Appunti di Analisi 2

Mauro Conte

Agosto 2017

Indice

Parte I

Spazi Metrici

Capitolo 1

Spazi Metrici

1.1 Preliminari

Definizione 1. *Si dice spazio metrico un insieme X non vuoto in cui sia definita una distanza(metrica), vale a dire una funzione $d : X \times X \to R$ con le proprieta:*

1. $d(x, y) >= 0 \ \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$ *simmetria*
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, y, z \in X$ *disugualianza triangolare*

Esempio 1.

$$X = \mathbb{R}^2, \quad d((x_1, y_1), (X_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$$

si dimostra che la funzione cosí definita é una distanza:

1. $d(x_1, x_2) \geq 0$, *é verificata poiché l'argomento della radice é sempre positivo o al piú nullo essendo una somma di quadrati, e la radice mantiene le quantitá poisitive.*
2. $d((X_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0$
   $\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 - x_1)^2 = 0 \\ (y_2 - y_1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
3. *invertendo le prime componenti con le seconde, il quadrato non camibia quindi la simmetria é rispettata*
4. *DISEGNO TRIANGOLO VETTORI.....*

Esempio 2.

$$X = \mathbb{R}, \quad d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$$

Le proprietá 1,2,3 sono soddisfatte per le proprietá del modulo.
La proprietá 4 si puó dimostrare: $d(x_1, x_3) = |x_3 - x_1| \leq |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| = d(x_3, x_2) + d(x_2, x_1)$

Esempio 3.

$$X = \mathbb{R}^3 \quad d(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$$

Analogo al primo esempio

Esempio 4.

$$X = \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i - x_i{}^2}$$

Analogo al primo esempio

Esempio 5.

$$X = C^0([a, b], \mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

$$d_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$$

1. *X contiene infiniti elementi(funzioni)*
2. *d_∞ é detta distanza uniforme o distanza della convergenza infinita o distanza della convergenza uniforme*
3. *DISEGNO*

Si verificano le 4 proprietá di distanza:

1. *Se* $\sup = \infty$ *non va bene poiché l'insieme di arrivo é $\mathbb{R}$, applicando il Thm. di Weierstrass, una funzione continua definita su un intervallo $[a, b]$ ammette massimo e minimo e quindi anche il* sup
2. *se e solo se hanno lo stesso dominio e per ogni punto di esso entrambe le funzioni hanno la stessa immagine*
3. $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f - g| = \sup_{x \in [a,b]} |f - g| = d_\infty(g, f)$
4. $|h(x) - f(x)| \le |h(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$*, applicando il sup la disugualianza resta vera*

Osservazione 1. *Tutto qesto é valido finché $[a, b]$ chiuso e limitato altrimenti non vale piú Weierstrass*

UN CONYTROESEMPIO

Esempio 6. *ferrovia*

Esempio 7. *Metrica Discreta $X \neq \emptyset$,* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 0 & 1 \neq y \end{cases}$

1. *$d(x, y) \ge 0$ per definizione*
2. *$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, per definizione (ragiona sul sse)*

3. $d(x, y) = d(y, x)$ *...per definizione (fai due casi x=y e l'altro)*

4. $d(x, y) \leq d(y - z) + d(z - x)$

Esempio 8.

$$X = \mathbb{R}^2$$

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

$$d^{'}(x, y) = |x_1 - y - 1| + |x_2 - y - 2|$$

...

Esempio 9.

Esempio 10.

$$X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$$

$$d_2 = \int_0^1 |g(x) - f(x)| \, d(x)$$

Esempio 11.

$$X = C^0([a, b], \mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

$$d_2 = \sqrt{\int_a^b [g(x) - f(x)]^2 \, d(x)}$$

Proposizione 1. *Sia* (X, d) *s.m. e* $A \subseteq X$ *e* $A \neq \emptyset$*, sia* $\begin{array}{rcl} d_{|A} : A \times A & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & d(x, y) \end{array} \Rightarrow$ $(A, d_{|A})$ *é uno spazio metrico*

Dimostrazione. .... □

Definizione 2. *Un insieme é finito se il numero dei suoi elementi é finito*

Definizione 3. *Un insieme é infinito se non é finito*

Definizione 4. *Sia* (X, d)*s.m.,* $A \subseteq X$*,* $A \neq \emptyset$ *si definisce diametro di A:*

$$diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$$

Definizione 5. *A é limitato* $\leftrightharpoons$ *diam(A) é finito (*$\in \mathbb{R}$*)*

Definizione 6. *A é illimitato* $\leftrightharpoons$ *diam(A) é infinito (*$= \infty$*)*

Esempio 12. ...
...
...
..
....

Osservazione 2. *Ogni insieme finito é limitato e ogni insieme illimitato é infinito. Non valvono i viceversa.*

Esempio 13. .....
....
.....
......
.....
....

Definizione 7. *X é uno spazio (vettoriale) normato sul campo $\mathbb{K}$ se:*

- *X é uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$*
- *se é definita una norma su X, ovvero una funzione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietá:*

  1. $\forall x \in X, \quad \|x\| \geq 0$
  2. $\forall x \in X, \quad \|(\| x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  3. $\forall x, y \in X, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
  4. $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Esempio 14.

$$X = \mathbb{R} \quad \|x\| = |x|$$

Esempio 15.

$$X = \mathbb{R}^2 \quad \left\| \begin{bmatrix} x \\ y+ \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Esempio 16.

$$X = \mathbb{R}^n \quad x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

Esempio 17.

$$X = \mathbb{C} \quad \|x\| = |x|$$

Esempio 18.

$$X = C^0([a, b], R) \quad \|f\| \sup_{x \in [a,b]} |f|$$

Proposizione 2. *Sia X uni spazio normato allora (X, d) é uno spazio metrico con* $\begin{array}{rcl} d : X \times X & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \to & \|(\| x_1 - x_2) \end{array}$
Inoltre per la distanza cosí definita valgono le seguenti proprietá:

1. *INVARIANZA PER TRASLAZIONI*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X \quad d(x_1, x_2) = d(x_1 + x_3, x_2 + x_3)$$

2. *POSITIVAMENTE OMOGENEA*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathbb{R} \quad d(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda| d(x_1, x_2)$$

Dimostrazione. Per dimostrare che é uno spazio metrico si dimostra che valgono le proprietá di distanza

1.
2.
3.
4.

$\square$

Definizione 8. *Sia* (X, d) *spazio metrico e siano* $x_0 \in X$ *e* $r \in \diagdown$*. Si dice sfera aperta di centro* x_0 *e raggio* r *l'insieme:*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, y) < r\}$$

Osservazione 3. *se* $r = 0 \Rightarrow B(x_0, r) = \emptyset$
se $r > 0 \Rightarrow x_0 \in B(x_0, r)$

Esempio 19. *In* $\mathbb{R}$ *con* d_E*,* $B(x_0, r)$ *é un intervallo simmetrico centrato in* x_0

Esempio 20. *In* $\mathbb{R}^2$ *con* d_E*,* $B(x_0, r)$ *é una un cerchio con centro in* x_0

Esempio 21. *In* $\mathbb{R}^3$ *con* d_E*,* $B(x_0, r)$ *é una sfera con centro in* x_0

Esempio 22.

Esempio 23.

Definizione 9. *Siano* (X, d_1) *e* (X, d_2) *spazi metrici.* d_1 *e* d_2 *sono equivalenti* $\leftrightharpoons \exists c, C \in \mathbb{R}, c_1 > 0, c_2 > 0$ *t.c:*

$$\forall x, y \in X \quad cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y)$$

1.2 ...

1.3 Limiti e Continuitá

Definizione 10. *Siano* (X, d_x) *e* (Y, d_y) *spazi metrici,* $A \subseteq X$*,*x_0 *di accumulazione per* A*,* $f : A \to Y$ *una funzione e* $l \in Y$
$\lim_{x} \to x_0 = l \rightleftharpoons \forall \epsilon, \exists \delta : \forall x \in A : d_x(x, x_0) < \delta e x \neq x_0 : d_y(f(x), l) < \epsilon$

Proposizione 3. *Siano* (X, d_x) *e* (Y, d_y) *spazi metrici,* $A \subseteq X$*,*x_0 *di accumulazione per* A*,* $f : A \to Y$ *una funzione e* $l^{'} \in Y$*,*$l^{''} \in Y$

1.4 Il Teorema delle Contrazioni

Definizione 11. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Si dice contrazione una funzione $T : X \to X$ soddisfacente a:*

$$\exists K \in [0, 1[\text{ tale che } \forall x^{'}, x^{''} \in X \text{ vale } d(Tx^{''}, Tx^{'}) \leq Kd(x^{''}, x^{'}).$$

Una contrazione é quindi una funzione con insieme di partenza e di arrivo coincidenti e Lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1. E generalmente inutile considerare contrazioni definite tra spazi diversi. Data una funzione $T : X \to Y$ Lipschitziana, é sempre possibile riscalare la distanza in uno dei due spazi X o Y per ottenere una costante di Lipschitz minore di 1.
ESEMPI:

1. *$f : R \to R$ data da $f(x) = \frac{x}{2}$. f é una contrazione.*
2. *$f : [0, 2] \to [0, 2]$ data da $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$.f é una contrazione*
3. *$f : R^2 \to R^2$ datat da $f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ é una contrazione*

Proposizione 4. *Sia (X, d) uno spazio metrico, siano $f, g : X \to X$ due contrazioni in $X \Rightarrow f \circ g$ é una contrazione*

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\forall x^{'}, x^{''} \in X, d(fx^{''}, fx^{'}) \leq K_f d(x^{''}, x^{'}).$$
$$\forall x^{'}, x^{''} \in X, d(gx^{''}, gx^{'}) \leq K_g d(x^{''}, x^{'}).$$

$f \circ g = f(g(x))$, quindi presi $x^{'}, x^{''} \in X$ si ha che:

$$d(fg(x^{''}), fg(x^{'})) \leq K_f d(g(x^{''}), g(x^{'})) \leq K_f K_g d(x^{''}, x^{'}).$$

□

Proposizione 5. *Sia $f \in C1(R^n; R^n)$. Se $\exists k \in [0, 1[$ tale che $\forall x \in R^n$ vale $\|Df(x)\| < k$, allora f é una contrazione.*

Teorema 1. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo in cui é definita una contrazione $T : X \to X$. Allora esiste un unico punto fisso di T in X.*

Dimostrazione. Costruisco una successione di elementi di X nel seguente modo:
scelgo $x_0 \in X$,
$x_1 = T(x_0)$
$x_2 = T(x_1)$

...
$x_n = T(x_{n-1})$
La successione $x_n : n \in N$ cosí costruita é una successione di Cauchy. Infatti, presi $n, m \in N$ con $m > n$ si ha:

$$d(x_m, x_n) = d(Tx_{m-1}, x_{n-1}) \leq Kd(x_{m-1}, x_{n-1}) =$$

$$= Kd(x_{m-1}, x_{n-1}) = Kd(Tx_{m-2}, x_{n-2}) \leq K^2 d(x_{m-2}, x_{n-2}) =$$

$$= ... =$$

$$= ... = K^n d(x_{m-n}, x_0) \leq$$

$$\leq K^n \sum_{0}^{m-n+1} (d(x_{m-n-i}, x_{m-n-i-1})) =$$

$$\leq \sum_{0}^{m-n+1} (d(Tx_{m-n-i-1}, Tx_{m-n-i-2}))$$

per ogni termine di questa sommatoria si puó applicare lo stesso ragionamento

$$\leq K^n \sum_{0}^{m-n+1} (K^{m-n-2} d(Tx_0, x_0)) =$$

$$\leq K^n d(Tx_0, x_0) \sum_{0}^{m-n+1} K^{m-n-2} = K^n \frac{1 - K^{m-n-1}}{1-K} d(Tx_0, x_0) \leq \frac{K^n}{1-K} d(Tx_0, x_0)$$

Ho quindi trovato che $d(x_m, x_n) \leq \frac{K^n}{1-K} d(Tx_0, x_0)$
L'ultima espressione ottenuta puó essere resa arbitrariamente piccola (in modulo) pur di prendere n, e quindi anche m, sufficientemente elevato. La completezza di X implica quindi che esiste il limite $\lim_{n \to +\infty} xn$. Sia x^* questo limite. x^* é un punto fisso per T. Infatti, grazie alla continuitá di T:

$$T(x^*) = T \lim_{n \to +\infty} xn$$

$\square$

Parte II

Calcolo Differensiale

Capitolo 2

Calcolo Differensiale

2.1 Preliminari

La base canonica di R^n é indicata con $(e_1, ..., e_i)$, e_i é il vettore di R^n con tutte le componenti nulle tranne la i-esima che vale 1.
Un generico vettore x si puó quindi scrivere come combinazione lineare dei vettori di base $x = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j e_j$.
Nel caso n=2 è usata la notazione $(x, y) = xi + yj$
Nel caso n=3 è usata la notazione $(x, y, z) = xi + yj + zk$
Alcune classi di funzioni $f : A \subseteq R^n \to R^m$ hanno nomi particolari:

- $n = 1$,$m = 1$:f *é una funzione reale di una variabile reale;*
- $n = 1$,$m > 1$:f *é una curva in R^m (purché sia almento continua e definita su un intervallo)*
- $n > 1$,$m = 1$:f *é un campo scalare*
- $n > 1$,$m > 1$:f *é un campo vettoriale*

2.2 Derivate Pardiali e Direzionali

Definizione 12. *sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ e $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, $h, k \in R$ chiamo derivata parziale rispetto a x di f in (x_0, y_0) la quantitá (se esiste finita)*

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

chiamo derivata parziale rispetto a y di f in (x_0, y_0) la quantitá (se esiste finita)

$$\partial_y f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Definizione 13. *sia $f : A \subseteq R^n \to R^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$, $i = 1, ..., n$*

$$\partial_i f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

dove $(e_1, ..., e_n)$ *rappresentano la base canonica di* R^n

Osservazione 4. *nella prima definizione la derivata è un valore reale mentre nella seconda è un vettore di* R^m

Osservazione 5. *le proprietá e le regole di derivazione sono le stesse di Analisi 1*

Definizione 14. *sia* $f : A \subseteq R^2 \to R$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$, *sia* $v \in R^2$*con* $\|v\| = 1$ *ciamo derivata nella direzione* v *della funzione* f *nel punto* (x_0, y_0) *il limite (se esiste finito)*

$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

dove v_1, v_2 *sono le componenti di* $v(v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix})$

Definizione 15. *sia* $f : A \subseteq R^n \to R^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$, *sia* $v \in R^n$*con* $\|v\| = 1$ *ciamo derivata nella direzione* v *della funzione* f *nel punto* x_0 *il limite (se esiste finito)*

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Proposizione 6. *(ANALISI 1): sia* $f : A \subseteq R \to R$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
f *é differenziabile* $\Leftrightarrow \exists m \in R$ *t.c.* $f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h)$ *per* $h \to 0$ ...
...
...

2.3 Derivata Totale

Definizione 16. *sia* $f : A \subseteq R^n \to R^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
f *é differenziabile in* $x_0 \rightleftharpoons \exists M \in Mat(mxn) : f(x_0 + h) = f(x_0) + Mh + o(h)$ *per* $h \to 0$

Definizione 17. *siano* $f, g : A \subseteq R^n \to R^m$ *e* x_0 *di accumulazione per A*
$f = o(g)$ *per* $x \to x_0 \rightleftharpoons \lim_{x -> x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}$

Definizione 18. *sia* $f : A \subseteq R^2 \to R$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$
f *é differenziabile in* $(x_0, y_0) \rightleftharpoons f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0) + m_1 h + m_2 k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$ *per* $(h, k) \to (0, 0)$

Definizione 19. *siano* $f, g :: A \subseteq R^2 \to R$ *e* (x_0, y_0) *di accumulazione per A*
$f = o(g)$ *per* $(x, y) \to (x_0, y_0) \rightleftharpoons \lim_{(x,y) -> (x_0, y_0)} \frac{\|f(x,y)\|}{\|g(x,y)\|}$

Proposizione 7. *(Unicitá della derivata totale) sia* $f : A \subseteq R^n \to R^m$, $x_0 \in \mathring{A}$,
M_1,$M_2 \in Mat(mxn)$
$M1$ *derivata totale di* f *in* x_0,
$M2$ *derivata totale di* f *in* x_0,
allora $M1 = M2$

Dimostrazione. poiche M_1 e M_2 sono derivate totali di f nel punto x_0,
$f(x_0+h) = f(x_0) + M_1 h + o(h)$ per $h \to 0$
$f(x_0+h) = f(x_0) + M_2 h + o(h)$ per $h \to 0$
facendo la differenza membro a membro delle precedenti ottengo che $(M_1 - M_2)h = o(h)$ per $h \to 0$
Scelto $h = te_i$, dove e_i è un vettore della base canonica, si ottiene $(M_1 - M_2)te_i = o(h)$ quindi
$\lim_{t\to 0} \frac{(M_1-M_2)te_i}{t\|e_i\|} = \lim_{t\to 0}(M_1 - M_2)e_i = 0$, poiché e_i é un vettore non nullo deve essere $(M_1 - M_2) = 0$ quindi $M_1 = M_2$

□

Osservazione 6. *L'ultima riga della dimostrazione dice che le applicazioni lineari M_1 e M_2 hanno le stesse immagini sui vettori della base canonica, quindi coincidono.*

Proposizione 8. *sia $f : A \subseteq R^n \to R^m$, $x_0 \in \mathring{A}$*
f é differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ é continua in x_0
DIMOSTRAZIONE

..
..
..
..
..
..

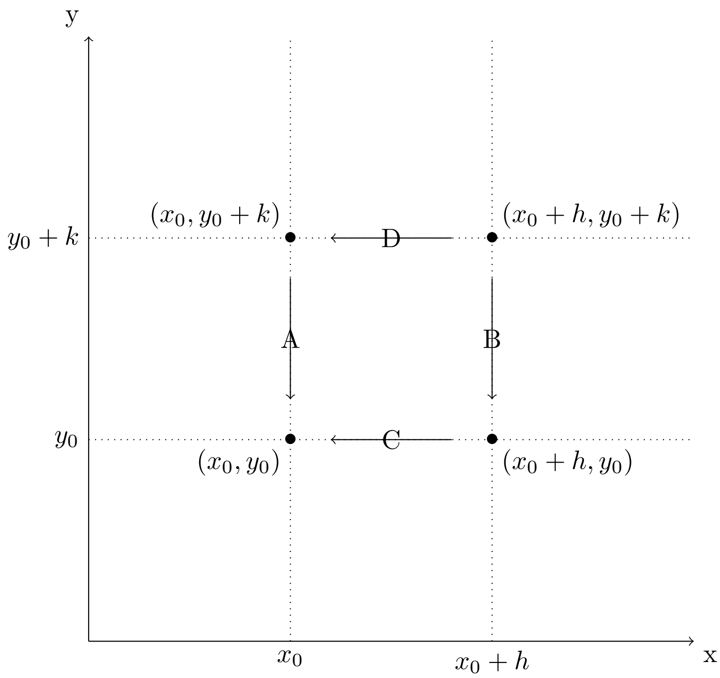
Teorema 2. *Differenziale Totale sia $f : A \subseteq R^n \to R^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$.*
$\exists \partial_i f(x)\ \forall i = 1, ..., n definite \forall x$ in un intorno di x_0
$\partial i f$ é continua in x_0
$\Rightarrow f$ é differenziabile in x_0

Teorema 3. *Differenziale Totale sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ e $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$.*
$\exists \partial_x f(x,y)$ e $\exists \partial_y f(x,y)$ definite $\forall x$ in un intorno di (x_0, y_0)
$\partial_x f(x,y)$ e $\exists \partial_y f(x,y)$ continue in x_0
$\Rightarrow f$ é differenziabile in (x_0, y_0)

Dimostrazione. devo dimostrare che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0 \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix})}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

dove $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0, y, 0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{bmatrix}$



devo calcolare lo scarto della funzione tra i punti (x_0+h, y_0+k) e (x_0, y_0). Ho a disposizione le derivate parziali che mi danno informazioni lungo le parallele agli assi quindi non muovo lungo la diagonale ma lungo i percorsi D,A e B,C
Il limite (¡-) fa zero se il numeratore é zero, allora guardo solo quello.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \partial x f(x_0, y_0)h - \partial y f(x_0, y_0)k$$

riscrivo tale quantitá seguendo il percorso D,A

$$[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)] + [f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)] - \partial x f(x_0, y_0)h - \partial y f(x_0, y_0)k$$

chiamo $\varphi(x) = f(x, y_0)$ quindi $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$
la funzione φ é una funzione reale di una variabile reale ed in virtú del teorema di Lagrange $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi^{'}(x_0 + \beta h)h$ per $\beta \in]0, 1[$, per come definita φ si ha che $\varphi^{'}(x_0 + \beta h)h = \partial_x f(x_0 + \beta h, y_0)h$
con un rangionamento del tutto analogo si puó definire $\Psi(x) = f(x_0 + h, y)$ e si ha che $\Psi(y_0 + h) - \Psi(y_0) = \Psi^{'}(y_0 + \alpha k)k = \partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha k)k$ per $\alpha \in]0, 1[$
Quindi

$$[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)] + [f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)] - \partial x f(x_0, y_0)h - \partial y f(x_0, y_0)k =$$

$$= [\partial_x f(x_0 + \beta h, y_0)h] + [\partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha k)k] - \partial x f(x_0, y_0)h - \partial y f(x_0, y_0)k =$$

$$= [\partial_x f(x_0 + \beta h, y_0)h - \partial x f(x_0, y_0)h] + [\partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha k)k - \partial y f(x_0, y_0)k]$$

Adesso la riscrivo recuperando il denominatore 'e devo verificare che il limite per $(h, k) \to (0, 0)$ tenda a zero.

$$[\partial_x f(x_0+\beta h, y_0) - \partial x f(x_0, y_0)] \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + [\partial_y f(x_0+h, y_0+\alpha k) - \partial y f(x_0, y_0)] \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Le derivate parziali sono continue quindi per $(h, k) \to (0, 0)$ i numeratori tendono a zero
Inoltre le due franzioni per $(h, k) \to (0, 0)$ sono quantità limitate tra -1 e 1 quindi si puó dire che il limite cercato fa 0. $\square$

2.4 Regole di Derivazione

Proposizione 9. *Siano $f, g : A \subseteq R^n \to R^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$*
f differenziabile in x_0, g differenziabile in x_0 allora $f + g$ differenziabile in x_0 e $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$

Dimostrazione. f é differenziabile, allora $f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
anche g lo é, quindi $g(x_0 + h) = g(x_0) + Dg(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
sommando membro a membro si ottiene $(f+g)(x_0+h) = (f+g)(x_0)+[Df(x_0)+Dg(x_0)]h + o(h)$ per $h \to 0$
Questa é la definizione di differenziabilitá, allora $f + g$ é differenziable e $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$ $\square$

Proposizione 10. *Sia $f : A \subseteq R^n \to R^m$ e $x_0 \in \mathring{A}$ e $\lambda \in R$*
f differenziabile in x_0 allora λf differenziabile in x_0 e $D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0)$

Dimostrazione. f é differenziabile, allora $f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
valuto ora $(\lambda f)(x_0 + h) = (\lambda f)(x_0) + \lambda Df(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
Questa é la definizione di differenziabilitá, allora λf é differenziable e $D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0)$ $\square$

Proposizione 11. *Sia $g : A \subseteq R^n \to R^m$ e $x_0 \in \overset{\circ}{A}$*
Sia $f : B \subseteq R^m \to R^p$ e $g(x_0) \in \overset{\circ}{B}$
f differenziabile in $g(x_0)$, g differenziabile in x_0 allora $f \circ g$ differenziabile in x_0 e $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) * Dg(x_0)$

Dimostrazione. g é differenziabile in x_0, allora $g(x_0 + h) = f(x_0) + Dg(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$
f é differenziabile in $g(x_0)$ allora $g(g(x_0) + k) = f(g(x_0)) + Df(g(x_0))k + o(k)$ per $k \to 0$
valuto ora

$$(f \circ g)(x_0 + h) = f(g(x_0 + h) + Dg(x_0)h + o(h)) =$$

$$= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))(Dg(x_0)h + o(h)) + o(Dg(x_0)h + o(h)) =$$

$$= (f \circ g)(x_0) + Df(g(x_0))Dg(x_0)h + Df(g(x_0))o(h) + Dg(x_0)o(h) + o(h)$$

con h un vettore $n \times 1$
con Dg una matrice $m \times n$
con Df una matrice $p \times m$

da rivedere un pochino ....

Questa é la definizione di differenziabilitá, allora $f \circ g$ é differenziable e $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0)$ $\square$

Proposizione 12. *DERIVATA DEL PRODOTTO*

2.5 La Formula degli Accrescimenti Finiti

Definizione 20. *Siano $x_0, x_1 \in R^n$, si dice segmento di estremi x_0 e x_1 l'insieme $S = tx_1 + (1-t)x_0 : t \in [0,1]$*

Proposizione 13. *Formula degli accrescimenti finiti*
Sia $f : A \subseteq R^n \to R^m$, $x_0, x_1 \in \overset{\circ}{A}$, S il segmento di estremi x_0, x_1, sia $f \in C^1(A, R^m)$ allora $\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup\limits_{x\in S} \|Df(x)\| \, \|x_1 - x_0\|$

Osservazione 7. *$\|A\|$ con $A \in Mat(n \times m)$, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1: x\in R^n} \|Ax\| = \sup\limits_{x\in R^n n\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ questa è chiamata norma operativa*
NOTA:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Dimostrazione. sia $F : [0,1] \to R$ che $t \to f(tx_1 + (1-t)x_0)$
La funzione F é una funzione reale di variabile reale , posso quindi applicare il teorema di Lagrange $F(1) - F(0) = F^{'}(\theta)1$ quindi $f(x_1) - f(x_0) = Df(\theta x_1 + (1-\theta)x_0)(x_1 - x_0)$
scelto $v \in R^m$ con $v = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{\|f(x_1)-f(x_0)\|}$ moltiplico entrambi i membri per v si ottiene $v(f(x_1) - f(x_0)) = vDf(\theta x_1 + (1-\theta)x_0)(x_1 - x_0)$
... da finire per bene □

Definizione 21. *Sia $C \in R^n$, C é convesso $\rightleftharpoons \forall x_0, x_1 \in C$ anche $S_(x_0, x_1) = \{tx_1 + (1-t)x_0 : t \in [0,1]\} \subseteq C$ù*

Proposizione 14. *sia $f : A \subseteq R^n \to R^m$, A é aperto connesso e $f \in C^1(A; R^m)$ e $Df = 0$ allora f é costante su A*
..... disegnino e bozza di dimostrazione

Proposizione 15. *sia $f : A \subseteq R^n \to R^m$, A é aperto convesso e $f \in C^1(A; R^m)$ e $Df = 0$ allora f é costante su A*
..... disegnino e bozza di dimostrazione

Proposizione 16. *sia $f : A \subseteq R^n \to R^m$, A é aperto connesso e $f \in C^1(A; R^m)$ e $Df = 0$ allora f é costante su A*
..... disegnino e bozza di dimostrazione

Osservazione 8. *vale anche sugli insiemi connessi poiche in questi posso congiungere due qulunque punti con una poligonale interamente contenuta nell'insieme e con i lati paralleli agli assi. Attraverso la formula degli accrescimenti finiti posso calcolare la f nei due estremi passando per tutti gli spigoli della poligonale.(Uno spigolo è un segmento quindi si puóapplicare il teorema precedente)*

si po dire qulcosa sulle funzioni lineari tipo c1, lips ....

2.6 Derivate Seconde

Sia $f : A \subseteq R^n \to R^m$ *sappiamo che* $Df(x_0) \in Mat(m \times n)$, *allora* $Df : A \subseteq R^n \to R^{m\times n}$ *cieé la derivata é una funzione a valori in* $Mat(m \times n)$, *ne segue che* $D(D(F)) : A \subseteq R^n \to R^{m\times n\times n}$

Definizione 22. *sia* $f : A \subseteq R^n \to R^m$ *derivabile parzialmente in* x_0 *lungo* e_i. *Se la funzione* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *é derivabile parzialmente lungo* e_j *in* x_0, *la quantitá* $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ *é la derivata seconda di* f *in* x_0 *rispetto* x_i, x_j *e si indica* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

Definizione 23. *sia* $f : A \subseteq R^n \to R^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$
f *differenziabile due volte in* $xo \rightleftharpoons f$ *é differenziabile in un intorno di* x_0 *e* f *é differenziabile in* x_0

Osservazione 9. *con la notazione della definizione precedente,* f *é una funzione definita in un intorno di* x_0 *con valori in* $Mat(m \times n)$, *spazio identificabile con* $R^{m\times n}$

Osservazione 10. *per una funzione scalare* $f : A \subseteq R^n \to R$, *la derivara prima é un vettore (il gradiente* ∇ *in* $R^{1\times n}$*), la derivata seconda é una matrice in* $R^{1\times n\times n}$, *la derivata terza é una super matrice ...*

Definizione 24. *sia* $f : A \subseteq R^n \to R$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$, f *ammette tutte le derivate parziali seconde in* x_0. *La matrice di queste derivate seconde si chaiama Matrice Hessiana di* f *in* x_0

$$H_f(x_0) = D^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

ESEMPI:
...
...
...

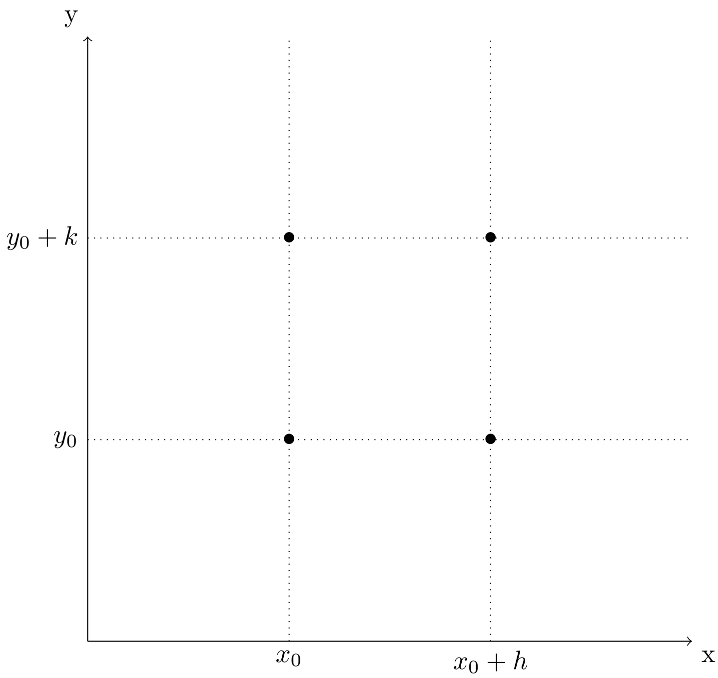
2.7 Il Lemma di Schwarz

Proposizione 17. *sia* $f : A \subseteq R^n \to R^m$ *e* $x_0 \in \mathring{A}$. *Fino ...*
$\exists \partial^2_{ij} f(x)$ *e* $\exists \partial^2_{ji} f(x)$ *in un intorno di* x_0 *e continue in* $x_0 \Rightarrow$ *....*

CASO n=2 m=1

Proposizione 18. *sia* $f : A \subseteq R^2 \to R^1$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$. *.....*
$\exists \partial^2_{xy} f(x, y)$ *e* $\exists \partial^2_{yx} f(x, y)$ *in un intorno di* (x_0, Y_0) *e continue in* $(x_0, y_0) \Rightarrow$ *....*

Dimostrazione. prendo una quantitá $q = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$



L'idea è quella di calcolare q in due modi diversi e osservare che le due scritture rappresentano la stessa quntitá quindi sono uguali.

$$q = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]$$

scelgo una funzione $\varphi(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)$

$$q = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi^{'}(\alpha^{'} h)h$$

valida per $\alpha^{'} \in]0, 1[$ e $\varphi^{'}(h) = \partial_x f(x_0 + h, y_0 + k) - \partial_x f(x_0 + h, y_0)$

$$q = [\partial_x f(x_0 + \alpha^{'} h, y_0 + k) - \partial_x f(x_0 \alpha^{'} h +, y_0)]h$$

scelgo una funzione $\Phi(k) = \partial x f(x_0 + h, y_0 + k)$

$$q = [\Phi(k) - \Phi(0)]h = \Phi^{'}(\beta^{'} k)hk$$

valida per $\beta^{'} \in]0, 1[$ e $\Phi^{'}(k) = \partial_y \partial_x f(x_0 + \alpha^{'} h, y_0 + k)$

$$q = \partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha^{'} h, y_0 + \beta^{'} k)hk$$

Ma q puó anche essere calcolata in un secondo modo

$$q = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] - [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

scelgo una funzione $\psi(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)$

$$q = \psi(k) - \varphi(0) = \psi^{'}(\alpha^{''} k)k$$

valida per $\alpha^{''} \in]0, 1[$ e $\psi^{'}(k) = \partial_y f(x_0 + h, y_0 + k) - \partial_y f(x_0, y_0 + k)$

$$q = [\partial_y f(x_0 + h, y_0 + \alpha^{''} k) - \partial_y f(x_0, y_0 + \alpha^{''} k)]k$$

scelgo una funzione $\Psi(h) = \partial y f(x_0 + h, y_0 + \alpha^{''} k)$

$$q = [\Psi(h) - \Phi(0)]k = \Psi^{'}(\beta^{''} k)hk$$

valida per $\beta^{''} \in]0,1[$ e $\Psi^{'}(h) = \partial_x \partial_y f(x_0 + h, y_0 + \beta^{''} k)$

$$q = \partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha^{''} h, y_0 + \beta^{''} k)hk$$

Abbiamo quindi trovato che

$$\partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha^{'} h, y_0 + \beta^{'} k)hk = \partial^2_{xy} f(x_0 + \alpha^{''} h, y_0 + \beta^{''} k)hk$$

Ci sarebbe un disegno ...
...
Abbiamo trovato che le derivate parziali seconde miste coincidono in due punti ad esempio quelli segnati con il cerchio, poiché $\alpha^{'}, \alpha^{''}, \beta', \beta^{''}$ li abbiamo scelti in $]0,1[$
poiché h, k li abbiamo scelti del tutto arbitrari allora facciamo il limite e poiché le due quantitá sono uguali allora sono uguali anche i limiti.
allora per $(h,k) \to (0,0)$ anche $\alpha^{'}, \alpha^{''}, \beta', \beta^{''}$ cambiano ma essendo limitati tra $]0,1[$ moltiplicandoli oer una quantità che tende a zero fa tutto zero.
Usando la continuitá, per $(h,k) \to (0,0)$ ottengo $\partial^2_{xy} f(x_0, y_0) = \partial^2_{yx} f(x_0, y_0)$ $\square$

Osservazione 11. $f : A \subseteq R^n \to R$
$Df(x_0) = \nabla f(x_0) \in Mat(1 \times n)$
$H_f(x_0) \in Mat(n \times n)$
Il lemma di Schwarz dice che sotto opportune ipotesi la $H_f(x_0)$ é una matrice simmetrica, in questo caso non dobbiamo calcolare $n \times n$ termini, ma solo $\frac{n(n+1)}{2}$

2.8 Sviluppo in Serie di Taylor al II Ordine

sacbnijldasbndfcbuhsadebuhjdewsafbnmweasdbuijeasdhl...
sdadsadsfsdasdfasdfasdfafewrgvregrgbreqeragerwawfer...

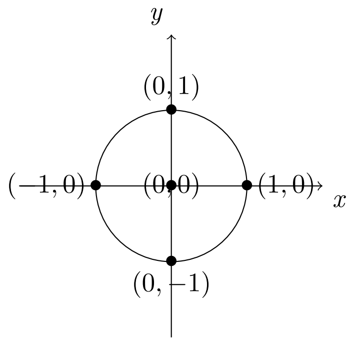
2.9 Il Teorema della funzione Implicita

Definizione 25. *sia $X \in R^n$ e $Y \in R^m$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}^l$, $x_0 \in \overset{\circ}{X}$, $y_0 \in \overset{\circ}{Y}$. L'equazone $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di $(x_0, y_0) \rightleftharpoons$*

1. *$f(x_0, y_0) = 0$, rappresenta un punto di partenza*
2. *$\exists \mathcal{X}$ intorno di x_0 e $\exists \mathcal{Y}$ intorno di y_0, in questo modo due intorno uno per punto, uno é l'insieme di partenza, l'altro l'insieme di arrivo*
3. *$\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.: $f(x,y) = 0$ con $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$*

ESEMPIO:
$m = n = l = 1$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, questa equazione non definisce mai una funzione implicita poiche non è mai nulla

ESEMPIO:
$m = n = l = 1,\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$



Per prima cosa osservo che s possono trovare dei punti che rendono vera $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ *e sono tutti i punti della circonferenza di centro l'origine degli assi e raggio unitario.*
il punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ *definisce implicitamente una funzione* $y = \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *con* $\mathcal{X} = [-1, 1]$ *e* $\mathcal{Y} = [0, 1]$
un primo problema é dovuto alla scelta degli intervalli $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$*, per esempio posso scegliere* $\mathcal{X} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *e* $\mathcal{Y} = R^+$
un secondo problema é la scelta del punto (x_0, y_0)*, potrei scegliere il punto* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Osservazione 12. *La stessa definizione puó essere riscritta con la x funzione della y poiché a priori non c'é distinzione tra le variabili.*

Proposizione 19. *(caso lineare)*
sia $f : R^n \times R^m \to R^p$ *che* $(x, y) \to Ax + By - C$ *con* $A \in Mat(p \times n), B \in (p \times m), B \in (p \times 1)$*. Se* $p = m$ *cieé* B *é un matrice quadrata, e* $det(B) \neq 0$ *cieé invertibile, allora*
$\exists! \varphi : R^n \to R^m$ *t.c.:* $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

Dimostrazione. $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = -C \Leftrightarrow By = -Ax + C \Leftrightarrow y = -B^{-1}Ax + B^{-1}C = \varphi(x)$ □

Proposizione 20. *Sia* $f : X \times Y \to R^m$ *con* $X \in R^n, Y \in R^m$
Preso un punto (x_0, y_0) *con* $x_0 \in \overset{\circ}{X}, y_0 \in \overset{\circ}{Y}$
se:

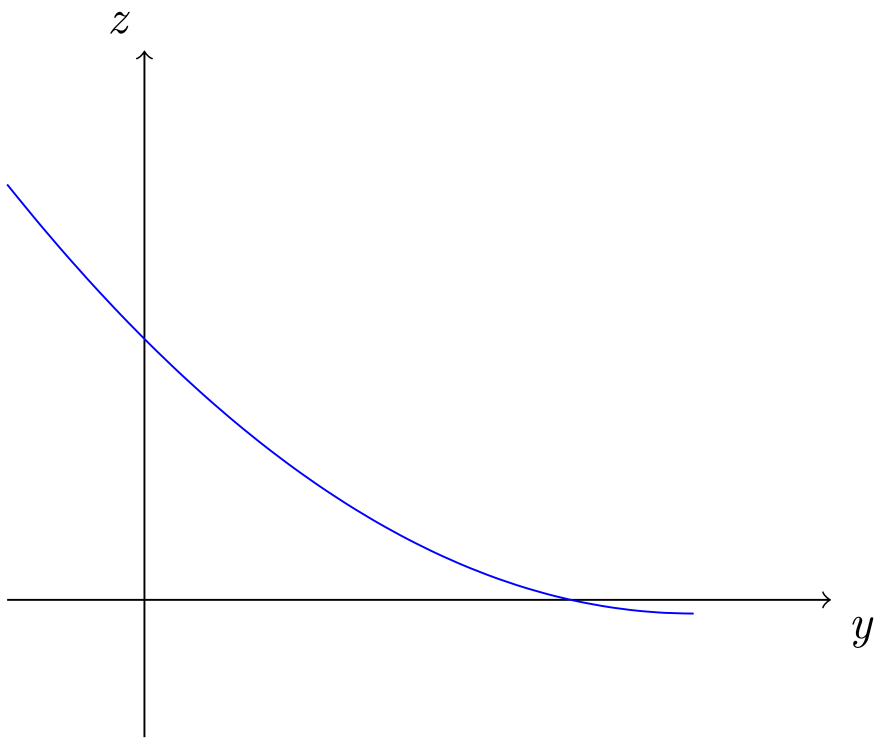
1. f *continua in* $X \times Y$
2. $f(x_0, y_0) = 0$
3. f *differenziabile rispetto a* $y \forall (x, y) \in X \times Y$ *e* $D_y f(x, y)$ *continua.*
4. $D_y f(x_0, y_0)$ *invertibile .*

$\Rightarrow$ *si ha:*
esistenza della funzione implicita
$\exists \mathcal{X} \subseteq X$ *intorno di* x_0*(xstrano aperto)*
$\exists \mathcal{Y} \subseteq Y$ *intorno di* y_0*(ystrano aperto)*

$\exists\varphi$ continua con $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c. $[\varphi(x_0) = y_0 e] f(x,y) = 0, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ unicitá di sostanza cioé a meno del dominio:
se $\varphi_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{Y}_i$ e $x_0 \in \mathcal{X}_i, y_0 \in \mathcal{Y}_i$
$f(x_0, y_0) = 0 \forall x \in \mathcal{X}_i, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi_i(x)$ con $i = 1, 2$
Allora $\forall \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ vale $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

Osservazione 13. *Le ipotesi 3 e 4 garantiscono che esiste una approssimazione lineare, l'ipotesi 4 é sensata poiche y e f hanno lo stesso numero di componenti quindi Dyf é un matrice qudrata.*
la funzione $f : X \times Y \to R^m$ che $(x, y) \to f(x, y)$??????
cioé $\forall x \in X$ (sto fissando una x) $f^x : Y \to R^m$ che $y \to f(x, y)$(sto variando la y), $Df^x \in Mat(m \times m)$

Osservazione 14. *Metodo degli zeri di Newton per troare gli zeri di una funzione o metofo delle tangenti.*



Scelgo un punto y_0 ne prendo il valore sulla curva, disegno la tangente e chiamo y_1 l'intersezione con l'asse y. Itero il processo $y_n + 1 = y_n \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$
discorso al momento difficile per me....

Dimostrazione. Dobbiamo partire da $f(x, y) = 0$ arrivare a $y = \varphi(x)$,vogliamo applicare un raginamento simile a quello della Metodo di Newton, passando peró per il concetto di punto fisso, il teorema delle Contrazioni ci assicura che esiste unico.
cerchiamo quindi una contrazione T il cui punto fisso sia soluzione di $f(x, y) = 0$.
T é del tipo:
T :?×? →?

$(x, y) \to y - [D_y f(X_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$, nota che non avere nella derivata lo stesso punto in cui si calcola la funzione (come é nel metodo di Newton) ha effetti "tragici" sulla velocitá di convergenza, ma a noi interessa l'esistenza.
bisgna capire quali insiemi usare come insiemi di partenza e arrivo, devo essere scelti in modo da poter applicare il teoremma delle contrazioni. Bisogna scegliere sottoinsiemi di R^n e R^m, scegliamo quindi delle sfere
$T : \overline{B(x_0, r_x)} \times \overline{B(y_0, r_y)} \to \overline{B(y_0, r_y)}$, scegliendo la chiusura delle sfere si è sicuri di lavorare in uno spazio metrico completo, poiché in R^l completo $\Leftrightarrow$ chiuso e limitato.
come vengono invece scelti i raggi? sono scelti in modo che:

1. T é ben definita
2. $\forall x \in \overline{B(x_0, r_x)} Tx : \overline{B(x_0, r_x)} \to \overline{B(y_0, r_y)}$ che $y \to T(x, y)$,

cioé T é una contrazione tale che $\forall x$ esiste un punto fisso, $\forall x$ associo a y una x, e quindi na funzione.
r_x, r_y devono essere sufficientemene piccoli per avere tali proprietá e per poterci lavorare sopra.
Abbiamo che $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow T(x, y) = y$
$T(x, y) = y \Leftrightarrow y = y - [D_y F(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$
$[D_y F(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) = 0$
Per verificare che T é una contrazione ne stimo la norma
$\|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| \leq \sup_{\widetilde{y} \in segmento} \|D_y T(x, \widetilde{y})\| \|y_2 - y_1\|$ accrescimenti finiti.
Poichè le sfere sono insiemi convessi é stato possibile applicare il Teorema degli accresscimenti finiti.
Presa $T(x, y) = y - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$, la derivo rispetto a y:

$$D_y T(x, y) = I_{R^m} - [D_y f(x_0, y_0)]^{-1} D_y f(x, y) =$$

$$= [D_y f(x_0, y_0)]^{-1}][D_y f(x_0, y_0) - D_y f(x, y)]$$

Osserviamo che abbiamo ottenuto una matrice come costante moltiplicativa, al secondo membro abbiamo la differenza di due valori di una funzione, che per ipotesi é una funzione continua ($D_y f(x, y)$ continua), allora per r_x e r_y sufficientemente piccoli ho che:
$\|D_y T(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$, é scelto questo valore poiché é comodo al fine di dimostrare la contrazione...

$$\|D_y T(x, y)\| \leq \left\|[D_y f(x_0, y_0)]^{-1}\right\| \|D_y f(x_0, y_0) - D_y f(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$$

$$\|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| \leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\|$$

Se dimostriamo che T é ben definita abbiamo dimostrato che T é una contrazione.
Per verificare che T é en definita bisogna mostrare che $T(x, y) \subseteq \overline{B(y_0, r_y)}$ quindi si mostra che la distanza tra $T(x, y)$ e il centro é minore di r_y

$$\|T(x, y) - y_0\| \leq \|T(x, y) - T(x, y_0)\| + \|T(x, y_0) - y_0\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|y-y_0\| + \left\|y_0 - [D_y f(x_0,y_0)]^{-1} f(x,y_0) - y_0\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|y-y_0\| + \left\|[D_y f(x_0,y_0)]^{-1}\right\| \|f(x,y_0) - 0\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|y-y_0\| + \left\|[D_y f(x_0,y_0)]^{-1}\right\| \|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}r_y + \frac{1}{2}r_y \leq r_y$$

Allora T é ben definita perché $T(x,y) \in \overline{B(y_0,r_y)}$.
In conclusione con $\mathcal{X} = \overline{B(x_0,r_x)}$ e $\mathcal{Y} = \overline{B(y_0,r_y)}$ ho che $T : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ é tale che $\forall x \in \mathcal{X}$ la funzione $y \to T(x,y)$ é una contrazione e $\overline{B(y_0,r_y)}$ é completo.
quaolcosa sui completi.........
....
....
A questo punto puó essere applicato il teorema delle contrazioni:
$\forall x \in \mathcal{X}, \exists y \in \mathcal{Y} : f(x,y) = 0$ allora chiamo $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ che $x \to y$ é unica quindi φ é una funzione.
Allora la funzione implicita esiste. La continuitá direva direttamente dal teorema delle contrazioni: l'applicazione che al parametro associa il punto fisso é continua.
Per l'unicitá si osservano le ipotesi 1 e 2, dove é scritto $\forall x$ ovvero scelta una qualunque x la y é unica quindi φ é univocamente definita.

□

Proposizione 21. *Sia $f : X \times Y \to R^m$ con $X \in R^n, Y \in R^m$*
Preso un punto (x_0,y_0) con $x_0 \in \overset{\circ}{X}$,$y_0 \in \overset{\circ}{Y}$
se:

1. *$f(x_0,y_0) = 0$*
2. *$f \in C^1(X \times Y, R^m)$.*
3. *$D_y f(x_0,y_0)$ invertibile .*

$\Rightarrow$ si ha:

1. *$\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ definita implicitamente da $f(x_0,y_0) = 0$*
2. *φ continua su $\mathcal{X}$*
3. *φ é differenziabile e $D\varphi(x) = -[D_y f(x,\varphi(x))]^{-1} D_x f(x,\varphi(x))$*

Dimostrazione. I punti 1 e 2 sono gli stessi del teorema della funzione implicita e si dimostrano allo stesso modo.
Per il punto 3 abbiamo che $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ e quindi $\forall x \in \mathcal{X}\ f(x,\varphi(x)) = 0$
....
....

□

Proposizione 22. *CASO N=1, M=1*
Sia $f : X \times Y \to R$ *con* $X \in R, Y \in R$
Preso un punto (x_0, y_0) *con* $x_0 \in \overset{\circ}{X}, y_0 \in \overset{\circ}{Y}$
se:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $f \in C^1(X \times Y, R)$.
3. $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.

$\Rightarrow$ *si ha:*

1. $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *definita implicitamente da* $f(x_0, y_0) = 0$
2. $\varphi \in C^0(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
3. φ *é derivabile e* $\varphi^{'}(x) = -[\partial_y f(x, \varphi(x))]^{-1} \partial_x f(x, \varphi(x))$

Dimostrazione. $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$, derivando $D(f(x, \varphi(x))) = 0$
$\partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi^{'}(x) = 0$
allora $\varphi^{'}(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}$ □

Osservazione 15. *Non essendoci motivo per preferire la x alla y o viceversa, esiste anche una versione di questo teorema in cui le ipotesi sono le stesse eccetto l'ultima che diventa* $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$

1. $\exists \psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ *definita implicitamente da* $f(x, y) = 0$
2. $\psi \in C^0(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$
3. ψ *é derivabile e* $\psi^{'}(y) = -[\partial_x f(\psi(y), y)]^{-1} \partial_y f(\psi(y), y)$

Qualche esempio qui

2.10 Il Teorema della funzione Inversa

Data una funzione f, poterla invertire ...... unico modo l'equazione (o sistema ....)... l'incognita x in funzione del parametro .....

Proposizione 23. *(Teorema della funzione inversa caso lineare)*
Sia $f : R^n \in R^m$ *data da* $f(x) = Mx$ *e* $M \in Mat(m \times n)$, f *é invertibile* $\Leftrightarrow n = m$ *e* $detM \neq 0$

Proposizione 24. *(caso generale)*
sia $f : A \to R^n$ *con* $A \in R^n$, $f \in C^1(A, R^n)$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ *e* $Df(x_0)$ *invertibile.*
Allora $\exists \mathcal{X} \in A, \exists \mathcal{Y} \in R^n$, $\exists \varphi \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ *con la proprietá* $f(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi(y)$ *con* $x \in \overset{\circ}{\mathcal{X}}$ *e* $y \in \overset{\circ}{\mathcal{Y}}$ *e* $\varphi \in C^1(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ *e* $D\varphi(y) = [Df(x)]^{-1}$

Dimostrazione. $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) - y = 0$. Allora introduco $F : A \times R^n \to R^n$ data da $F(x, y) = f(x) - y$.
Studio $F(x, y) = 0$ per ottenere $x = \varphi(y)$.
Per poter applicare il teorema della funzione implicita serve $D_x F(x_0, y_0)$ invertibile, ma $D_x F(x_0, y_0) = Df(x_0)$ che é invertibile per ipotesi.
Applico allora il teorema della funzione implicita , quindi gli intorni esistono e $x = \varphi(y)$.
resta da trovare la derivata totale di φ. Sappiamo che $f \in C^1$ quindi $\varphi \in C^1$.
Sappiamo che $\varphi(f(x)) = x$, applicando la derivata della funzione composta abbiamo che:
$D\varphi(f(x))Df(x) = I$
$D\varphi = [Df(x)]^{-1}$ quando $\varphi(y) = x$
si puo anche scrivere come $(Df^{-1})(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$ □

2.11 Massimi e Minimi Liberi

Definizione 26. *Siano (X, d)s.m., $A \subseteq X$ e $f : A \to R$, siano $x_0 \in A, B \in A$ e $m, M \in R$ (L'insieme immagini deve essere R per poter parlare di massimi e minimi, R é un campo ordinato a differenza di R^n).*
M é massimo di f su $B \rightleftharpoons M = \max f(B) \Leftrightarrow \forall x \in B f(x_0) \geq f(x)$
M é minimo di f su $B \rightleftharpoons m = \min f(B) \Leftrightarrow \forall x \in B f(x_0) \leq f(x)$
x_0 é punto di massimo assoluto per $f \rightleftharpoons f(x_0) = \max\limits_A f(x)$
x_0 é punto di minimo assoluto per $f \rightleftharpoons f(x_0) = \min\limits_A f(x)$
x_0 é punto di massimo locale relativo per $f \rightleftharpoons \exists r > 0 : f(x_0) = \max\limits_{x \in B(x_0,r)} f(x)$ con $B(x_0, r) \subseteq A$
x_0 é punto di minimo locale relativo per $f \rightleftharpoons \exists r > 0 : f(x_0) = \min\limits_{x \in B(x_0,r)} f(x)$ con $B(x_0, r) \subseteq A$

2.11.1 Condizioni Necessarie

Proposizione 25. *Teorema di Fermat*
sia $f : A \subseteq R^n \to R$ e $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Se x_0 é punto di massimo(0 minimo) locale per f su A e f é differenziabile in x_0 allora $\nabla f(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Sia $v \in R^n$ con $\|v\| = 1$, la funzione $F(t) = f(x_0 + tv)$ che a $t \to x_0 + tv$ é il moto rettilineo uniforme che passa da x_0 all'istante 0 e si muove con velocitá vettore costante v. Cioé per tempi negativi mi avvicino a x_0 al tempo zero si é in x_0 e per tempi positivi si allontana da x_0. quindi $t = 0$ é punto di massimo per F, allora $F^{'}(0) = 0$ per il teorema di Fermat di A1.
Ora abbiamo che $F^{'}(t) = \nabla f(x_0 + tv)v$ quindi $F^{'}(0) = \nabla f(x_0)v$ cioé $\nabla f(x_0)v = 0$.
Quindi $\forall v : \|v\| = 1$ vale $\nabla f(x_0) = 0$
OSS:: Vale anche che $D_v f(x_0) = 0$ □

Definizione 27. *sia $f : A \subseteq r^n \to R$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$*
x_0 é punto stazionario .... $\rightleftharpoons f$ é differenziabile in x_0 e $\nabla f($ ......

Osservazione 16. *nel caso* $n = 2, m = 1, \nabla f(x_0, y_0) = [\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)]$ *..... i punti stazionari sono quelli che ......parziali.*

Osservazione 17. *Prima di continuare un paio di osservazioni sulle forme quadratiche.*

Definizione 28. *forma quadratica su* $R^n \rightleftharpoons q : R^n \to R$ *che* $x \to x^T Qx$ *con* $Q \in Mat(n \times n)$ *simmetrica*
ESEMPI:n=2

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO
SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO
SEMPRE POSITIVA SEMPRE NEGATIVA CAMBIA SEGNO

Proposizione 26. *se* Q *é una forma quadratica, allora*

- $\forall \lambda \in R, \forall x \in R^n \; q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
- $q(0) = 0$
- *se* q *é limitata* $\Rightarrow q \equiv 0$

Dimostrazione.
- $q(\lambda x) = (\lambda x)^T Q(\lambda x) = \lambda^2 x^T Qx = \lambda^2 q(x)$
- $q(0) = q(0x) = 0q(x) = 0$
- (contronominale $q \neq 0 \Rightarrow q$ non é limitata).
  se q é non nulla $\Rightarrow \exists x \in R^n \; q(x) \neq 0$
  allora $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ illimitata.
- ??

□

Proposizione 27. *se* q *é una forma quadratica* $\Rightarrow \exists M \geq 0 : |q(x)| \leq M \|x\|^2$ $\forall x \in R^n$

Dimostrazione. per $x \neq 0$ $|q(x)| = \left| q\left(\|x\| \frac{1}{\|x\|} x \right) \right| = \|x\|^2 \left| q\left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right| \leq$

$$\leq \left(\sup_{\|x\|=1} |q(x)| \right) \|x\|^2 = \leq \left(\max_{\|x\|=1} |q(x)| \right) \|x\|^2 = M \|x\|^2$$ □

Proposizione 28. *Sia* q *una forma quadratica, se* $q(x) = o(\|x\|^2)$ *per* $x \to 0 \Rightarrow q \equiv 0$

Dimostrazione. sia $x \in R^n$ con $\|x\| = 1$ e $t > 0$.
$q(x) = \frac{1}{t^2}$, $q(tx) = \frac{q(tx)}{\|tx\|^2} \to 0$ per $t \to 0$ per ipotesi.
Allora $\forall x$ con $\|x\|$ vale $q(x) = 0$ e allora $\forall x \neq 0, q(x) = q\left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \|x\|^2$ □

Definizione 29. *Sia $q : R^n \to R$ una forma quadratica*

- *q é definita positiva* $\rightleftharpoons \forall x \in R^n, x \neq 0\ q(x) > 0[Q > 0]$
- *q é semidefinita positiva* $\rightleftharpoons \forall x \in R^n\ q(x) \geq 0[Q \geq 0]$
- *q é definita negativa* $\rightleftharpoons \forall x \in R^n, x \neq 0\ q(x) < 0[Q >< 0]$
- *q é semidefinita negativa* $\rightleftharpoons \forall x \in R^n\ q(x) \leq 0[Q \leq 0]$

Proposizione 29. *Sia $q : R^n \to R$ una forma quadratica, se q é definita positiva $\Rightarrow \exists m > 0 : \forall x \in R^n, q(x) \geq m \|x\|^2$*

Dimostrazione. Noto che $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
$q(x) = q\left(\frac{1}{\|x\|} x \|x\|^2\right) \geq \min\limits_{\|x\|=1} q(\lambda) \|x\|^2$ □

Ora dobbiamo cercare di capire se q é definita positiva
Ad esempio: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é facile capire che é semodefinita positiva poiché é in diagonale, quindi la prima cosa da fare é trovare una forma diagonale per Q*
un procedimento pratico e veloce é il seguente:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\lambda = q_{11}, \quad \lambda_2 = \frac{detQ_2}{q_1 1} \quad \lambda_3 = \frac{detQ_3}{detQ_2} \quad ... \quad \lambda_i = \frac{detQ_i}{detQ_{i-1}}$$

Questo perché se dobbiamo valutare il segno dell'incremento della f ci servono le variazioni sulle quadriche. Se f é C^2 scrivo lo sviluppo di Taylor al secondo ordine:

$$f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

max e min dove $\nabla f(x_0) = 0$ per Fermat, l'o piccolo é trascurabile, allora il segno della derivata dipende dalla forma quadratica al secondo membro.

Proposizione 30. *sia $f : A \subseteq R^n \to R$ e $x_0 \in \overset{\circ}{A}$.*
$f \in C^2(A; R)$ e x_0 punto di massimo locale per f su $A \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ e $H_f(x_0)$ é semidefinita negativa.

Dimostrazione. $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$ poiché $f \in C^2$
il primo termine é negativo poiché per ipotesi x_0 é punto di massimo locale, ne segue che il termine $(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0)$ non puó essere positivo. □

Proposizione 31. *sia $f : A \subseteq R^n \to R$ e $x_0 \in \overset{\circ}{A}$.*
$f \in C^2(A; R)$ e x_0 punto di minimo locale per f su $A \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ e $H_f(x_0)$ é semidefinita positiva.

Dimostrazione. $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$ poiché $f \in C^2$
il primo termine é positivo poiché per ipotesi x_0 é punto di minimo locale, ne segue che il termine $(x - x_0)^T H_f(x - x_0)$ non puó essere negativo. □

2.11.2 Condizioni Sufficienti

Proposizione 32. *sia $f : A \subseteq R^n \to R$ e $x_0 \in \overset{\circ}{A}$.*
$f \in C^2(A; R)$, $\nabla f(x_0) = 0$,$H_f(X_0)$ é definita negativa $\Rightarrow$ x_0 é un punto di massimo locale per f

Dimostrazione. $f \in C^2$ quindi possiamo scrivere:
$f(x_+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
$f(x_+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
Sappiamo che H_f é definita negativa per ipotesi, allora $h^T H_f(x_0)h \leq -m\,\|x_0\|$ allora $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ e quindi x_0 é punto di massimo locale per f. □

Proposizione 33. *sia $f : A \subseteq R^n \to R$ e $x_0 \in \overset{\circ}{A}$.*
$f \in C^2(A; R)$, $\nabla f(x_0) = 0$,$H_f(X_0)$ é definita positiva $\Rightarrow$ x_0 é un punto di minimo locale per f

Dimostrazione. $f \in C^2$ quindi possiamo scrivere:
$f(x_+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}(h)^T H_f(x_0) + o(\|h\|^2)$ per $h \to 0$
....
....
□

QUALCHE DISEGNO E SPIEGAZIONE.....

2.11.3 Il Significato Geometrico del Gradiente n=2 m=1

Definizione 30. *Sia $A \subseteq R^2$ e $f : A \to R$*
La suferficie $z = f(x, y)$ é il grafico di f, é unsottoinsieme di R^3
Se $c \in R$, la curva di livello c di f é l'insieme $f^{-1}(c)\{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$
Se f 'e differenziabile in $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$ il piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ in (x_0, y_0) ha equazione:

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} (x - x0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix}$$

$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Osservazione 18. *geometricamente, il gradiente di una funzione indica la direzione di R^n in cui si ha la massima variazione del valore di f, nel verso di incremento positivo di f,*

Osservazione 19. *osservazione col grafico che al momento non faccio.*

Proposizione 34. *Siano $A \subseteq R^n, f : A \to R$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$, l'incremento di $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$ é massimo quando $[hk] = \lambda\nabla f(x_0, y_0)$ con $\lambda > 0$ ed é minimo con $[hk] = \lambda\nabla f(x_0, y_0)$ con $\lambda < 0$*

Dimostrazione. so che posso approssimare la funzione quindi posso scrivere:
$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o(\sqrt{h^2+k^2}) == \|\nabla f(x_0, y_0)\| \left\| \begin{bmatrix} hk \end{bmatrix} \right\| cos(\theta) +$
$o(\sqrt{h^2+k^2})$
dove θ é l'angolo tra $\nabla f(x_0, y_0)$ e $[hk]$ per $|||[hk]|||$ sufficientemente piccola, l'incremento $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ é massimo se $cos(\theta) = 1$ ed é minimo se $cos(\theta) = -1$, da cui la tesi.

□

Proposizione 35. *siano $f \in C^1(A; R)$ con $A \subseteq R^2$ e $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$ e $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$[cieé stazionario]. Allora nabla$f(x_0, y_0)$ é perpendicolare alla curva di livello passante per .....*

Osservazione 20. *un vettore 1'e perpendicolare a una curva se é perpendicolare alla retta o al vettore tangente alla curva in quel punto.*

Dimostrazione. La curva di livello é $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ cioé $f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0$, per trovare la tangente a questa curva é piu facile se si ha $y = \varphi(x)$
Usiamo quindi il teorema della funzione implicita, mi serve che $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, questa condizione non é assicurata dalle ipotesi, per ipotesi il gradiente é non nulla quindi almeno una delle due componenti é non nulla.
Inizio con il caso $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.
Il T.F.IMPL. assicura che :
$\exists \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ con $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{X}}, y_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Y}}$, $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.:
$f(x, y) = f(x_0, y_0), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$
La retta tangente in x_0 a $y = \varphi(x)$ é $y = y_0 + \varphi^{'}(x_0)(x - x_0)$
questo vuole dire che un vettore tangente a $y = \varphi(x)$ in (x_0, y_0) é $\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi^{'}(x_0) \end{bmatrix}$.
... calcolo il prodotto scalare

$$\nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi^{'}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \partial_x f(x_0, y_0) - \partial_y f(x_0, y_0) \frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)} = 0$$

Allora il graadiente é perpendicolare alla curva di livello.
Guardiamo ora al caso in cui $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$ quindi il gradiente é non nullo.
Applicando lo stesso ragionamento id sopra, solo esplicitando la x in funzione della y. Quindi $x = \psi(x)$ e $\psi'(y_0) = -\frac{\partial_y f(x_0, y_0)}{\partial_x f(x_0, y_0)}$ □

2.12 Massimi e Minimi Vincolati

Spesso la ricerca di punti di massimo o minimo di una funzione $f : A \to R, A \subseteq R^n$ deve essere ristrettaad un sottoinsieme $B \subseteq A$ a causa di eventuali vincoli a cui le variabili indipendenti devono soddisfare. L0insieme B puó essere generalmente descritto da una funzione $\varphi : A \to R^p$, nel senso che $B = \{x \in A : \varphi(x) \leq 0\}$
NOTA::: direi n¿1 poiche se ho una sola variabile e la vincolo ...??????? booooo

.
Questo problema é usualmente abbreviato in:

$$\max_{\varphi\leq 0} \quad o \quad \min_{\varphi\leq 0}$$

puó essere affrontato in due passi:

1. *ricerca dei punti di estremo di f interni a B, problema gia affrontato.*
2. *ricerca dei punti di estremo di f sul bordo di B, affrontiamo ora.*

Sotto opportune condizioni su φ, infatti, $\overset{\circ}{B} = \{x \in A : \varphi(x) < 0\}$ e $\partial B\{x \in A : \varphi(x) = 0\}$

Proposizione 36. *Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange Siano $f, g : A \subseteq R^2 \to R, (x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}, g(x_0, y_0) = 0, f, g \in C^1(A; R)$, $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$*
Se (x_0, y_0) é di max(o min) locale per f su $g = 0 \Rightarrow \exists \lambda inR$ t.c: $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda g(x_0, y_0)$ (all fin fine posso dire che sono paralleli).

Osservazione 21. *λ si chiama "moltiplicatore di lagrange"*

Osservazione 22. *Se abbiamo un problema del tipo $\max\limits_{g(x,y)=0} f$ cioé il massimo di f sul vincolo $g(x, y) = 0$, ci dobbiamo ricondurre ad un sistema del tipo*
$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \partial_x f(x_0, y_0) = \lambda \partial_x g(x_0, y_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0) = \lambda \partial_y g(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$
3 equazioni in 3 incognite(x, y, λ)
In certi casi si introduce una funzione $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ detta Lagrangiana, i punti stazionari vincolati di f sono punti stazonari liberi della Lagrangiana.

Dimostrazione. Sappiamo che $\nabla g(x_0, y_0) \neq$ quindi $\begin{bmatrix} \partial_x g(x_0, y_0) & \partial_y g(x_0, y_0) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ quindi o $\partial_x g(x_0, y_0) \neq 0$ o $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$. Mettiamoci nel caso in cui $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$,
Per il teorema della funzione implicita ho che :
$\exists \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ con $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{X}}, y_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{Y}}$, $\exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ t.c.:
$g(x, y) = f(x_0, y_0), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$
Osserviamo che dire (x_0, y_0) di massimo o minimo per f ristretta a $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x_0$ é di massimo o di minimo per la funzione $x \to f(x, \varphi(x))$.
Per il teorema di Fermat $\frac{d}{dx}(f(x, \varphi(x)))\|_{x=x_0} = 0$, punto stazionario ha derivata nulla, e la derivata di quella funzione in x_0 é:

$$\partial_x f(x_0, \varphi(x_0)) + \partial_y f(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

allora

$$0 = \partial_x f(x_0, \varphi(x_0)) + \partial_y f(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) =$$
$$= \partial_x f(x_0, \varphi(x_0)) - \partial_y f(x_0, \varphi(x_0)) \frac{\partial_x g(x_0, \varphi(x_0))}{\partial_y g(x_0, \varphi(x_0))} =$$

$$= \partial_x f(x_0, \varphi(x_0))\partial_y g(x_0, \varphi(x_0)) - \partial_y f(x_0, \varphi(x_0))\partial_x g(x_0, \varphi(x_0)) = det \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \\ \partial_x g(x_0, y_0) & \partial_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 0$$

questo equivale a dire che i vettori riga della matrice sono paralleli quindi $\exists \alpha \in R : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.
Non é uguale scrivere $\exists \alpha \in R : \nabla g(x_0, y_0) = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$ poiche non c'é certezza sul valore di $\nabla f(x_0, y_0)$ che se nullo negherebbe l'ipotesi di $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$
Se guardiamo ora il caso in cui $\partial_y g(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_x g(x_0, y_0) \neq 0$.
Seguendo un ragionamento analogo si esplicita $x = \psi(y)$ cosí che cercare max(o min) di f ristretta a $g(x, y) = 0$ porti a $y \to f(\psi(y), y)$ □

Proposizione 37. *Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange caso generale Sia $A \in R^n$, $f \in C^1(A; R)$, $g \in C^1(A; R^p)$ con $p < n$(n.vincoli¡n.variabili), sia poi $x_0 \in \overset{\circ}{A}, g(x_0) = 0, Dg(x_0, y_0)$ di rango p.*
Se x_0 é di max(o min) locale per f su $g = 0 \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p inR$ t.c: $\nabla f(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g(x_0, y_0)$

2.13 Derivate e Integrali

Proposizione 38. *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale Sia $I \subseteq R$ un intervallo e sia $x_0 \in I$. Data $f \in c^0(I; R)$ la funzione:*

$$\begin{array}{lcl} F : I & \to & R \\ x & \to & \int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{array}$$

Si ha $F \in C^1(I; R)$ e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Proposizione 39. *Sia $A \subseteq R^n$ un aperto, data $f \in C^0(A \times R; R)$ la funzione*

$$\begin{array}{lcl} F : R \times R \times A & \to & R \\ (\alpha, \beta, x) & \to & \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t)dt \end{array}$$

é di classe $C^0(R \times R \times A; R)$

Proposizione 40. *Sia $A \subseteq R^n$ un aperto, data $f \in C^1(A \times R; R)$ la funzione*

$$\begin{array}{lcl} F : R \times R \times A & \to & R \\ (\alpha, \beta, x) & \to & \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t)dt \end{array}$$

é di classe $C^1(R \times R \times A; R)$ ed inoltre, $\forall (\alpha, \beta, x) \in R \times R \times A$ e $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -f(x, \alpha)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = f(x, \beta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t)dt$$

$$\nabla F = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla f(x, t)dt$$

Corollario 1. *Sia $A \subseteq R^n$ un aperto, date le funzioni $\alpha : x \to R, \beta : x \to R, f : x \to R$, di classe C^1 , la funzione*

$$\begin{array}{rcl} F : A & \to & R \\ (x) & \to & \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt \end{array}$$

é di classe $C^1(R \times R \times A; R)$ ed inoltre, $\forall x_0 \in A$:

$$\nabla F(x_0, y_0) = f(x_0, \beta)\nabla\beta(x_0) - f(x_0, \alpha)\nabla\alpha(x_0) + \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \nabla f(x,t)dt$$

Parte III

Integrali Doppi

Capitolo 3

Integrali Doppi

3.1 Preliminari

Questo capitolo non é trattato in maniera approfondita poiché:

a *tanti e lunghi teoremi fuori contesto per poter introdurre rigorosamente la teoria di Riemann*

b *tale teoria é "superata" da tempo*

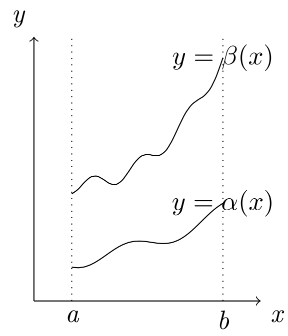
Il primo é piú grosso problema di tale teoria é che non permette il passaggio del limite sotto il segno di integrale, cieé per poter scrivere

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)$$

sono necessarie tante ipotesi molto restrittive.
Si é passati cosí alla teoria dell'integrale secondo Lebesguw, molto diversa e piuttosto complicata.
ESEMPIO...............
disegni...........
....
Il concetto di integrale é quindi molto legato al concetto di area e anche di volume. La teoria di Lebesgue riparte da assiomi come questi definendoli e caratterizzandoli in modo da definire una volta per tutte in maniera sistematica e rigorosa cosa si puó e cosa non si puó integrare, e dove ha senso parlare di superfici. volumi, ipervolumi, ...

3.2 Regole di Calcolo

Queste formule permettono di ricondurre il calcolo di integrali doppi a quello di integrali semplici.



Se:
$a, b \in R$ *con* $a < b$
$\alpha, \beta \in C^0([a,b]; R), \forall x \in [a,b] \alpha(x) \leq \beta(x)$
$A = \{(x,y) \in R^2 : x \in [a,b] ey \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$
$f \in C^0(A; R)$
Allora
$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta x} f(x,y)dy\right) dx$
Analogamente.
ALTRO GRAFICO....
Se:
$c, d \in R$ *con* $c < d$
$\gamma, \delta \in C^0([a,b]; R), \forall y \in [c,d] \gamma(y) \leq \delta(y)$
$A = \{(x,y) \in R^2 : x \in [c,d] ex \in [\gamma(y), \delta(y)]\}$
$f \in C^0(A; R)$
Allora
$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta y} f(x,y)dx\right) dy$

3.3 Cambiamento di Variabili

Se:
$A \subseteq R^2$
$\Phi \in C^1(A; R^2)$ Φ *é invertibile* $\Phi^{-1} \in C^1(\Phi(A); R^2)$
$det(D\Phi) \neq 0$ *su* A
$f \in C^0(\Phi(A); R^2)$
Allora:

$$\iint_{\Phi(A)} f(x,y)dxdy = \iint_A ((f \circ g)(u,v))|det(D\Phi(u,v))|dudv$$

La quantitá $det(D\Phi)$ *é spesso chiamato DETERMINANTE JACOBIANO (o semplicemente JACOBIANO) della trasformazione* Φ
Adesso spieghiamo perché ild eterminande JACOBIANO, ricordaando A1:

$$\int_g (A)f(x)dx = \int_A f(g(t))dt$$

vari casi
...
...

...

Parte IV

Equazioni Differenziali

Capitolo 4

Equazioni Differenziali

4.1 Preliminari

Equazione é un ugualianza in cui c'é almeno una incognita.
Equazione differenziale é un particolare tipo di equazione e stabilisce una relazione tra la funzione incognita e le sue derivate.In un equazione funzionale si cerca l'ugualianza di: insieme di arrivo, insieme di partenza, corrispondenza.
Non é necessario sapere il valore della soluzione ma sapere che ne esiste una.????????
Equazione differenziale ordinaria:
1- La funzione incognita é funzione di una sola variabile solitamente il tempo.
2- La funzione incognita e le sue derivate sono calcolate allo stesso istante di tempo.

Definizione 31. *Si dice equazione differenziale ordinaria di ordine n nella funzione incognita $x \in R^k$ un espressione del tipo:*

$$f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

dove $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^{1+(1+n)k}$ e $t \in R$.
Soluzione di questa equazione differenziabile é una qualunque funzione $x : I \to R^k$ definita su un intervallo $I \subseteq R$, derivabile n volte in I e tale che $\forall t \in I$

$$(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \in A$$
$$f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

Soluzione massimale di un equazione differenziale ordinaria é una soluzione $x_m : I_m \to R^k$ tale che nesuna soluzione possa essere definita in un intervallo I con $I_m \subseteq I_m$

Definizione 32. *un'equazione differenziale é in forma normale se e solo se si presenta nella forma*

$$x^n = g(t, x, \dot{x}, \dots, x^{n-1}))$$

Osservazione 23. *lo studio di unj equazione differenziale ordinaria in forma non normale inizia generalmente con l'utilizzo del Teorema della Funzione Implicita insieme ai teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie in forma normale*

Osservazione 24. *illeggibile*

Proposizione 41. *ogni equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine n é equivalente a una equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine* 1.

Dimostrazione. CASO n=2
abbiamo che $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$
introduco $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$
quindi $\dot{X} = f(t, X)$ □

Osservazione 25. *in generale un problema si dice BEN POSTO o BEN POSTO NEL SENSO DI HADAMARD ogniqualvolta:*

1. *esisste*
2. *é unica*
3. *dipende con continuitá dai dati*

Definizione 33. *si diche problema di Cauchy del primo ordine il problema di determinare una soluzione di un equazione differenziale ordinaria del primo ordine soddisfacente ad una condizione iniziale.*
c'e una nota sul ben posto.......

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dove $f : J \times A \to R^n$, $J \subseteq R$ *é un intervallo,* $t_0 \in \mathring{J}$, $A \in R^n$, $x_0 \in \mathring{A}$.
Soluzione di un problema di Cauchy é una funzione $x : J \to R^n$ *che sia soluzione dell'equazione differenziale* $\dot{x} = f(t, x)$ *definita in un intervallo* I *contenente* t_0 *nella sua parte interna,* $I \subseteq J$*, tale che* $x(t_0) = x_0$ *e* $x(I) \subseteq A$*, e* x *derivaile.*

Osservazione 26. *la condizione* $x(t_0) = x_0$ *viene abitualmente chiamata condizione iniziale nonostante la definizione di soluzione richieda che la stessa sia definita in un intervallo contenente* t_0 *nella sua parte interna. In molte applicazioni delle equazioni differenziali ordinare* t_0 *é proprio l'inizio dell'intervallo in cui si cerca la soluzione. I risultati seguenti continuano a valere con piccole modifiche alle dimostrazioni.??????????*

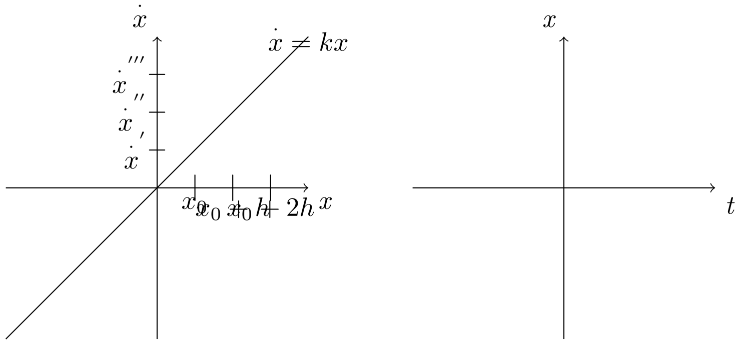
4.2 La Legge di Malthus

Una popolazione, dotata di tutto il necessario per vivere e riprodursi, cresce secondo la legge di Malthus: la velocitá di crescita della popolazione é proporzionale alla prpolazione stessa.

$$\dot{x} = k \cdot x$$

dove x *é il numero di membri della popolazione e* k *é una costante positiva legata alla prolificitá della specie in esame, generalmente calcolaa come differenza tra*

i tassi di natalitá e di mortalitá.
Il problema di Cauchy é quindi $\begin{cases} \dot{x} = k \cdot x \\ x(0) = 0 \end{cases}$ *con* $x \in R, k > 0$ *e* $x_0 = 0$



blablabla ....
....
Limiti di questo modello:

- *la variabile* x *dovrebbe variare in* N, *poiché una popolazione ha un numer intero di elementi.*

- *In molte specie é verosimile che il numero di nati al tempo* t *dipenda dalla popolazione presente ad un tempo precedente* $x(t - T), T > 0$

- *Suppore che una popolazione abbia per sempre a disposizione risorse sufficienti puó non essere realistico*

- *Questo modello va bene quando si considereano intervalli di tempo molto lunghi.*

4.3 Teoria Locale

Definizione 34. *Una funzione* $f : I \times A \to R^?$ .... $A = A\overset{\circ}{A} \subseteq R^n$, *si dice localmente lipschitziana??? .... uniformemente rispetto a* t *se*

$$\forall X_0 \in A, \exists ???? : \forall x_1, x_2 \in B(x_0, r) \cap A, \forall t \in I, ...$$

Proposizione 42. *Siano* $I \subseteq R$ *un intervallo aperto, ...????...., ogni funzione* $f \in C^1(I, R^n)$ *é localmente lipschitziana??? ..... uniformemente rispetto a* $t \in I$.

Dimostrazione. sia $x \in A \Leftarrow \exists B(x_0, r) \subseteq A$ con $r > 0$, anche $\overline{B(x_0, r)} \subseteq A$ scelto r abbastanza piccolo, allora $\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| le \sup_{(t,x) \in I \times \overline{B(x_0,r)}} \|Df()\| \, \|x_2 - x_1\|$ per la formula degli ccrescimenti finiti. $\square$

4.3.1 Esistenza e Unicitá

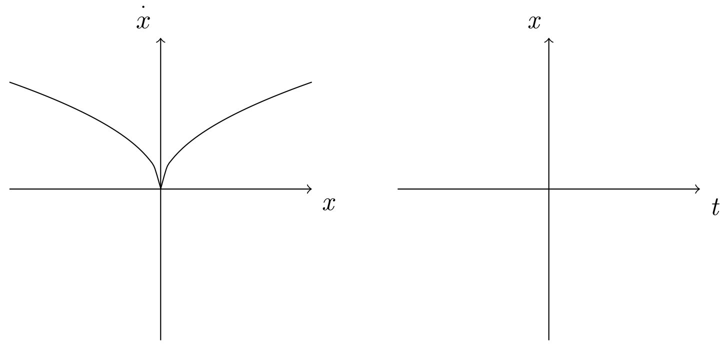
Proposizione 43. *Teorema di Peano Si consideri ilseguente problema di Cauchy:* $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *con* $f : I \times A \in R^n$ *soddisfacente alle ipotesi:*

1. $I \subseteq R$ *intervallo,* $A \subseteq R^n, t_0 \in \mathring{I}, x_0 \in \mathring{A}$
2. $f \in C^0(I \times A; R^n)$

Allora esiste una soluzione, cioé $\exists J \subseteq I$ *intervallo e* $\exists \varphi : J \to R^n$ *con le proprietá:*

- $J \subseteq I, \varphi(J) \subseteq A$
- $t_0 \in \mathring{J}, \varphi(t_0) = x_0$
- φ *derivabile e* $\varphi^{'}(t) = f(t, \varphi(t))$

Osservazione 27. *???*
ESEMPIO Il Baffo/Pennello di Peano
$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$



Se $x_0 = 0$ *ho che* $\varphi(t) = 0$ *é soluzione* $\forall t$
Ma $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ *é anche un'equazione a variabili separabili quindi risolvibile.*

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{|x|}} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}}{\sqrt{|x|}} dt = t$$

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = t$$

valuto ora il caso $x >= 0$ *quindi* $|x| = x$

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} = t$$

la soluzione cercata é quindi $x(t) = \frac{1}{4}t^2$, estendendo il ragionamento ai tempi negativi si trova che la soluzione cercata é:

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\frac{1}{4}t^2 & t > 0, \\ 0 & t = 0 \\ -\frac{1}{4}t^2 & t < 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato che per la condizione iniziale $x_0 = 0$ il sistema ammette due soluzioni, si riesce estendere la soluzione a invinite funzioni.

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-a)^2 & t < a, \\ 0 & t \in [a,b] \\ +\frac{1}{4}(t-b)^2 & t > 0 \end{cases}$$

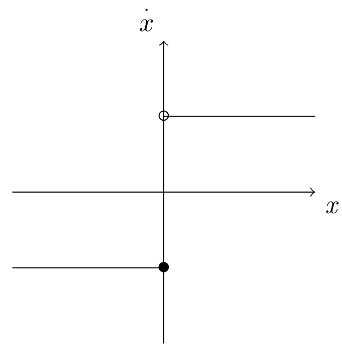
infatti:

$$\varphi^{'}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{8}(t-a) & t < a, \\ 0 & t \in [a,b] \\ +\frac{1}{8}(t-b) & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{8}(t-a) = \frac{-\frac{1}{4}(t-a)^2}{\sqrt{-\frac{1}{4}(t-a)^2}} & t < a, \\ 0 = 0 & t \in [a,b] = ...?????sistema \\ +\frac{1}{8}(t-b) = \frac{\frac{1}{4}(t-b)^2}{\sqrt{\frac{1}{4}(t-b)^2}} & t > 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato infinite soluzioni.
Questo esempio per sottolineare che il teorema di peano non garantisce l'unicit'a della soluzione ESEMPIO CONTINUITÁ É IPOTESI NECESSARIA
Questo esempio mostra che se non c'é continuti'á, puó?????????? non esserci la soluzione.

Dato il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases} \\ x(0) = 0 \end{cases}$



$x(t) = 0$ *soddisfa la condizione iniziale ma ovviamente nn puó essere soluzione del problema poiché per $x \neq 0$ si ha che $\dot{x} = \pm 1$ che non é la derivata della funzione nulla.*
partendo sempre dalla condizione iniziale si puó ipotizzare per esempio che la soluzione cresca, solo che questo contraddice $\dot{x}(0) = -1$
se invece si ipotizza che decresce da 0 si ottiene che la funzione assume valori negativi, anche questo é un assurdo poiché la derivata per valori negativi della

funzione é positiva.

Precisiamo che se il problema fosse stato $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases} \\ x(0) = -3 \end{cases}$ *allora la funzione* $\varphi(x) = -x + 3$ *sarebbe stata soluzione nell'intervallo* $J =]-\infty, 0[$

Proposizione 44. *Teorema di Cauchy Locale In sostanza si dimostra che il problema di Cauchy é ben posto nel senso di Hadamard.*
Si consideri il problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
con $f : I \times A \to R^n$ *soddisfacente le ipotesi:*

1. $I \subseteq R^n$ *intervallo,* $t_0 \in \overset{\circ}{I}, A \subseteq R^n, x_0 \in \overset{\circ}{A}$
2. $f \in C^0(I \times A; R^n)$ *queste prime due ipotesi garantiscono l'esistenza, Thm.Peano.*
3. f *é localmente Lipschitziana in* $x \in A$ *uniformemente rispetto a* $t \in I$

Allora:

1. *Esistenza*
   $\exists J \subseteq I, \exists \varphi : J \to R^n$ *con le proprietá*
   $\varphi soluzione : \begin{cases} * & J \subseteq I, \varphi(J) \subseteq A \\ * & t_o \in \overset{\circ}{J}, \varphi(t_0) = x_0 \\ * & \varphi derivabile, \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in J \end{cases}$
2. *Unicitá*
   Se $\exists J_1, J_2$ *intervalli con* $J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I$ *e* $\exists \varphi_1 : J_1 \to R^n, \varphi_2 : J_2 \to R^n$ *soluzioni, cioé*
   $\varphi_1, \varphi_2 soluzione : \begin{cases} * & J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I, \varphi_1(J_1) \subseteq A, \varphi_2(J_2) \subseteq A \\ * & t_o \in \overset{\circ}{J}_1, t_o \in \overset{\circ}{J}_2 \varphi_1(t_0) = x_0, \varphi_2(t_0) = x_0 \\ * & \varphi_1, \varphi_2 derivabili, \dot{\varphi_1}(t) = f(t, \varphi_1(t)) \quad \forall t \in J_1 \dot{\varphi_2}(t) = f(t, \varphi_2(t)) \quad \forall t \in \end{cases}$
   Si puó osservare che $J_1 \cap J_2$ *é non vuoto poicé entambi gli insiemi contengono* t_0 *nella loro parte interna.*
   Allora $\forall t \in (J_1 \cap J_2)$ *vale* $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$*,cioé se esistono due soluzioni ovunque entrambe siano definite esse coincidono..*

3. *Dipendenza Continua Dai Dati*
   Si considerino i problemi di Cauchy che hanno la condizione iniziale nello stesso istante:
   $$(1) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \dot{y} = g(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
   con $f, g : I \times A \to R^n$ *soddisfacenti le ipotesi allora esiste un* $\delta > 0$ *tale che sull'intervallo* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *sono definite una soluzione* φ *di (1) ed una soluzione* ψ *di (2). Inoltre esiste* $L > 0$ *t.c.* $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *vale:*
   $$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{C^0}) e^{L|t-t_0|}$$
   dove $\|f - g\|_{C^0} = \sup_{I \times A} \|f(t,x) - g(t,x)\|$

Osservazione 28. *L'equazione integrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

viene spesso denominata EQUAZIONE DI VOLTERRA.
Questa equazione ha senso anche per alcune funzioni f non non continue ma solo misurabilinel primo argomento. Ne consegue che nei Teoremi di esistenza ed unicitá (locali/globali) l'ipotesi "f continua" puó essere sostituita da "f continua tratti in $t, \forall x$, continua in x e limitata"

Osservazione 29. *la norma dell'integrale é minore uguale dell'integrale della norma.*

Proposizione 45. *LEMMA DI GRONWALL*
Dati $a, b \in R$ con $a \leq b$ siano $\delta_0 \in [0; +\infty]$ e $\delta, \kappa : [a, b] \to R$ funzioni continue su $[a, b]$ con $\delta(t) \geq 0$,$\kappa(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ e $\delta(t) \leq \delta_0 + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$Allora

$$\delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t \kappa(\tau)d\tau}$$

Questo teorema porta da una stima implicita di δ(sotto il segno di integrale) ad una stima esplicita

Dimostrazione. sia $\delta_0 > 0$. Sia $\Delta(t) = \delta_0 + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$.

Vale per ipotesi che $\delta(t) \leq \Delta(t) = \delta_0 + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$

Sfruttando la derivata di $ln(\Delta(t))$ si ottiene $\frac{d}{dt}(ln(\Delta(t))) = \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} = \frac{\kappa(t)\delta(t)}{\Delta(t)}$, ed il termine $\frac{\delta(t)}{\Delta(t)} \leq 1$, Integrando il primo e l'ultimo termine

$$\int_a^t \left(\frac{d}{dt}(ln(\Delta(t)))\right) \leq \int_a^t \kappa(\tau)d\tau$$

$$ln(\Delta(t)) \leq ln(\delta_0) + \int_a^t \kappa(\tau)d\tau$$

$$\Delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t \kappa(\tau)d\tau}$$

Da cui la tesi. Se $\delta_0 = 0$, ponendo $\Delta(t) = \epsilon + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$ si ottiene $\delta(t)\epsilon$ .... e il mio cervello sta bruciando □

Dimostrazione. Cauchy Locale:
L'idea alla base della dimostrazione é che vogliamo riuscire a trasformare il problrma di Cauchy in un problema di punto fisso.Prima di tutto serve una realazione che dal problema di Cauchy ci permetta di ottenere x in funzione di

qualcosa che dipenda da x.
Integrando ambi i membridella prima equazione del problema di ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} (\dot{x})d\tau = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau$$

T é una funzione del tipo: $\begin{array}{ccc} T :? & \to & ? \\ x & \to & Tx \end{array}$, con $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau$
Abbiamo raggiunto un problem di npunto fisso ($x = Tx$). Ora bisogna determinare l'insieme di partenza e l'insieme di arrivo in maniera utile per la dimostrzione. Per poter applicare il Teorema delle contrazioni serve che nlo spazio di partenza e di arrivo siano uguali e chiamiamo $\mathcal{X}$.
$T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ t.c.: $y(t) = (Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau$ Bisogna quindi scegliere l'insieme $\mathcal{X}$. É un insieme di funzioni, in cui l'equivalenza sopra deve avere senso, cioé serve x continua per avere l'equivalenza con il problema di Cauchy, quindi $\mathcal{X} = C^0(\ldots)$.
Inoltre volendo una soluzione del problema di Cauchy, la funzione $x(pensosiay(t) = x)$ deve essere definita almeno su un intervallo contenente t_0 nella sua parte interna, non interessa l'estensione di tale intevallo quindi si puó scegliere $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, inoltre deve avere valori in un insieme con x_0 nella sua parte interna, $\overline{B(x_0, r)}$. Quindi $\mathcal{X} = C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta] ; \overline{B(x_0, r)})$
Per δ, r abbastanza piccoli si ha $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq I$, $\overline{B(x_0, r)} \subseteq A$, quindi adesso il problema é quello di determinare δ, r.
Per poter applicare il teorema delle contrazioni:

a- Tx definita (possibilitá di calcolarla)

b- $Tx \in \mathcal{X}$ (insiemi di partenza e arrivo)

c- Tx contrazione

d- $\mathcal{X}$ completo

Se tutti questi punti sono soddisfatti, si puó trovare $x = Tx$, cioé una x che soddisfa l'equazione integrale e di conseguenza, per equivalenza, soluzione del problema di Cauchy.

a- Tx definita significa poter calcolare l'integrale,per poter calcolare l'integrale devo poter calcolare la f, per calcolare la f ho bisogno che τ e $x(\tau)$ stiano dentro gli insiemi su cui é definita la f, cioé I, A, per essere sicuri di non uscire dall'intervallo:

$$\delta > 0 \quad t.c: \quad [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq I$$

OSS:: Se si cambiano δ, r con valori minori tutto vale ancora.
OSS:: Per il problema x derivabile -¿ integrale ... mi sosto in C^0

b- Tx deve appartenere a $\mathcal{X}$. L'insieme $\mathcal{X}$ sostanzialmente pone tre vincoli a Tx: deve essere C^0, definita in $[t_o - \delta; t_0 + \delta]$ a valori in $\overline{B(x_0, r)}$.
Per iniziare si verifica che sia definita in $[t_o - \delta; t_0 + \delta]$
.... qualchosa che non comprendo.... C^0
Resta da verificare che Tx é a valori nella sfera, cioé che

$$(Tx)(t) \in \overline{B(x_0, r)}$$

Valuto la distanza tra $(Tx)(t)$ e x_0. La differenza tra la posizione al tempo t e al tempo t_0, questa distanza pu'øessere controllata con la velocitá e il tempo per cui il punto dsi é mosso.
Chiamata V la massima velocitá alla quale puó muoversi il punto, $V = \sup (t_0 \times X_0) \in ([to + \delta, t_0 - \delta] \times \overline{B(x_0, r)}) = \{\|f(t, x(t))\|\}$ che é il sup della norma di f, cioé dei moduli dei vettori velocitá, questo esiste sempre finito, non ∞ poiché f é continua, la norma é continua , t varia in un chiuso e limitato, x_0 varia in un chiuso e limitato, quindi stiamo calcolando il sup di una funzione continua su un chiuso e limitato allora per il teorema di Weierstrass $V = \max (t_0 \times X_0) \in ([to + \delta, t_0 - \delta] \times \overline{B(x_0, r)}) = \{\|f(t, x(t))\|\}$
Non potendo modificare V, δ poniamo una restrizione su r:$V\delta < r$, da cui $\delta < r \cdot V$

$$\|(Tx)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} V \cdot d\tau \right| = V \,|t - t_0| \leq V\delta < r$$

....aggiunto il modulo per $t < t_0$ e $t > t_0$ non lo si sa a priori
quidi $\|(Tx)(t) - x_0\|$ é minore di r scelto δ opportunamente piccolo.

c- Se Tx é una contrazione deve valere che

$$\|Tx_2 - Tx_1\|_{C^0} \leq K \, \|x_2 - x_1\|_{C^0} \quad k \in [0, 1[\quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

con $\|Tx_2 - Tx_1\|_{c^0} = \sup\limits_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\|$, partendo da questa utilizzando prima la definizione di f poi la linearitá dell'integrale ....lipsh f... proprietá

$$\|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\| =$$

$$\left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_2(\tau))d\tau - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))d\tau \right) \right\| =$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_2(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))d\tau \right\| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x_2(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^{t} L \, \|x_2(\tau) - x_1(\tau)\| \, d\tau \right| \leq$$

$$L\left|\int_{t_0}^{t}\|x_2-x_1\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}\,d\tau\right| =$$
$$L\cdot\|x_2-x_1\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}\,|t-t_0| \leq$$
$$L\delta\,\|x-x_0\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}$$

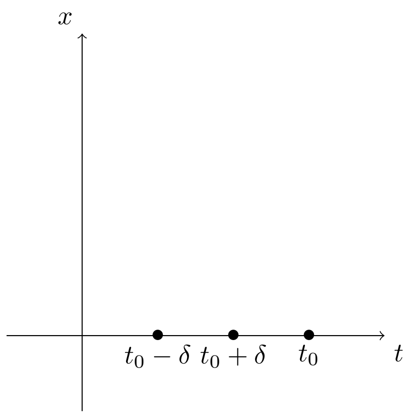
cioé $\forall t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$ vale che $\|(Tx_2)(t)-(Tx_1)(t)\|\leq L\delta\,\|x_1-x_2\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}$ e poiche é vero $\forall t \Rightarrow$ passando all'estremo superiore

$$\|Tx_1-Tx_2\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}\leq L\delta\,\|x_1-x_2\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}$$

A questo punto scelto δ t.c. $L\delta<1$ ad esempio $\delta=\frac{1}{2L}$ cosí ottengo che per δ opportuno Tx é una contrazione.

d- Bisogna mostrare che $\mathcal{X}$ é completo.
Supponiamo che $\mathcal{X}\subseteq C^0([t_0-\delta,t_0+\delta]\,;R^n)$, questo insieme é completo rispetto alla metrica $d_\infty=d_{C^0}$, allora se abbiamo una successione x_n di Cauchy in $\mathcal{X}$ lo é anche su $C^0([t_0-\delta,t_0+\delta]\,;R^n)$, allora $\exists x_\infty\in C^0([t_0-\delta,t_0+\delta]\,;R^n)$ con $x_n\to x_\infty$ per $n\to\infty$, ma poiché $\forall t\in[t_0-\delta,to+\delta]$ $x_\infty(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)$ e visto che $\forall t,\forall n \quad \|x_n(t)-x_0\|\leq r$ anche al limite vale $\|x_\infty(t)-x_0\|\leq r\Rightarrow x_\infty\in\mathcal{X}$ cioé $\mathcal{X}$ é completo.

Possimao a questo punto applicare il teorema delle Contrazioni allora T ha un unico punto fisso allora l'equazione integrale ha un unica soluzione allora esiste la soluzione del problema di Cauchy e su $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ possiamo gia dire che la soluzione é unica.
MA QUANTO CAZZO É LUNGA FORSE SONO A METÁ



FINIRE DISEGNO......
OSS:: Passando da (a-), (d-) abbiamo ristretto sempre piú il range di valori che δ,r possono assumere, cosí che alla fine é rimasto un intervallo sul quale é applicabile il teorema delle Contrazioni.
Abbiamo trovato un intervallo $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ in cui la soluzione esiste. Adesso osserviamo cosa accade prima a destra e poi a sinitra dell'intervallo con un ragionamento analogo.
Soluzioni che sono coincidenti(cioé unica) in un intervallo possono non esserlo al difuori dello stesso. Cauchy locale ci assicura che questo non puó succedere.

Sia per assurdo t_M l'ultimo istante fino a cui φ_1, φ_2 coincidono, cioé: $t_M = \sup\{t \in I : t \geq t_0, \varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau), \forall \tau \in [t_0, t[\}$.
Cerchiamo di mostrare o che non cé o che é alla fine dell'intervallo I.
Sesi considera il problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_M) = x_{t_M} \end{cases}$. Possiamo applicare quanto trovato per il punto uno della tesi, cioé esiste un intervallo contenente t_M nella sua parte interna in cui la soluzione esiste ed é unica.
OSS:: t_M esiste sempre poiché é il *sup* di un insieme non vuoto, inoltre $t_M \geq t_0 + \delta$ é certamente $t_M \in \overline{I}$
Possono verificarsi due casi, o t_M é sul bordo di I ed in questo caso la dimostrazione é finita poiché fino al bordo dell'intervallo le soluzioni coincidono. Oppure T_M é nella parte interna dell'intervallo quindi $t_m \neq \sup I \Rightarrow t_M \in \overset{\circ}{I}$, e se é u n punto interno per l'intervallo allora é anche un punto di accumulazione per lo stesso, é quindi possibile calcolare $\lim_{t \to t_M^-} \varphi_1(t) \quad \lim_{t \to t_M^-} \varphi_2(t)$ ma entrambi i limiti devono essere uguali a x_M poiché sia φ_1, φ_2 sono soluzioni al problema di Cauchy e devono quindi soddisfare la condizione iniziale, anche perché fino a t_M le due soluzioni coincidono e quindi il loro limite deve essere lo stesso.
Riguardo x_M si puó dire che:

1. se $x_M = A \Rightarrow$ le soluzioni coincidono fino alla fine dell'insieme A.

2. se $x_m \in \overset{\circ}{A}$ abbiamo esattamente le ipotesi del teorema di Cauchy locale, per quanto visto si ha necessariamente che:
   $\exists \delta_M > 0, \exists \varphi_M : [t_M - \delta_M, t_0 + \delta_M] \to R^n$ che é soluzione del nuovo problema impostato, UNICA per quanto detto sull'intevallo.

Applicando il ragionamento funo a quando non si raggiungono i bordi di I e di A abbiamo dimostrato che se esistono pi'šsoluzioni allora queste coincidono dove sono definite entrambe.
FATTO IL SECONDO PUNTO DEL TEOREMA.
Dati

$$(P_f) : \begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (P_g) : \begin{cases} \dot{y} = f(g, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Siano φ soluzionedi P_f, ψ soluzione di P_g, bisogna stimare quanto queste due soluzioni di due problemi con la condizione iniziale allo stesso istante distano.

$$\varphi : [t_0 - \delta_f, t_0 + \delta_f] \to R^n$$

$$\psi : [t_0 - \delta_g, t_0 + \delta_g] \to R^n$$

chiamo $\delta = \min \delta_f, \delta_g$ che sicuramente soddisfa entrambe. Per stimare la distanza tra le soluzioni valuto:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau - y_0 - \int_{t_0}^{t} g(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right\|$$

linearitá integrale disugualianza norama... modulo per i differenziali ....

$$\|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau)) - g(\tau, \psi(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$

adesso all'interno dell'integrale aggiungo e tolgo la quantitá $f(\tau, \psi(\tau))$ e applico la disugualianza triangolare riarrangiando i termini

$$\|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))\| + \|f(\tau, \psi(\tau)) - g(\tau, \psi(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$

$$\|x_0 - y_0\| + \|f - g\|_{c^0} |t - t_0| + \left| \int_{t_0}^{t} L \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| \, d\tau \right|$$

per comoditá restringiamo la trattazione al caso $t > t_0$ sparisce il modulo. Rscrivo il primo e l'ultimo membro della disugualianza

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq [\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{c^0}] + \left| \int_{t_0}^{t} L \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| \, d\tau \right|$$

$$\left(\delta(t) \leq \delta_0 + \int_{t_0}^{t} \kappa(\tau)\delta(\tau) d\tau \right) :: Gronwall$$

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq [\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{C^0}] + e^{L|t-t_0|}$$

QUESTO TEOREMA É TROPPO DA PRO. □

ESEMPIO: DECADIMENTO RADIOATTIVO
Il decadimento di una sostanza radioattiva é ben descritto da $\dot{x} = -k \cdot x$ *dove* x *é la quantitá di sostanza radioattiva non ancora decaduta e* k *é una costante propria di ogni singolo materiale*
....
ESEMPIO: LEGGE DEL CALORE DI NEWTON
......
ESEMPIO: CRESCITA LOGISTICA
......

4.4 Teoria Globale

Proposizione 46. *Siano* (X, d_x) *e* (Y, d_y) *spazi metrici, sia* $f : A \subseteq X \to Y$. *Se* f *é uniformemente continua su* A *allora* $\exists! \overline{f} : \overline{A} \to Y$ *t.c.* $\overline{f}_{|A} = f$. *Cioé* f *puó essere estesa in modo unico alla chiusura dell'insieme* A.

Definizione 35. *Una funzione* $f : I \times R^n \to R^n$ *con* I *intervallo in* R *si dice sub lineare se esistonop due costanti posirive* A *e* B *t.c.:* $\forall t \in I$

$$\|f(t, x)\| \leq A + B \|x\|$$

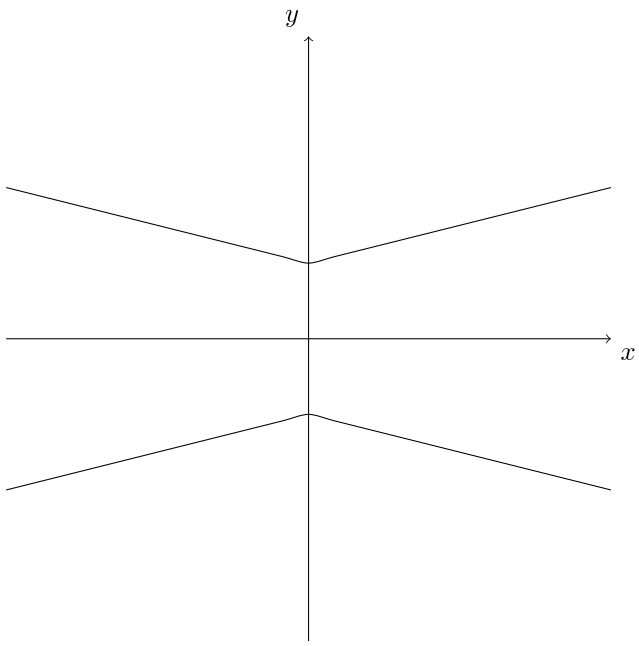
ESEMPIO:: $f(t, x) = x^2$ *NON SUBLINEARE*
ESEMPIO:: $f(t, x) = sin(x^2)$ *SUBLINEARE*

Osservazione 30. *Sia* $f(t, x)$ *globalmente Lipshitziana in* x *uniformemente in* t *allora* f *sublineare.*

$$\exists L \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in R^n, t \in I, \|f(t, 0)\| \leq A$$

$$\|f(t,x_2) - f(t,x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$$
$$\|f(t,x)\| \leq \|f(t,x_0)\| + \|f(t,x) - f(t,0)\| \leq A + L\,\|x\|$$

In sostanza una funzione é sublineare se esiste una retta tale per cui il grafico della funzione é tutto nella regione di piano delimitata da questa retta.



ESEMPIO::$x \cdot sin(x)$ SUBLINEARE
ESEMPIO::$x^2 \cdot sin(x)$ NO SUBLINEARE
ESEMPIO::e^x NO SUBLINEARE
Diciamo sublineare se il grafico nn si impenna.

Proposizione 47. *Data la funzione $f : I \times R^n \to R^n$, se:*

1. *$I \subseteq R$ é un intervallo, con $t_0 \in \overset{\circ}{R^n}$*
2. *$f \in C^0(I \times R^n; R^n)$*
3. *f é localmente Lipschitziana in $x \in R^n$ uniformemnte rispetto $t \in I$*
4. *f é sublineare*

allora il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ ammette un'unica soluzione definita sull'intervallo I.

Dimostrazione. DISEGNO...
Il teorema di Cauchy Locale assicura che la soluzione esiste unica su un intervallo centrato all'istante iniziale. Bisogna dimostrazre che la soluzioe puó essere estesa a tutto l'intervallo. Questo nn si puó fare in due casi:

1. c'é un asintoto verticale

2. oscilla tanto che a un certo punto non va piú avanti

Quindi i casi in cui la soluzione non si puó estendere su tutto l'intervallo sono quelli in cui non esiste il limite della soluzione. Quindi dobbiamo evitare tali comportamenti.
Ragionamento da t_0 in avanti.
Sia $T = sum\{t \in I : \exists soluzionesu\, [t_0, t[\}$ cioé prendo l'estremo superiore dei tempi per cui c'é una soluzione. Se $T = supI$ o $T = +\infty$ abbiamo la tesi.
Se T finito con $T < supI$, dimostrando che la derivata della soluzione é limitata si escludono i casi in cui l'estensione della soluzione non si puó fare. quindi bisogna mostrare $\dot{x} = f(t, x)$ é limitata sull'insieme dove puó arrivare la x
Sia ora φ soluzione del problema di Cauchy:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Valuto allora
$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau\right| = \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau))\|\, d\tau$ poiché $t \in [t_0, T[$
$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (A + B\, \|\varphi(\tau)\|)\, d\tau$ poiché f é sublineare.
$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + A(T - t_0) + \int_{t_0}^{t} B\, \|\varphi(\tau)\|\, d\tau$
...
applico ilGronwall e risulta che

$$\|\varphi(t)\| \leq (\|x_0\| + A(t - t_0))\, e^{B(t-t_0)} \leq (\|x_0\| + A(t - t_0))\, e^{B(T-t_0)}$$

Abbiamo quindi dimostrato che la f resta limitata.
Posso guardare alla funzione come segue:

$$\sup\left\{f(t, x) : t \in [t_0, T[\,, x \in \overline{B\left(x_0, [\|x_0\|\, A\,(T - t_0)]\, e^{B(T-t_0)}\right)}\right\}$$

$\overline{B\left(x_0, [\|x_0\|\, A\,(T - t_0)]\, e^{B(T-t_0)}\right)}$ é un insieme compatto poiché chiuso e limitato in R^n, φ é limitata, la f limitata, allora $\dot{\varphi}$ limitata allora φ lipshitziana allora φ uniformemente continua.
Allora esiste finito $\lim\limits_{t \to T^-} \varphi(t) = X$. Ora possono verificarsi due casi:

1. Se $T = \sup I \Rightarrow$ dimostrazione conclusa
2. Se $T < \sup I \Rightarrow$ posso considerare il problema di Cauchy
   $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(T) = X \end{cases}$ Questo é un assurdo poiché arriveremmo a trovare una soluzione definita oltre il tempo T. Questo nega la scelta fatta a inizio dimostrazione.

□

4.5 Equazioni Autonome

Definizione 36. *Un'equazione differenziale ordinaria in forma normale si dice autonoma sse la variabile indipendente (solitamente il tempo) non vi compare escplicitamente.*

Osservazione 31. *Tipicamente, le euqazioni differenziali ordinarie autonome modellizzano sistemi isolati.*

Osservazione 32. *Invarianza per traslazione temporale.*
Non é importante ai fini dello studio dell'equazione l'istante iniziale, ma solo la lunghezza dell'intervallo. Se $x = \varphi(t)$ *risolve* $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
Allora $x = \varphi(t + t_0)$ *risolve* $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Dimostrazione. Sia $\psi(t) = \varphi(t_0 + t)$
$\dot{\psi}(t) = \dot{\phi}(t_0 + t) = f(\varphi(t_0 + t)) = f(\psi(t))$
$\psi(0) = \varphi(t_0) = x_0$ □

Proposizione 48. *Teorema dell'eneria cinetica*
Un punto materiale non vincolato P *di massa* m *si muove sotto l'azione di una forza* F *che dipende solo dalla posizione di* P*. Allora la variazione di energia cinetica di* P *é uguale al lavoro compiuto su* P *da questa forza.*

Dimostrazione. sia $\underline{x} = (x, y, z)$ la terna delle coordinate di P. Per il Secondo Principio della Dinamica e per quanto assunto sulla forza F, il moto di P é descritto dall'equazione(vettoriale) differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$m\ddot{\underline{x}} = F(\underline{x})$$

$$m\ddot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} = F(\underline{x})\dot{\underline{x}}$$

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\left(\dot{\underline{x}}\right)^2\right) = F(\underline{x})\dot{\underline{x}}$$

$$\int_0^t \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\left(\dot{\underline{x}}(\tau)\right)^2\right)d\tau = \int_0^t F(\underline{x}(\tau)) \cdot \dot{\underline{x}}(\tau)d\tau$$

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}(t)\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\dot{x}(0)\right)^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} F(\xi)d\xi$$

L'ultimo integrale é calcolato lungo la traiettoria di P. □

ESEMPIO:: Il Lancio di un Paracadutista
.....
.....
.....
ESEMPIO:: CADUTA IN UN LIQUIDO
.....
.....
.....

4.6 Equazioni Differenziali Ordinarie

Definizione 37. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $n \in N$. Date le $n+1$ funzioni $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{C}$ si dice equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n, l'equazione differenziale:*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot \dot{x} + a_0(t)x = f(t)$$

Se $f \equiv 0$ l'equazione si dice omogenea.

Proposizione 49. *sia I un intervallo compatto e tale che $\mathring{I} \neq \emptyset$ siano $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f \in C^0(I;\mathbb{C})$. Allora $\forall t_0 \in \mathring{I}$ e $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} []x^{(n)} = -\sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \\ x(t_0) = c_0 \\ x(t_2) = c_1 \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1} \end{cases}$$

ammette soluzine unica definita su tutto l'intervallo I.

Dimostrazione. Un'equazione differenziale lineare di ordine n puó essere trasfprmato in un sistema di equazioni al primo ordine. Introduciamo la variabile $X \in \mathbb{C}^\ltimes$ ed il dato iniziale $C \in \mathbb{C}^\ltimes$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ldots \\ x^{(n-1)} \\ x^{(n)} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \ldots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

il problrma di Cauchy per l'equazione lineare diventa:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \ldots \\ X_{n-1}' \\ X_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \ldots \\ X_n \\ -\sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} X(t_0) = C \end{cases}$$

La funzione
$$\begin{aligned} F : I \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n \\ (t, X) &\to \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \ldots \\ X_n \\ -\sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$
é linear in X e globalmente lipshitziana in X uniformemente in t, infatti perogni $X, Y \in \mathbb{C}^n$

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq \sqrt{1 + \left(\max_k \sup_I \|a_k\|\right)^2} \cdot \|X - Y\|$$

Sono soddisfatte le ipotesi di Cauchy Globale allora si ha latesi. □

Osservazione 33. *La locuzione lineare é giustificata dalla proposizione seguente.*

Proposizione 50. *Sia $I \subseteq R$ un intervallo e $n \in \mathbb{N}$. Date le $n+1$ funzioni $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{C}$,l'operatore*
$$\begin{array}{rcl} L : C^n(I;\mathbb{C}) & \to & C^0(I;\mathbb{C}) \\ x & \to & x^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} \end{array}$$
é lineare

Dimostrazione. La linearitá di L equivale a:

$$\begin{array}{cc} L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) & \forall x_1, x_2 \in C^n(I;\mathbb{C}) \\ L(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot L(x) & \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in C^n(I;\mathbb{C}) \end{array}$$

Entrambe le condizioni seguono dalle regole di derivazione. □

4.7 Equazioni Lineari a Coefficienti Costanti

Definizione 38. *Dati i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathbb{C}$, si dice equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n a coefficienti costanti l'equazione differenziale*
$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = b$$
se $b = 0$ l'equazione si dice omogenea. La sua Equazione caratteristica é l'equazione algebrica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n+1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Osservazione 34. *Nella risoluzione di eqauzioni differenziali lineari la funzione esponenziale $t \to e^{\lambda t}$ riveste un ruolo molto particolare. Questa funzione é un autovalore dell'operatore di derivazione D relativo all'autovalore, risolve infatti λ:$Dx = \lambda \cdot x$*

Proposizione 51. *Data l'equazione*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = b$$

$x(t) = e^{\lambda t}$ risolve l'equazione omogenea $\Leftrightarrow$ λ é soluzione dell'equazione caratteristica.

LEMMA:: Sia $x(t) = t \cdot e^{\lambda \cdot t}$. Allora , per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$x^{(n)}(t) = \left(\lambda^n t + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda t}$$

???????????????NON L?HO CAPITA BENE.......................

Proposizione 52. *Data l'equazione*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = b$$

$x(t) = te^{\lambda t}$ risolve l'eqauzione omogenea $\Leftrightarrow$ λ é soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicitá almeno ??????????.

Parte V

Equazioni Differenziali

Capitolo 5

Equazioni Differenziali

5.1 Preliminari

Equazione é un ugualianza in cui c'é almeno una incognita.
Equazione differenziale é un particolare tipo di equazione e stabilisce una relazione tra la funzione incognita e le sue derivate.In un equazione funzionale si cerca l'ugualianza di: insieme di arrivo, insieme di partenza, corrispondenza.
Non é necessario sapere il valore della soluzione ma sapere che ne esiste una.????????
Equazione differenziale ordinaria:
1- La funzione incognita é funzione di una sola variabile solitamente il tempo.
2- La funzione incognita e le sue derivate sono calcolate allo stesso istante di tempo.

Definizione 39. *Si dice equazione differenziale ordinaria di ordine n nella funzione incognita $x \in R^k$ un espressione del tipo:*

$$f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0$$

dove $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^{1+(1+n)k}$ e $t \in R$.
Soluzione di questa equazione differenziabile é una qualunque funzione $x : I \to R^k$ definita su un intervallo $I \subseteq R$, derivabile n volte in I e tale che $\forall t \in I$

$$(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) \in A$$
$$f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0$$

Soluzione massimale di un equazione differenziale ordinaria é una soluzione $x_m : I_m \to R^k$ tale che nesuna soluzione possa essere definita in un intervallo I con $I_m \subseteq I_m$

Definizione 40. *un'equazione differenziale é in forma normale se e solo se si presenta nella forma*

$$x^n = g(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{n-1}))$$

Osservazione 35. *lo studio di unj equazione differenziale ordinaria in forma non normale inizia generalmente con l'utilizzo del Teorema della Funzione Implicita insieme ai teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie in forma normale*

Osservazione 36. *illeggibile*

Proposizione 53. *ogni equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine n é equivalente a una equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine* 1.

Dimostrazione. CASO n=2
abbiamo che $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$
introduco $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$
quindi $\dot{X} = f(t, X)$ □

Osservazione 37. *in generale un problema si dice BEN POSTO o BEN POSTO NEL SENSO DI HADAMARD ogniqualvolta:*

1. *esisste*
2. *é unica*
3. *dipende con continuitá dai dati*

Definizione 41. *si diche problema di Cauchy del primo ordine il problema di determinare una soluzione di un equazione differenziale ordinaria del primo ordine soddisfacente ad una condizione iniziale.*
c'e una nota sul ben posto.......

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dove $f : J \times A \to R^n$, $J \subseteq R$ *é un intervallo,* $t_0 \in \mathring{J}$, $A \in R^n$, $x_0 \in \mathring{A}$.
Soluzione di un problema di Cauchy é una funzione $x : J \to R^n$ *che sia soluzione dell'equazione differenziale* $\dot{x} = f(t, x)$ *definita in un intervallo* I *contenente* t_0 *nella sua parte interna,* $I \subseteq J$, *tale che* $x(t_0) = x_0$ *e* $x(I) \subseteq A$, *e* x *derivaile.*

Osservazione 38. *la condizione* $x(t_0) = x_0$ *viene abitualmente chiamata condizione iniziale nonostante la definizione di soluzione richieda che la stessa sia definita in un intervallo contenente* t_0 *nella sua parte interna. In molte applicazioni delle equazioni differenziali ordinare* t_0 *é proprio l'inizio dell'intervallo in cui si cerca la soluzione. I risultati seguenti continuano a valere con piccole modifiche alle dimostrazioni.??????????*

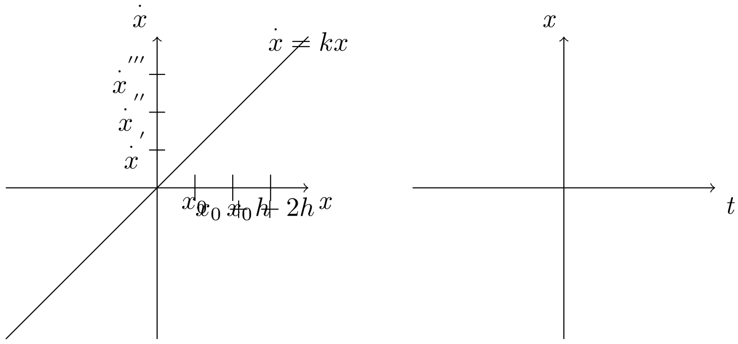
5.2 La Legge di Malthus

Una popolazione, dotata di tutto il necessario per vivere e riprodursi, cresce secondo la legge di Malthus: la velocitá di crescita della popolazione é proporzionale alla prpolazione stessa.

$$\dot{x} = k \cdot x$$

dove x *é il numero di membri della popolazione e* k *é una costante positiva legata alla prolificitá della specie in esame, generalmente calcolaa come differenza tra*

i tassi di natalitá e di mortalitá.
Il problema di Cauchy é quindi $\begin{cases} \dot{x} = k \cdot x \\ x(0) = 0 \end{cases}$ *con* $x \in R, k > 0$ *e* $x_0 = 0$



blablabla ....
....
Limiti di questo modello:

- *la variabile x dovrebbe variare in N, poiché una popolazione ha un numer intero di elementi.*

- *In molte specie é verosimile che il numero di nati al tempo t dipenda dalla popolazione presente ad un tempo precedente $x(t-T), T > 0$*

- *Suppore che una popolazione abbia per sempre a disposizione risorse sufficienti puó non essere realistico*

- *Questo modello va bene quando si considereano intervalli di tempo molto lunghi.*

5.3 Teoria Locale

Definizione 42. *Una funzione $f : I \times A \to R^{?}$ .... $A = A\overset{\circ}{A} \subseteq R^n$, si dice localmente lipschitziana??? .... uniformemente rispetto a t se*

$$\forall X_0 \in A, \exists ???? : \forall x_1, x_2 \in B(x_0, r) \cap A, \forall t \in I, ...$$

Proposizione 54. *Siano $I \subseteq R$ un intervallo aperto, ...????...., ogni funzione $f \in C^1(I, R^n)$ é localmente lipschitziana??? ..... uniformemente rispetto a $t \in I$.*

Dimostrazione. sia $x \in A \Leftarrow \exists B(x_0, r) \subseteq A$ con $r > 0$, anche $\overline{B(x_0, r)} \subseteq A$ scelto r abbastanza piccolo, allora $\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| le \sup_{(t,x) \in I \times \overline{B(x_0,r)}} \|Df()\| \, \|x_2 - x_1\|$ per la formula degli ccrescimenti finiti. □

5.3.1 Esistenza e Unicitá

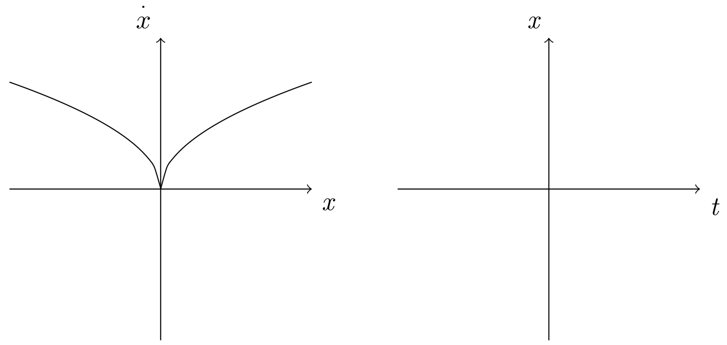
Proposizione 55. *Teorema di Peano Si consideri ilseguente problema di Cauchy:* $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *con* $f : I \times A \in R^n$ *soddisfacente alle ipotesi:*

1. $I \subseteq R$ *intervallo,* $A \subseteq R^n, t_0 \in \mathring{I}, x_0 \in \mathring{A}$
2. $f \in C^0(I \times A; R^n)$

Allora esiste una soluzione, cioé $\exists J \subseteq I$ *intervallo e* $\exists \varphi : J \to R^n$ *con le proprietá:*

- $J \subseteq I, \varphi(J) \subseteq A$
- $t_0 \in \mathring{J}, \varphi(t_0) = x_0$
- φ *derivabile e* $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

Osservazione 39. *???*
ESEMPIO Il Baffo/Pennello di Peano
$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$



Se $x_0 = 0$ *ho che* $\varphi(t) = 0$ *é soluzione* $\forall t$
Ma $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ *é anche un'equazione a variabili separabili quindi risolvibile.*

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{|x|}} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}}{\sqrt{|x|}} dt = t$$

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = t$$

valuto ora il caso $x >= 0$ *quindi* $|x| = x$

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} = t$$

la soluzione cercata é quindi $x(t) = \frac{1}{4}t^2$, *estendendo il ragionamento ai tempi negativi si trova che la soluzione cercata é:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\frac{1}{4}t^2 & t > 0, \\ 0 & t = 0 \\ -\frac{1}{4}t^2 & t < 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato che per la condizione iniziale $x_0 = 0$ *il sistema ammette due soluzioni, si riesce estendere la soluzione a invinite funzioni.*

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-a)^2 & t < a, \\ 0 & t \in [a,b] \\ +\frac{1}{4}(t-b)^2 & t > 0 \end{cases}$$

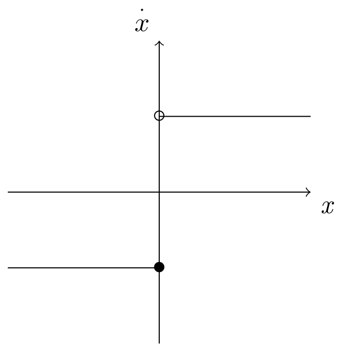
infatti:

$$\varphi^{'}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{8}(t-a) & t < a, \\ 0 & t \in [a,b] \\ +\frac{1}{8}(t-b) & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{8}(t-a) = \frac{-\frac{1}{4}(t-a)^2}{\sqrt{-\frac{1}{4}(t-a)^2}} & t < a, \\ 0 = 0 & t \in [a,b] = ...?????sistema \\ +\frac{1}{8}(t-b) = \frac{\frac{1}{4}(t-b)^2}{\sqrt{\frac{1}{4}(t-b)^2}} & t > 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato infinite soluzioni.
Questo esempio per sottolineare che il teorema di peano non garantisce l'unicit'a della soluzione ESEMPIO CONTINUITÁ É IPOTESI NECESSARIA
Questo esempio mostra che se non c'é continuti'á, puó?????????? non esserci la soluzione.

Dato il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases} \\ x(0) = 0 \end{cases}$



$x(t) = 0$ *soddisfa la condizione iniziale ma ovviamente nn puó essere soluzione del problema poiché per* $x \neq 0$ *si ha che* $\dot{x} = \pm 1$ *che non é la derivata della funzione nulla.*
partendo sempre dalla condizione iniziale si puó ipotizzare per esempio che la soluzione cresca, solo che questo contraddice $\dot{x}(0) = -1$
se invece si ipotizza che decresce da 0 *si ottiene che la funzione assume valori negativi, anche questo é un assurdo poiché la derivata per valori negativi della*

funzione é positiva.

Precisiamo che se il problema fosse stato $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases} \\ x(0) = -3 \end{cases}$ *allora la funzione* $\varphi(x) = -x + 3$ *sarebbe stata soluzione nell'intervallo* $J =]-\infty, 0[$

Proposizione 56. *Teorema di Cauchy Locale In sostanza si dimostra che il problema di Cauchy é ben posto nel senso di Hadamard.*

Si consideri il problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

con $f : I \times A \to R^n$ *soddisfacente le ipotesi:*

1. $I \subseteq R^n$ *intervallo,* $t_0 \in \mathring{I}, A \subseteq R^n, x_0 \in \mathring{A}$
2. $f \in C^0(I \times A; R^n)$ *queste prime due ipotesi garantiscono l'esistenza, Thm.Peano.*
3. f *é localmente Lipschitziana in* $x \in A$ *uniformemente rispetto a* $t \in I$

Allora:

1. *Esistenza*
   $\exists J \subseteq I, \exists \varphi : J \to R^n$ *con le proprietá*
   $$\varphi soluzione : \begin{cases} * & J \subseteq I, \varphi(J) \subseteq A \\ * & t_o \in \mathring{J}, \varphi(t_0) = x_0 \\ * & \varphi derivabile, \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in J \end{cases}$$
2. *Unicitá*
   Se $\exists J_1, J_2$ *intervalli con* $J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I$ *e* $\exists \varphi_1 : J_1 \to R^n, \varphi_2 : J_2 \to R^n$ *soluzioni, cioé*
   $$\varphi_1, \varphi_2 soluzione : \begin{cases} * & J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I, \varphi_1(J_1) \subseteq A, \varphi_2(J_2) \subseteq A \\ * & t_o \in \mathring{J}_1, t_o \in \mathring{J}_2 \varphi_1(t_0) = x_0, \varphi_2(t_0) = x_0 \\ * & \varphi_1, \varphi_2 derivabili, \dot{\varphi_1}(t) = f(t, \varphi_1(t)) \quad \forall t \in J_1 \dot{\varphi_2}(t) = f(t, \varphi_2(t)) \quad \forall t \in \end{cases}$$
   Si puó osservare che $J_1 \cap J_2$ *é non vuoto poicé entambi gli insiemi contengono* t_0 *nella loro parte interna.*
   Allora $\forall t \in (J_1 \cap J_2)$ *vale* $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$*,cioé se esistono due soluzioni ovunque entrambe siano definite esse coincidono..*
3. *Dipendenza Continua Dai Dati*
   Si considerino i problemi di Cauchy che hanno la condizione iniziale nello stesso istante:
   $$(1) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \dot{y} = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
   con $f, g : I \times A \to R^n$ *soddisfacenti le ipotesi allora esiste un* $\delta > 0$ *tale che sull'intervallo* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *sono definite una soluzione* φ *di (1) ed una soluzione* ψ *di (2). Inoltre esiste* $L > 0$ *t.c.* $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *vale:*
   $$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (\|x_0 - y_0\| + \delta \|f - g\|_{C^0}) e^{L|t - t_0|}$$
   dove $\|f - g\|_{C^0} = \sup_{I \times A} \|f(t, x) - g(t, x)\|$

Osservazione 40. *L'equazione integrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

viene spesso denominata EQUAZIONE DI VOLTERRA.
Questa equazione ha senso anche per alcune funzioni f non non continue ma solo misurabilinel primo argomento. Ne consegue che nei Teoremi di esistenza ed unicitá (locali/globali) l'ipotesi "f continua" puó essere sostituita da "f continua tratti in $t, \forall x$, continua in x e limitata"

Osservazione 41. *la norma dell'integrale é minore uguale dell'integrale della norma.*

Proposizione 57. *LEMMA DI GRONWALL*
Dati $a, b \in R$ con $a \leq b$ siano $\delta_0 \in [0; +\infty]$ e $\delta, \kappa : [a, b] \to R$ funzioni continue su $[a, b]$ con $\delta(t) \geq 0$,$\kappa(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ e $\delta(t) \leq \delta_0 + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$ Allora

$$\delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t \kappa(\tau)d\tau}$$

Questo teorema porta da una stima implicita di δ(sotto il segno di integrale) ad una stima esplicita

Dimostrazione. sia $\delta_0 > 0$. Sia $\Delta(t) = \delta_0 + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$.

Vale per ipotesi che $\delta(t) \leq \Delta(t) = \delta_0 + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$

Sfruttando la derivata di $ln(\Delta(t))$ si ottiene $\frac{d}{dt}(ln(\Delta(t))) = \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} = \frac{\kappa(t)\delta(t)}{\Delta(t)}$, ed il termine $\frac{\delta(t)}{\Delta(t)} \leq 1$, Integrando il primo e l'ultimo termine

$$\int_a^t \left(\frac{d}{dt} (ln(\Delta(t))) \right) \leq \int_a^t \kappa(\tau)d\tau$$

$$ln(\Delta(t)) \leq ln(\delta_0) + \int_a^t \kappa(\tau)d\tau$$

$$\Delta(t) \leq \delta_0 e^{\int_a^t \kappa(\tau)d\tau}$$

Da cui la tesi. Se $\delta_0 = 0$, ponendo $\Delta(t) = \epsilon + \int_a^t \kappa(\tau)\delta(\tau)d\tau$ si ottiene $\delta(t)\epsilon$ .... e il mio cervello sta bruciando □

Dimostrazione. Cauchy Locale:
L'idea alla base della dimostrazione é che vogliamo riuscire a trasformare il problrma di Cauchy in un problema di punto fisso.Prima di tutto serve una realazione che dal problema di Cauchy ci permetta di ottenere x in funzione di

qualcosa che dipenda da x.
Integrando ambi i membridella prima equazione del problema di ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} (\dot{x})d\tau = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau$$

T é una funzione del tipo: $\begin{array}{ccc} T :? & \rightarrow & ? \\ x & \rightarrow & Tx \end{array}$, con $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau$
Abbiamo raggiunto un problem di npunto fisso ($x = Tx$). Ora bisogna determinare l'insieme di partenza e l'insieme di arrivo in maniera utile per la dimostrzione. Per poter applicare il Teorema delle contrazioni serve che nlo spazio di partenza e di arrivo siano uguali e chiamiamo $\mathcal{X}$.
$T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ t.c.: $y(t) = (Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau$ Bisogna quindi scegliere l'insieme $\mathcal{X}$. É un insieme di funzioni, in cui l'equivalenza sopra deve avere senso, cioé serve x continua per avere l'equivalenza con il problema di Cauchy, quindi $\mathcal{X} = C^0(\ldots)$.
Inoltre volendo una soluzione del problema di Cauchy, la funzione $x(pensosiay(t) = x)$ deve essere definita almeno su un intervallo contenente t_0 nella sua parte interna, non interessa l'estensione di tale intevallo quindi si puó scegliere $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, inoltre deve avere valori in un insieme con x_0 nella sua parte interna, $\overline{B(x_0, r)}$. Quindi $\mathcal{X} = C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta] ; \overline{B(x_0, r)})$
Per δ, r abbastanza piccoli si ha $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq I$, $\overline{B(x_0, r)} \subseteq A$, quindi adesso il problema é quello di determinare δ, r.
Per poter applicare il teorema delle contrazioni:

a- Tx definita (possibilitá di calcolarla)

b- $Tx \in \mathcal{X}$ (insiemi di partenza e arrivo)

c- Tx contrazione

d- $\mathcal{X}$ completo

Se tutti questi punti sono soddisfatti, si puó trovare $x = Tx$, cioé una x che soddisfa l'equazione integrale e di conseguenza, per equivalenza, soluzione del problema di Cauchy.

a- Tx definita significa poter calcolare l'integrale,per poter calcolare l'integrale devo poter calcolare la f, per calcolare la f ho bisogno che τ e $x(\tau)$ stiano dentro gli insiemi su cui é definita la f, cioé I, A, per essere sicuri di non uscire dall'intervallo:

$$\delta > 0 \quad t.c: \quad [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq I$$

OSS:: Se si cambiano δ, r con valori minori tutto vale ancora.
OSS:: Per il problema x derivabile -¿ integrale ... mi sosto in C^0

b- Tx deve appartenere a $\mathcal{X}$. L'insieme $\mathcal{X}$ sostanzialmente pone tre vincoli a Tx: deve essere C^0, definita in $[t_o - \delta; t_0 + \delta]$ a valori in $\overline{B(x_0, r)}$.
Per iniziare si verifica che sia definita in $[t_o - \delta; t_0 + \delta]$
.... qualchosa che non comprendo.... C^0
Resta da verificare che Tx é a valori nella sfera, cioé che

$$(Tx)(t) \in \overline{B(x_0, r)}$$

Valuto la distanza tra $(Tx)(t)$ e x_0. La differenza tra la posizione al tempo t e al tempo t_0, questa distanza pu'øessere controllata con la velocitá e il tempo per cui il punto dsi é mosso.
Chiamata V la massima velocitá alla quale puó muoversi il punto, $V = \sup(t_0 \times X_0) \in ([to + \delta, t_0 - \delta] \times \overline{B(x_0, r)}) = \{\|f(t, x(t))\|\}$ che é il sup della norma di f, cioé dei moduli dei vettori velocitá, questo esiste sempre finito, non ∞ poiché f é continua, la norma é continua , t varia in un chiuso e limitato, x_0 varia in un chiuso e limitato, quindi stiamo calcolando il sup di una funzione continua su un chiuso e limitato allora per il teorema di Weierstrass $V = \max(t_0 \times X_0) \in ([to + \delta, t_0 - \delta] \times \overline{B(x_0, r)}) = \{\|f(t, x(t))\|\}$
Non potendo modificare V, δ poniamo una restrizione su r:$V\delta < r$, da cui $\delta < r \cdot V$

$$\|(Tx)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)))d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} V \cdot d\tau \right| = V \, |t - t_0| \leq V\delta < r$$

....aggiunto il modulo per $t < t_0$ e $t > t_0$ non lo si sa a priori
quidi $\|(Tx)(t) - x_0\|$ é minore di r scelto δ opportunamente piccolo.

c- Se Tx é una contrazione deve valere che

$$\|Tx_2 - Tx_1\|_{C^0} \leq K \, \|x_2 - x_1\|_{C^0} \quad k \in [0, 1[\quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

con $\|Tx_2 - Tx_1\|_{c^0} = \sup\limits_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\|$, partendo da questa utilizzando prima la definizione di f poi la linearitá dell'integrale ....lipsh f... proprietá

$$\|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\| =$$
$$\left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_2(\tau))d\tau - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))d\tau \right) \right\| =$$
$$\left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_2(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))d\tau \right\| \leq$$
$$\left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x_2(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$
$$\left| \int_{t_0}^{t} L \, \|x_2(\tau) - x_1(\tau)\| \, d\tau \right| \leq$$

$$L\left|\int_{t_0}^{t}\|x_2-x_1\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}\,d\tau\right| =$$
$$L\cdot\|x_2-x_1\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}\,|t-t_0| \leq$$
$$L\delta\,\|x-x_0\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}$$

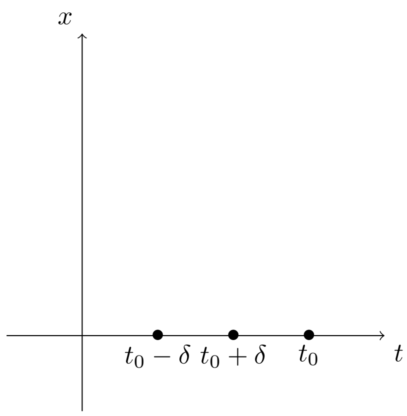
cioé $\forall t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$ vale che $\|(Tx_2)(t)-(Tx_1)(t)\|\leq L\delta\,\|x_1-x_2\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}$ e poiche é vero $\forall t \Rightarrow$ passando all'estremo superiore

$$\|Tx_1-Tx_2\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}\leq L\delta\,\|x_1-x_2\|_{C^0([t_0-\delta,t_0+\delta];R^n)}$$

A questo punto scelto δ t.c. $L\delta<1$ ad esempio $\delta=\frac{1}{2L}$ cosí ottengo che per δ opportuno Tx é una contrazione.

d- Bisogna mostrare che $\mathcal{X}$ é completo.
Supponiamo che $\mathcal{X}\subseteq C^0([t_0-\delta,t_0+\delta]\,;R^n)$, questo insieme é completo rispetto alla metrica $d_\infty=d_{C^0}$, allora se abbiamo una successione x_n di Cauchy in $\mathcal{X}$ lo é anche su $C^0([t_0-\delta,t_0+\delta]\,;R^n)$, allora $\exists x_\infty\in C^0([t_0-\delta,t_0+\delta]\,;R^n)$ con $x_n\to x_\infty$ per $n\to\infty$, ma poiché $\forall t\in[t_0-\delta,to+\delta]$ $x_\infty(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)$ e visto che $\forall t,\forall n\quad\|x_n(t)-x_0\|\leq r$ anche al limite vale $\|x_\infty(t)-x_0\|\leq r\Rightarrow x_\infty\in\mathcal{X}$ cioé $\mathcal{X}$ é completo.

Possimao a questo punto applicare il teorema delle Contrazioni allora T ha un unico punto fisso allora l'equazione integrale ha un unica soluzione allora esiste la soluzione del problema di Cauchy e su $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ possiamo gia dire che la soluzione é unica.
MA QUANTO CAZZO É LUNGA FORSE SONO A METÁ



FINIRE DISEGNO......
OSS:: Passando da (a-), (d-) abbiamo ristretto sempre piú il range di valori che δ,r possono assumere, cosí che alla fine é rimasto un intervallo sul quale é applicabile il teorema delle Contrazioni.
Abbiamo trovato un intervallo $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ in cui la soluzione esiste. Adesso osserviamo cosa accade prima a destra e poi a sinitra dell'intervallo con un ragionamento analogo.
Soluzioni che sono coincidenti(cioé unica) in un intervallo possono non esserlo al difuori dello stesso. Cauchy locale ci assicura che questo non puó succedere.

Sia per assurdo t_M l'ultimo istante fino a cui φ_1, φ_2 coincidono, cioé: $t_M = \sup\{t \in I : t \geq t_0, \varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau), \forall \tau \in [t_0, t[\}$.
Cerchiamo di mostrare o che non cé o che é alla fine dell'intervallo I.
Sesi considera il problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_M) = x_{t_M} \end{cases}$. Possiamo applicare quanto trovato per il punto uno della tesi, cioé esiste un intervallo contenente t_M nella sua parte interna in cui la soluzione esiste ed é unica.
OSS:: t_M esiste sempre poiché é il *sup* di un insieme non vuoto, inoltre $t_M \geq t_0 + \delta$ é certamente $t_M \in \overline{I}$
Possono verificarsi due casi, o t_M é sul bordo di I ed in questo caso la dimostrazione é finita poiché fino al bordo dell'intervallo le soluzioni coincidono. Oppure T_M é nella parte interna dell'intervallo quindi $t_m \neq \sup I \Rightarrow t_M \in \mathring{I}$, e se é u n punto interno per l'intervallo allora é anche un punto di accumulazione per lo stesso, é quindi possibile calcolare $\lim\limits_{t \to t_M^-} \varphi_1(t) \quad \lim\limits_{t \to t_M^-} \varphi_2(t)$ ma entrambi i limiti devono essere uguali a x_M poiché sia φ_1, φ_2 sono soluzioni al problema di Cauchy e devono quindi soddisfare la condizione iniziale, anche perché fino a t_M le due soluzioni coincidono e quindi il loro limite deve essere lo stesso.
Riguardo x_M si puó dire che:

1. se $x_M = A \Rightarrow$ le soluzioni coincidono fino alla fine dell'insieme A.

2. se $x_m \in \mathring{A}$ abbiamo esattamente le ipotesi del teorema di Cauchy locale, per quanto visto si ha necessariamente che:
   $\exists \delta_M > 0, \exists \varphi_M : [t_M - \delta_M, t_0 + \delta_M] \to R^n$ che é soluzione del nuovo problema impostato, UNICA per quanto detto sull'intevallo.

Applicando il ragionamento funo a quando non si raggiungono i bordi di I e di A abbiamo dimostrato che se esistono pǐsoluzioni allora queste coincidono dove sono definite entrambe.
FATTO IL SECONDO PUNTO DEL TEOREMA.
Dati

$$(P_f) : \begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (P_g) : \begin{cases} \dot{y} = f(g, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Siano φ soluzionedi P_f, ψ soluzione di P_g, bisogna stimare quanto queste due soluzioni di due problemi con la condizione iniziale allo stesso istante distano.

$$\varphi : [t_0 - \delta_f, t_0 + \delta_f] \to R^n$$

$$\psi : [t_0 - \delta_g, t_0 + \delta_g] \to R^n$$

chiamo $\delta = \min \delta_f, \delta_g$ che sicuramente soddisfa entrambe. Per stimare la distanza tra le soluzioni valuto:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau - y_0 - \int_{t_0}^{t} g(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right\|$$

linearitá integrale disugualianza norama... modulo per i differenziali ....

$$\|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau)) - g(\tau, \psi(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$

adesso all'interno dell'integrale aggiungo e tolgo la quantitá $f(\tau, \psi(\tau))$ e applico la disugualianza triangolare riarrangiando i termini

$$\|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))\| + \|f(\tau, \psi(\tau)) - g(\tau, \psi(\tau))\| \, d\tau \right| \leq$$

$$\|x_0 - y_0\| + \|f - g\|_{c^0} |t - t_0| + \left| \int_{t_0}^{t} L \, \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| \, d\tau \right|$$

per comoditá restringiamo la trattazione al caso $t > t_0$ sparisce il modulo. Rscrivo il primo e l'ultimo membro della disugualianza

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq [\|x_0 - y_0\| + \delta \, \|f - g\|_{c^0}] + \left| \int_{t_0}^{t} L \, \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| \, d\tau \right|$$

$$\left(\delta(t) \leq \delta_0 + \int_{t_0}^{t} \kappa(\tau)\delta(\tau) d\tau \right) :: Gronwall$$

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq [\|x_0 - y_0\| + \delta \, \|f - g\|_{C^0}] + e^{L|t - t_0|}$$

QUESTO TEOREMA É TROPPO DA PRO. □

ESEMPIO: DECADIMENTO RADIOATTIVO
Il decadimento di una sostanza radioattiva é ben descritto da $\dot{x} = -k \cdot x$ *dove* x *é la quantitá di sostanza radioattiva non ancora decaduta e* k *é una costante propria di ogni singolo materiale*
....
ESEMPIO: LEGGE DEL CALORE DI NEWTON
......
ESEMPIO: CRESCITA LOGISTICA
......

5.4 Teoria Globale

Proposizione 58. *Siano* (X, d_x) *e* (Y, d_y) *spazi metrici, sia* $f : A \subseteq X \to Y$*. Se* f *é uniformemente continua su* A *allora* $\exists! \overline{f} : \overline{A} \to Y$ *t.c.* $\overline{f}_{|A} = f$*. Cioé* f *puó essere estesa in modo unico alla chiusura dell'insieme* A*.*

Definizione 43. *Una funzione* $f : I \times R^n \to R^n$ *con* I *intervallo in* R *si dice sub lineare se esistonop due costanti posirive* A *e* B *t.c.:* $\forall t \in I$

$$\|f(t, x)\| \leq A + B \, \|x\|$$

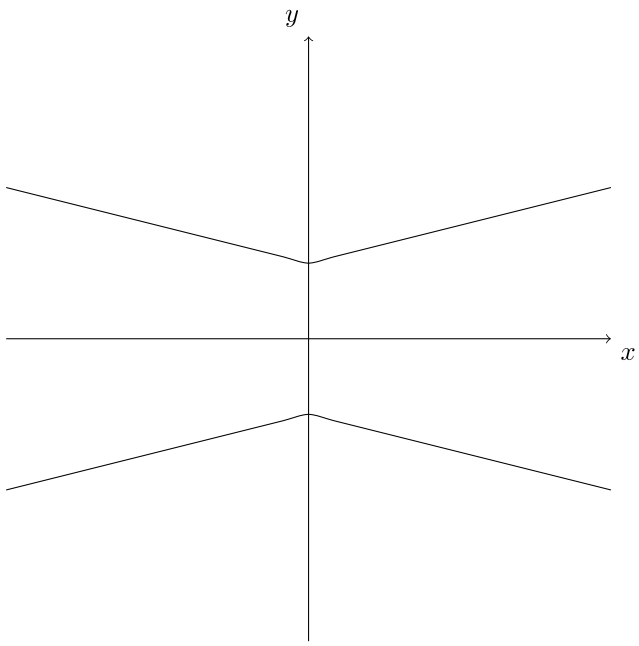
ESEMPIO:: $f(t, x) = x^2$ *NON SUBLINEARE*
ESEMPIO:: $f(t, x) = sin(x^2)$ *SUBLINEARE*

Osservazione 42. *Sia* $f(t, x)$ *globalmente Lipshitziana in* x *uniformemente in* t *allora* f *sublineare.*

$$\exists L \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in R^n, t \in I, \|f(t, 0)\| \leq A$$

$$\|f(t,x_2) - f(t,x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$$
$$\|f(t,x)\| \leq \|f(t,x_0)\| + \|f(t,x) - f(t,0)\| \leq A + L\,\|x\|$$

In sostanza una funzione é sublineare se esiste una retta tale per cui il grafico della funzione é tutto nella regione di piano delimitata da questa retta.



ESEMPIO::$x \cdot sin(x)$ *SUBLINEARE*
ESEMPIO::$x^2 \cdot sin(x)$ *NO SUBLINEARE*
ESEMPIO::e^x *NO SUBLINEARE*
Diciamo sublineare se il grafico nn si impenna.

Proposizione 59. *Data la funzione* $f : I \times R^n \to R^n$*, se:*

1. $I \subseteq R$ *é un intervallo, con* $t_0 \in \mathring{R}^n$
2. $f \in C^0(I \times R^n; R^n)$
3. f *é localmente Lipschitziana in* $x \in R^n$ *uniformemnte rispetto* $t \in I$
4. f *é sublineare*

allora il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *ammette un'unica soluzione definita sull'intervallo* I*.*

Dimostrazione. DISEGNO...
Il teorema di Cauchy Locale assicura che la soluzione esiste unica su un intervallo centrato all'istante iniziale. Bisogna dimostrazre che la soluzioe puó essere estesa a tutto l'intervallo. Questo nn si puó fare in due casi:

1. c'é un asintoto verticale

2. oscilla tanto che a un certo punto non va piú avanti

Quindi i casi in cui la soluzione non si puó estendere su tutto l'intervallo sono quelli in cui non esiste il limite della soluzione. Quindi dobbiamo evitare tali comportamenti.
Ragionamento da t_0 in avanti.
Sia $T = sum\{t \in I : \exists soluzionesu\,[t_0, t[\}$ cioé prendo l'estremo superiore dei tempi per cui c'é una soluzione. Se $T = supI$ o $T = +\infty$ abbiamo la tesi.
Se T finito con $T < supI$, dimostrando che la derivata della soluzione é limitata si escludono i casi in cui l'estensione della soluzione non si puó fare. quindi bisogna mostrare $\dot{x} = f(t, x)$ é limitata sull'insieme dove puó arrivare la x
Sia ora φ soluzione del problema di Cauchy:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Valuto allora
$\|\varphi(t)\| \le \|x_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau\right| = \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau))\|\, d\tau$ poiché $t \in [t_0, T[$
$\|\varphi(t)\| \le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (A + B\,\|\varphi(\tau)\|)\, d\tau$ poiché f é sublineare.
$\|\varphi(t)\| \le \|x_0\| + A(T - t_0) + \int_{t_0}^{t} B\,\|\varphi(\tau)\|\, d\tau$
...
applico ilGronwall e risulta che

$$\|\varphi(t)\| \le (\|x_0\| + A(t - t_0))\, e^{B(t-t_0)} \le (\|x_0\| + A(t - t_0))\, e^{B(T-t_0)}$$

Abbiamo quindi dimostrato che la f resta limitata.
Posso guardare alla funzione come segue:

$$\sup\left\{f(t, x) : t \in [t_0, T[\,, x \in \overline{B\left(x_0, [\|x_0\|\, A\,(T - t_0)]\, e^{B(T-t_0)}\right)}\right\}$$

$\overline{B\left(x_0, [\|x_0\|\, A\,(T - t_0)]\, e^{B(T-t_0)}\right)}$ é un insieme compatto poiché chiuso e limitato in R^n, φ é limitata, la f limitata, allora $\dot{\varphi}$ limitata allora φ lipshitziana allora φ uniformemente continua.
Allora esiste finito $\lim_{t \to T^-} \varphi(t) = X$. Ora possono verificarsi due casi:

1. Se $T = \sup I \Rightarrow$ dimostrazione conclusa
2. Se $T < \sup I \Rightarrow$ posso considerare il problema di Cauchy
$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(T) = X \end{cases}$ Questo é un assurdo poiché arriveremmo a trovare una soluzione definita oltre il tempo T. Questo nega la scelta fatta a inizio dimostrazione.

□

5.5 Equazioni Autonome

Definizione 44. *Un'equazione differenziale ordinaria in forma normale si dice autonoma sse la variabile indipendente (solitamente il tempo) non vi compare escplicitamente.*

Osservazione 43. *Tipicamente, le euqazioni differenziali ordinarie autonome modellizzano sistemi isolati.*

Osservazione 44. *Invarianza per traslazione temporale.*
Non é importante ai fini dello studio dell'equazione l'istante iniziale, ma solo la lunghezza dell'intervallo. Se $x = \varphi(t)$ *risolve* $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
Allora $x = \varphi(t + t_0)$ *risolve* $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Dimostrazione. Sia $\psi(t) = \varphi(t_0 + t)$
$\dot{\psi}(t) = \dot{\phi}(t_0 + t) = f(\varphi(t_0 + t)) = f(\psi(t))$
$\psi(0) = \varphi(t_0) = x_0$ □

Proposizione 60. *Teorema dell'eneria cinetica*
Un punto materiale non vincolato P *di massa* m *si muove sotto l'azione di una forza* F *che dipende solo dalla posizione di* P*. Allora la variazione di energia cinetica di* P *é uguale al lavoro compiuto su* P *da questa forza.*

Dimostrazione. sia $\underline{x} = (x, y, z)$ la terna delle coordinate di P. Per il Secondo Principio della Dinamica e per quanto assunto sulla forza F, il moto di P é descritto dall'equazione(vettoriale) differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$m\ddot{\underline{x}} = F(\underline{x})$$

$$m\ddot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} = F(\underline{x})\dot{\underline{x}}$$

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\left(\dot{\underline{x}}\right)^2\right) = F(\underline{x})\dot{\underline{x}}$$

$$\int_0^t \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\left(\dot{\underline{x}}(\tau)\right)^2\right) d\tau = \int_0^t F(\underline{x}(\tau)) \cdot \dot{\underline{x}}(\tau) d\tau$$

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}(t)\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\dot{x}(0)\right)^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} F(\xi)d\xi$$

L'ultimo integrale é calcolato lungo la traiettoria di P. □

ESEMPIO:: Il Lancio di un Paracadutista
.....
.....
.....
ESEMPIO:: CADUTA IN UN LIQUIDO
.....
.....
.....

5.6 Equazioni Differenziali Ordinarie

Definizione 45. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $n \in N$. Date le $n+1$ funzioni $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{C}$ si dice equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n, l'equazione differenziale:*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot \dot{x} + a_0(t)x = f(t)$$

Se $f \equiv 0$ l'equazione si dice omogenea.

Proposizione 61. *sia I un intervallo compatto e tale che $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$ siano $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f \in C^0(I;\mathbb{C})$. Allora $\forall t_0 \in \overset{\circ}{I}$ e $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} []x^{(n)} = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \\ x(t_0) = c_0 \\ x(t_2) = c_1 \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1} \end{cases}$$

ammette soluzine unica definita su tutto l'intervallo I.

Dimostrazione. Un'equazione differenziale lineare di ordine n puó essere trasfprmato in un sistema di equazioni al primo ordine. Introduciamo la variabile $X \in \mathbb{C}^{\ltimes}$ ed il dato iniziale $C \in \mathbb{C}^{\ltimes}$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ldots \\ x^{(n-1)} \\ x^{(n)} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \ldots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

il problrma di Cauchy per l'equazione lineare diventa:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \ldots \\ X_{n-1}' \\ X_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \ldots \\ X_n \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} X(t_0) = C \end{cases}$$

La funzione $\begin{aligned} F : I \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n \\ (t, X) &\to \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \ldots \\ X_n \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(a_k(t)x^k\right) + f(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$ é linear in X e globalmente lipshitziana in X uniformemente in t, infatti perogni $X, Y \in \mathbb{C}^n$

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq \sqrt{1 + \left(\max_k \sup_I \|a_k\|\right)^2} \cdot \|X - Y\|$$

Sono soddisfatte le ipotesi di Cauchy Globale allora si ha latesi. □

Osservazione 45. *La locuzione lineare é giustificata dalla proposizione seguente.*

Proposizione 62. *Sia $I \subseteq R$ un intervallo e $n \in \mathbb{N}$. Date le $n+1$ funzioni $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{C}$,l'operatore* $\begin{array}{rcl} L : C^n(I;\mathbb{C}) & \to & C^0(I;\mathbb{C}) \\ x & \to & x^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} \end{array}$ *é lineare*

Dimostrazione. La linearitá di L equivale a:

$$\begin{array}{cc} L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) & \forall x_1, x_2 \in C^n(I;\mathbb{C}) \\ L(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot L(x) & \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in C^n(I;\mathbb{C}) \end{array}$$

Entrambe le condizioni seguono dalle regole di derivazione. □

5.7 Equazioni Lineari a Coefficienti Costanti

Definizione 46. *Dati i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathbb{C}$, si dice equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n a coefficienti costanti l'equazione differenziale*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = b$$

se $b = 0$ l'equazione si dice omogenea. La sua Equazione caratteristica é l'equazione algebrica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n+1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Osservazione 46. *Nella risoluzione di eqauzioni differenziali lineari la funzione esponenziale $t \to e^{\lambda t}$ riveste un ruolo molto particolare. Questa funzione é un autovalore dell'operatore di derivazione D relativo all'autovalore, risolve infatti λ:$Dx = \lambda \cdot x$*

Proposizione 63. *Data l'equazione*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = b$$

$x(t) = e^{\lambda t}$ risolve l'equazione omogenea $\Leftrightarrow$ λ é soluzione dell'equazione caratteristica.

LEMMA:: Sia $x(t) = t \cdot e^{\lambda \cdot t}$. Allora , per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$x^{(n)}(t) = \left(\lambda^n t + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda t}$$

????????????????NON L?HO CAPITA BENE.......................

Proposizione 64. *Data l'equazione*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = b$$

$x(t) = te^{\lambda t}$ risolve l'eqauzione omogenea $\Leftrightarrow$ λ é soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicitá almeno ??????????.

Parte VI

Calcolo delle Variazioni

Parte VII

Chapter

5.8 Preliminari

Il calcolo delle variazioni si occupa dell'ottimizzazione di funzioni $F : X \to \mathbb{R}$, *dove* X *é un isieme di funzioni.*
In questo capitolo varranno considerati univocamente funzionali integrali del tipo

$$\begin{array}{rcl} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \end{array}$$

eventulmente soggetti a vincoli sui valori $x(a)$ *e* $x(b)$ *o sul valore di un integrale del tipo* $\int_a^b \varphi(x(t))dt$.
Dove:

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$X = \left\{x \in C^1([a, b]); \mathbb{R}^n \text{ t.c.: } x(a) = x_a, x(b) = x_b\right\}, \text{ con } x_a, x_b \in \mathbb{R}^n$$

Proposizione 65. *Sia* $f \in C^1(A \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ *con* $a \subseteq \mathbb{R}^n$
Se $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_\alpha^\beta f(x, t)dt \end{array}$ *Allora:*

$$F \in C^1$$

$$\partial_\alpha F(\alpha, \beta, x) = -f(x, \alpha)$$
$$\partial_\beta F(\alpha, \beta, x) = f(x, \beta)$$
$$\nabla_x F(\alpha, \beta, x) = \int_\alpha^\beta \nabla_x f(x, t)dt$$

Definizione 47. *?????????????? R OPPURE RN*
Sia $I \in \mathbb{R}$ *un intervallo. Curva su* I $\mathbb{R} \rightleftharpoons$ *una funzione* $\gamma : I \subseteq \mathbb{R}^n$ *che sia continua.*

Osservazione 47. $\gamma(I)$ *si chiama supporto della curva,ed 1'e certamente connesso.(una funzione continua manda intervalli connessi in connessi)*

Definizione 48. *Sia* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva, lunghezza della curva* $\rightleftharpoons l(\gamma) =$
$\sup\left\{\sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : N \in \mathbb{N}\, N > 1, t_0 = a, t_N = b, t_{i-1} < t_i, i = 1, 2, \ldots, N\right\}$
Cioé prendo una curvae la approssimo con una spezzata, la piú lnga di tutte le poligonali é la lunghezza della curva.
DISEGNO
DISEGNO

Definizione 49. *Una curva* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *si dice rettificabile* $\rightleftharpoons f(\gamma) < +\infty$

Osservazione 48.

$$\sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

per il teorema del valore medio differenziale(accrescimenti finiti)

$$\sum_{i=1}^N \left\|\dot{\gamma}(t_i)(t_i - t_{i-1})\right\| =??$$

$$\int_a^b \left\| \dot{\gamma}(t) \right\| dt$$

Proposizione 66. *Se* $\gamma \in C^1([a,b]\,;\mathbb{R}^n) \Rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \left\| \dot{\gamma}(t) \right\| dt$

Osservazione 49. *Se* γ *é la traiettoria di un punto materiale,allora* $\|\gamma\|$ *é la norma della elocitá istantanea, e quindi* $l(\gamma)$ *é lo spazio che si percorre, cioé l'integrale della velocitá valutato tra t??????*t_i *due istanti di tempo entro i quali si mantiene tale velocitá.*

Osservazione 50. *Nel caso specifico sará:*

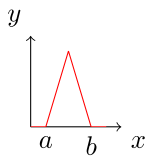
$$X = \left\{ x \in C^1([a,b]\,;\mathbb{R}2) : x(a) = A, x(b) = B \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b \left\| \dot{x}(t) \right\| dt \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t, x, \dot{x}) & \to & \left\| \dot{x}(t) \right\| \end{array}$$

5.9 L'Equazione di Eulero

LEMMA:::LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI
Sia $f \in C^0([0,1]\,;\mathbb{R})$ *t.c.:* $\forall v \in C^0([0,1]\,;\mathbb{R})$ *con* $v(0) = v(1) = 0$ *si abbia* $\int_0^1 f(x)v(x)dx = 0$
Allora $f(x) \equiv 0 \forall x \in [0,1]$



Dimostrazione. Per Assurdo, se $f \not\equiv 0$, allora $\exists\,[0,1]$ t.c. $f(x_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 0$ allora $\exists \overline{x}_0 \in]0,1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$.
Osservo che se $x_0 = 1$ allora $\exists \overline{x}_0 \in]0,1[$ t.c. $f(\overline{x}_0) \neq 0$
Entrambe le osservazioni per la continuitá di f, significa che se x_0 é un punto in cui la $f > 0$ allora per la continuitá della funzione anche li vicino si hanno valori maggiori di zero.
Quindi si puó pensare $x_0 \in]0,1[$.
Allora $\exists a, b \in]0,1[$ t.c. $x_0 \in]a,b[e \forall x \in]a,b[$ vale che $|f(x)| \geq |f(x_0)|$ sempre per la continuitá di f.
Pensiamo $f(x_0) > 0$ in questo modo $|f(x_0)| = f(x_0)$ e scegliamo la funzione $v(x)$ come disegnata: $v(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 - \delta \\ \frac{x}{\delta} - \frac{x_0 - \delta}{\delta} & x_0 - \delta < x < x_0 \\ 1 & x = x_0 \\ -\frac{x}{\delta} + \frac{x_0 + \delta}{\delta} & x_0 < x < x_0 + \delta \\ 0 & x \geq x_0 + \delta \end{cases}$ POSSIBILIPLAUSIBILIERRORI
Se calcoliamo

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \geq \frac{1}{2} f(x_0) \int_a^b v(x)dx = \frac{1}{2} f(x_0) \frac{b-a}{2} > 0$$

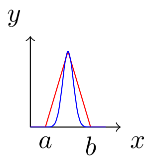
Se avessi preso $f(x_0) < 0$ prendo $v = -v$ e il resto segue... $\square$

Osservazione 51. *Questo lemma é concettualmente analogo al Teorema di Fermat nel capitolo delle derivate.*

Corollario 2. *LEMMA CASO VETTORIALE.*
Sia $f \in C^0([a,b];\mathbb{R}^n)$ tale che $\forall v \in C^0([a,b];\mathbb{R}^n)$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x) \bullet v(x)dx = 0$ allora $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0,1]$.

Dimostrazione. Per questa dimostrazione si osservano componente per componente.
$\forall i = 1, 2, \dots, n$ scelgo $v_j(x) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ v_i(x) & j = i \end{cases}$
A questo punto applico il lemma fondamentale alla componente i-esima f_i di f. $\square$

Corollario 3. *Sia $f \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall v \in C^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ con $v(0) = v(1) = 0$ si abbia $\int_0^1 f(x)v(x)dx = 0$ allora $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0,1]$.*



Dimostrazione. É sempre lo stesso lemma con l'aggiunta che la funzione v sia di classe C^k.
Se si chiama u la funzione blu e v la funzione rossa abbiamo:

$$\int_0^1 f(x)u(x)dx > 0$$

Se v é un po piú regolare , prendiamo $v = u^(k+1)(x)$. Cioé se vogliamo $v \in C^k$ prendiamo.....
LA DINMOSTRAZIONE E A ME INCOMPRENSIBILE. $\square$

Teorema 4. *EQUAZIONE DI EULERO.*
Sia $f \in C^2\left([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R}\right)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.
Sia $X = \left\{x \in C^2\left([a,b];\mathbb{R}^n\right) : x(a) = A, x(b) = B\right\}$ con $A, B \in \mathbb{R}^n$.
Sia $\begin{array}{ccc} F : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \end{array}$.
Se la funzione $x_* \in X$ é t.c. $F(x_*) = \max\{F(x) : x \in X\}$ [o min]
Allora $\partial_x f(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) - \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} f(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = 0$.
Questa ultima equzione é l'equazione di Eulero-Lagrange del Funzionale F o a volte detta variazione prima del funzionale F. É un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine nella funzione incognita x_*.

Dimostrazione. Sia $\varphi(h) = F(x_* + hv)$, dove $x_* \in X$ e $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
L'equazione di Eulero-Lagrange in apparenza complicata é analoga ad un equazione di analisi1 del tipo $f^{'} = 0$ oppure in analisi due a $\nabla f = 0$. solo che ora sono cavoli amari.
Come si sceglie la variazione v in modo che $x_* + hv \in X$, con h piccolo.
X é l'insieme delle funzioni di C^2, si sa che $x_* \in C^2$, una scelta opportuna di v

é $v \in C^2(]a,b[\,;\mathbb{R}^n)$.
Inotre deve essere che $x_*(a)+hv(a)=A$ e $x_*(b)+hv(b)=B$ per restare dentro l'insieme X. Quindi $v(a)=v(b)=0$. h é uno scalare e per ipotesi si sa che $F(x_*)$ é punto di massimo, quindi si conclude che $h=0$ é punto di massimo per la funzione φ.
.... $\square$

e qui finiscono gli appunti almeno per conto mio.

Parte VIII

Temi Esame

Capitolo 6

T.E. 2012/2013 scritto n.1

6.1 Esercizio

Sia $f : R^2 \to R$ *data da* $f(x, y) = e^{-|4\cdot arctan(x\cdot y^2)|}$

A *Nessuna delle altre affermazioni é esatta*

B f *ammette almeno un punto di minimo assoluto*

C $\inf_R^2 f = 0$

D f *ha infiniti punti di massimo*

L'esponensiale é una funzione monotona crescente quindi la ricerca di massimi a minimi si sposta alla ricerca dei massimi e minimi dell'esponente.
L'esponente assume sempre valori negativi. Inotre risulta essere una quantitá limitata tra $[0; 4\frac{\pi}{0}[$, *quindi* $\sup_R^2 f = e^0 = 1$ *e* $\inf_R^2 f = e^{-2\pi}$
Sono quindi punti di massimo tutti i punti che rendono nullo l'esponente: $arctan(xy^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \forall yory = 0, \forall x$ *che sono i due assi. Essendo questi punti del dominio allora si puó dire* $\sup_R^2 f = \max_R^2 f = 0$
I punti di minimo si hanno per $|arctan(xy^2)| = \frac{\pi}{2}$ *quindi per* $x \to \pm\infty$ *or* $y \to \pm\infty$ *essendo questi valori al limite il valore* $e^{-2\pi}$ *é* inf *per* f
La risposta vera é quindi la D.

6.2 Esercizio

Sia (X, d) *uno spazio metrico e siano* A, B *sottoinsiemi di* X. *Quale/i delle seguenti affermazioni é/sono certamente vera/e?*

1 $A \subseteq B \Rightarrow \partial A \subseteq \partial B$

2 $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

A *Entrambe*

B *Solo la seconda*

C *Nessuna delle affermazioni é esatta*

D *Solo la prima*

La prima affermazione é certamente falsa poiché se scelto come spazio metrico R^2 *con distanza quella eclidea. Scelgo* $A = B((0,0),2), A = B((0,0),1)$ *allora si ha che* $\partial A = \{(x,y) \in R^2 : d((x,y),(0,0)) = 2\}$ *e* $\partial B = \{(x,y) \in R^2 : d((x,y),(0,0)) = 1\}$ *e questi due insiemi sono disgiunti.*
la seconda é vera ma devo pensarci un po...