GRAFICO ....

....

Questa serieconverge esclusivamente per $|x| < 1$, *mentre la funzione* f *è definita su tutto* $\mathbb{R}$, $f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

In $\mathbb{C}$, *lafunzione* $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ *è la somma della serie* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}$ *che ha raggio di convergenza* $\rho = 1$. *Infatti,* $f(z)$ *è singolare sia in* $z = i$ *sia in* $z = -i$.

ALTRO GRAFICO:::::::::::::::

....

20.2 Serie di Taylor

ESEMPIO:: $ln(1 + z)$. *Calcolare la Serie di Taylor.*

$$D\left[ln(1+z)\right] = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$$

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$$

Proposizione 20.13
Sia $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una successione a valori in* $\mathbb{C}$. *Le serie:*

$$\left.\begin{array}{ll} * & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\ * & \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \\ * & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \end{array}\right\} \textit{hanno lo stesso raggio di convergenza}$$

Definizione 20.14
Sia $r \in \mathbb{R}$ *con* $r > 0$. *La funzione* f *si dice analitica su* $]-r, r[\rightleftharpoons f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in\,]-r, r[$ *per opportuni* $a_n \in \mathbb{R}$

Osservazione 20.15
In altre parole chiamiamo analitica una funzione che può essere scritta come somma di una serie di potenze convergente su $]-r, r[$

ESEMPIO:: $x \to e^x$ *è analitica su* $\mathbb{R}$

ESEMPIO:: $x \to \frac{1}{1+x^2}$ *è analitica su* $]-1, 1[$

Proposizione 20.16
Se f è analitica su $]-r;r[$ per $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0 \Rightarrow f \in \mathbf{C^0}(]-r,r[;\mathbb{R})$

Dimostrazione. f è analitica allora posso scriverla come $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cioè la funzione è limite di una serie, se la serie converge totalmente allora converge uniformemente. Il limite uniforme di funzioni continue(in questo caso polinomi) è una funzione continua. cioè la f è continua. □

Proposizione 20.17
PROP+PROOF
Sia $f :]-r,r[\to \mathbb{R}$ e f analitica su $]-r,r[\rightleftharpoons f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Rightarrow$ ho convergenza totale $\Rightarrow$ ho convergenza uniforme di funzioni continue

$$\Rightarrow f \in \mathbf{C^0}(]-r,r[;\mathbb{R}), \quad a_0 = f(0)$$

La serie delle derivate $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ converge totalmente su $]-r,r[$ cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \xrightarrow{u} g$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} fn(0) \to f(0), f_n \in ????????????$$

Allora la serie delle derivate converge alla derivata della serie

$$\Rightarrow \in \mathbf{C^1}(]-r,r[;\mathbb{R}), \quad a_1 = f'(0)$$

Questo ragionmento può essere ripetuto:

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathbf{C^k}(]-r,+r[), \quad a_k = k! f^{(k)}(0)$$

e analogamente

$$f \in \mathbf{C}^\infty(]-r,r[;\mathbb{R}), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

Osservazione 20.18
Qui abbiamo detto se f è analitica $\Rightarrow \ldots$, vorrei fare un qualche tipo di viceversa per poter capire se f è analitica o no.

Proposizione 20.19
Sia $f :]-r,r[\to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathbf{C}^\infty(]-r,r[;\mathbb{R}) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \text{ converge totalmente su }]-r,r[\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è analitica .....}$$

Per avere f analitica necessariamente come ipotesi deve esserci $f \in \mathbf{C}^\infty$ e f che si può scrivere come sviluppo in serie di Taylor,dalla proposizione precedente. Questo basta? NO
ESEMPIO:: $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$

1. $f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ *converge totalmente su* $\mathbb{R}$
3. $f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$

1. *Vediamo se è* $\mathbf{C^0}$, *quindi calcolo* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f \in \mathbf{C^0}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
Ora calcoliamo la derivata fuori dallo zero, ne facciamo il limite per $x \to 0$ *da destra e da sinitra e vediamo cosa succede.*
Se $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^3}}$ *e* $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} = 0 \Rightarrow f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R};\mathbb{R})$
....
ancora una derivata.......
....
Continuando a derivare avremmo sempre un rapporto di polinomi che moltiplica un esponenziale, e l'esponenziale vince sempre. quindi fa 0. *itero il ragionamento......*
....

2. *In (1) abbiamo visto che tutte le derivate nello zero siannullavano, cioè*
$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$
è la serie identicamente nulla che banalmente converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$

3. *Anche osservandoil grafico è chiaro che la* f *non è la funzione identicamente nulla cioè è diversa dal suo sviluppo in serie*
$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

Il Problema nasce dall'$o(x^n)$ *che scriviamo alla fine dello sviluppo n-esimo di questa funzione, perché l'intorno in cui si ha* $o(x^n)$ *diventa sempre più piccolo. GRAFICO...*
GRAFICO...
Mandando l'ordine n all'infinito, l'intervallo su cui si ha l'o piccolo tende a diventare un punto (lo zero). Quindi abbiamo l'ugualianza tra la funzione e il suo sviluppo solo nell'origine.????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
????????NON COMPRESA????
Completiamo le ipotesi con la prossima proposizione:

Proposizione 20.20
Sia $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$
$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathbf{C}^{\infty}(]-r, r[\,;\mathbb{R}) \\ \exists H, K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \sup\limits_{]-r,r[} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq HK^n \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

Osservazione 20.21
L'ipotesi centrale .... qui non c'è

Osservazione 20.22
Sia $\sum_{n=0}^{+\infty}(z,w)^n$ *una serie di potenze in due variabili.*
Quando abbiamo due variabili, non si può parlare di raggio di convergenza. Questa serie è una serie geometrica che converge sse $|zw| < 1$. *è difficile parlare di raggio di convergenza perché essendo* $z, w \in \mathbb{C}$, *se per una variabile servono due dimensioni per due variabili servono quattro dimensioni , e anche se non riusciamo a fare il disegno è evidente che l'insieme su cui la serie converge non è un cerchio(sfera). ESEMPI::*

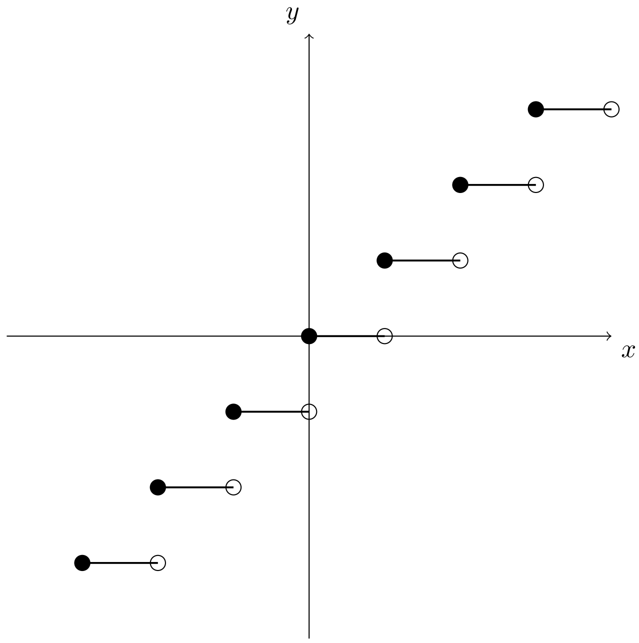
- $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$
- $sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}$
- $sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}$
- $cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{(2n)}$
- $cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{(2n)}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
- $ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$
- $arctan(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{(2n+1)}$
- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^2 n$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} = \begin{cases} converge\ sse\ \lambda > 1 \\ diverge\ sse\ \lambda \leq 1 \end{cases}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} converge\ sse\ \ |q| < 1, S = \frac{1}{1-x} \\ diverge\ sse\ \ |q| > 1\ \ o\ q = 1 \\ \nexists\ sse\ x = -1 \end{cases}$

20.3 Serie di Fourier

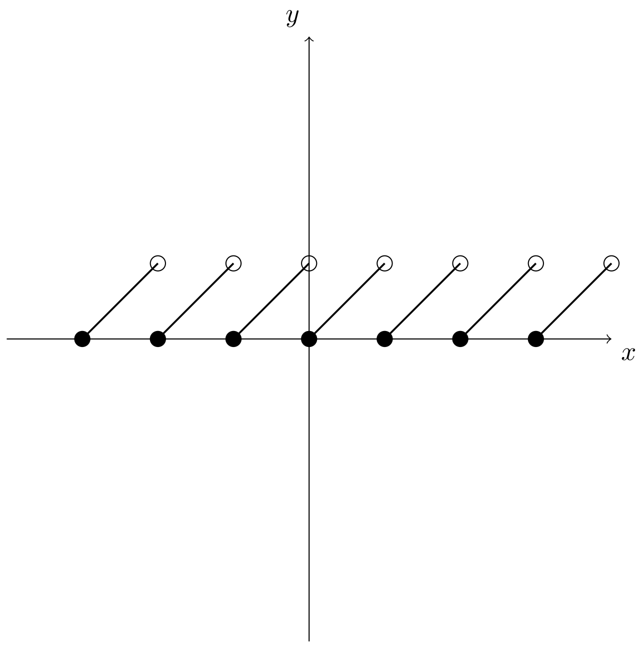
Definizione 20.23
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $T > 0$, f *è* T*-periodica* $\rightleftharpoons \forall x \in A \begin{cases} x + T \in A \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

ESEMPIO:: $\lfloor x \rfloor =$ *parte intera* $= \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1 \quad \lfloor -e \rfloor = -3$$



è 1-*periodica. ESEMPIO:: mant*$(x) =$ *mantissa di* $x = x - \lfloor x \rfloor$



è 1-*periodica.*

Osservazione 20.24
La funzione costante è T*-periodica* $\forall T > 0$*, ma non ha un periodo minimo, per questo motivo non la consideriamo.*

Osservazione 20.25
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ T-periodica. Allora possiamo definire $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ che sia 2π-periodica data da:

$$x \to f\left(\frac{T}{2\pi}x\right), \quad \overline{A} = \frac{2\pi}{T}A$$

Proposizione 20.26
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $T > 0$
f è T-periodica $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, f è nT-periodica.

Proposizione 20.27
Sia $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.: $\begin{cases} \hat{f} 2\pi - periodica \\ \hat{f}_{|[0,2\pi]} = f \end{cases}$

Dimostrazione. $\forall x \in \mathbb{R}. \exists! \hat{x} \in [0, 2\pi[$ t.c.: $x = 2\pi \cdot k + \hat{x}$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $k = [??????]$

$$\hat{f}(x) = f(\hat{x})$$

□

cioè se noi estendiamo una funzione definita su $[0, 2\pi[$ a tutto $\mathbb{R}$ otteniamo una funzione unica e periodica.

Osservazione 20.28
Con i polinomi di Taylor ....
....
....
....
....
....

Definizione 20.29
Dati $2n + 1$ numeri reali $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ si dice polinomio trigonometrico di coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ la funzione:

$$\begin{array}{rcl} p : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx)) \end{array}$$

Osservazione 20.30
Essendo un'approssimazione, si deve aggiungere l'errore. Come è fatto?. Per far uscire conti giusti e comodi andrebbe usata la distanza quadratica , ma questo prevede una lunga parte introduttiva, noi allora lo stimiamo con la distanza infinita.

Definizione 20.31
Date due successioni di numeri reali $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,$\{b_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, si defininisce serie trigonometrica di coefficienti $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,$\{b_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ la serie

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{F} : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx)) \end{array}$$

LEMMA::
Se $h, k \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti uguaglianze:

* $\int_{-\pi}^{\pi} cos(hx)cos(kx) = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ \pi & 0 \neq h = k \\ 2\pi & 0 = h = k \end{cases}$

* $\int_{-\pi}^{\pi} cos(hx)sin(kx) = 0$

* $\int_{-\pi}^{\pi} sin(hx)sin(kx) = \begin{cases} 0 & h \neq k \text{ oppure } h = k = 0 \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$

ESERCIZIO:: IL POLINOMIO DI FOURIER FORNISCE LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE NEL SENSO DELLA DISTANZA QUADRATICA.
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, quale è la funzione a lei più vicina nel senso della distanza quadratica?
Fisso $N \in \mathbb{N}$ e prendo il polinomio trigonometrico di grado N

$$p_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, il problema è quello di minimizzare $d_2(f, p_n)$ quindi un problema di minimo. Stiamo cercando i coefficienti del polinomio trigonometrico quindi studiamo una funzione $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - p_n(x)]^2 \, \mathrm{d}x}$.
Essendo la funzione radice quadrata monotona crescente ne studiamo solo il radicando:

$$\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 dx$$

Osservazione 20.32
con $f \in \mathbf{C^1}$:

$$F(\alpha, \beta, x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) \, \mathrm{d}t$$
$$\partial_\alpha F(\alpha, \beta, x) = -f(x, \alpha) \, \mathrm{d}t$$
$$\partial_\beta F(\alpha, \beta, x) = f(x, \beta) \, \mathrm{d}t$$
$$\nabla_x F(\alpha, \beta, x) = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla_x f(x, t) \, \mathrm{d}t$$

Qudindi applicando al nostro caso otteniamo

$$\partial_{a_0} \varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{a_0} \left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} 2 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, \mathrm{d}x +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_1 cos(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} a_N cos(Nx)\,\mathrm{d}x +$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} b_1 sin(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} b_N sin(Nx)\,\mathrm{d}x -$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

L'integrale di una sinusoide su un multiplo intero del periodo è 0 *quindi*

$$= \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{a_0 a_0} = \pi \quad \partial^2_{a_0 a_n} = 0 \quad \partial^2_{a_0 b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

$$\partial_{a_k}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{a_k} \left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2cos(kx) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right] \mathrm{d}x =$$
$$= \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 cos(kx)\,\mathrm{d}x} +$$
$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_1 cos(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} 2a_k cos(kx) cos(kx)\,\mathrm{d}x \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_N cos(Nx) cos(kx)\,\mathrm{d}x} +$$
$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_1 sin(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_k sin(kx) cos(kx)}\,\mathrm{d}x \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_N sin(Nx) cos(kx)\,\mathrm{d}x} -$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x =$$

E anche applicando il lemma

$$= 2\pi \left[a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x \right]$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{a_k a_0} = \pi \quad \partial^2_{a_k a_n} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2\pi & n = k \end{cases} \quad \partial^2_{a_k b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

$$\partial_{b_k}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_{b_k} \left(\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right]^2 \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2sin(kx) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) - f(x) \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 sin(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_1 cos(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_k cos(kx) sin(kx)\,\mathrm{d}x} \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2a_N cos(Nx) sin(kx)\,\mathrm{d}x} +$$

$$\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_1 sin(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x} + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} 2b_k sin(kx) sin(kx)\,\mathrm{d}x \ldots + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 2b_N sin(Nx) sin(kx)\,\mathrm{d}x} -$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x =$$

E anche applicando il lemma

$$= 2\pi \left[b_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x \right]$$

Calcolando direttamente anche le derivate seconde si ottiene che

$$\partial^2_{b_k a_0} = \pi \quad \partial^2_{b_k a_n} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2\pi & n = k \end{cases} \quad \partial^2_{b_k b_n} = 0 \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

Si verifica la condizione $\nabla\varphi = 0$ *con*

* $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$
* $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x$
* $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x$

La matrice Hessiana di φ *risulta*

$$H_\varphi = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 2\pi \end{bmatrix}$$

è una matrice diagonale quindi si leggono direttamente tutti gli autovalori che sono strettamente positivi quindi la forma quadratica è definita positiva ed il punto in questione è un punto di minimo assoluto.

Definizione 20.33
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*, i coefficienti di Fourier di* f *sono (ovviamente* f *deve essere tale da ammetterli finiti):*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

La serie di Fourier di f *è*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

Proposizione 20.34
Sia $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la somma della serie trigono metrica definita dai coefficienti $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{a_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ e la serie trigonometrica converge uniformemente allora F è una funzione continua e

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) cos(kx) \, \mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) sin(kx) \, \mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

ESEMPIO+DIMOSTRAZIONE:::
sia $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$. Allora:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) \right) \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n cos(nx) \right) \mathrm{d}x$$

Poiché si ha convergenza uniforme si può portare l'integrale dentro la sommatoria.

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \cancel{\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n cos(nx) \, \mathrm{d}x} + \cancel{\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n cos(nx) \, \mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{a_0}{2} (\pi - (-\pi)) = a_0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx) \, \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} cos(kx) \, \mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) cos(kx) \right) \mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(nx) cos(kx) \right) \mathrm{d}x} \right] =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{k-1} a_n cos(nx) cos(kx) \right) \mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos(kx) cos(kx) \, \mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n cos(nx) cos(kx) \right) \mathrm{d}x} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \pi a_k = a_k$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx) \, \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} sin(kx) \, \mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) sin(kx) \right) \mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(nx) sin(kx) \right) \mathrm{d}x} \right] =$$

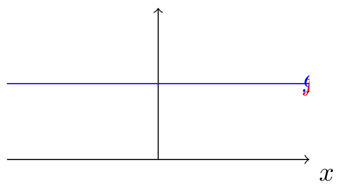
$$\frac{1}{\pi} \left[\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{k-1} a_n cos(nx) sin(kx) \right) \mathrm{d}x} + \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos(kx) sin(kx) \, \mathrm{d}x + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n cos(nx) sin(kx) \right) \mathrm{d}x} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \pi b_k = b_k$$

Osservazione 20.35
Se $d_2(f, polinomio\ di\ Fourier)$ è minima $\Rightarrow$ il polinomio di Fourier è costruito con i coefficienti di Fourier di f.

Osservazione 20.36
Se f è somma di una serie di funzioni $\Rightarrow$ i coefficienti della serie sono i coefficienti di Fourier.

Osservazione 20.37
Funzioni diverse possono avere gli stessi coefficienti di Fourier, cioè $\exists f, g$ con $f \neq g$ ma f e g hanno gli stessi coefficienti di Fourier. ESEMPIO::



SISTEMARE,

Osservazione 20.38
I coefficienti di Fourier non possono identificare univocamente puntualmente una funzione.

Punto Di Vista Geometrico

In R^2 Ci sono 2 vettori $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ della base, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{v} = v_1 \cdot \hat{\imath} + v_2 \cdot \hat{\jmath}$ con v_1, v_2 componenti di $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$\underline{v} \cdot \hat{\imath} = v_1 \cdot \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + v_2 \cdot \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = v_1$$
$$\underline{v} \cdot \hat{\jmath} = v_1 \cdot \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + v_2 \cdot \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = v_2$$

Questo vale perché $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ è una base ortonormale. In R^3 Ci sono 3 vettori $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ della base, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \underline{v} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$ con v_1, v_2, v_3 componenti di $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$v_1 = \underline{v} \cdot \hat{\imath} \quad v_2 = \underline{v} \cdot \hat{\jmath} \quad v_3 = \underline{v} \cdot \hat{k}$$

In R^n Ci sono n vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{v} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \ldots + v_n \cdot e_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot e_k$ con $v_1, v_2, \ldots, v_n$ componenti di $\underline{v}$
Calcolo delle componenti:

$$v_k = \underline{v} \cdot e_k$$

Con le Serie di Fourier su esegue la stessa operazione sullo spazi $\mathbf{C^0}([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$. Come elementi di base si ha un insieme di funzioni:

1. $c_0 : x \to 1$
2. $c_1 : x \to cos(x)$
3. $c_2 : x \to cos(2x)$
4. $\ldots$
5. $c_n : x \to cos(nx)$
6. $s_1 : x \to sin(x)$

7. $s_2 : x \to sin(2x)$

8. ...

9. $s_n : x \to sin(nx)$

Si possono osservare due cose:

1. *Sono tutte funzioni linearmente indipendenti, poiché l'unica combinazione lineare di questi elementi che da l'elemento nullo è quella a coefficenti tutti nulli.*

Definizione 20.39
Il prodotto scalare in $\mathbf{C^0} \rightleftharpoons \langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ *Altre simbologie usate sono:* $f \bullet g$, $(f|g)$

Osservazione 20.40
linearità

$$\langle(\alpha \cdot f + \beta \cdot g), h\rangle = \int_{-\pi}^{pi} (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) \cdot h(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{pi} [\alpha \cdot f(x) \cdot h(x) + \beta \cdot g(x) \cdot h(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \alpha \int_{-\pi}^{pi} \cdot f(x) \cdot h(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_{-\pi}^{pi} \cdot g(x) \cdot h(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\alpha \langle f, h\rangle + \beta \langle g, h\rangle$$

Ripetiamolo stesso ragionamento applicato in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, *e* $\mathbb{R}^n$ *per ricavare le componenti, possiamo fare questo perché abbiamo una base e abbiamo definito un prodotto scalare.*
Se $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) \Rightarrow$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dxs = \frac{1}{\pi} \langle f, c_0\rangle$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \langle f, c_k\rangle$$

$$b_k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \langle f, s_k\rangle$$

Quindi come prima le componenti di un vettore si ottengono moltiplicando(prodotto scalare) il vettore per gli elementi della base.
PER IL LEMMA:

$$\langle c_h, c_k\rangle = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ 2\pi & 0 = h = k \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$$

$$\langle c_h, s_k\rangle = 0$$

$$\langle s_h, s_k\rangle = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ \pi & 0 \neq h = k \end{cases}$$

Il prodotto scalare di elementi diversi è nullo quindi la base è ortogonale, ma non è ortonormale in quanto il prodotto scalare tra due elementi diversi della base non è unitario.(ecco perché gli $\frac{1}{\pi}$*)*

e $\frac{a_0}{2}$*)*
In generale in geometria non è difficile normalizzare una base, è sufficiente dividere tutti gli elementi per la loro norma. In questo caso decidiamo di non applicare questo ragionamento poiché la norma vale $\sqrt{\pi}$ *e se normalizziamo dobbiamo aggiungere questo termini ......*
Il prodotto scalare in $\mathbf{C^0}$ *è molto legato alla* d_2 *infatti:*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx}$$

Continuano le analogie:
In $\mathbb{R}^2$ ....
In $\mathbb{R}^3$ ....
.....
......
......
.....
Passando in dimensione infinita, abbiamo una funzione f *(come vettore* $\underline{v}$*) nello spazio, e fare il polinomio di Fourier vuole dire proiettare la funzione* f *in uno spazio fatto dai primi* $2n+1$ *elementi della base che è uno spazio di dimensione finita.*

Esempio:::: Non ogni funzione ammette coefficienti di Fourier finiti. La funzione

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

non ammette coefficienti di Fourier finiti.
Esempio::: Una funzione può ammettere tutti i coefficienti di Fourier finiti ed una serie di Fourier convergente, ma ad un limite diverso da f*.La funzione.*

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ha coefficienti di Fourier

$$a_k = 0 \quad \forall k, \qquad \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ pari} \end{cases}$$

e serie di Fourier

$$F_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{sin(2h+1)x}{2h+1}$$

questa serie converge puntualmente in 0 *ma* $F_f(0) \neq f(0)$

ESEMPIO:: Due funzioni diverse possono avere gli stessi coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \pi & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Osservazione 20.41
Sia f una funzione pari $\Rightarrow bn = 0 \forall n = 1, 2, \ldots, +\infty$

Osservazione 20.42
Sia f una funzione dispari $\Rightarrow an = 0 \forall n = 0, 1, , \ldots, +\infty$

Osservazione 20.43
Siano

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$$

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (\alpha_n cos(nx) + \beta_n sin(nx))$$

Allora

$$F(x) = (f + \varphi)(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=}^{+\infty} (A_n cos(nx) + B_n sin(nx))$$

con $A_n = a_n + \alpha_n$. $B_n = b_n + \beta_n$. cioè i coefficienti di Fourier dipendono linearmente dalla funzione.
Esempio::: $B_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) sin(3x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + \varphi(x)) sin(3x)\, \mathrm{d}x =$
$\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(3x)\, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) sin(3x)\, \mathrm{d}x \right] = b_3 + \beta_3$
Sia $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \liminf_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n cos(nx))$ allora $F = 4f = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n cos(nx) + B_n cos(nx))$
con $A_n = 4a_n$, $B_n = 4b_n$
ESEMPIO Esempio:::$B_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) sin(3x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4f(x) sin(3x)\, \mathrm{d}x = 4b_3$

Definizione 20.44
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \rightleftharpoons f$ è continua a tratti se esiste un numero finito di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ t.c.:

1. *In ogni punto di $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ f è continua*
2. *$i = 1, 2, \ldots, n$ esistono finiti entrambi i limiti:*

$$\lim_{x \to x_i^-} f(x) \qquad \lim_{x \to x_i^+} f(x)$$

Osservazione 20.45
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, se x_0 è punto interno ad A, è comoda la notazione

$$f(x-) = \lim_{\xi \to x^-} f(\xi) \quad f(x+) = \lim_{\xi \to x^+} f(\xi)$$

Ovviamente se f è continua in x allora $f(x-) = f(x) = f(x+)$ ESEMPIII:::
GRAFICO::::

GRAFICO::::
....
....
....
....

Proposizione 20.46
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, f *è continua a tratti* $\Rightarrow$ *esistono finiti tutti i coefficienti di Fourier di* f

Proposizione 20.47
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,
-f *è continua a tratti*
-$\forall \overline{x} \in [-\pi, \pi]$, *esistono finiti:*

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} = \frac{f(x) - f(\overline{x}-)}{x - \overline{x}}$$
$$\lim_{x \to \overline{x}^+} = \frac{f(x) - f(\overline{x}+)}{x - \overline{x}}$$

Allora:
La serie di Fourier di f *converge puntualmente in* $\overline{x}$ *e* $F_f(\overline{x}) = \frac{f(\overline{x}-)-\overline{x}+}{2}$ *(che è il punto medio del salto.)*

Osservazione 20.48
NIENTE CUSPIDI E NIENTE TANGENZE VERTICALI.

Corollario 20.49
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,
f *è continua a tratti.*
Sia $\overline{x} \in [-\pi, \pi]$ *un punto in cui* f *è derivabile. Allora la serie di Fourier* F_f *di* f *converge in* $\overline{x}$ *e* $F_f(\overline{x}) = f(\overline{x})$

Proposizione 20.50
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.*Se:*

* $f \in \mathbf{C^0}([-\pi, \pi]\,; \mathbb{R})$
* $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-\pi, \pi]$ *t.c.:*
  - f *è derivabile in* x
  - f' *continua in* x
* $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ *e* $\forall x \in [-\pi, \pi]$ *esistono finiti*

$$\lim_{x \to x_i^-} \frac{f(x) - f(x_i-)}{x - x_i} \qquad \lim_{x \to x_i^+} \frac{f(x) - f(x_i+)}{x - x_i}$$

Allora
La serie di Fourier F_f *di* f *converge a* f *uniformemente su* $[-\pi, \pi]$

Corollario 20.51
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, *e* $f \in \mathbf{C^1}([-\pi, \pi]\,; \mathbb{R})$.
Allora la serie di Fourier di F_f *di* f *converge uniformemente a* f *su* $[-\pi, \pi]$.

Parte V

Equazioni Differenziali

Capitolo 5

Equazioni Differenziali

21 Preliminari

Equazione è un uguaglianza in cui c'è almeno una incognita.
Equazione differenziale è un particolare tipo di equazione e stabilisce una relazione tra la funzione incognita e le sue derivate.In un equazione funzionale si cerca l'uguaglianza di: insieme di arrivo, insieme di partenza, corrispondenza.
Non è necessario sapere il valore della soluzione ma sapere che ne esiste una.????????

Equazione differenziale ordinaria:
1- La funzione incognita è funzione di una sola variabile, solitamente il tempo.
2- La funzione incognita e le sue derivate sono calcolate allo stesso istante di tempo.

Definizione 21.1 (Equazione differenziale)
Si dice equazione differenziale ordinaria di ordine n *nella funzione incognita* $x \in \mathbb{R}^k$ *un espressione del tipo:*

$$f(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

dove $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^{1+(1+n)k}$ *e* $t \in \mathbb{R}$.
m *e* k *caratterizzano il problema e son dunque libere. La dimensione di partenza* $1 + (1 + n)k$ *del problema è obbligata e dovuta alla somma di:*

- $1 = dim(t)$
- $(1 + n)k$
  - $(1 + n)$ *il numero totale delle funzioni:* n *derivate ed* x *stessa*
  - k *la dimensione dell'insieme di partenza di ogni funzione incognita*

Soluzione *di questa equazione differenziale è una qualunque funzione* $x : I \to \mathbb{R}^k$ *definita su un intervallo* $I \subseteq \mathbb{R}$*, derivabile* n *volte in* I *(e dunque continua in* I*) e tale che* $\forall t \in I$

$$t, x, x', \ldots, x^{(n)}) \in A$$

$$f(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

Soluzione massimale *di un equazione differenziale ordinaria è una soluzione* $x_m : I_m \to \mathbb{R}^k$ *tale che nessuna soluzione possa essere definita in un intervallo* I *con* $I_m \subseteq I$

Nota. Dalla definizione segue che $x \in \mathring{A}$, in quanto se non fosse in $\mathring{A}$ sarebbe di frontiera, ma un punto di frontiera non può essere derivabile.

Nota. Un'equazione differenziale ammette, in generale, infinite soluzioni.

Nota. La soluzione di un'equazione differenziale può, analiticamente, essere definita su un intervallo $J \supset I$ (I intervallo di definizione della funz. differenziale f). Non ha però senso considerare il suo comportamento al di fuori di I, in quanto non ha valore dal punto di vista del sistema. Per questo motivo J sarà sempre considerato $J \subseteq I$

Nota. dalla Definizione 21.1 (Equazione differenziale) segue che l'insieme di definizione della soluzione di un'equazione differenziale può essere solo un intervallo

Esempio 21.2
Presa l'equazione differenziale $x' = 1$, essa è risolta da $x(t) = t + \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

Esercizio 21.3
La soluzione di un'equazione differenziale ordinaria non può avere 3 asintoti.

Soluzione. La soluzione x è funzione continua. In quanto continua non può avere più di 2 asintoti verticali e in quanto funzione non può avere più di 2 asintoti orizzontali. ■

Definizione 21.4
un'equazione differenziale è in forma normale se e solo se si presenta nella forma

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

Osservazione 21.5
lo studio di un'equazione differenziale ordinaria in forma non normale inizia generalmente con l'utilizzo del Teorema della Funzione Implicita insieme ai teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie in forma normale

Proposizione 21.6
ogni equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine n è equivalente a una equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine 1, cioè in cui compaiono solamente derivate prime.

Dimostrazione. Data l'equazione

$$x^{(n)} = g(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

sia y il vettore $y = \begin{bmatrix} x & x' & x'' & \dots & x^{(n-1)} \end{bmatrix}$. Abbiamo ora che le componenti del vettore sono

$$y_1 = x \qquad y_2 = x' \qquad y_3 = x'' \qquad \dots \qquad y_n = x^{(n-1)}$$

ed al contempo

$$y_1' = x' = y_2 \qquad y_2' = x'' = y_3 \qquad y_3' = x''' = y_4 \qquad \dots \qquad y_{n-1}' = x^{(n-1)} = y_n$$

Cioè, differenziando l'$i-esimo$ elemento (funzione) del vettore y, mi "sposto" all'elemento (funzione) $i+1$ di y. A questo punto tutti gli elementi di y sono equazioni differenziali del primo ordine.

Quindi l'equazione può essere scritta come il seguente sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots \\ y_n' & = & g(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

$\square$

Esempio 21.7
CASO n=2
abbiamo che $x'' = f(t, x, x')$
introduco $X' = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}$ *e* $X = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$
quindi $X' = f(t, X)$

Definizione 21.8
si dice problema di Cauchy del primo ordine il problema di determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, soddisfacente ad una condizione iniziale.

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dove $f : J \times A \to \mathbb{R}^n$, $J \subseteq \mathbb{R}$ *è un intervallo,* $t_0 \in \mathring{J}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$.
Soluzione di un problema di Cauchy è una funzione $x : I \to \mathbb{R}^n$*, definita in un intervallo* I *contenente* t_0 *nella sua parte interna, quindi* $t_0 \in I \subseteq J$.
Tale funzione x *è soluzione dell'equazione differenziale* $x' = f(t, x)$ *ed è tale che:*

1. $x(t_0) = x_0$
2. $x(I) \subseteq A$
3. x *derivabile*

Quindi il problema di Cauchy aggiunge un vincolo ad un'equazione differenziale, così si isola una singola soluzione

Nota. Si considera un intervallo perché l'idea è di studiare l'andamento nel tempo e sarebbe difficile far previsioni con "buchi" di tempo

Nota. La condizione $x(t_0) = x_0$ viene spesso definita condizione iniziale, malgrado la Definizione 21.8 indichi che $t_0 \in \mathring{I}$, dunque a rigore non dovrebbe essere sulla frontiera di I. Questo è dovuto al fatto che, spesso, t_0 è proprio all'inizio dell'intervallo in cui si cerca la soluzione dell'equazione, ma i risultati esposti continuano a valere con piccole modifiche alle dimostrazioni.

Definizione 21.9
soluzione massimale di un problema di Cauchy è una soluzione

$$x_M : I_M \mapsto R^k$$

tale che nessun'altra soluzione della stessa equazione possa essere definita in un intervallo I *con* $I_M \subset I$*. Quindi è la soluzione definita sull'intervallo maggiore possibile.*

Definizione 21.10
si dice problema di Cauchy di ordine n il seguente problema:
Determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n soddisfacente a n condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = \alpha_0 \\ x'(t_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Nota. Le condizioni iniziali devono essere assegnate tutte nello steso istante.

Esempio 21.11
il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ammette, tra le altre, anche le seguenti soluzioni, tecnicamente distinte tra loro

$$\begin{aligned} f_1 : [-1, 1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 : [-2, 10] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^t \end{aligned}$$

La soluzione massimale è

$$\begin{aligned} f_M : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^t \end{aligned}$$

con intervallo di partenza $\mathbb{R}$, avente evidentemente diametro maggiore possibile.

Proposizione 21.12
ogni problema di Cauchy di ordine n è equivalente ad un problema di Cauchy del primo ordine

Dimostrazione. Dalla Proposizione 21.6 □

Definizione 21.13 (Equazione di Volterra)
Ogni problema di Cauchy del primo ordine con secondo membro continuo

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è equivalente ad un'equazione integrale del tipo

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, x(\tau)\big) \Big) \,\mathrm{d}\tau$$

Questa equazione viene denominata ***equazione integrale di Volterra****.*

Dimostrazione. Integrando ambo i membri della prima equazione del problema di ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} (x') \,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau))) \,\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau))) \,\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))\,\mathrm{d}\tau$$

□

Nota. Questa equazione ha senso anche per alcune funzioni f non non continue, ma solo misurabili nel primo argomento. Ne consegue che nei Teoremi di esistenza ed unicità (locali/globali) l'ipotesi "f continua" può essere sostituita da "f continua a tratti in $t, \forall x$, continua in x e limitata".

Osservazione 21.14
*in generale un problema si dice **ben posto** o **ben posto nel senso di Hadamard** ogniqualvolta la soluzione:*

1. *esiste*
2. *è unica*
3. *dipende con continuità dai dati*

22 Teoria Locale

Definizione 22.1 (Locale lipschitzianità)
*Una funzione $f : I \times A \to \mathbb{R}^n$, con I intervallo in $\mathbb{R}$ e A aperto in $\mathbb{R}^n$, si dice **localmente lipshitziana** in $x \in A$ **uniformemente** rispetto a t se*

$$\forall x_0 \in A, \exists r > 0 e L > 0 : \forall x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A), \forall t \in I$$

vale che

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq L \cdot \|x_2 - x_1\| \qquad o, ugualmente \qquad \frac{\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|} \leq L$$

*Una funzione è uniformemente lipschitziana (**unif. lips.**) in un'intervallo I se, in parole povere, è possibile individuare per ogni punto di I una sfera B in cui la funzione è lipschitziana.*

Nota. La località è data da $x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A)$ e l'uniformità da $\forall t \in I$. Quindi la f rimane lips. in modo uniforme al variare di t (cioè $\forall t \in I$), ma questo non è garantito $\forall x \in A$, solo per $x_1, x_2 \in (B(x_0, r) \cap A)$.

Nota. Se f **lips** su $A \implies f$ **loc. lips.** su A

Proposizione 22.2
Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Ogni funzione $f \in \mathbf{C^1}(I \times A; \mathbb{R}^n)$ è loc. lips. in $x \in A$ uniformemente rispetto a $t \in I$

Dimostrazione. Il prodotto cartesiano $I \times A$, essendo prodotto cartesiano di aperti in $\mathbb{R}^n$ con metrica euclidea (si suppone sia in uso questa metrica), è a sua volta un aperto. Questo risultato è dovuto alla definizione stessa del prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con metrica euclidea.
Chiamiamo ora $S = I \times A$ l'insieme di partenza della f. Grazie alla **??** sappiamo che esiste una poligonale interamente contenuta in S congiungente due qualunque punti dell'aperto S.
È ora possibile applicare il Teorema 8.15 (Formula degli accrescimenti finiti) ad uno qualunque dei segmenti formanti la poligonale appena individuata. Vale quindi la

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{x \in S} \|Df(x)\| \, \|x_1 - x_0\|$$

che è direttamente comparabile alla Definizione 22.1 (Locale lipschitzianità) della funzione in ciascuno dei segmenti della poligonale, da cui la tesi. □

Esempio 22.3
La funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ è ***loc. lips.*** *su $\mathbb{R}$ ma non è* ***globalmente lips.*** *su $\mathbb{R}$. Vedasi* **??**

22.1 Esistenza e Unicità

Proposizione 22.4 (Teorema di Peano)
Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $f : I \times A \in \mathbb{R}^n$ soddisfacente alle ipotesi:

1. $t_0 \in \mathring{I}, x_0 \in \mathring{A}$
2. $f \in \mathbf{C^0}(I \times A; R^n)$

inoltre $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$, in quanto problema di Cauchy.
Allora esiste un $\delta > 0$ tale che esiste soluzione $x : J \mapsto A$ del problema di Cauchy con $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Nota. δ è un valore arbitrario che serve ad identificare l'intervallo I a cui appartiene t_0

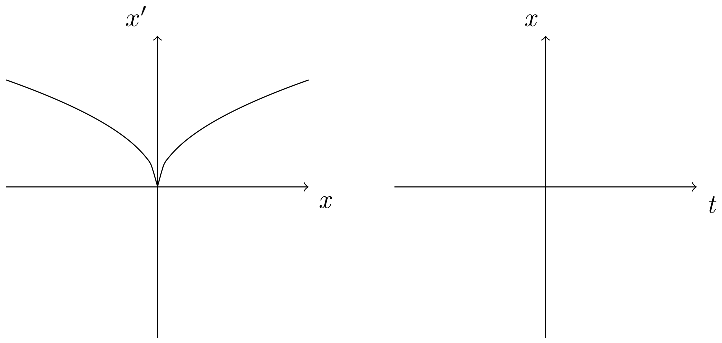
Inoltre:

- $J \subseteq I$ *da nota definizione 47, dunque* $\varphi(J) \subseteq A$
- $\varphi(t_0) = x_0$
- φ *derivabile e* $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

Dimostrazione. Non richiesta □

Esempio 22.5 (Il Baffo/Pennello di Peano)

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$



Se $x_0 = 0$ *ho che* $\varphi(t) = 0$ *è soluzione* $\forall t$
Ma $x' = \sqrt{|x|}$ *è anche un'equazione a variabili separabili, quindi risolvibile.*

$$\frac{x}{\sqrt{|x|}} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{x'}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}t = t$$

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = t$$

valuto ora il caso $x \geq 0$*, quindi* $|x| = x$

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} = t$$

La soluzione cercata è quindi $x(t) = \frac{1}{4}t^2$*, estendendo il ragionamento ai tempi negativi si trova che la soluzione cercata è:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\frac{1}{4}t^2 & t > 0, \\ 0 & t = 0 \\ -\frac{1}{4}t^2 & t < 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato che per la condizione iniziale $x_0 = 0$ *il sistema ammette due soluzioni, si riesce estendere la soluzione a infinite funzioni.*

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-a)^2 & t < a, \\ 0 & t \in [a,b] \\ +\frac{1}{4}(t-b)^2 & t > b \end{cases}$$

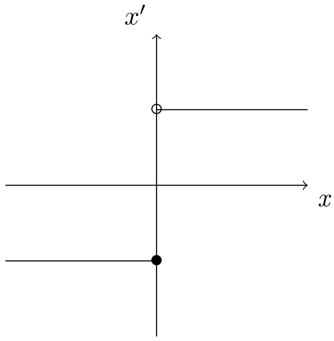
infatti:

$$\varphi'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{8}(t-a) & t < a, \\ 0 & t \in [a,b] \\ +\frac{1}{8}(t-b) & t > b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{8}(t-a) = \frac{-\frac{1}{4}(t-a)^2}{\sqrt{-\frac{1}{4}(t-a)^2}} & t < a, \\ 0 = 0 & t \in [a,b] = ...?????sistema \\ +\frac{1}{8}(t-b) = \frac{\frac{1}{4}(t-b)^2}{\sqrt{\frac{1}{4}(t-b)^2}} & t > b \end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato infinite soluzioni.
Questo esempio per sottolineare che il teorema di Peano non garantisce l'unicità della soluzione

Esempio 22.6 (Continuità ed ipotesi necessaria)
Questo esempio mostra che se non c'è continuità, può??????????? non esserci la soluzione.
Dato il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} x' = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases} \\ x(0) = 0 \end{cases}$



$x(t) = 0$ soddisfa la condizione iniziale ma ovviamente non può essere soluzione del problema poiché per $x \neq 0$ si ha che $x' = \pm 1$ che non è la derivata della funzione nulla.
partendo sempre dalla condizione iniziale si può ipotizzare per esempio che la soluzione cresca, solo che questo contraddice $x'(0) = -1$
se invece si ipotizza che decresce da 0 si ottiene che la funzione assume valori negativi, anche questo è un assurdo poiché la derivata per valori negativi della funzione è positiva.
Precisiamo che se il problema fosse stato $\begin{cases} x' = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases} \\ x(0) = -3 \end{cases}$ allora la funzione $\varphi(x) = -x + 3$ sarebbe stata soluzione nell'intervallo $J =]-\infty, 0[$

Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte))
In sostanza si dimostra che il problema di Cauchy è ben posto nel senso di Hadamard.
Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $f : I \times A \to \mathbb{R}^n$ soddisfacente le ipotesi:

1. *$t_0 \in \mathring{I}$, $x_0 \in \mathring{A}$. Inoltre da Definizione 21.1 (Equazione differenziale) e note successive: I intervallo e $I \subseteq \mathbb{R}^n$, inoltre $A \subseteq \mathbb{R}^n$*
2. *$f \in \mathbf{C^0}(I \times A; \mathbb{R}^n)$*
3. *f è localmente Lipschitziana in $x \in A$ uniformemente rispetto a $t \in I$*

Nota. Le prime due ipotesi garantiscono l'esistenza, grazie al Thm. di Peano. La terza ipotesi rende il teorema più restrittivo, ma permette anche di giungere ad una conclusione più forte (ed utile).

Nota. Per verificare l'ultima ipotesi si ricordino Proposizione 22.2 e se f **lips.** $\Longrightarrow$ f **loc. lips.**

Allora ho i seguenti risultati:

1. ***Esistenza:***
   da Proposizione 22.4 (Teorema di Peano) $\exists \delta > 0$, con cui si identifica un $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Inoltre $\exists\, \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ è soluzione con le proprietà date da Peano:
   - *$J \subseteq I$ da nota definizione 47, dunque $\varphi(J) \subseteq A$*
   - *$\varphi(t_0) = x_0$*
   - *φ derivabile e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$*

2. ***Unicità***
   Se $\exists J_1, J_2$ intervalli con $J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I$ e $\exists \varphi_1 : J_1 \to \mathbb{R}^n, \varphi_2 : J_2 \to \mathbb{R}^n$ soluzioni con le seguenti proprietà

   - *$J_1 \subseteq I$, $J_2 \subseteq I$ da nota definizione 47, dunque $\varphi_1(J_1) \subseteq A$ e $\varphi_2(J_2) \subseteq A$*
   - *$\varphi_1(t_0) = x_0$, $\varphi_2(t_0) = x_0$*
   - *φ_1, φ_2 derivabili e $\begin{cases} \varphi_1'(t) = f(t, \varphi_1(t))\, \forall t \in J_1 \\ \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_2(t))\, \forall t \in J_2 \end{cases}$ NB. Non è effettivamente sistema*

   Nota. Si può osservare che, sicuramente, $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, poiché entrambi gli insiemi contengono almeno t_0 nella loro parte interna.

   Allora $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \quad \forall t \in (J_1 \cap J_2)$
   Cioè, se esistono due soluzioni, allora esse coincidono ovunque siano entrambe definite.

3. ***Dipendenza continua dai dati***
   Questa tesi verrà esposta successivamente in Teorema 22.13 (Teorema di Cauchy Locale - Seconda Parte)

Dimostrazione. (**Tesi 2**)

Nota. L'idea alla base della dimostrazione è che vogliamo riuscire a trasformare il problema di Cauchy in un problema di punto fisso mediante una funzione avente come parametro x stesso.

Da Definizione 21.13 (Equazione di Volterra) sappiamo che la prima equazione del problema in ipotesi corrisponde all'integrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, x(\tau)\big) \Big)\, \mathrm{d}\tau$$

Definiamo quindi T, funzione del tipo

$$\begin{aligned} T : \quad X \quad &\to X \\ (T(x))(t) &\mapsto x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{5.1}$$

Abbiamo così ottenuto un problema di punto fisso ($x = T(x)$). Ora bisogna determinare l'insieme di partenza e l'insieme di arrivo in maniera utile per la dimostrazione. Per poter applicare il Teorema delle contrazioni serve che lo spazio di partenza e di arrivo corrispondano.
Prendiamo:

- $\delta_1 > 0$ tale che $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \subseteq I$
- $\rho > 0$ tale che $\overline{B(x_0, \rho)} \subseteq A$
- L costante di Lipshitz di f in $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \times \overline{B(x_0, \rho)}$. È possibile individuare L in quanto f loc. lips. per ipotesi in $I \times A$, e dunque **loc. lips. in sottointervalli/insiemi**

Sia ora

$$V = \sup \Big\{ \|f(t, x)\| \,:\, t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]\, , x \in \overline{B(x_0, \rho)} \Big\}$$

Nota. V è il massimo valore assunto dalla derivata prima ($x' = f(t, x)$)) di una qualsiasi delle soluzioni x contenute nella sfera $\overline{B(x_0, \rho)}$. È massimo di funzione continua (per ipotesi 2) in un compatto (per ipotesi 1, essendo in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e per **??**).

Definiamo dunque un generico $\delta > 0$

$$\delta < \min \left\{ \delta_1, \frac{\rho}{V}, \frac{1}{L} \right\} \tag{5.2}$$

Nota. δ è strettamente minore del min perché poi servirà a trovare una contrazione, dunque dovrò avere sicuramente $\delta L < 1$

- δ_1 è raggio di un generico intervallo incluso in I di partenza. δ deve essere minore di δ_1 in quanto non è possibile uscire dall'intervallo I
- $\frac{\rho}{V}$ è rapporto tra il raggio di $\overline{B(x_0, \rho)}$, sfera interamente contenuta in A, e V, valore massimo di f ridotta all'intervallo di cui sopra e alla sfera $\overline{B}$.
Considerando il reciproco $\frac{V}{\rho}$, possiamo vederlo come una sorta di nuova costante di lips., riportata ad un intervallo più piccolo, non dipendente però da $\Delta f(x)$, ma dal valore di $f(x)$ stessa.
- $1/L = \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|f(t,x_2) - f(t,x_1)\|}$ dalla Definizione 22.1 (Locale lipschitzianità), perché f loc. lips. per ipotesi. Dà un'idea di quanto vari la x rispetto alla variazione della $f(x)$

Questo δ, dunque, rappresenta, dal punto di vista concettuale, quale sia la più restrittiva (min) tra tutte le possibili variazioni della $f(x)$ rispetto alla x.
A questo punto, usando δ, definiamo lo spazio X, generato da tutte le funzioni continue sul nuovo intervallo a valori entro una sfera centrata in x_0 con lo stesso raggio di $\overline{B}$

$$X = \left\{ g \in \mathbf{C^0}([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \, ; \mathbb{R}^n) : \forall t \, \|g(t) - x_0\| \leq \rho \right\}$$

Nota. Si scelgono le funzioni continue ($\in \mathbf{C^0}$) perché serve x continua per rendere valida l'equivalenza della funzione di Volterra con il problema di Cauchy. Stando alla nota alla definizione di equazione di Volterra sarebbe possibile sceglierla non continua, ma non si considera il caso.

Possiamo passare al punto chiave della dimostrazione, verifichiamo le ipotesi del Teorema 4.4 (Teorema delle Contrazioni):

- (X, d) è **spazio metrico completo**
(X, d_X) è spazio metrico completo se considerato con la distanza della convergenza uniforme $d_X = d_{\mathbf{C^0}}$ per il Corollario 19.33. □
- T è **definita** (è possibile calcolarla)
L'abbiamo definita all'inizio dall'equazione di Volterra □
- T è $\boldsymbol{X \mapsto X}$
L'insieme di partenza è valido in quanto sottoinsieme dell'insieme su cui $f(t, xt)$ era definita.
Per verificare che $y = T(x)$, bisogna verificare che $y \in \mathbf{C^0}([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \, ; \mathbb{R}^n)$ e che $y(t) \in \overline{B(x_0, \rho)} \;\; \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

Dimostrazione. $y \in \mathbf{C^0}$ nell'intervallo specificato per il Teorema Fodamentale del Calcolo Integrale.
La seconda condizione si verifica prendendo la Equazione 5.1 (Esistenza e Unicità) e calcolando la norma di entrambi i termini

$$\|y(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right\|$$

posso ora minorare con il valore assoluto della norma dell'argomento (spiegazione in Esercizio 22.8)

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau))\| \, \mathrm{d}\tau \right| \tag{5.3}$$

$\|f(\tau, x(\tau))\|$ è sicuramente minorato da V per definizione di quest'ultimo, dunque si ha integrale di costante

$$\leq V \cdot |t - t_0|$$

$|t - t_0| \leq \delta$ per definizione di δ

$$\leq V \cdot \delta$$

nel caso in cui $\min\left\{\delta_1, \frac{\rho}{V}, \frac{1}{L}\right\} = \frac{\rho}{V}$, allora minorato strettamente da ρ per definizione di δ, altrimenti sicuramente minore per min

$$< \rho$$

□

- T è **contrazione**
  Occorre verificare la Equazione 1.1 (Contrazione)

  Dimostrazione. Per definizione della T e per la proprietà additiva degli integrali

  $$\big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_1)\big)(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, x_2(\tau)\big) - f\big(\tau, x_1(\tau)\big) \Big) \, \mathrm{d}\tau$$

  Dunque, passando alla norma di quanto calcolato sopra

  $$\left\| \big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_1)\big)(t) \right\| \tag{5.4}$$

  È sicuramente minorata da

  $$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau, x_2(\tau)\big) - f\big(\tau, x_1(\tau)\big) \right\| \, \mathrm{d}\tau \right|$$

  Per Definizione 22.1 (Locale lipschitzianità) passo alle soluzioni x_i di f, minorando

  $$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot \|x_2(\tau) - x_1(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \right|$$

Dalla Osservazione 19.20, $\|f-g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup_A |f-g| = d_{\mathbf{C^0}}(f,g)$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot d_X(x_2, x_1)\, \mathrm{d}\tau \right| \\ &= L \cdot |t-t_0| \cdot d_X(x_2,x_1) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Quindi, concludendo, possiamo passare dalla Equazione 5.4 (Esistenza e Unicità) alla distanza d_X, semplicemente per definizione della distanza.

$$\left\| \big(T(x_2)\big)(t) - \big(T(x_2)\big)(t) \right\| = d_X\big(T(x_2), T(x_1)\big)$$

Minoriamo questa distanza con la forma appena trovata Equazione 5.5 (Esistenza e Unicità). Per quanto riguarda $|t-t_0|$, passiamo al sup di t nell'intervallo $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, cioè δ stesso

$$d_X\big(T(x_2), T(x_1)\big) \leq (\delta \cdot L) \cdot d_X(x_2, x_1)$$

Essendo, per definizione, δ al più pari ad $\frac{1}{L} \implies \delta \cdot L < 1 \implies T$ è contrazione per Definizione 4.1 (Contrazione). □

È ora possibile applicare il Teorema delle contrazioni che garantisce l'**unicità** del punto fisso $x_* \in X$ per la $x = T(x)$, questo implica ovviamente che $T(x)$ abbia un'unica soluzione. Si ha dunque l'unicità della soluzione x del problema di Cauchy in ipotesi sull'intervallo $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, al quale T è equivalente per definizione in quanto T è Equazione di Volterra.

Tornando ai J_1, J_2 della Tesi 2:

- Se $(J_1 \cap J_2) \subseteq [t_0-\delta, t_0+\delta]$, allora $x_1 = x_2$ in quanto esiste unico punto fisso, come dimostrato sopra.
- Se $(J_1 \cap J_2) \supset [t_0-\delta, t_0+\delta]$, allora poniamo

$$t_M = \sup\left\{t \in (J_1 \cap J_2) : \forall \tau \in [t_0, t]\,, x_1(\tau) = x_2(\tau)\right\} \tag{5.6}$$

$$x_M = x_1(t_M) = x_2(t_M)$$

Quindi t_M è l'*ultimo istante* in cui x_1 e x_2 coincidono.

Essendo

- $t_M \in \mathring{J}_1$, $t_M \in \mathring{J}_2 \implies t_M \in \mathring{I}$ da nota definizione 47
- $x_M \in \mathring{A}$ per nota definizione equazione differenziale

ci ritroviamo nelle ipotesi di quanto appena dimostrato, solo che con dei nuovi t ed x. Possiamo dunque giungere alla conclusione che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_M) = x_M \end{cases}$$

ammetta unica soluzione definita in un intorno di t_M del tipo $[t_M-\delta, \boldsymbol{t_M+\delta}]$, cioé x_1 e x_2 coincidono in un intorno di t_M. Il fatto che esista un'unica soluzione oltre t_M (vedere parte in grassetto dell'intorno sopra) contraddice la Equazione 5.6 (Esistenza e Unicità), perché non dovrebbe essere possibile trovare una soluzione in comune *oltre* t_M per come è definito. Ripetendo iterativamente questo procedimento si può semplificare la definizione di t_M a

$$t_M = \min\left\{\sup J_1, \sup J_2\right\}$$

Ripetendo quanto fatto con il *primo istante* t_m in cui x_1 e x_2 coincidono, si ottiene

$$t_m = \max\{\inf J_1, \inf J_2\}$$

Quindi, prendendo $[t_m, t_M]$, abbiamo identificato $J_1 \cap J_2$ stessa.

Dunque x_1 e x_2 coincidono in $J_1 \cap J_2$, indipendente dalla relazione tra intersezione e intervallo. $\square$

Nota. La scelta di δ in Equazione 5.2 (Esistenza e Unicità) potrebbe essere migliorata utilizzando il Teorema 4.6 (Teorema dell'Iterata Contrazione) e scegliendo $\delta < \min\left\{\delta_1, \frac{\rho}{V}\right\}$, indipendentemente dalla costante di lips. della f

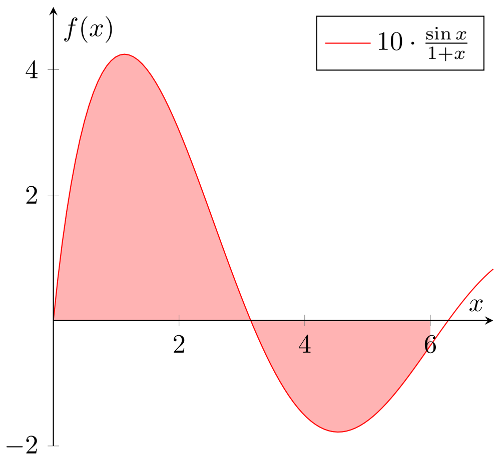
Esercizio 22.8
È necessario il modulo in (5.3)*?*

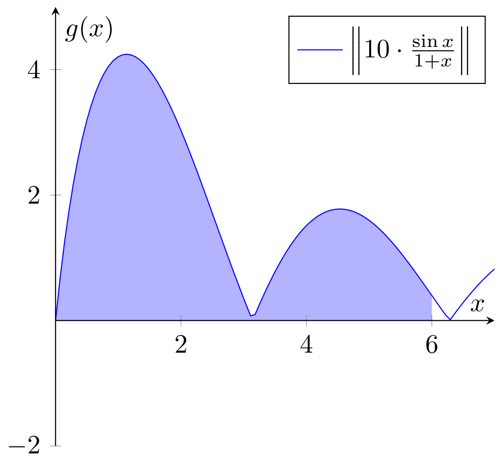
Soluzione. Consideriamo, ad esempio

$$f(x) = \left\| \int_0^6 10 \cdot \frac{\sin x}{1+x} \, \mathrm{d}x \right\| = 4,9413 \qquad \text{(sinistra)}$$

$$g(x) = \left| \int_0^6 \left\| 10 \cdot \frac{\sin x}{1+x} \right\| \, \mathrm{d}x \right| = 11,935 \qquad \text{(destra)}$$

Nella f, viene calcolata la norma del risultato dell'integrazione definita.
Nella g si ha invece la norma della funzione, cioè la parte "sotto l'asse x" della funzione viene ribaltata sopra l'asse dall'operatore norma, come si può vedere dal grafico. Questo implica che il valore della g sarà sicuramente $\geq$ rispetto alla f, in quanto l'integrale è somma di soli infinitesimi positivi.
Infine, il valore assoluto nella (5.3) è necessario per evitare che, scambiando gli estremi d'integrazione, si ottenga un valore negativo, che non potrebbe mai essere risultato del primo integrale





$\blacksquare$

Esercizio 22.9
Perchè il Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte) è chiamato Teorema di Cauchy ***locale****?*

Soluzione. È dovuto al fatto che il teorema fornisce informazioni solo in un intorno della condizione iniziale t_0, non è assicurata l'esistenza di un'unica funzione risolvente in un intervallo arbitrario. $\blacksquare$

Esercizio 22.10
*Confrontare l'**unicità** della soluzione di un'equazione differenziale (Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte)) con l'**unicità** della funzione implicita (Teorema 10.4 (Teorema della Funzione Implicita))*

22.2 Dipendenza Continua

Nelle applicazioni fisiche, il ruolo della condizione iniziale di un problema di Cauchy è quello del valore assunto da una determinata grandezza fisica, diciamo u_0, misurata al tempo $t = t_0$. Poiché la misura di una grandezza fisica comporta inevitabilmente un errore di rilevazione (per quanto piccolo), è importante caratterizzare quei problemi di Cauchy tali che a fronte di piccole discrepanze $u_0 \neq v_0$ producano soluzioni (I, u) (J, v) che differiscano "poco" in $I \cap J$.

Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall)
Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano:

- $\delta_0 \in [0, +\infty[$
- $\left.\begin{array}{l} \kappa,\ \delta : [a,b] \mapsto \mathbb{R} \\ \kappa(t) \geq 0,\ \delta(t) \geq 0 \text{ funzioni continue } \forall t \in [a,b] \end{array}\right\}$ *cioè* $\kappa,\ \delta \in \mathbf{C^0}([a,b], \mathbb{R}^+)$

con:

$$\delta(t) \leq \delta_0 + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Allora

$$\delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t \kappa(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \quad \forall t \in [a,b]$$

Questo lemma permette di limitare una funzione che soddisfa una disuguaglianza integrale con la soluzione della corrispondente equazione. Ci si porta da una stima implicita di δ (sotto il segno di integrale) ad una stima esplicita.

Dimostrazione. Dividiamo in due casi

- Se $\delta_0 > 0$
  Sia $\Delta(t) = \delta_0 + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Prendiamo ora il logaritmo di $\Delta(t)$, cioè $\ln\big(\Delta(t)\big)$, e deriviamolo con le regole classiche

$$\frac{d}{dt}\ln\big(\Delta(t)\big) = \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)}$$
$$= \frac{\frac{d}{dt}\delta_0 + \frac{d}{dt}\int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\Delta(t)}$$

  Il primo addendo è derivata di costante, il secondo corrisponde all'argomento dell'integrale per teorema fondamentale del calcolo integrale

$$= \frac{0 + \kappa(t)\delta(t)}{\Delta(t)} = \kappa(t)\frac{\delta(t)}{\Delta(t)}$$

  Essendo poi, per ipotesi, $\delta(t) \leq \Delta(t) \implies \frac{\delta(t)}{\Delta(t)} \leq 1$

$$\leq \kappa(t)$$

Integrando il primo e l'ultimo termine

$$\int_a^t \left(\frac{d}{d\tau}\ln\big(\Delta(\tau)\big)\right) \mathrm{d}\tau \leq \int_a^t \kappa(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$\ln\big(\Delta(t)\big) - \ln\big(\Delta(a)\big) \leq \int_a^t \kappa(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

da definizione di $\Delta(t)$, $\Delta(a) = \delta_0$

$$\ln\big(\Delta(t)\big) \leq \ln(\delta_0) + \int_a^t \kappa(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Passando all'esponenziale

$$e^{\ln\left(\Delta(t)\right)} \leq e^{\left(\ln(\delta_0)+\int_a^t \kappa(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)}$$
$$\Delta(t) \leq e^{\ln(\delta_0)} \cdot e^{\int_a^t \kappa(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$
$$\Delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t \kappa(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

Da cui la tesi

- Se $\delta_0 = 0$
  Minoriamo, poiché $\delta_0 = 0$, con un $\epsilon > 0$

  $$\delta(t) \leq 0 + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leq \epsilon + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \forall \epsilon > 0$$

  Essendo $\epsilon > 0$, mi trovo con una forma analoga al caso precedente, dunque

  $$\delta(t) \leq \epsilon \cdot e^{\int_a^t \kappa(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \qquad \forall \epsilon > 0$$

  Dovendo essere $\delta(t) \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$, posso concludere che

  $$\delta(t) \leq 0$$

  Ma, per ipotesi, $\delta(t) \geq 0 \implies \delta(t) = 0$

□

Esercizio 22.12
Verificare che la funzione Δ nella dimostrazione del Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall) è derivabile

Soluzione. È possibile derivare la Δ perché, da Esercizio 7.8, la somma di funzioni derivabili resta derivabile ed il secondo addendo è derivabile per Proposizione 14.1 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) ■

Teorema 22.13 (Teorema di Cauchy Locale - Seconda Parte)
Si considerino i seguenti problemi di Cauchy con condizione iniziale individuata nello stesso istante:

$$(1)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.7}$$

con $f, g : I \times A \to \mathbb{R}^n$ e soddisfacenti le ipotesi di Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte)), cioè:

1. *$t_0 \in \mathring{I}$, $x_0, y_0 \in \mathring{A}$. Inoltre da Definizione 21.1 (Equazione differenziale) e note successive: I intervallo e $I \subseteq \mathbb{R}^n$, inoltre $A \subseteq \mathbb{R}^n$*
2. *$f, g \in \mathbf{C^0}(I \times A; \mathbb{R}^n)$*
3. *f, g sono localmente Lipschitziane in $x \in A$ uniformemente rispetto a $t \in I$*

Allora esiste un $\delta > 0$ tale che sull'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ sono definite una soluzione φ di (1) ed una soluzione ψ di (2). Inoltre esiste $L > 0$ t.c. $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ vale:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}})e^{L|t-t_0|}$$

dove $\|f - g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_{I \times A} \|f(t,x) - g(t,x)\|$

Nota. Questo significa che, con problemi diversi tra loro, se (x_0 e y_0), (f e g) sono vicine tra loro ("a coppie"), allora sono vicine anche le soluzioni, ma per t vicine. Pensando t come tempo, cioè una delle applicazioni più classiche, questo implica che non si possano fare previsioni a lungo termine con sistemi diversi.

Dimostrazione. Sia f che g soddisfano le ipotesi del Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte)), quindi esistono due soluzioni:

- $\varphi : [t_0 - \delta_f, t_0 + \delta_f] \mapsto \mathbb{R}$ del problema (1)
- $\psi : [t_0 - \delta_g, t_0 + \delta_g] \mapsto \mathbb{R}$ del problema (2)

Sia dunque $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, da cui $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e, d'ora in poi, $t \in J$.
Gli insiemi $\varphi(J)$ e $\psi(J)$ sono compatti perché per Teorema 3.4 (Teorema generale di Weierstrass), essendo J compatto. La loro unione è dunque un compatto, come da Esercizio 2.6.
Utilizzando Definizione 21.13 (Equazione di Volterra), passiamo alle equazioni integrali delle Equazione 5.7 (Teorema di Cauchy Locale - Seconda Parte)

$$(1)\ \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\Big)\, \mathrm{d}\tau \qquad (2)\ \psi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\Big)\, \mathrm{d}\tau \tag{5.8}$$

Sottraiamo ora la (1) alla (2) (in norma)

$$\begin{aligned}\|\varphi(t) - \psi(t)\| &= \left\| x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\Big)\, \mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t} \Big(g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\Big)\, \mathrm{d}\tau \right\| \\ &= \left\| x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\Big)\, \mathrm{d}\tau \right\|\end{aligned}$$

Minoriamo ora con la proprietà 3 da Definizione 1.23 (Norma)

$$\leq \|x_0 - y_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big)\Big)\, \mathrm{d}\tau \right\|$$

Minoriamo ulteriormente come da Esercizio 22.8

$$\leq \|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) - g\big(\tau, \psi(\tau)\big) \right\|\, \mathrm{d}\tau \right|$$

Sommo e sottraggo nell'integrale la quantità $f\big(\tau,\psi(\tau)\big)$ (Si sarebbe potuto fare lo stesso con g)

$$\begin{aligned}
&= \|x_0 - y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau,\varphi(\tau)\big) + f\big(\tau,\psi(\tau)\big) - f\big(\tau,\psi(\tau)\big) - g\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| \\
&\le \|x_0 - y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau,\varphi(\tau)\big) - f\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \left|\int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau,\psi(\tau)\big) - g\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right|
\end{aligned}$$

Possiamo minorare l'argomento del secondo integrale con il $\sup\limits_{I\times A} \|f(t,x) - g(t,x)\|$, dunque può anche essere estratto in quanto sup è costante

$$\begin{aligned}
&\le \|x_0 - y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau,\varphi(\tau)\big) - f\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \left|\sup_{I\times A} \|f(t,\psi(\tau)) - g(t,\psi(\tau))\| \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\right| \\
&= \|x_0 - y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau,\varphi(\tau)\big) - f\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \left|\sup_{I\times A} \|f(t,\psi(\tau)) - g(t,\psi(\tau))\| \, (t - t_0)\right|
\end{aligned}$$

Essendo sicuramente $t - t_0 \le \delta$ per definizione di quest'ultimo, minoriamo ulteriormente

$$\begin{aligned}
&\le \|x_0 - y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau,\varphi(\tau)\big) - f\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \left|\sup_{I\times A} \|f(t,\psi(\tau)) - g(t,\psi(\tau))\| \, \delta\right|
\end{aligned}$$

Ricordando la Osservazione 19.20, sappiamo che $\|f - g\|_{\mathbf{C^0}} = \sup\limits_{I\times A} \|f(t,x) - g(t,x)\|$, dunque passiamo alla distanza su $\mathbf{C^0}$ e togliamo il valore assoluto, in quanto tutti i valori in esso contenuti sono positivi per definizione

$$\begin{aligned}
&= \|x_0 - y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} \left\| f\big(\tau,\varphi(\tau)\big) - f\big(\tau,\psi(\tau)\big)\right\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \delta \, \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}
\end{aligned}$$

Sia quindi L costante di Lipshitz di f su $J \times \big(\varphi(J) \cup \psi(J)\big)$, possiamo minorare con

$$\begin{aligned}
&\le \|x_0 - y_0\| + \\
&\quad \left|\int_{t_0}^{t} L \, \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau\right| + \delta \, \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}
\end{aligned}$$

Imponendo ora $t \ge t_0$ (ma procedimento analogo nel caso opposto), si può applicare il Lemma 22.11 (Lemma di Gronwall) all'ultimo integrale rimasto con:

- $k(\tau) = L$
- $\delta(\tau) = \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\|$
- $\delta_0 = \|x_0 - y_0\| + \delta \, \|f - g\|_{\mathbf{C^0}}$ (tutti gli altri addendi)

- $a = t_0$

Si ottiene in questo modo, riprendendo il primo elemento del treno di disuguaglianze

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}})e^{\int_{t_0}^{t} L \,\mathrm{d}\tau}$$
$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}})e^{L(t-t_0)}$$

Inseriamo ora il valore assoluto all'esponente per tener in considerazione anche il caso in cui $t \leq t_0$

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{\mathbf{C^0}})e^{L|t-t_0|}$$

□

ESEMPIO: DECADIMENTO RADIOATTIVO
Il decadimento di una sostanza radioattiva è ben descritto da $x' = -k \cdot x$ dove x è la quantità di sostanza radioattiva non ancora decaduta e k è una costante propria di ogni singolo materiale
....
ESEMPIO: LEGGE DEL CALORE DI NEWTON
......
ESEMPIO: CRESCITA LOGISTICA
......

23 Teoria Globale

Proposizione 23.1
Siano (X, d_x) e (Y, d_y) spazi metrici, sia $f : A \subseteq X \to Y$. Se f è uniformemente continua su A allora $\exists! \overline{f} : \overline{A} \to Y$ t.c. $\overline{f}_{|A} = f$. cioè f può essere estesa in modo unico alla chiusura dell'insieme A.

Definizione 23.2
Una funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con I intervallo in R si dice sub lineare se esistono due costanti positive A e B t.c.: $\forall t \in I$

$$\|f(t, x)\| \leq A + B\|x\|$$

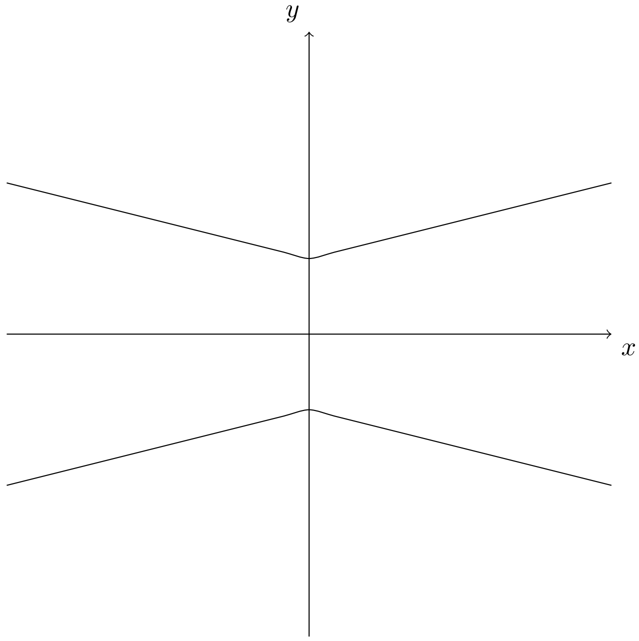
ESEMPIO:: $f(t, x) = x^2$ NON SUBLINEARE
ESEMPIO:: $f(t, x) = sin(x^2)$ SUBLINEARE

Osservazione 23.3
Sia $f(t, x)$ globalmente Lipshitziana in x uniformemente in t allora f sublineare.

$$\exists L \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, t \in I, \|f(t, 0)\| \leq A$$

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$$
$$\|f(t, x)\| \leq \|f(t, x_0)\| + \|f(t, x) - f(t, 0)\| \leq A + L\|x\|$$

In sostanza una funzione è sublineare se esiste una retta tale per cui il grafico della funzione è tutto nella regione di piano delimitata da questa retta.



ESEMPIO::$x \cdot sin(x)$ SUBLINEARE
ESEMPIO::$x^2 \cdot sin(x)$ NO SUBLINEARE
ESEMPIO::e^x NO SUBLINEARE
Diciamo sublineare se il grafico non si impenna.

Proposizione 23.4
Data la funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se:

1. *$I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, con $t_0 \in \mathring{R}^n$*
2. *$f \in \mathbf{C^0}(I \times \mathbb{R}^n; R^n)$*
3. *f è localmente Lipschitziana in $x \in \mathbb{R}^n$ uniformemente rispetto $t \in I$*
4. *f è sublineare*

allora il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ ammette un'unica soluzione definita sull'intervallo I.

Dimostrazione. DISEGNO...
Il Teorema 22.7 (Teorema di Cauchy Locale - Prima Parte)) assicura che la soluzione esiste unica su un intervallo centrato all'istante iniziale. Bisogna dimostrare che la soluzione può essere estesa a tutto l'intervallo. Questo non si può fare in due casi:

1. c'è un asintoto verticale
2. oscilla tanto che a un certo punto non va più avanti

Quindi i casi in cui la soluzione non si può estendere su tutto l'intervallo sono quelli in cui non esiste il limite della soluzione. Quindi dobbiamo evitare tali comportamenti.
Ragionamento da t_0 in avanti.

Sia $T = sum\left\{t \in I : \exists soluzionesu\left[t_0, t\right[\right\}$ cioè prendo l'estremo superiore dei tempi per cui c'è una soluzione. Se $T = supI$ o $T = +\infty$ abbiamo la tesi.
Se T finito con $T < supI$, dimostrando che la derivata della soluzione è limitata si escludono i casi in cui l'estensione della soluzione non si può fare. quindi bisogna mostrare $x' = f(t, x)$ è limitata sull'insieme dove può arrivare la x
Sia ora φ soluzione del problema di Cauchy:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

Valuto allora
$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| = \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau$ poiché $t \in [t_0, T[$
$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (A + B\,\|\varphi(\tau)\|)\,\mathrm{d}\tau$ poiché f è sublineare.
$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + A(T - t_0) + \int_{t_0}^{t} B\,\|\varphi(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau$
...
applico il Gronwall e risulta che

$$\|\varphi(t)\| \leq (\|x_0\| + A(t - t_0))\, e^{B(t-t_0)} \leq (\|x_0\| + A(t - t_0))\, e^{B(T-t_0)}$$

Abbiamo quindi dimostrato che la f resta limitata.
Posso guardare alla funzione come segue:

$$\sup\left\{f(t, x) : t \in [t_0, T[\,, x \in \overline{B\left(x_0, [\|x_0\|\, A\,(T - t_0)]\, e^{B(T-t_0)}\right)}\right\}$$

$\overline{B\left(x_0, [\|x_0\|\, A\,(T - t_0)]\, e^{B(T-t_0)}\right)}$ è un insieme compatto poiché chiuso e limitato in R^n, φ è limitata, la f limitata, allora φ' limitata allora φ lipshitziana allora φ uniformemente continua.
Allora esiste finito $\lim\limits_{t \to T^-} \varphi(t) = X$. Ora possono verificarsi due casi:

1. Se $T = \sup I \Rightarrow$ dimostrazione conclusa
2. Se $T < \sup I \Rightarrow$ posso considerare il problema di Cauchy
$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(T) = X \end{cases}$ Questo è un assurdo poiché arriveremmo a trovare una soluzione definita oltre il tempo T. Questo nega la scelta fatta a inizio dimostrazione.

□

24 Equazioni Autonome

Definizione 24.1
Un'equazione differenziale ordinaria in forma normale si dice autonoma sse la variabile indipendente (solitamente il tempo) non vi compare esplicitamente.

Osservazione 24.2
Tipicamente, le equazioni differenziali ordinarie autonome modellizzano sistemi isolati.

Osservazione 24.3
Invarianza per traslazione temporale.
Non è importante ai fini dello studio dell'equazione l'istante iniziale, ma solo la lunghezza dell'intervallo. Se $x = \varphi(t)$ risolve $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Allora $x = \varphi(t + t_0)$ *risolve* $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Dimostrazione. Sia $\psi(t) = \varphi(t_0 + t)$
$\psi'(t) = \phi'(t_0 + t) = f(\varphi(t_0 + t)) = f(\psi(t))$
$\psi(0) = \varphi(t_0) = x_0$ □

Proposizione 24.4
Teorema dell'energia cinetica
Un punto materiale non vincolato P di massa m si muove sotto l'azione di una forza F che dipende solo dalla posizione di P. Allora la variazione di energia cinetica di P è uguale al lavoro compiuto su P da questa forza.

Dimostrazione. sia $\underline{x} = (x, y, z)$ la terna delle coordinate di P. Per il Secondo Principio della Dinamica e per quanto assunto sulla forza F, il moto di P è descritto dall'equazione(vettoriale) differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$m\underline{x''} = F(\underline{x})$$

$$m\underline{x''} \cdot \underline{x'} = F(\underline{x})\underline{x'}$$

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{\mathrm{d}t}\left((\underline{x'})^2\right) = F(\underline{x})\underline{x'}$$

$$\int_0^t \frac{1}{2}m\frac{d}{\mathrm{d}t}\left((\underline{x'}(\tau))^2\right) \mathrm{d}\tau = \int_0^t F(\underline{x}(\tau)) \cdot \underline{x'(\tau)}\, \mathrm{d}\tau$$

$$\frac{1}{2}m\left(x'(t)\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(x'(0)\right)^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} F(\xi)d\xi$$

L'ultimo integrale è calcolato lungo la traiettoria di P. □

ESEMPIO:: Il Lancio di un Paracadutista
.....
.....
.....
ESEMPIO:: CADUTA IN UN LIQUIDO
.....
.....
.....

25 Equazioni Differenziali Lineari

Definizione 25.1
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $n \in N$. Date le $n + 1$ funzioni $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{C}$ si dice equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n, l'equazione differenziale:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t)x = f(t)$$

Se $f \equiv 0$ l'equazione si dice omogenea.

Proposizione 25.2
sia I un intervallo compatto e tale che $\mathring{I} \neq \emptyset$ siano $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f \in \mathbf{C^0}(I;\mathbb{C})$. Allora $\forall t_0 \in \mathring{I}$ e $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} []x^{(n)} = -\sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \\ x(t_0) = c_0 \\ x(t_2) = c_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1} \end{cases}$$

ammette soluzione unica definita su tutto l'intervallo I.

Dimostrazione. Un'equazione differenziale lineare di ordine n può essere trasformato in un sistema di equazioni al primo ordine. Introduciamo la variabile $X \in \mathbf{C^n}$ ed il dato iniziale $C \in \mathbf{C^n}$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \dots \\ x^{(n-1)} \\ x^{(n)} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

il problema di Cauchy per l'equazione lineare diventa:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \dots \\ X_{n-1}' \\ X_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \\ -\sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} X(t_0) = C \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} F : I \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ (t, X) & \to & \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \\ -\sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} \end{array}$$

La funzione F è lineare in X e globalmente lipshitziana in X uniformemente in t, infatti per ogni $X, Y \in \mathbb{C}^n$

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq \sqrt{1 + \left(\max_k \sup_I \|a_k\|\right)^2} \cdot \|X - Y\|$$

Sono soddisfatte le ipotesi di Cauchy Globale allora si ha la tesi. □

Osservazione 25.3
La locuzione lineare è giustificata dalla proposizione seguente.

Proposizione 25.4
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $n \in \mathbb{N}$. Date le $n+1$ funzioni $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{C}$,l'operatore

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbf{C^n}(I;\mathbb{C}) & \to & \mathbf{C^0}(I;\mathbb{C}) \\ x & \to & x^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} \end{array}$$

è lineare

Dimostrazione. La linearità di L equivale a:

$$\begin{array}{rcl} L(x_1+x_2)=L(x_1)+L(x_2) & & \forall x_1,x_2\in \mathbf{C^n}(I;\mathbb{C}) \\ L(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot L(x) & & \forall\lambda\in\mathbb{C},\forall x\in \mathbf{C^n}(I;\mathbb{C}) \end{array}$$

Entrambe le condizioni seguono dalle regole di derivazione. □

26 Equazioni Lineari a Coefficienti Costanti

Definizione 26.1
Dati i coefficienti $a_0,a_1,\dots,a_{n-1},b\in\mathbb{C}$, si dice equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n a coefficienti costanti l'equazione differenziale

$$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_1x'+a_0x=b$$

se $b=0$ l'equazione si dice omogenea. La sua Equazione caratteristica è l'equazione algebrica

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n+1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0$$

Osservazione 26.2
Nella risoluzione di equazioni differenziali lineari la funzione esponenziale $t\to e^{\lambda t}$ riveste un ruolo molto particolare. Questa funzione è un autovalore dell'operatore di derivazione D relativo all'autovalore, risolve infatti λ:$Dx=\lambda\cdot x$

Proposizione 26.3
Data l'equazione

$$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_1x'+a_0x=b$$

$x(t)=e^{\lambda t}$ risolve l'equazione omogenea $\Leftrightarrow$ λ è soluzione dell'equazione caratteristica.

LEMMA:: Sia $x(t)=t\cdot e^{\lambda\cdot t}$. Allora , per ogni $n\in\mathbb{N},n\geq 1$

$$x^{(n)}(t)=\left(\lambda^n t+n\lambda^{n-1}\right)e^{\lambda t}$$

???????????????NON L?HO CAPITA BENE.......................

Proposizione 26.4
Data l'equazione

$$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_1x'+a_0x=b$$

$x(t)=te^{\lambda t}$ risolve l'equazione omogenea $\Leftrightarrow$ λ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità almeno ??????????.

27 Esempi

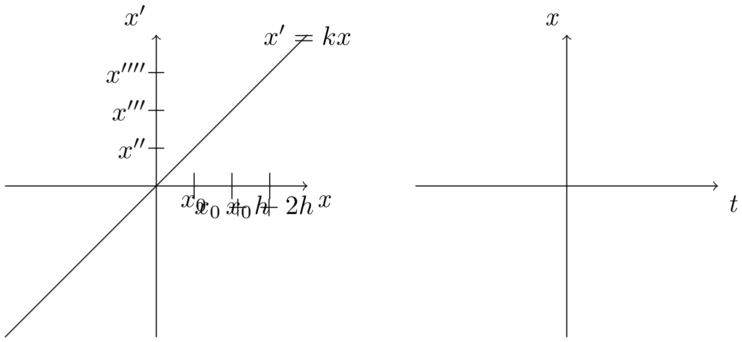
27.1 La Legge di Malthus

Una popolazione, dotata di tutto il necessario per vivere e riprodursi, cresce secondo la legge di Malthus: la velocità di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

$$x'=k\cdot x$$

dove x è il numero di membri della popolazione e k è una costante positiva legata alla prolificità della specie in esame, generalmente calcolata come differenza tra i tassi di natalità e di mortalità. Il problema di Cauchy è quindi

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}, k > 0 \text{ e } x_0 = 0$$



blablabla ....
....
Limiti di questo modello:

- *la variabile x dovrebbe variare in $\mathbb{N}$, poiché una popolazione ha un numero intero di elementi.*
- *In molte specie è verosimile che il numero di nati al tempo t dipenda dalla popolazione presente ad un tempo precedente $x(t-T), T > 0$*
- *Supporre che una popolazione abbia per sempre a disposizione risorse sufficienti può non essere realistico*
- *Questo modello va bene quando si considerano intervalli di tempo molto lunghi.*

Parte VI

Calcolo delle Variazioni

Parte VII

Chapter

28 Preliminari

Il calcolo delle variazioni si occupa dell'ottimizzazione di funzioni $F : X \to \mathbb{R}$, dove X è un insieme di funzioni.
In questo capitolo varranno considerati univocamente funzionali integrali del tipo

$$\begin{array}{rcl} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,\mathrm{d}t \end{array}$$

eventualmente soggetti a vincoli sui valori $x(a)$ e $x(b)$ o sul valore di un integrale del tipo $\int_a^b \varphi(x(t))\,\mathrm{d}t$.
Dove:

$$f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$X = \left\{ x \in \mathbf{C^1}([a,b]); \mathbb{R}^n \text{ t.c.: } x(a) = x_a, x(b) = x_b \right\}, \text{ con } x_a, x_b \in \mathbb{R}^n$$

Proposizione 28.1
Sia $f \in \mathbf{C^1}(A \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ con $a \subseteq \mathbb{R}^n$
Se $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ *Allora:*

$$F \in \mathbf{C^1}$$

$$\partial_\alpha F(\alpha, \beta, x) = -f(x, \alpha)$$

$$\partial_\beta F(\alpha, \beta, x) = f(x, \beta)$$

$$\nabla_x F(\alpha, \beta, x) = \int_\alpha^\beta \nabla_x f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Definizione 28.2
??????????????? R OPPURE RN
Sia $I \in \mathbb{R}$ un intervallo. Curva su I $\mathbb{R} \rightleftharpoons$ una funzione $\gamma : I \subseteq \mathbb{R}^n$ che sia continua.

Osservazione 28.3
$\gamma(I)$ si chiama supporto della curva,ed 1'e certamente connesso.(una funzione continua manda intervalli connessi in connessi)

Definizione 28.4
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva, lunghezza della curva $\rightleftharpoons l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : N \in \mathbb{N}\, N > 1, t_0 = a, t_N = b, \right.$
cioè prendo una curva e la approssimo con una spezzata, la più lunga di tutte le poligonali è la lunghezza della curva.
DISEGNO
DISEGNO

Definizione 28.5
Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice rettificabile $\rightleftharpoons f(\gamma) < +\infty$

Osservazione 28.6

$$\sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

per il teorema del valore medio differenziale(accrescimenti finiti)

$$\sum_{i=1}^{N} \|\gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})\| = ??$$

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Proposizione 28.7
Se $\gamma \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R}^n) \Rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$

Osservazione 28.8
Se γ è la traiettoria di un punto materiale,allora $\|\gamma\|$ è la norma della velocità istantanea, e quindi $l(\gamma)$ è lo spazio che si percorre, cioè l'integrale della velocità valutato tra $t??????t_i$ due istanti di tempo entro i quali si mantiene tale velocità.

Osservazione 28.9
Nel caso specifico sarà:

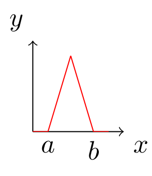
$$X = \left\{x \in \mathbf{C^1}([a,b]\,;\mathbb{R}2) : x(a) = A, x(b) = B\right\}$$

$$\begin{array}{ccc} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b \|x'(t)\| \, \mathrm{d}t \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t,x,x') & \to & \|x'(t)\| \end{array}$$

29 L'Equazione di Eulero

LEMMA:::LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI
Sia $f \in \mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ *t.c.:* $\forall v \in \mathbf{C^0}([0,1]\,;\mathbb{R})$ *con* $v(0) = v(1) = 0$ *si abbia* $\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = 0$
Allora $f(x) \equiv 0 \forall x \in [0,1]$



Dimostrazione.
Per Assurdo, se $f \not\equiv 0$, allora $\exists\,[0,1]$ t.c. $f(x_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 0$ allora $\exists \overline{x}_0 \in\,]0,1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 1$ allora $\exists \overline{x}_0 \in\,]0,1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$
Entrambe le osservazioni per la continuità di f, significa che se x_0 è un punto in cui la $f > 0$ allora per la continuità della funzione anche li vicino si hanno valori maggiori di zero.
Quindi si può pensare $x_0 \in\,]0,1[$.

Allora $\exists a, b \in]0, 1[$ t.c. $x_0 \in]a, b[$ e$\forall x \in]a, b[$ vale che $|f(x)| \geq |f(x_0)|$ sempre per la continuità di f.
Pensiamo $f(x_0) > 0$ in questo modo $|f(x_0)| = f(x_0)$ e scegliamo la funzione $v(x)$ come disegnata:

$$v(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 - \delta \\ \frac{x}{\delta} - \frac{x_0 - \delta}{\delta} & x_0 - \delta < x < x_0 \\ 1 & x = x_0 \\ -\frac{x}{\delta} + \frac{x_0 + \delta}{\delta} & x_0 < x < x_0 + \delta \\ 0 & x \geq x_0 + \delta \end{cases}$$

POSSIBILIPLAUSIBILIERRORI

Se calcoliamo

$$\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}f(x_0)\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x_0)\frac{b-a}{2} > 0$$

Se avessi preso $f(x_0) < 0$ prendo $v = -v$ e il resto segue... □

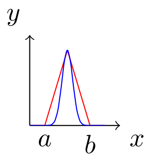
Osservazione 29.1
Questo lemma è concettualmente analogo al Teorema di Fermat nel capitolo delle derivate.

Corollario 29.2
LEMMA CASO VETTORIALE.
Sia $f \in \mathbf{C^0}([a, b]\,; \mathbb{R}^n)$ *tale che* $\forall v \in \mathbf{C^0}([a, b]\,; \mathbb{R}^n)$ *con* $v(0) = v(1) = 0$ *si abbia* $\int_0^1 f(x) \bullet v(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *allora* $f(x) \equiv 0\ \forall x \in [0, 1]$.

Dimostrazione. Per questa dimostrazione si osservano componente per componente.
$\forall i = 1, 2, \ldots, n$ scelgo $v_j(x) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ v_i(x) & j = i \end{cases}$
A questo punto applico il lemma fondamentale alla componente i-esima f_i di f. □

Corollario 29.3
Sia $f \in \mathbf{C^0}([a, b]\,; \mathbb{R})$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall v \in \mathbf{C^k}([a, b]\,; \mathbb{R}^n)$ *con* $v(0) = v(1) = 0$ *si abbia* $\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *allora* $f(x) \equiv 0\ \forall x \in [0, 1]$.

Dimostrazione.



É sempre lo stesso lemma con l'aggiunta che la funzione v sia di classe $\mathbf{C^k}$.
Se si chiama u la funzione blu e v la funzione rossa abbiamo:

$$\int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

Se v è un po più regolare , prendiamo $v = u^{(}k + 1)(x)$. cioè se vogliamo $v \in \mathbf{C^k}$ prendiamo.....
LA DINMOSTRAZIONE E A ME INCOMPRENSIBILE. □

Teorema 29.4
EQUAZIONE DI EULERO.
Sia $f \in \mathbf{C^2}\left([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}\right)$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a < b$.
Sia $X = \left\{x \in \mathbf{C^2}\left([a, b]\,; \mathbb{R}^n\right) : x(a) = A, x(b) = B\right\}$ *con* $A, B \in \mathbb{R}^n$.
Sia $\begin{array}{ccc} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,\mathrm{d}t \end{array}$.

Se la funzione $x_* \in X$ *è t.c.* $F(x_*) = \max\{F(x) : x \in X\}$ *[o min]*
Allora $\partial_x f(t, x_*(t), x_*'(t)) - \frac{d}{\mathrm{d}t}\partial_{x'} f(t, x_*(t), x_*'(t)) = 0$.
Questa ultima equzione è l'equazione di Eulero-Lagrange del Funzionale F *o a volte detta variazione prima del funzionale* F*. è un sistema di* n *equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine nella funzione incognita* x_**.*

Dimostrazione. Sia $\varphi(h) = F(x_* + hv)$, dove $x_* \in X$ e $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
L'equazione di Eulero-Lagrange in apparenza complicata è analoga ad un equazione di analisi1 del tipo $f' = 0$ oppure in analisi due a $\nabla f = 0$. solo che ora sono cavoli amari.
Come si sceglie la variazione v in modo che $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
X è l'insieme delle funzioni di $\mathbf{C^2}$, si sa che $x_* \in \mathbf{C^2}$, una scelta opportuna di v è $v \in \mathbf{C^2}(]a,b[\,;\mathbb{R}^n)$.
Inotre deve essere che $x_*(a)+hv(a) = A$ e $x_*(b)+hv(b) = B$ per restare dentro l'insieme X. Quindi $v(a) = v(b) = 0$. h è uno scalare e per ipotesi si sa che $F(x_*)$ è punto di massimo, quindi si conclude che $h = 0$ è punto di massimo per la funzione φ.
.... □

e qui finiscono gli appunti almeno per conto mio.

Parte VIII

Temi Esame

Capitolo 6

T.E. 2012/2013 scritto n.1

30 Esercizio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da* $f(x,y) = e^{-\left|4 \cdot arctan(x \cdot y^2)\right|}$

A *Nessuna delle altre affermazioni è esatta*

B f *ammette almeno un punto di minimo assoluto*

C $\inf_R^2 f = 0$

D f *ha infiniti punti di massimo*

L'esponensiale è una funzione monotona crescente quindi la ricerca di massimi a minimi si sposta alla ricerca dei massimi e minimi dell'esponente.
L'esponente assume sempre valori negativi. Inotre risulta essere una quantità limitata tra $[0; 4\frac{\pi}{0}[$, *quindi* $\sup_R^2 f = e^0 = 1$ *e* $\inf_R^2 f = e^{-2\pi}$
Sono quindi punti di massimo tutti i punti che rendono nullo l'esponente: $arctan(xy^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \forall y or y = 0, \forall x$ *che sono i due assi. Essendo questi punti del dominio allora si può dire* $\sup_R^2 f = \max_R^2 f = 0$
I punti di minimo si hanno per $\left|arctan(xy^2)\right| = \frac{\pi}{2}$ *quindi per* $x \to \pm\infty$ *or* $y \to \pm\infty$ *essendo questi valori al limite il valore* $e^{-2\pi}$ *è* inf *per* f
La risposta vera è quindi la D.

31 Esercizio

Sia (X, d) *uno spazio metrico e siano* A, B *sottoinsiemi di* X*. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?*

1 $A \subseteq B \Rightarrow \partial A \subseteq \partial B$

2 $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

A *Entrambe*

B *Solo la seconda*

C *Nessuna delle affermazioni è esatta*

D *Solo la prima*

La prima affermazione è certamente falsa poiché se scelto come spazio metrico R^2 *con distanza quella eclidea. Scelgo* $A = B((0,0),2), A = B((0,0),1)$ *allora si ha che* $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) = 2\}$ *e* $\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) = 1\}$ *e questi due insiemi sono disgiunti. la seconda è vera ma devo pensarci un po...*