

10 Санкт-Петербургский государственный университет

Меликов Темур

Отчёт по домашней работе 2

Графовые алгоритмы на основе линейной алгебры

Санкт-Петербург

2022 г.

## Оглавление

Введение.....	3
Детали реализации .....	4
Обход в ширину.....	4
Подсчет треугольников.....	4
Поиск кратчайших путей из одной вершины.....	5
Постановка экспериментов и измерение производительности .....	5
Эксперименты.....	5
Анализ .....	11
Заключение .....	12
Список литературы.....	13

## Введение

В настоящее время все чаще приходится иметь дело с данными, которые представлены в виде графа. Однако решения задач по взаимодействию с подобного рода информацией весьма сложно оптимизировать, поскольку она имеет сложную нелинейную структуру. В то же время, алгоритмы обработки графов можно свести к линейной алгебре и базовым операциям над матрицами и векторами, что может их существенно ускорить. А модель хранения данных в виде разреженной матрицы позволяет минимизировать значение расходуемой памяти.

В данной работе проведен анализ производительности некоторых графовых алгоритмов на основе линейной алгебры и представлено сравнение их реализаций с использованием библиотек PyGraphBlas [\[1\]](#), SciPy [\[2\]](#) и IGraph [\[3\]](#). Для этого были выбраны поиск в ширину, подсчет треугольников и поиск кратчайших путей из одной вершины.

## Детали реализации

### Обход в ширину

Первым параметром алгоритма обхода в ширину является информация о графе. Однако, в разных реализациях она представляется по-разному. В PyGraphBlas граф представляется в виде списка из трех списков, в которых для каждого ребра содержится индекс вершины-начала (в первом списке), индекс вершины-конца (во втором списке), а также его вес (в третьем списке). В библиотеках SciPy и IGraph данные передаются в виде матрицы смежности, которая представлена списком списков. Элементом с номером  $m$  в списке с номером  $n$ , является вес ребра из вершины  $n$  в вершину  $m$ . Вторым параметром во всех трех реализациях индекс стартовой вершины.

Возвращаемым значением в реализации с использованием PyGraphBlas является вектор, координаты которого уровни, на которых были достигнуты вершины. В реализации с SciPy и IGraph результат коллекция, элементы которой номера соответствующих вершин в порядке обхода в ширину. Однако, в первом случае данная коллекция представляет из себя ndarray, а во втором список.

Перед началом работы, каждая из реализаций преобразует входные данные в нужный формат. Для PyGraphBlas и SciPy это разреженные матрицы, для IGraph матрица смежности. Далее в реализациях под SciPy и IGraph, используются библиотечные методы (breadth\_first\_order и bfs соответственно). В случае с PyGraphBlas на каждом шаге постепенно формируется результирующий вектор. Делается это следующим образом: на каждом уровне обхода, путем умножения результирующего вектора на матрицу графа, получается вектор вершин, достигнутых на данном уровне и в результирующем векторе значение уровня сопоставляется элементам, соответствующим этим вершинам.

### Подсчет треугольников

Единственный параметр подсчета треугольников совпадает с первым параметром поиска в ширину. Однако, здесь есть ограничение – граф должен быть невзвешенным. Это значит, что веса всех ребер должны быть равны 1.

Возвращаемым значением во всех трех реализациях является единственное число – количество треугольников в графе.

Перед началом работы производятся те же преобразования данных, что и в поиск в ширину. Далее в реализации с IGraph вызывается стандартный метод `cliques`. В реализациях под PyGraphBlas и SciPy сначала строится нижняя треугольная матрица  $T$  для матрицы смежности, затем суммируются все элементы этой матрицы, которые равны единице и в  $T$ , и в  $T^2$ .

## Поиск кратчайших путей из одной вершины

Входные параметры алгоритма поиска кратчайших путей из одной вершины такие же, как и у поиска в ширину.

Тип результата также совпадает со случаем поиска в ширину, однако каждый элемент полученных коллекций содержит длину кратчайшего пути до соответствующей вершины из начальной.

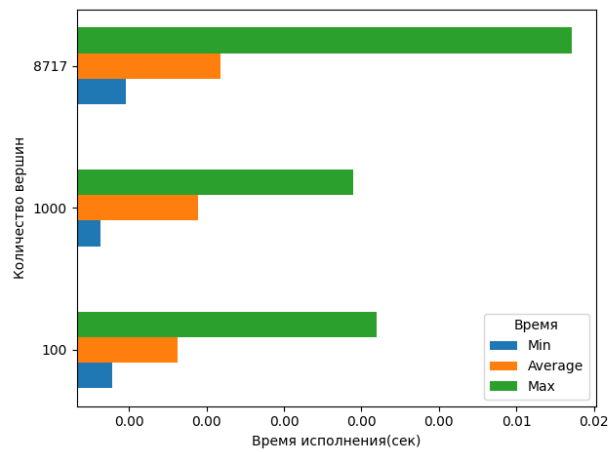
Перед началом работы, происходят те же преобразования, как и в предыдущих алгоритмах. Далее в реализации с использованием PyGraphBlas, на каждом шаге алгоритма формируется результирующий вектор. Делается это путем применения операции `MinPlus` к текущему состоянию результирующего вектора и матрице графа. Результат работы алгоритма – вектор, координаты которого – длины кратчайших путей из стартовой вершины до соответствующей вершины. Вершине с номером  $n$ , соответствует значение  $n$ -ой координаты. На самом деле, вышеописанный алгоритм – это алгоритм Беллмана-Форда. В библиотеке SciPy есть стандартный метод `bellman_ford`, который используется в реализации для данного модуля и работает подобным образом. В свою очередь, библиотека IGraph содержит встроенный метод `shortest_paths`, который, на самом деле, в зависимости от входных данных, использует алгоритм Беллмана-Форда, Дейкстры или Джонсона. Данный метод используется в реализации под IGraph.

## Постановка экспериментов и измерение производительности

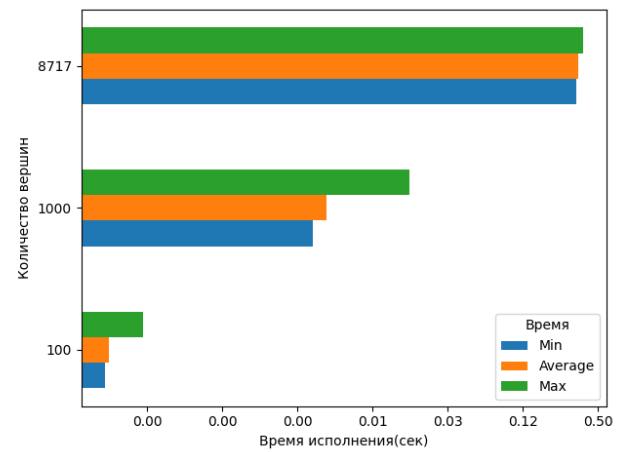
### Эксперименты

Измерения производились на компьютере с процессором INTEL Core i5 8th Gen (2.30GHz), 16 гб оперативной памяти и операционной системой Ubuntu 20.04. Для эксперимента использовались графы, взятые из датасетов `p2p-Gnutella06` и `Youtube.com` [\[4\]](#).

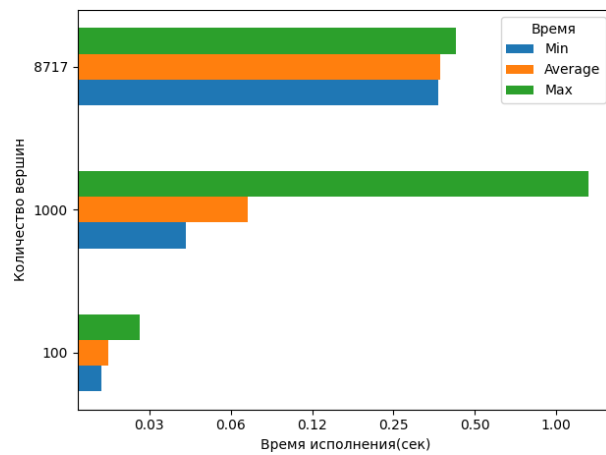
Первый эксперимент использовал датасет p2p-Gnutella06 и был поставлен следующим образом: в каждой реализации алгоритмы обхода в ширину и поиска кратчайших путей из одной вершины запускались для 100 случайных вершин на 2 подграфах – 100 вершин, 1000 вершин и на всем графе – 8717 вершин. Вес каждого ребра генерировался случайно отдельно для каждого эксперимента. Каждый опыт проводился 3 раза. При каждом запуске производился замер, а потом из всех запусков вычислялось среднее, максимальное и минимальное затраченное время. Алгоритм подсчета треугольников запускался на каждом из вышеописанных подграфов по 10 раз, однако тут генерируемый вес каждого ребра может быть равен 1 (есть ребро) или 0 (нет ребра). В данном алгоритме проводился только замер затраченного времени для каждого из тестовых подграфов. Стоит отметить, что замер производился без учета начального преобразования входных данных к нужному формату. Результаты проведения опытов представлены на рисунках 1, 2, 3.



(a) Библиотека PyGraphBlas.

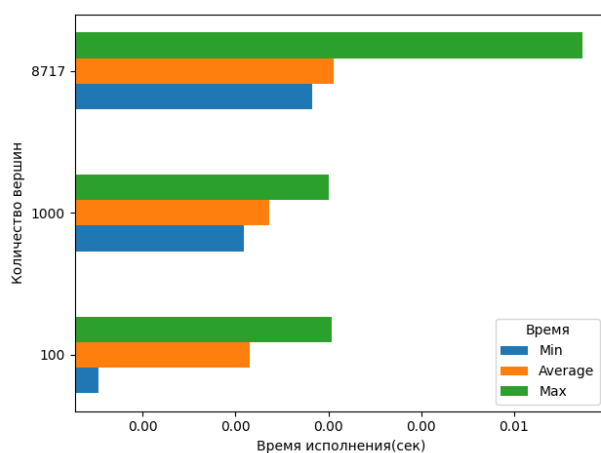


(b) Библиотека SciPy.

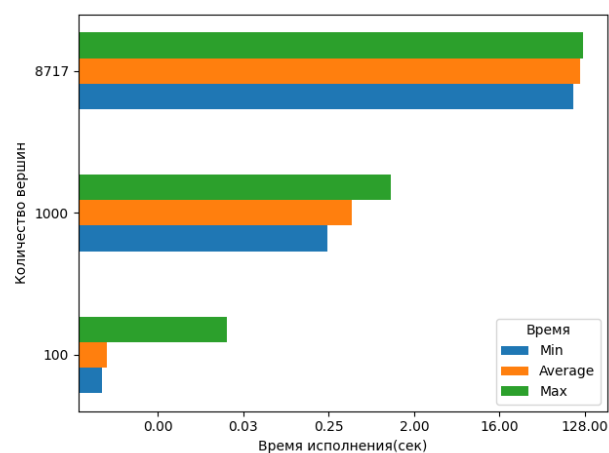


(c) Библиотека IGraph.

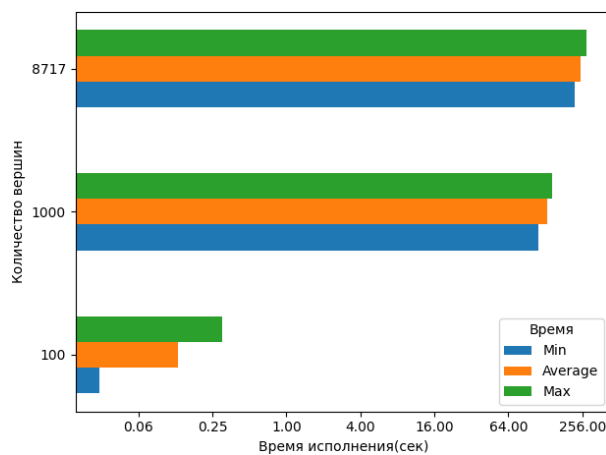
**Рис. 1:** Обход в ширину на наборе данных p2p-Gnutella06.



(a) Библиотека PyGraphBlas.



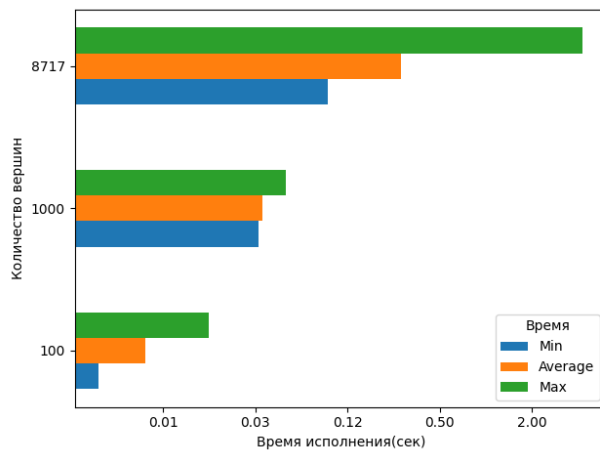
(b) Библиотека SciPy.



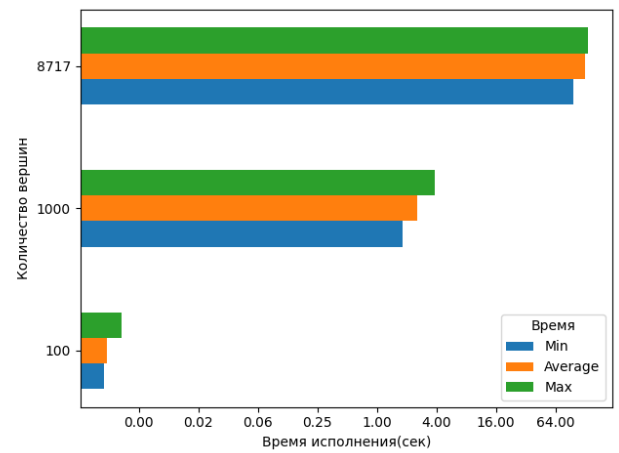
(c) Библиотека IGraph.

**Рис. 2:** Подсчет треугольников на наборе данных p2p-Gnutella06.

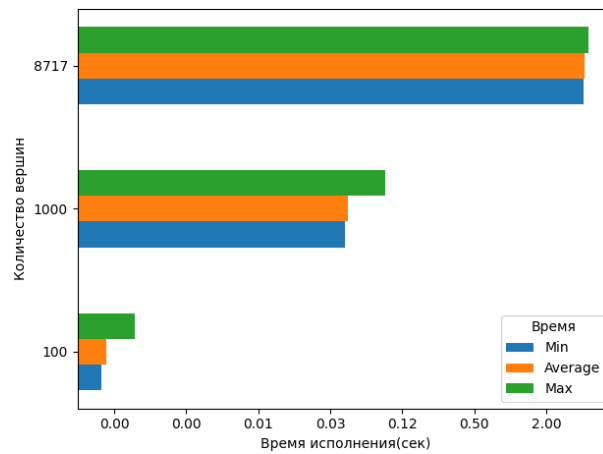




(a) Библиотека PyGraphBlas.



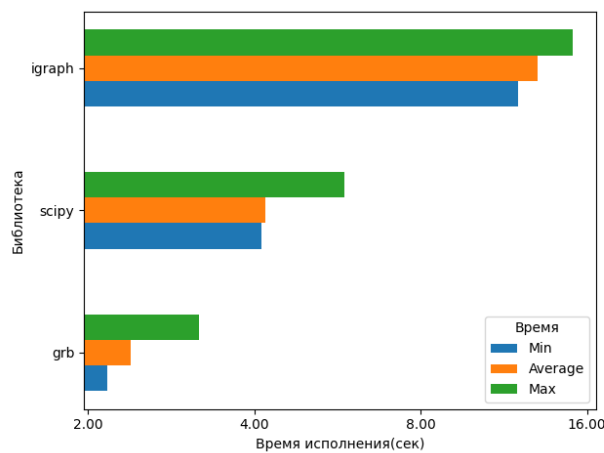
(b) Библиотека SciPy.



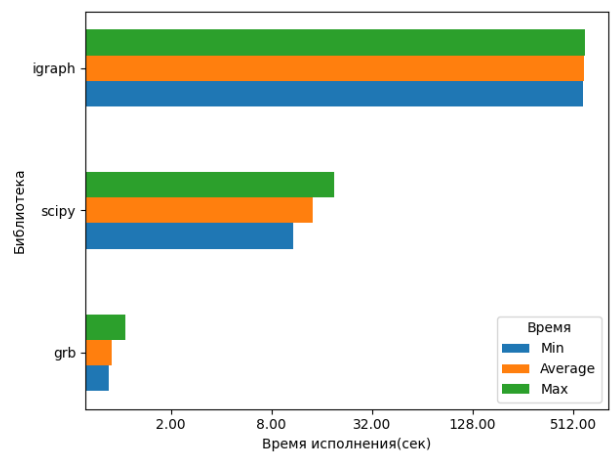
(c) Библиотека IGraph.

**Рис. 3:** Поиск кратчайших путей из одной вершины на наборе данных r2p-Gnutella06.

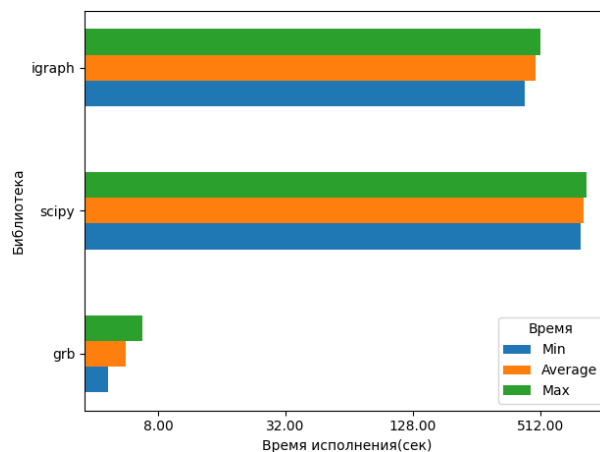
Второй эксперимент проводился на значительно большем графе. Он был взят из датасета Youtube.com с сайта [4]. Данный граф имеет 1134890 вершин, что существенно превосходит граф из предыдущего опыта. Эксперимент проводился так: алгоритмы обхода в ширину и поиска кратчайших путей запускались из 10 случайных вершин и вычислялось максимальное, минимальное и среднее время работы из этих замеров. Алгоритм подсчета треугольников запускался на данном графе трижды. Поскольку в отличие от предыдущего, данный граф изначально является ненаправленным, то здесь при подсчете треугольников достаточно все ребра, не равные нулю, считать равными единице. Затем также вычислялось минимальное, максимальное и среднее время работы алгоритма из этих замеров. Результаты представлены на рисунке 4.



(a) Обход в ширину.



(b) Подсчет треугольников.



(c) Поиск кратчайших путей из одной вершины.

**Рис. 4:** Время работы алгоритмов на наборе данных Youtube dataset.

## Анализ

Почти на всех входных данных библиотека IGraph показывает значительно меньшую производительность в сравнении с двумя другими. Это обусловлено тем, что данная библиотека не направлена на значительные оптимизации при работе с графами и использует стандартные средства. Что же касается PyGraphBlas и SciPy, это скорее библиотеки для инженерно-математических задач, в связи с чем большое внимание тут уделено оптимизации работы алгоритмов.

Реализация под PyGraphBlas уступает реализации под SciPy только на малых данных и только на алгоритмах BFS и SSSP. Однако, в остальных случаях PyGraphBlas показывает лучший результат, и, с увеличением входных данных, разница становится все более заметной. Это обуславливается тем, что обе реализации используют матричные операции, на которые в PyGraphBlas сделан основной упор.

Также стоит отметить, что с ростом входных данных наименьший рост времени работы алгоритма наблюдается в реализации с использованием библиотеки PyGraphBlas. Особенно это заметно в случае с подсчетом треугольников. Здесь при увеличении количества вершин почти в сто раз, наблюдается увеличение времени всего в два раза в то время, как реализации с SciPy и IGraph работают более двух минут. Это также связано с высокой оптимизацией матричных операций в PyGraphBlas.

## Заключение

Наименее эффективной реализацией стала реализация с использованием IGraph. Этот результат можно было ожидать, так как данная библиотека предназначена для других целей. В ней содержится множество методов для анализа социальных сетей, но платой за универсальность в этом случае, является скорость.

На малых данных самой эффективной оказалась библиотека SciPy. Однако скорость работы алгоритма сильно растет при увеличении входных данных, а именно размеров графа, который нужно обработать.

Касательно последнего опыта с графом, у которого 1134890 вершин, тут существенное преимущество за PyGraphBlas. Благодаря матричным примитивам, которые высоко оптимизированы в данном модуле, скорость работы при существенном увеличении графа, увеличивается несущественно и даже на графе с 1000 вершин, реализации с использованием PyGraphBlas уже намного быстрее, чем в случае со SciPy или IGraph.

## Список литературы

- [1] PyGrB. URL: <https://graphegon.github.io/pygraphblas/pygraphblas/index.html>
- [2] SciPy. URL: <https://www.scipy.org/docs.html>
- [3] IGraph. URL: <https://igraph.org/python/doc/tutorial/>
- [4] Dataset source. URL: <https://snap.stanford.edu/data/>