



Mikio Nakahara

Differentialgeometrie, Topologie und Physik

2. Auflage



Springer Spektrum

Differentialgeometrie, Topologie und Physik

Meiner Familie

Mikio Nakahara

Differentialgeometrie, Topologie und Physik

Aus dem Englischen übersetzt von
Dr. Matthias Delbrück



Mikio Nakahara
Department of Physics
Kinki University
Osaka, Japan

Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Matthias Delbrück. Übersetzung der amerikanischen Ausgabe: „Geometry, Topology and Physics, Second Edition“ von Mikio Nakahara, erschienen bei Taylor & Francis Group, LLC, 2003, © 2003 by Taylor & Francis Group, LLC. Alle Rechte vorbehalten.

Authorized translation from English language edition published by CRC Press, part of Taylor & Francis Group LLC.

ISBN 978-3-662-45299-8
DOI 10.1007/978-3-662-45300-1

ISBN 978-3-662-45300-1 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung und Lektorat: Dr. Vera Spillner, Stella Schmoll
Redaktion: Dr. Michael Zillgitt

Springer Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur ersten Auflage	XV
Vorwort zur zweiten Auflage	XIX
Zur Nutzung dieses Buches	XXI
Notation und Konventionen	XXII
1 Quantenphysik	1
1.1 Analytische Mechanik	1
1.1.1 Newton'sche Mechanik	1
1.1.2 Lagrange-Formalismus	2
1.1.3 Hamilton-Formalismus	6
1.2 Kanonische Quantisierung	10
1.2.1 Hilbert-Raum, Bras und Kets	10
1.2.2 Axiome der kanonischen Quantisierung	11
1.2.3 Heisenberg-Gleichung, Heisenberg-Bild und Schrödinger-Bild	14
1.2.4 Wellenfunktionen	15
1.2.5 Harmonischer Oszillator	18
1.3 Pfadintegral-Quantisierung für ein Boson	20
1.3.1 Pfadintegral-Quantisierung	20
1.3.2 Imaginäre Zeit und Zustandssumme	28
1.3.3 Zeitgeordnetes Produkt und erzeugendes Funktional	29
1.4 Harmonischer Oszillator	32
1.4.1 Übergangsamplitude	32
1.4.2 Zustandssumme	36
1.5 Pfadintegral-Quantisierung eines Fermi-Teilchens	40
1.5.1 Fermionischer harmonischer Oszillator	40
1.5.2 Graßmann-Kalkül	41
1.5.3 Differenziation	43
1.5.4 Integration	43
1.5.5 Delta-Funktion	44
1.5.6 Gauß-Integral	45
1.5.7 Variationsableitung	46
1.5.8 Komplexe Konjugation	47
1.5.9 Kohärente Zustände und Vollständigkeitsrelation	47
1.5.10 Zustandssumme eines fermionischen Oszillators	48

1.6	Quantisierung eines skalaren Felds	52
1.6.1	Freies skalares Feld	52
1.6.2	Wechselwirkendes skalares Feld	55
1.7	Quantisierung eines Dirac-Felds	56
1.8	Eichtheorien	57
1.8.1	Abel'sche Eichtheorien	57
1.8.2	Nicht-Abel'sche Eichtheorien	59
1.8.3	Higgs-Felder	61
1.9	Magnetische Monopole	62
1.9.1	Dirac-Monopole	62
1.9.2	Der Wu-Yang-Monopol	63
1.9.3	Ladungsquantisierung	64
1.10	Instantonen	65
1.10.1	Einführung	65
1.10.2	Die (anti-)selbstduale Lösung	66
	Aufgabe	67
2	Mathematische Grundlagen	69
2.1	Abbildungen	69
2.1.1	Definitionen	69
2.1.2	Äquivalenzrelation und Äquivalenzklasse	72
2.2	Vektorräume	78
2.2.1	Vektoren und ihre Räume	78
2.2.2	Lineare Abbildungen, Bilder und Kerne	79
2.2.3	Dualer Vektorraum	80
2.2.4	Inneres Produkt und Adjungierte	81
2.2.5	Tensoren	83
2.3	Topologische Räume	84
2.3.1	Definitionen	84
2.3.2	Stetige Abbildungen	85
2.3.3	Umgebungen und Hausdorff-Räume	86
2.3.4	Abgeschlossene Mengen	86
2.3.5	Kompaktheit	87
2.3.6	Zusammenhang	88
2.4	Homöomorphismen und topologische Invarianten	89
2.4.1	Homöomorphismen	89
2.4.2	Topologische Invarianten	90
2.4.3	Homotopietyp	92
2.4.4	Euler-Charakteristik: ein Beispiel	92
	Aufgaben	96

3 Homologiegruppen	99
3.1 Abel'sche Gruppen	100
3.1.1 Elementare Gruppentheorie	100
3.1.2 Endlich erzeugte Abel'sche Gruppen und freie Abel'sche Gruppen	102
3.1.3 Zyklische Gruppen	103
3.2 Simplexe und Simplizialkomplexe	104
3.2.1 Simplexe	105
3.2.2 Simplizialkomplexe und Polyeder	106
3.3 Homologiegruppen von Simplizialkomplexen	107
3.3.1 Orientierte Simplexe	107
3.3.2 Kettengruppe, Zyklengruppe und Rändergruppe	109
3.3.3 Homologiegruppen	113
3.3.4 Bestimmung von $H_0(K)$	116
3.3.5 Weitere Homologieberechnungen	117
3.4 Allgemeine Eigenschaften von Homologiegruppen	123
3.4.1 Zusammenhang und Homologiegruppen	123
3.4.2 Struktur von Homologiegruppen	124
3.4.3 Betti-Zahlen und der Euler-Poincaré-Satz	124
Aufgaben	125
4 Homotopiegruppen	127
4.1 Fundamentalgruppen	127
4.1.1 Grundlagen	127
4.1.2 Pfade und Schleifen	128
4.1.3 Homotopie	129
4.1.4 Fundamentalgruppen	131
4.2 Allgemeine Eigenschaften von Fundamentalgruppen	133
4.2.1 Bogenweiser Zusammenhang und Fundamentalgruppen	133
4.2.2 Homotope Invarianz von Fundamentalgruppen	134
4.3 Beispiele für Fundamentalgruppen	138
4.3.1 Fundamentalgruppe des Torus	140
4.4 Fundamentalgruppen von Polyedern	141
4.4.1 Freie Gruppen und Relationen	141
4.4.2 Bestimmung der Fundamentalgruppen von Polyedern	143
4.4.3 Relationen zwischen $H_1(K)$ und $\pi_1(K)$	152
4.5 Höhere Homotopiegruppen	153
4.5.1 Definitionen	153
4.6 Allgemeine Eigenschaften von höheren Homotopiegruppen	155
4.6.1 Die Abel'sche Natur höherer Homotopiegruppen	155
4.6.2 Bogenweiser Zusammenhang und höhere Homotopiegruppen	155

4.6.3	Homotopieinvarianz von höheren Homotopiegruppen	156
4.6.4	Höhere Homotopiegruppen eines Produktraums	156
4.6.5	Universelle Überlagerungsräume und höhere Homotopiegruppen	156
4.7	Beispiele für höhere Homotopiegruppen	158
4.8	Ordnung in kondensierter Materie	161
4.8.1	Ordnungsparameter	161
4.8.2	Suprafluides ^4He und Supraleiter	163
4.8.3	Allgemeine Überlegungen	165
4.9	Defekte in nematischen Flüssigkristallen	167
4.9.1	Ordnungsparameter von nematischen Flüssigkristallen	167
4.9.2	Liniendefekte in nematischen Flüssigkristallen	168
4.9.3	Punktdefekte in nematischen Flüssigkristallen	169
4.9.4	Höherdimensionale Textur	170
4.10	Texturen in suprafluidem $^3\text{He-A}$	172
4.10.1	Suprafluides $^3\text{He-A}$	172
4.10.2	Liniendefekte und nichtsinguläre Wirbel in $^3\text{He-A}$	174
4.10.3	Shankar-Monopole in $^3\text{He-A}$	174
	Aufgaben	176
5	Mannigfaltigkeiten	177
5.1	Mannigfaltigkeiten	177
5.1.1	Heuristische Einführung	177
5.1.2	Definitionen	180
5.1.3	Beispiele	182
5.2	Analysis auf Mannigfaltigkeiten	187
5.2.1	Differenzierbare Abbildungen	187
5.2.2	Vektoren	190
5.2.3	1-Formen	193
5.2.4	Tensoren	194
5.2.5	Tensorfelder	194
5.2.6	Induzierte Abbildungen	195
5.2.7	Untermannigfaltigkeiten	197
5.3	Flüsse und Lie-Ableitungen	198
5.3.1	Einparametrische Transformationsgruppe	199
5.3.2	Lie-Ableitungen	201
5.4	Differentialformen	205
5.4.1	Definitionen	206
5.4.2	Äußere Ableitungen	208
5.4.3	Inneres Produkt und Lie-Ableitung von Formen	211
5.5	Integration von Differentialformen	214
5.5.1	Orientierung	214
5.5.2	Integration von Formen	215
5.6	Lie-Gruppen und Lie-Algebren	217
5.6.1	Lie-Gruppen	217

5.6.2	Lie-Algebren	219
5.6.3	Die einparametrische Untergruppe	223
5.6.4	Maurer-Cartan-Gleichung	225
5.7	Die Wirkung von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten	227
5.7.1	Definitionen	227
5.7.2	Orbits und Isotropiegruppen	230
5.7.3	Induzierte Vektorfelder	234
5.7.4	Die adjungierte Darstellung	235
	Aufgaben	235
6	De-Rham-Kohomologiegruppen	237
6.1	Der Stokes'sche Satz	237
6.1.1	Vorüberlegung	237
6.1.2	Der Stokes'sche Satz	239
6.2	De-Rham-Kohomologiegruppen	241
6.2.1	Definitionen	241
6.2.2	Dualität von $H_r(M)$ und $H^r(M)$ und der Satz von de Rham	244
6.3	Das Poincaré-Lemma	247
6.4	Struktur von De-Rham-Kohomologiegruppen	249
6.4.1	Poincaré-Dualität	249
6.4.2	Kohomologieringe	249
6.4.3	Die Künneth-Formel	250
6.4.4	Rücktransport von De-Rham-Kohomologiegruppen	252
6.4.5	Homotopie und $H^1(M)$	252
7	Riemann'sche Geometrie	255
7.1	Riemann'sche und pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten	255
7.1.1	Metrische Tensoren	255
7.1.2	Induzierte Metrik	257
7.2	Paralleltransport, Zusammenhang und kovariante Ableitung	258
7.2.1	Heuristische Einführung	258
7.2.2	Affine Zusammenhänge	261
7.2.3	Paralleltransport und Geodäten	262
7.2.4	Die kovariante Ableitung von Tensorfeldern	263
7.2.5	Transformationseigenschaften von Zusammenhangskoeffizienten	264
7.2.6	Der metrische Zusammenhang	264
7.3	Krümmung und Torsion	266
7.3.1	Definitionen	266
7.3.2	Geometrische Bedeutung von Riemann- und Torsionstensor	267
7.3.3	Der Ricci-Tensor und die skalare Krümmung	272
7.4	Levi-Civita-Zusammenhänge	272
7.4.1	Der Hauptsatz der Riemann'schen Geometrie	272
7.4.2	Der Levi-Civita-Zusammenhang in der klassischen Geometrie von Flächen	274

7.4.3	Geodäten	275
7.4.4	Das Normalkoordinatensystem	278
7.4.5	Riemann'scher Krümmungstensor mit Levi-Civita-Zusammenhang	279
7.5	Holonomie	283
7.6	Isometrien und konforme Transformationen	285
7.6.1	Isometrien	285
7.6.2	Konforme Transformationen	285
7.7	Killing-Vektorfelder	291
7.7.1	Killing-Vektorfelder	291
7.7.2	Konforme Killing-Vektorfelder	294
7.8	Nichtkoordinatenbasen	295
7.8.1	Definitionen	295
7.8.2	Cartan-Strukturgleichungen	296
7.8.3	Das lokale Bezugssystem	297
7.8.4	Der Levi-Civita-Zusammenhang in einer Nichtkoordinatenbasis	299
7.9	Differentialformen und die Hodge-Theorie	301
7.9.1	Invariante Volumenelemente	301
7.9.2	Dualitätstransformationen	302
7.9.3	Innere Produkte von r -Formen	304
7.9.4	Adjungierte von äußeren Ableitungen	305
7.9.5	Laplace-Operator, harmonische Formen und Hodge'scher Zerlegungssatz	306
7.9.6	Harmonische Formen und De-Rham-Kohomologiegruppen .	308
7.10	Aspekte der Allgemeinen Relativitätstheorie	309
7.10.1	Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie	309
7.10.2	Einstein-Hilbert-Wirkung	310
7.10.3	Spinoren in gekrümmter Raumzeit	313
7.11	Bosonische Stringtheorie	315
7.11.1	Die Stringwirkung	315
7.11.2	Symmetrien der Polyakov-Strings	318
	Aufgaben	320
8	Komplexe Mannigfaltigkeiten	321
8.1	Komplexe Mannigfaltigkeiten	321
8.1.1	Definitionen	321
8.1.2	Beispiele	322
8.2	Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten	329
8.2.1	Holomorphe Abbildungen	329
8.2.2	Komplexifizierungen	330
8.2.3	Fastkomplexe Struktur	331
8.3	Komplexe Differentialformen	334
8.3.1	Komplexifizierung von reellen Differentialformen	334
8.3.2	Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten	335

8.3.3 Dolbeault-Operatoren	336
8.4 Hermite'sche Mannigfaltigkeiten, Hermite'sche Differentialgeometrie	338
8.4.1 Die Hermite'sche Metrik	338
8.4.2 Kähler-Formen	339
8.4.3 Kovariante Ableitungen	341
8.4.4 Torsion und Krümmung	342
8.5 Kähler-Mannigfaltigkeiten und Kähler-Differentialgeometrie	344
8.5.1 Definitionen	344
8.5.2 Kähler'sche Geometrie	348
8.5.3 Die Holonomiegruppe von Kähler-Mannigfaltigkeiten	349
8.6 Harmonische Formen und ∂ -Kohomologiegruppen	350
8.6.1 Die adjungierte Operatoren ∂^\dagger und $\bar{\partial}^\dagger$	351
8.6.2 Laplace-Operatoren und der Satz von Hodge	352
8.6.3 Laplace-Operatoren auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit	353
8.6.4 Die Hodge-Zahlen von Kähler-Mannigfaltigkeiten	353
8.7 Fastkomplexe Mannigfaltigkeiten	356
8.7.1 Definitionen	356
8.8 Orbifolds	359
8.8.1 Eindimensionale Beispiele	359
8.8.2 Dreidimensionale Beispiele	359
9 Faserbündel	363
9.1 Tangentialbündel	363
9.2 Faserbündel	365
9.2.1 Definitionen	365
9.2.2 Rekonstruktion von Faserbündeln	369
9.2.3 Bündelabbildungen	369
9.2.4 Äquivalente Bündel	370
9.2.5 Rücktransportbündel	370
9.2.6 Das Homotopieaxiom	372
9.3 Vektorbündel	373
9.3.1 Definitionen und Beispiele	373
9.3.2 Rahmen	375
9.3.3 Kotangentialbündel und duale Bündel	376
9.3.4 Schnitte von Vektorbündeln	376
9.3.5 Produktbündel und Whitney-Summen-Bündel	377
9.3.6 Tensorproduktbündel	378
9.4 Prinzipalbündel	379
9.4.1 Definitionen	379
9.4.2 Assoziierte Bündel	386
9.4.3 Trivialität von Bündeln	388
Aufgaben	389

10 Zusammenhänge auf Faserbündeln	391
10.1 Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln	391
10.1.1 Definitionen	392
10.1.2 Die Zusammenhangs-1-Form	393
10.1.3 Die lokale Zusammenhangsform und das Eichpotenzial	394
10.1.4 Horizontale Liftung und Paralleltransport	398
10.2 Holonomie	401
10.2.1 Definitionen	401
10.3 Krümmung	403
10.3.1 Kovariante Ableitungen in Prinzipalbündeln	403
10.3.2 Krümmung	403
10.3.3 Geometrische Bedeutung der Krümmung und das Ambrose-Singer-Theorem	405
10.3.4 Die lokale Form der Krümmung	406
10.3.5 Die Bianchi-Identität	408
10.4 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Vektorbündeln	408
10.4.1 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Bündeln	409
10.4.2 Ein lokaler Ausdruck für die kovariante Ableitung	410
10.4.3 Krümmung reloaded	414
10.4.4 Ein Zusammenhang, der das innere Produkt erhält	414
10.4.5 Holomorphe Vektorbündel und Hermite'sche innere Produkte	415
10.5 Eichtheorien	417
10.5.1 U(1)-Eichtheorie	417
10.5.2 Der magnetische Dirac-Monopol	418
10.5.3 Der Aharonov-Bohm-Effekt	420
10.5.4 Die Yang-Mills-Theorie	422
10.5.5 Instantonen	423
10.6 Die Berry-Phase	428
10.6.1 Herleitung der Berry-Phase	428
10.6.2 Berry-Phase, Berry-Zusammenhang und Berry-Krümmung .	429
Aufgabe	436
11 Charakteristische Klassen	437
11.1 Invariante Polynome und der Chern-Weil-Homomorphismus	437
11.1.1 Invariante Polynome	438
11.2 Chern-Klassen	444
11.2.1 Definitionen	444
11.2.2 Eigenschaften von Chern-Klassen	446
11.2.3 Das Splitting-Prinzip	447
11.2.4 Universelle Bündel und Klassifizierung von Räumen	448
11.3 Chern-Charaktere	449
11.3.1 Definitionen	449
11.3.2 Eigenschaften von Chern-Charakteren	452
11.3.3 Todd-Klassen	453

11.4	Pontrjagin- und Euler-Klassen	454
11.4.1	Pontrjagin-Klassen	454
11.4.2	Euler-Klassen	457
11.4.3	Hirzebruch'sches L -Polynom und \hat{A} -Geschlecht	460
11.5	Chern-Simons-Formen	461
11.5.1	Definition	461
11.5.2	Die Chern-Simons-Form des Chern-Charakters	462
11.5.3	Der Cartan'sche Homotopieoperator und Anwendungen	463
11.6	Stiefel-Whitney-Klassen	467
11.6.1	Spinpündel	467
11.6.2	Čech-Kohomologiegruppen	468
11.6.3	Stiefel-Whitney-Klassen	469
12	Indexsätze	473
12.1	Elliptische Operatoren und Fredholm-Operatoren	473
12.1.1	Elliptische Operatoren	474
12.1.2	Fredholm-Operatoren	476
12.1.3	Elliptische Komplexe	477
12.2	Der Atiyah-Singer-Indexsatz	479
12.2.1	Die Aussage des Satzes	479
12.3	Der De-Rham-Komplex	480
12.4	Der Dolbeault-Komplex	482
12.4.1	Der verdrillte Dolbeault-Komplex und der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch	484
12.5	Der Signaturkomplex	484
12.5.1	Die Hirzebruch-Signatur	484
12.5.2	Der Signaturkomplex und der Signatursatz von Hirzebruch	485
12.6	Spinkomplexe	488
12.6.1	Der Dirac-Operator	488
12.6.2	Verdrillte Spinkomplexe	491
12.7	Der Wärmeleitungskern und verallgemeinerte ζ -Funktionen	493
12.7.1	Wärmeleitungskern und Indexsatz	493
12.7.2	Spektrale ζ -Funktionen	496
12.8	Der Atiyah-Patodi-Singer-Indexsatz	497
12.8.1	η -Invariante und spektraler Fluss	498
12.8.2	Der Atiyah-Patodi-Singer-(APS)-Indexsatz	498
12.9	Supersymmetrische Quantenmechanik	501
12.9.1	Clifford-Algebra und Fermionen	502
12.9.2	Supersymmetrische Quantenmechanik im flachen Raum	503
12.9.3	Supersymmetrische Quantenmechanik in allgemeinen Mängfaltigkeiten	506
12.10	Supersymmetrischer Beweis des Indexsatzes	508
12.10.1	Der Index	508
12.10.2	Pfadintegral und Indexsatz	511
	Aufgabe	521

13 Anomalien in Eichtheorien	523
13.1 Einführung	523
13.2 Abel'sche Anomalien	525
13.2.1 Die Fujikawa-Methode	525
13.3 Nicht-Abel'sche Anomalien	530
13.4 Die Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen	533
13.4.1 Der Becchi-Rouet-Stora-Operator und der Faddeev-Popov-Geist	533
13.4.2 BRS-Operator, FP-Geist und Modulraum	535
13.4.3 Die Wess-Zumino-Bedingungen	537
13.4.4 Abstiegsgleichungen und Lösungen von WZ-Bedingungen .	537
13.5 Abel'sche contra nicht-Abel'sche Anomalien	540
13.5.1 m Dimensionen contra $m+2$ Dimensionen	542
13.6 Die Paritätsanomalie in ungeraddimensionalen Räumen	545
13.6.1 Die Paritätsanomalie	546
13.6.2 Die Dimensionsleiter 4–3–2	547
14 Bosonische Stringtheorie	551
14.1 Differentialgeometrie auf Riemann'schen Flächen	551
14.1.1 Metrik und komplexe Struktur	552
14.1.2 Vektoren, Formen und Tensoren	553
14.1.3 Kovariante Ableitungen	554
14.1.4 Der Satz von Riemann-Roch	556
14.2 Quantentheorie von bosonischen Strings	558
14.2.1 Vakuumamplitude von Polyakov-Strings	558
14.2.2 Integrationsmaße	561
14.2.3 Komplexe Tensoranalysis und Stringmaß	572
14.2.4 Modulräume von Riemann'schen Flächen	576
14.3 Ein-Schleifen-Amplituden	578
14.3.1 Modulräume, CKV, Beltrami- und quadratische Differentiale	578
14.3.2 Bestimmung der Determinanten	580
Literatur	583
Sachregister	588

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch beruht auf einer Vorlesung, die ich im Wintersemester 1986 an der School of Mathematical and Physical Sciences der University of Sussex gehalten habe. Sie richtete sich ebenso an Graduierte wie an Fakultätsangehörige, die über Teilchenphysik, kondensierte Materie oder Allgemeine Relativitätstheorie arbeiteten. Die Vorlesungen liefen recht formlos ab, und ich habe mich bemüht, diese Atmosphäre so weit wie möglich in das vorliegende Buch mitzunehmen. Der Beweis eines Satzes wird nur dann ausgeführt, wenn er instruktiv und nicht allzu formal ist; andernfalls gebe ich lieber Beispiele, welche die vorgestellten Sätze plausibel machen. Viele Abbildungen werden den Leserinnen und Lesern helfen, sich ein Bild von den behandelten Themen zu machen.

Obwohl Konzepte aus Topologie, Differentialgeometrie und anderen Gebieten der heutigen Mathematik in jüngeren Entwicklungen der theoretischen Physik verbreitet zum Einsatz kommen, ist es gar nicht so leicht, eine in sich geschlossene Darstellung dieser Themen zu finden, die für Physik-Graduierte leicht zugänglich ist. Dieses Buch soll die Lücke füllen zwischen sehr fortgeschrittenen Büchern und Originalveröffentlichungen einerseits und den vielen exzellenten Einführungswerken andererseits. Als Leserinnen und Leser habe ich mir Studierende vorgestellt, die am Beginn ihres Graduiertenstudiums in theoretischer Physik stehen und schon eine gewisse Bekanntschaft mit Quantenfeldtheorie und Relativitätstheorie geschlossen haben. Sie werden in diesem Buch viele physikalische Beispiele finden, in denen topologische und geometrische Begriffe von großer Bedeutung sind. Diese Beispiele bilden eine eklektische Kompilation von Anwendungen aus Teilchenphysik, Allgemeiner Relativitätstheorie und Physik der kondensierten Materie. Fühlen Sie sich frei, Beispiele zu überspringen, die nicht aus Ihren Interessengebieten stammen! Ich glaube allerdings, dass diese Beispiele das *theoretische Minimum* für Studierende in theoretischer Physik darstellen. Mathematiker, die an der Anwendung ihres Fachs auf die theoretische Physik interessiert sind, werden dieses Buch ebenfalls interessant finden.

Das Buch besteht im Wesentlichen aus vier Teilen. Die ersten beiden Teile handeln von den Ideen, die den physikalischen bzw. mathematischen Background für alles Folgende bilden. Kapitel 1 gibt eine kurze Zusammenfassung der in diesem Buch behandelten Physik. Die Themen dabei sind Pfadintegrale, Eichtheorien (inklusive Monopole und Instantonen), Defekte in kondensierter Materie, Allgemeine Relativitätstheorie, Berry-Phasen in der Quantenmechanik und Strings. Das meiste davon wird in den anschließenden Kapiteln im Detail aus topologischem bzw. geometrischem Blickwinkel erläutert. Kapitel 2 ergänzt die „Bachelor“-Mathematik, die durchschnittliche Physiker mitbekommen haben. Wer sich gut mit Mengen, Abbil-

dungen und Allgemeiner Topologie auskennt, kann dieses Kapitel überspringen.

Kapitel 3 bis 8 widmen sich den Grundlagen von algebraischer Topologie und Differentialgeometrie. In Kapitel 4 wird die Idee der Klassifikation von Räumen mit Homologie- und Homotopiegruppen eingeführt. In Kapitel 5 stellen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit vor, eines der zentralen Konzepte der modernen theoretischen Physik. Die dabei definierten Differentialformen spielen eine ganz wichtige Rolle in unserem gesamten Buch. Differentialformen erlauben es, in Kapitel 6 das Duale der Homologiegruppe zu definieren, genannt die De-Rham-Kohomologiegruppe. Kapitel 7 beschäftigt sich mit Mannigfaltigkeiten, die mit einer Metrik versehen sind. Damit können wir dann wichtige geometrische Begriffe einführen wie Zusammenhang (engl. connection), kovariante Ableitung, Krümmung, Torsion und viele andere mehr. In Kapitel 8 kommen schließlich komplexe Mannigfaltigkeiten hinzu, also Mannigfaltigkeiten mit einer natürlichen komplexen Struktur.

Kapitel 9 bis 12 sind der Vereinigung von Topologie und Geometrie gewidmet. In Kapitel 9 definieren wir ein Faserbündel und zeigen, dass sich damit viele physikalische Phänomene auf natürliche Weise beschreiben lassen. Der in Kapitel 7 definierte Zusammenhang wird dementsprechend auf Faserbündel verallgemeinert, und zwar im nun folgenden Kapitel 10. Charakteristische Klassen sind Thema in Kapitel 11, sie ermöglichen es uns, Faserbündel mithilfe verschiedener Kohomologieklassen zu klassifizieren. Dies ist insbesondere von Bedeutung für den Atiyah-Singer-Indexsatz (Kapitel 12) – einen der wichtigsten Sätze in der gesamten zeitgenössischen Mathematik. Wir werden ihn allerdings nicht beweisen, sondern lieber einige wichtige Spezialfälle diskutieren, welche in praktischen physikalischen Anwendungen von Nutzen sind.

Die beiden letzten Kapitel beschäftigen sich mit den faszinierendsten Anwendungen von Topologie und Geometrie in der heutigen Physik. Zunächst wenden wir in Kapitel 13 die Theorie der Faserbündel, charakteristischen Klassen und Indexsätze auf Anomalien in Eichtheorien an. In Kapitel 14 wird Alexander M. Polyakovs bosonische Stringtheorie vom geometrischen Gesichtspunkt aus analysiert. Dabei zeigen wir eine explizite Berechnung der Ein-Schleifen-Amplitude.

Ich möchte meinen tiefen Dank gegenüber meinen Lehrern, Freunden und Studenten ausdrücken, insbesondere Tetsuya Asai, David Bailin, Hiroshi Khono, David Lancaster, Shigeki Matsutani, Hiroyuki Nagashima, David Pattarini, Felix E. A. Pirani, Kenichi Tamano, David Waxman und David Wong. Die grundlegenden Konzepte in Kapitel 5 haben sehr von den Vorlesungen von Felix Pirani am King's College, University of London, profitiert. Die Berechnung des String-Laplace-Operators über die Eisenstein-Reihe und die Kronecker'sche Grenzformel wurden von T. Asai vorgeschlagen. Ich möchte mich bei Euan Squires, David Bailin und Hiroshi Khono für hilfreiche Kommentare und Vorschläge bedanken. David Bailin gab mir den Anstoß, dieses Buch zu schreiben und riet Prof. Douglas F. Brewer, es in seine Reihe aufzunehmen. Dem Science and Engineering Research Council des Vereinigten Königreichs danke ich dafür, dass es mir den Aufenthalt an der University of Sussex möglich gemacht hat. Leider habe ich kein Sekretariat, bei dem ich mich für das so aufwendige Tippen bedanken könnte. Die Textverarbeitung habe ich selbst auf zwei NEC-PC9801-Computern durchgeführt. Jim A. Revill von Adam Hilger half mir auf

vielen Wegen, das Manuskript vorzubereiten. Auch seine Nachsicht gegenüber meiner Unfähigkeit, Deadlines einzuhalten, rechne ich ihm hoch an. Die wunderschöne Musik vieler Komponisten hat mein Büro ausgefüllt während der Arbeit an dem Manuskript: Ich danke Johann Sebastian Bach, Ryuichi Sakamoto, Ravi Shankar und Erik Satie.

Mikio Nakahara

Shizuoka, im Februar 1989

Vorwort zur zweiten Auflage

Die erste Auflage des vorliegenden Werks wurde 1990 veröffentlicht. Seitdem hat es unglaubliche Fortschritte bei den Anwendung von Geometrie und Topologie in der theoretischen Physik und umgekehrt gegeben. Die Grenzen zwischen den Disziplinen sind heutzutage kaum mehr auszumachen.

Es schien mir unmöglich, alle Fortschritte auf diesen Gebieten in eine zweite Ausgabe hineinzunehmen. Ich habe mich deshalb entschieden, die Überarbeitungen minimal zu halten. Neben der Korrektur von Schreib- und sonstigen Fehlern sowie diversen kleinen Ergänzungen habe ich vor allem den Beweis des Indexsatzes im Rahmen der supersymmetrischen Quantenmechanik eingefügt. An vielen Stellen wurde das Material auch neu angeordnet. Aus Veröffentlichungen wie aus Webseiten habe ich erfahren, dass die erste Auflage von Studierenden und Forschern aus vielen verschiedenen Fachgebieten gelesen wurde, nicht nur aus Physik und Mathematik, sondern unter anderem auch aus Philosophie, Chemie, Geodäsie und Ozeanologie. Dies ist einer der Gründe, warum ich das Buch nicht bis an die vorderste Front der aktuellen Entwicklungen heran aktualisiert habe. Ich hoffe, dass ich in naher Zukunft ein weiteres Buch, möglicherweise zusammen mit ein oder zwei Mathematikern, veröffentlichen kann, welches die jüngsten faszinierenden Anwendungen der Quantenfeldtheorie auf niederdimensionale Topologie und Zahlentheorie behandelt.

Die erste Ausgabe des Buchs wurde in vielen Kursen auf der ganzen Welt genutzt. Von einigen Lehrenden habe ich wertvolle Kommentare und Anregungen erhalten. Ich möchte ganz besonders Jouko Mikkelsson für konstruktive Vorschläge danken. Kazuhiro Sakuma, mein mathematischer Freund, hat mit mir zusammen die erste Ausgabe ins Japanische übersetzt. Dabei hat er unschätzbare Kommentare und Anregungen aus Sicht eines Mathematikers gegeben. Ich möchte ihm ebenso für zahlreiche Diskussionen und die Beantwortung vieler meiner Fragen danken. Ich hatte im Wintersemester 2001/2002 während einer Gastprofessur an der Technischen Universität Helsinki Gelegenheit, über den Stoff dieses Buchs zu unterrichten. Ich möchte Martti Salomaa für die herzliche Gastfreundschaft an seinem Labor für physikalische Materialwissenschaften danken. Sami Virtanen war Vorlesungsassistent, Danke für die exzellente Arbeit! Mein Dank gilt auch Juha Vartiainen, Antti Laiho, Teemu Ojanen, Teemu Keski-Kuha, Markku Stenberg, Juha Heiskala, Tuomas Hytönen, Antti Niskanen und Ville Bergholm für ihre Hilfe beim Auffinden von Tippfehlern und anderen Ungereimtheiten im Manuscript und ebenso für wertvolle Kommentare und Fragen.

Jim Revill und Tom Spicer von IOP Publishing waren immer sehr großherzig, wenn es darum ging, mir meine langsame Arbeit am Text zu verzeihen. Hierfür und für ihre Geduld möchte ich ihnen danken. Simon Laurenson danke ich für die Orga-

nisation von Copyediting, Satz und Korrekturlesen und Sarah Plenty für das Arrangieren von Druck, Bindung und Ablaufplanung. Die erste Ausgabe war mit einem alten NEC-Computer erstellt worden, dessen Betriebssystem längst nicht mehr existiert. Ich habe vor allem auch deshalb gezögert, mich an eine Neuauflage zu machen, weil mit der Mut fehlte, ein Buch mit über 500 Seiten noch einmal komplett abzutippen. Doch durch den Fortschritt in der Informationstechnologie war IOP Publishing in der Lage, das gesamte Buch einzuscannen und in Files zur Verfügung zu stellen, aus denen ich per Texterkennung (Optical Character Recognition, OCR) editierbaren Text gewinnen konnte. Ich danke den technischen Mitarbeitern bei IOP Publishing für diese mühsame Arbeit. Das OCR ist noch nicht gut genug, um L^AT_EX-Codes für Gleichungen zu erzeugen. Mariko Kamada hat darum die Gleichungen aus der ersten Version aufs Neue editiert. Ich möchte mich bei Yukitoshi Fujimura von Pearson Education Japan für zahlreiche T_EX-nische Ratschläge bedanken. Er hat die japanische Übersetzung der ersten Ausgabe des vorliegenden Buchs herausgegeben und ein exzellentes L^AT_EX-File produziert, aus dem ich zahlreiche L^AT_EX-Definitionen und -Styles, Diagramme usw. übernehmen konnte. Ohne die japanische Ausgabe wäre die Arbeit an dieser zweiten englischen Auflage viel schwieriger geworden.

Last but not least möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, der ich dieses Buch gewidmet habe. Die Überarbeitung hat schrecklich viele Wochenenden verschlungen. Ich danke meiner Frau Fumiko und meinen Töchtern Lisa und Yuri für ihre Geduld. Ich hoffe, meine kleinen Töchter werden eines Tages dieses Buch in einer Bücherei oder einer Buchhandlung in die Hände nehmen und verstehen, was ihr Dad an den ganzen Wochenenden und oft auch lange nach Mitternacht getan hat.

Mikio Nakahara

Nara, im Dezember 2002

Zur Nutzung dieses Buches

Als Autor dieses Buchs wünsche ich mir natürlich, dass das Werk komplett von Anfang bis Ende gelesen wird. Allerdings muss ich zugeben, dass das Buch ziemlich dick ist und der darin enthaltene Stoff vielfältig. Daher gebe ich an dieser Stelle einige Vorschläge, wie man das Werk in Kursen in Mathematik oder mathematischer Physik einsetzen könnte:

- (1) Einjähriger Kurs in mathematischer Physik: Kapitel 1 bis 10. Die Kapitel 11 und 12 sind optional.
- (2) Einjähriger Kurs über Geometrie und Topologie für Mathematikstudierende: Kapitel 2 bis 12, wobei Kapitel 2 entfallen kann, wenn die Teilnehmer mit elementarer Topologie vertraut sind. Physikalische Themen können ausgelassen werden, ohne dass dies zu ernsthaften Problemen führen sollte.
- (3) Einsemestriger Geometrie- und Topologiekurs: Kapitel 2 bis 7; Kapitel 2 kann entfallen, wenn die Teilnehmer mit elementarer Topologie vertraut sind, Kapitel 8 ist optional.
- (4) Einsemestriger Kurs in Differentialgeometrie für die Allgemeine Relativitätstheorie: Kapitel 2, 5 und 7.
- (5) Einsemestriger Fortgeschrittenenkurs in mathematischer Physik: Abschnitte 1.1–1.7, 12.9 und 12.10 – vorausgesetzt, die Studierenden sind mit Riemann'scher Geometrie und Faserbündeln vertraut. Dies ergibt einen in sich geschlossenen Kurs über das Pfadintegral und seine Anwendung auf den Indexsatz.

Um diese Auswahlen möglich zu machen, wurde ein gewisses Maß an Wiederholungen und Zusammenfassungen der jeweils zuvor eingeführten Themen in den Text aufgenommen.

Notation und Konventionen

Die Symbole $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und \mathbb{C} stehen für die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen. Die Menge der Quaternionen ist

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Die $(1, i, j, k)$ bilden eine Basis von \mathbb{H} , und es gilt:

$$i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = j \quad \text{und} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Beachten Sie, dass i, j und k die 2×2 -Matrixdarstellungen $i = i\sigma_3$, $j = i\sigma_2$, $k = i\sigma_1$ haben, wobei die σ_i für die Pauli-Spinmatrizen stehen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Realteil einer komplexen Zahl z ist $\operatorname{Re} z$, der Imaginärteil $\operatorname{Im} z$. Verwechseln Sie dies nicht mit $\operatorname{im} f$, der Bildmenge einer Abbildung f ! Der Kern von f wird mit $\ker f$ bezeichnet.

Für die Lichtgeschwindigkeit c , das Planck'sche Wirkungsquantum $\hbar = h/2\pi$ und die Boltzmannkonstante k_B setzen wir

$$c = \hbar = k_B = 1,$$

sofern nicht explizit anders angegeben. Weiterhin benutzen wir die Einstein'sche Summenkonvention: Wenn dieselbe Index doppelt, einmal hoch- und einmal tiefgestellt, auftritt, dann ist dieser Index über alle erlaubten Werte zu summieren. Läuft z. B. μ von 1 bis m , so ist

$$A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=1}^m A^\mu B_\mu.$$

Die euklidische Metrik ist $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(+1, \dots, +1)$, während die Minkowski-Metrik mit $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ notiert wird.

Das Zeichen \square bedeutet „Ende des Beweises“ und das Zeichen \diamond „Ende des Beispiels“.

1

Quantenphysik

Dieses Kapitel bietet eine kurze Einführung in die Pfadintegral-Quantisierung. Physikstudierende, die mit diesem Thema bereits vertraut sind, und Mathematikstudierende, die sich nicht so sehr für Physik interessieren, können es auch überspringen und direkt im zweiten Kapitel einsteigen. Unsere Darstellung hier ist nur eine ganz skizzenhafte, und detailliertere Einführungen finden sich bei Bailin und Love (1996), Cheng und Li (1984), Huang (1982), Das (1993), Kleinert (1990), Ramond (1989), Ryder (1996) und Swanson (1992). Wir folgen hier vor allem Alvarez (1995), Bertlmann (1996), Das (1993), Nakahara (1998), Rabin (1995), Sakita (1985) und Swanson (1992).

1.1 Analytische Mechanik

Wir führen einige elementare Prinzipien der Lagrange'schen und der Hamilton'schen Mechanik ein, die für das Verständnis der Quantenmechanik unabdingbar sind.

1.1.1 Newton'sche Mechanik

Wir wollen die Bewegung eines Teilchens m im dreidimensionalen Raum betrachten; $x(t)$ soll dabei die Position von m zur Zeit t beschreiben.¹ Nehmen Sie an, das Teilchen bewege sich unter einer äußeren Kraft $F(x)$. Dann erfüllt $x(t)$ die folgende Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t)). \quad (1.1)$$

Diese Gleichung ist unter dem Namen **zweites Newton'sches Axiom** oder **Bewegungsgleichung** bekannt.

Wenn die Kraft $F(x)$ als Gradient einer skalaren Funktion $V(x)$ gemäß $F(x) = -\nabla V(x)$ ausgedrückt werden kann, nennt man die Kraft **konservativ**, und die Funktion $V(x)$ heißt **potenzielle Energie** oder einfach **Potenzial**. Ist F eine konservative

¹ Wir nennen ein Teilchen mit der Masse m einfach „ein Teilchen m “.

Kraft, dann ist der Ausdruck

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \quad (1.2)$$

eine Erhaltungsgröße, denn es ist

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{k=x,y,z} \left[m \frac{dx_k}{dt} \frac{d^2x_k}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \right] = \sum_k \left(m \frac{d^2x_k}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x_k} \right) \frac{dx_k}{dt} = 0,$$

wobei wir die Bewegungsgleichung verwendet haben. Die Funktion E entspricht oft der Summe aus kinetischer und potenzieller Energie und wird **Energie** genannt.

Beispiel 1.1. (Eindimensionaler harmonischer Oszillator) Mit der Koordinate x soll für die auf m wirkende Kraft $F(x) = -kx$ gelten (mit einer Konstanten k). Die Kraft ist konservativ, und aus $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ ergibt sich $F(x) = -dV(x)/dx = -kx$. Im Allgemeinen ist jede eindimensionale Kraft $F(x)$, die nur von x abhängt, konservativ, und das entsprechende Potenzial ist durch

$$V(x) = - \int_x F(\xi) d\xi$$

gegeben. ◊

Ein Beispiel für eine nichtkonservative Kraft ist die Reibungskraft $F = -\eta dx/dt$. Wir werden es im Folgenden ausschließlich mit konservativen Kräften zu tun haben.

1.1.2 Lagrange-Formalismus

Die Newton'sche Mechanik hat die folgenden Nachteile:

1. Der Formalismus beruht auf einer Vektorgleichung (1.1), mit der sich schlecht umgehen lässt, wenn man nicht gerade ein orthogonales Koordinatensystem gewählt hat.
2. Die Bewegungsgleichung ist eine Gleichung zweiter Ordnung, und man kann die globalen Systemeigenschaften nicht ohne Weiteres ableiten.
3. Die Analyse etwaiger Symmetrien ist nicht einfach.
4. Zwangsbedingungen sind schwierig einzubringen.

Darüber hinaus kann man die Quantenmechanik nicht direkt aus den Newton'schen Gleichungen ableiten. Aus all diesen Gründen führen wir jetzt den Lagrange-Formalismus ein.

Betrachten wir ein System, dessen Zustand durch N Parameter $\{q_i\}$ ($1 \leq i \leq N$) beschrieben wird (z. B. die Positionen der beteiligten Massen). Der Satz von Parametern ist ein Element eines Raums² M . Der Raum M wird **Konfigurationsraum**

² Einer Mannigfaltigkeit, um genau zu sein, siehe Kapitel 5.

genannt, und die $\{q_i\}$ nennt man **generalisierte Koordinaten**. Ein Teilchen, das sich auf einer Kreislinie bewegt, hat beispielsweise als generalisierte Koordinate den Winkel θ , und der Konfigurationsraum M ist ein Kreis. Die **generalisierte Geschwindigkeit** wird durch $\dot{q}_i = dq_i/dt$ definiert.

Die **Lagrange-Funktion** $L(q, \dot{q})$ werden wir etwas später mit dem Hamilton'schen Prinzip definieren. Wir werden uns hier überwiegend auf eindimensionale Räume beschränken, die Verallgemeinerung auf höherdimensionale Räume sollte aber keine Probleme bereiten. Betrachten wir nun also eine Trajektorie $q(t)$ ($t \in [t_A, t_E]$) eines Teilchen mit den Bedingungen $q(t_A) = q_A$ und $q(t_E) = q_E$. Das Funktional³

$$S[q(t), \dot{q}(t)] = \int_{t_A}^{t_E} L(q, \dot{q}) dt \quad (1.3)$$

ist dann die **Wirkung** für diese Trajektorie. Sind $q(t)$ und $\dot{q}(t)$ gegeben, ordnet ihnen $S[q, \dot{q}]$ eine reelle Zahl zu. Das **Hamilton'sche Prinzip**, auch als **Prinzip der kleinsten Wirkung** bekannt, besagt nun, dass die physikalisch realisierte Trajektorie einem Extremum der Wirkung entspricht. Man muss somit die Lagrange-Funktion gerade so wählen, dass das Hamilton'sche Prinzip erfüllt ist.

Es kann geschickt sein, das Hamilton'sche Prinzip in lokaler Form als Differentialgleichung zu schreiben. Nehmen wir an, dass $q(t)$ ein Pfad ist, für den S einen extremalen Wert annimmt. Weiterhin sei $\delta q(t)$ eine Variation dieser Trajektorie, sodass $\delta q(t_A) = \delta q(t_E) = 0$ ist. Die Wirkung verändert sich unter dieser Variation um

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_A}^{t_E} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) dt - \int_{t_A}^{t_E} L(q, \dot{q}) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_E} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dieser Ausdruck muss verschwinden, denn bei q wird S ja extremal. Da dies für jedes beliebige δq gelten muss, muss der Integrand in der letzten Zeile von (1.4) verschwinden. Das führt auf die **Euler-Lagrange-Gleichung**

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (1.5)$$

Mit N Freiheitsgraden erhält man

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (1 \leq k \leq N). \quad (1.6)$$

³ Ein Funktional ist eine Funktion von Funktionen. Eine Funktion $f(\bullet)$ liefert zu einer gegebenen Zahl x eine Zahl $f(x)$. Analog weist ein Funktional $F[\bullet]$ einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine Zahl $F[f]$ zu.

Wenn wir als nächstes den kanonischen oder **generalisierten Impuls** als (kanonisch) Konjugierte der Koordinate q_k einführen, mit

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad (1.7)$$

nimmt die Euler-Lagrange-Gleichung die Form

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (1.8)$$

an. Indem wir fordern, dass diese Gleichung für eine einfache Punktmasse sich auf das zweite Newton'sche Axiom reduziert, finden wir schnell die mögliche Gestalt der Lagrange-Funktion für die klassische Mechanik eines solchen Teilchens. Sei also $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$. Durch Einsetzen dieser Lagrange-Funktion in die Euler-Lagrange-Gleichung lässt sich leicht zeigen, dass sie in der Tat wieder auf die Newton'sche Bewegungsgleichung führt, also

$$m\ddot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0. \quad (1.9)$$

Nehmen wir wieder den eindimensionalen harmonischen Oszillator als Beispiel. Die Lagrange-Funktion ist

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \quad (1.10)$$

woraus man zu $m\ddot{x} + kx = 0$ gelangt.

Für spätere Zwecke ist es vorteilhaft, den Begriff der **Variationsableitung** (engl. functional derivative) einzuführen. Beschränken wir uns zunächst der Übersichtlichkeit halber auf ein System mit nur einem Freiheitsgrad. Die Variationsableitung von S nach q ist dann definiert durch den Ausdruck

$$\frac{\delta S[q, \dot{q}]}{\delta q(s)} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\{S[q(t) + \varepsilon\delta(t-s), \dot{q}(t) + \varepsilon\frac{d}{dt}\delta(t-s)] - S[q(t), \dot{q}(t)]\}}{\varepsilon}. \quad (1.11)$$

Wegen

$$\begin{aligned} S\left[q(t) + \varepsilon\delta(t-s), \dot{q}(t) + \varepsilon\frac{d}{dt}\delta(t-s)\right] \\ &= \int dt L\left(q(t) + \varepsilon\delta(t-s), \dot{q}(t) + \varepsilon\frac{d}{dt}\delta(t-s)\right) \\ &= \int dt L(q, \dot{q}) + \varepsilon \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta(t-s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta(t-s)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= S[q, \dot{q}] + \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q}(s) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(s)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

kann man dann die Euler-Lagrange-Gleichung als

$$\frac{\delta S}{\delta q(s)} = \frac{\partial L}{\partial q}(s) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)(s) = 0 \quad (1.12)$$

schreiben.

Wir wollen nun Symmetrien im Kontext des Lagrange-Formalismus untersuchen. Nehmen wir an, die Lagrange-Funktion L ist unabhängig von einer bestimmten Koordinate q_k .⁴ Solch eine Koordinate heißt **zyklisch**. Der zu einer zyklischen Koordinate kanonisch konjugierte Impuls ist eine Erhaltungsgröße. Die Bedingung $\partial L / \partial q_k = 0$ führt nämlich auf

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (1.13)$$

Mathematisch können wir diese Argumentation folgendermaßen ausführen. Angenommen, die Lagrange-Funktion L hat eine *stetig* parametrisierte Symmetrie. Dies bedeutet, formal gesprochen, dass die Wirkung $S = \int dt L$ invariant ist unter der Symmetrieeoperation auf $q_k(t)$. Betrachten wir eine infinitesimale Symmetrieeoperation $q_k(t) \rightarrow q_k(t) + \delta q_k(t)$, angewendet auf den Pfad $q_k(t)$.⁵ Hieraus folgt, dass, wenn $q_k(t)$ ein Pfad ist, der zu einem Extremum der Wirkung führt, $q_k(t) \rightarrow q_k(t) + \delta q_k(t)$ ebenfalls mit einer extremalen Wirkung korrespondiert. Da S unter dieser Transformation invariant ist, folgt

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_E} \sum_k \delta q_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_k \left[\delta q_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right]_{t_A}^{t_E} = 0.$$

Der erste Term in den runden Klammern verschwindet, da q eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist. Dementsprechend erhalten wir

$$\sum_k \delta q_k(t_A) p_k(t_A) = \sum_k \delta q_k(t_E) p_k(t_E), \quad (1.14)$$

wobei wir die Definition $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ ausgenutzt haben. Da t_A und t_E willkürlich gewählt sind, zeigt diese Gleichung, dass die Größe $\sum_k \delta q_k(t) p_k(t)$ in der Tat unabhängig von t und somit eine Erhaltungsgröße ist.

Beispiel 1.2. Betrachten wir ein Teilchen m , das sich unter dem Einfluss einer Kraft bewegt, welche von einem kugelsymmetrischen Potenzial $V(r)$ hervorgerufen wird, mit den dreidimensionalen Polarkoordinaten r, θ, ϕ . Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)] - V(r).$$

Beachten Sie, dass $q_k = \phi$ zyklisch ist, was auf den Erhaltungssatz

$$\delta \phi \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \propto m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{konstant}$$

⁴ Natürlich kann L trotzdem von \dot{q}_k abhängen. Andernfalls wäre die Koordinate q_k vollkommen irrelevant.

⁵ Da die Symmetrie stetig ist, kann man immer eine solche infinitesimale Operation definieren. Es versteht sich von selbst, dass $\delta q(t_A)$ und $\delta q(t_E)$ im vorliegenden Fall im Allgemeinen nicht verschwinden.

führt. Dies ist nichts anderes als die Erhaltung des Drehimpulses um die z -Achse. Mit einer analogen Argumentation zeigt man, dass die Drehimpulse um die x - und die y -Achse ebenso erhalten bleiben. \diamond

Einige Anmerkungen sind an dieser Stelle angebracht:

- Sei $Q(q)$ eine beliebige Funktion von q . Dann führen die Lagrange-Funktionen L und $L + dQ/dt$ zu derselben Euler-Lagrange-Gleichung. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(L + \frac{dQ}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(L + \frac{dQ}{dt} \right) \right] \\ = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{dQ}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_j \frac{\partial Q}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \\ = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{dQ}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial Q}{\partial q_k} = 0. \end{aligned}$$

- Eine interessante Beobachtung ist, dass die Newton'sche Mechanik sich zwar immer als ein Extremum der Wirkung abspielt, die Wirkung selbst aber für *jede beliebige* Trajektorie definiert ist. Diese Tatsache spielt eine Schlüsselrolle bei der Pfadintegral-Formulierung der Quantentheorie.

1.1.3 Hamilton-Formalismus

Der Lagrange-Formalismus liefert uns gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Im Gegensatz dazu führt der Hamilton-Formalismus auf Bewegungsgleichungen, die in der Zeitableitung von erster Ordnung sind, was uns später erlauben wird, Flüsse im Phasenraum zu definieren. Noch wichtiger jedoch ist, dass wir die symplektische Struktur im Hamilton-Formalismus manifest machen können, was später in Beispiel 5.12 gezeigt werden wird.

Nehmen wir eine gegebene Lagrange-Funktion L an. Dann wird die zugehörige **Hamilton-Funktion** über eine Legendre-Transformation der Variablen eingeführt:

$$H(q, p) \equiv \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}), \quad (1.15)$$

wobei \dot{q} auf der linken Seite zugunsten von p eliminiert wird, indem die Definition des Impulses $p_k = \partial L(q, \dot{q}) / \partial \dot{q}_k$ ausgenutzt wird. Damit diese Transformation definiert ist, muss für die Jacobi-Determinante

$$\det \left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0$$

gelten. Der Raum mit den Koordinaten (q_k, p_k) wird **Phasenraum** genannt.

Betrachten wir eine infinitesimale Änderung der Hamilton-Funktion, hervorgeru-

fen durch δq_k und δp_k :

$$\begin{aligned}\delta H &= \sum_k \left[\delta p_k \dot{q}_k + p_k \delta \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right] \\ &= \sum_k \left[\delta p_k \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k \right].\end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung folgt

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k, \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad (1.16)$$

was nicht mehr ist als ein Austausch von unabhängigen Variablen. Die **Hamilton'schen Bewegungsgleichungen** ergeben sich hieraus, wenn wir die Euler-Lagrange-Gleichung auf die linke Seite der zweiten Gleichung anwenden:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (1.17)$$

Beispiel 1.3. Wir betrachten wiederum den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2$, wobei $\omega^2 = k/m$ ist. Der zu q konjugierte Impuls ist $p = \partial L / \partial \dot{q} = m\dot{q}$, was sich nach \dot{q} auflösen lässt: $\dot{q} = p/m$. Die Hamilton-Funktion ist dann

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2, \quad (1.18)$$

und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 q, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}. \quad (1.19)$$

◊

Nun betrachten wir zwei Funktionen $A(q, p)$ und $B(q, p)$, die auf dem Phasenraum einer Hamilton-Funktion H definiert sind. Dann ist die **Poisson-Klammer** $[A, B]$ definiert durch⁶

$$[A, B] = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right). \quad (1.20)$$

⁶ Wenn Verwechslungen mit dem quantenmechanischen Kommutator von Operatoren möglich sind, werde ich die Schreibweise $[A, B]_{PK}$ verwenden.

Übung 1.1 Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammer eine **Lie-Klammer** ist, dass also gilt:

$$[A, c_1 B_1 + c_2 B_2] = c_1 [A, B_1] + c_2 [A, B_2] \quad \text{Linearität} \quad (1.21\text{a})$$

$$[A, B] = -[B, A] \quad \text{Anti- bzw. Schiefsymmetrie} \quad (1.21\text{b})$$

$$[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0 \quad \text{Jacobi-Identität} \quad (1.21\text{c})$$

Die fundamentalen Poisson-Klammern sind

$$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}. \quad (1.22)$$

Beachten Sie, dass die zeitliche Entwicklung einer physikalischen Größe $A(q, p)$ sich in Abhängigkeit von der Poisson-Klammer von A und der Hamilton-Funktion H ausdrücken lässt:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_k \left(\frac{dA}{dq_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{dA}{dp_k} \frac{dp_k}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{dA}{dq_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{dA}{dp_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = [A, H]. \quad (1.23)$$

Wenn $[A, H] = 0$ sein sollte, dann bleibt die Größe A erhalten; mithin ist $dA/dt = 0$. Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen selbst schreiben sich als

$$\frac{dp_k}{dt} = [p_k, H], \quad \frac{dq_k}{dt} = [q_k, H]. \quad (1.24)$$

Satz 1.1. (Noether-Theorem) Sei $H(q_k, p_k)$ eine Hamilton-Funktion, die invariant unter einer infinitesimalen Koordinatentransformation $q_k \rightarrow q'_k = q_k + \varepsilon f_k(q)$ ist. Dann ist

$$Q = \sum_k p_k f_k(q) \quad (1.25)$$

eine Erhaltungsgröße.

Beweis

Per definitionem gilt $H(q_k, p_k) = H(q'_k, p'_k)$. Aus $q'_k = q_k + \varepsilon f_k(q)$ folgt, dass die mit dem Koordinatenwechsel assoziierte Jacobi-Matrix die Gestalt

$$\Lambda_{ij} = \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} \simeq \delta_{ij} + \varepsilon \frac{\partial f_i(q)}{\partial q_j}$$

hat (bis $O(\varepsilon)$). Der Impuls transformiert sich unter dieser Koordinatenänderung wie

$$p_i \rightarrow \sum_j p_j \Lambda_{ji}^{-1} \simeq p_i - \varepsilon \sum_j p_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= H(q'_k, p'_k) - H(q_k, p_k) \\ &= \frac{\partial H}{\partial q_k} \varepsilon f(q) - \frac{\partial H}{\partial p_j} \varepsilon p_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \\ &= \varepsilon \left[\frac{\partial H}{\partial q_k} f_k(q) - \frac{\partial H}{\partial p_j} p_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right] = \varepsilon [H, Q] = \varepsilon \frac{dQ}{dt}, \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass Q eine Erhaltungsgröße ist. \square

Das Noether-Theorem besagt somit, dass das Auffinden einer Erhaltungsgröße äquivalent zum Auffinden einer Transformation ist, welche die Hamilton-Funktion invariant lässt.

Eine Erhaltungsgröße Q ist der Erzeuger (Generator) der zugehörigen Transformation. Es ist nämlich

$$[q_i, Q] = \sum_k \left[\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q}{\partial q_k} \right] = \sum_k \delta_{ik} f_k(q) = f_i(q),$$

was zeigt, dass $\delta q_i = \varepsilon f_i(q) = \varepsilon [q_i, Q]$ ist.

Ein paar Beispiele sind an dieser Stelle sicherlich angebracht. Sei etwa $H = p^2/2m$ die Hamilton-Funktion eines freien Teilchens. Da H nicht von q abhängt, ist es invariant unter der Transformation $q \mapsto q + \varepsilon \cdot 1, p \mapsto p$. Darum bleibt $Q = p \cdot 1 = p$ erhalten, und diese Größe lässt sich mit dem linearen Impuls identifizieren.

Beispiel 1.4. Betrachten wir ein Teilchen m , das sich in einer zweidimensionalen Ebene mit dem axialsymmetrischen Potenzial $V(r)$ bewegt. Die Lagrange-Funktion ist

$$L(r, \theta) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

Die kanonisch konjugierten Impulse sind

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta},$$

und die Hamilton-Funktion ist

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r).$$

Diese Hamilton-Funktion ist offensichtlich unabhängig von θ und damit invariant unter der Transformation

$$\theta \mapsto \theta + \varepsilon \cdot 1, \quad p_\theta \mapsto p_\theta.$$

Die korrespondierende Erhaltungsgröße ist

$$Q = p_\theta \cdot 1 = mr^2\dot{\theta},$$

d. h. der Drehimpuls. \diamond

1.2 Kanonische Quantisierung

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wusste man, dass die klassische Physik, also Newton'sche Mechanik und klassischer Elektromagnetismus, ernsthafte Inkonsistenzen enthalten. Etwas später, zu Beginn des 20. Jahrhunderts, wurden diese aufgelöst durch die Entdeckung von Spezieller und Allgemeiner Relativitätstheorie sowie der Quantenmechanik. Bis heute gibt es kein einziges Experiment, dessen Ergebnis der Quantentheorie widersprechen würde. Es mag jedoch überraschen, dass es keinen expliziten *Beweis* der Quantentheorie gibt. Alles was man sagen kann, ist, dass die Quantentheorie sich nicht im Widerspruch zur Natur befindet. In Einklang hiermit werden auch wir nicht versuchen, die Quantentheorie zu beweisen, sondern uns damit zufrieden geben, einige „Richtlinien“ zu skizzieren, auf denen die Quantentheorie aufgebaut ist.

1.2.1 Hilbert-Raum, Bras und Kets

Lassen Sie uns einen komplexen Hilbert-Raum⁷ betrachten:

$$\mathcal{H} = \{|\phi\rangle, |\psi\rangle, \dots\}. \quad (1.26)$$

Ein Element von \mathcal{H} heißt **Ket-Vektor**, oder kurz: **Ket**.

Eine lineare Funktion $\alpha : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist durch

$$\alpha(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) = c_1\alpha(|\psi_1\rangle) + c_2\alpha(|\psi_2\rangle) \quad (\forall c_i \in \mathbb{C}, |\psi_i\rangle \in \mathcal{H})$$

definiert. Wir verwenden eine spezielle Notation, die von Dirac eingeführt wurde, und schreiben die lineare Funktion als $\langle\alpha|$ und ihre Wirkung (ihren „Funktionswert“) als $\langle\alpha|\psi\rangle \in \mathbb{C}$. Die Menge dieser linearen Funktionen ist selbst ein Vektorraum, den man den **Dualraum** \mathcal{H}^* von \mathcal{H} nennt. Ein Element von \mathcal{H}^* bezeichnet man als **Bra-Vektor**, oder kurz **Bra**.

Es sei nun $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots\}$ eine Basis des Hilbert-Raums \mathcal{H} .⁸ Ein beliebiger Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ kann dann als $|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |e_k\rangle$ entwickelt werden, wobei $\psi_k \in \mathbb{C}$ die k -te Komponente von $|\psi\rangle$ ist. Nun wollen wir eine Basis $\{\langle e_1|, \langle e_2|, \dots\}$ des Dualraums \mathcal{H}^* einführen. Es soll sich dabei um eine **duale Basis** von $\{|e_k\rangle\}$ handeln, d. h.

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (1.27)$$

⁷ In der Quantenmechanik ist mit einem Hilbert-Raum oft der Raum $L^2(M)$ der quadratintegrablen Funktionen auf einem Raum (einer Mannigfaltigkeit) M gemeint. Im Folgenden jedoch müssen wir uns mit solchen „Funktionen“ wie $\delta(x)$ und e^{ikx} beschäftigen, deren Norm unendlich ist. Ein Hilbert-Raum, der solche Funktionen enthält, ist ein erweiterter Hilbert-Raum („rigged Hilbert space“). Die Behandlung von Hilbert-Räumen ist hier mathematisch nicht immer ganz streng, dies sollte aber keine Unannehmlichkeiten bereiten.

⁸ Wir nehmen an, dass \mathcal{H} separabel ist und die Basis von maximal abzählbar unendlich vielen Vektoren gebildet wird. Beachten Sie, dass wir keine Orthonormalitätsbedingung aufstellen können, da wir bisher noch keine Vektornorm definiert haben.

Dann lässt sich eine beliebige lineare Funktion $\langle \alpha |$ nach der dualen Basis entwickeln: $\langle \alpha | = \sum_k \alpha_k \langle \varepsilon_k |$, wobei $\alpha_k \in \mathbb{C}$ die k -te Komponente von $\langle \alpha |$ ist. Die Wirkung von $\langle \alpha | \in \mathcal{H}^*$ auf den Ket-Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ kann nun in den jeweiligen Komponenten dargestellt werden:

$$\langle \alpha | \psi \rangle = \sum_{ij} \alpha_i \psi_j \langle \varepsilon_i | e_j \rangle = \sum_{ij} \alpha_i \psi_j \delta_{ij} = \sum_i \alpha_i \psi_i. \quad (1.28)$$

Man kann sich $|\psi\rangle$ als Spaltenvektor und $\langle \alpha |$ als Zeilenvektor vorstellen. In diesem Sinne ist $\langle \alpha | \psi \rangle$ die Matrixmultiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor, was einen Skalar ergibt.

Es ist möglich, eine Eins-zu-Eins-Entsprechung zwischen den Elementen von \mathcal{H} und denen von \mathcal{H}^* aufzustellen. Wir wählen dazu eine feste Basis $\{|e_k\rangle\}$ von \mathcal{H} und entsprechend $\{\langle \varepsilon_k |\}$ von \mathcal{H}^* . Dann existiert zu jedem $|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |e_k\rangle$ ein korrespondierendes Element $\langle \psi | = \sum_k \psi_k^* \langle \varepsilon_k | \in \mathcal{H}^*$. Der Grund dafür, dass hier die komplexe Konjugierte von ψ_k steht, wird gleich klar werden. Es lässt sich nun ein **inneres Produkt** oder **Skalarprodukt** zwischen zwei Elementen $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ einführen. Das innere Produkt ist definiert über

$$(|\phi\rangle, |\psi\rangle) \equiv \langle \phi | \psi \rangle = \sum_k \phi_k^* \psi_k. \quad (1.29)$$

Wir verwenden gewöhnlich denselben Buchstaben, um korrespondierende Bras und Kets zu bezeichnen. Die **Norm** eines Vektors $|\psi\rangle$ wird auf natürliche Weise über das innere Produkt definiert. Es lässt sich für die Definition $\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ leicht zeigen, dass sie allen mathematischen Axiomen für eine Norm genügt. Beachten Sie, dass die Norm reell und nichtnegativ ist, dank der komplexen Konjugation in den Komponenten des Bra-Vektors.

Mit dem inneren Produkt zweier Ket-Vektoren wird es möglich, eine Orthonormalbasis $\{|e_k\rangle\}$ zu konstruieren, sodass $\langle e_i | e_j \rangle = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ ist. Nehmen wir an, es sei $|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |e_k\rangle$. Durch Linksmultiplikation mit $\langle e_k |$ erhält man daraus $\langle e_k | \psi \rangle = \psi_k$. Damit wird $|\psi\rangle$ ausgedrückt als $|\psi\rangle = \sum_k \langle e_k | \psi \rangle |e_k\rangle = \sum_k |e_k\rangle \langle e_k | \psi \rangle$. Da dies für beliebige Vektoren $|\psi\rangle$ gilt, haben wir hiermit die **Vollständigkeitsrelation** für unseren Hilbert-Raum:

$$\sum_k |e_k\rangle \langle e_k | = I. \quad (1.30)$$

I ist dabei die identische Abbildung (Identität) in \mathcal{H} , die im endlichdimensionalen Fall durch die Einheitsmatrix dargestellt wird.

1.2.2 Axiome der kanonischen Quantisierung

Gegeben sein ein isoliertes klassisches dynamisches System wie etwa ein harmonischer Oszillator. Wir konstruieren das korrespondierende Quantensystem, indem wir dem folgenden Satz von Axiomen folgen:

A1. Der Zustand des Quantensystems kann durch einen Vektor $|\psi\rangle$ aus einem Hilbert-Raum \mathcal{H} beschrieben werden ($|\psi\rangle \in \mathcal{H}$). In diesem Sinne nennt man $|\psi\rangle$

einen **Zustandsvektor** oder kurz **Zustand**. Darüber hinaus beschreiben zwei Zustände $|\psi\rangle$ und $c|\psi\rangle$ ($c \in \mathbb{C}, c \neq 0$) denselben Zustand. Der Zustand wird also als **Strahldarstellung** von \mathcal{H} beschrieben.

- A2. Eine physikalische Größe A in der klassischen Mechanik wird ersetzt durch einen Hermite'schen Operator \hat{A} auf dem Hilbert-Raum \mathcal{H} .⁹ Ein Operator \hat{A} wird oft eine **Observable** genannt. Das Ergebnis einer Messung der Größe A ist einer der Eigenwerte von \hat{A} . (Die Hermitizität von \hat{A} wird hier vorausgesetzt, um reelle Eigenwerte zu garantieren.)
- A3. Die Poisson-Klammern der klassischen analytischen Mechanik werden durch den, mit dem Faktor $-i/\hbar$ multiplizierten, **Kommutator** ersetzt:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (1.31)$$

Wir werden ab jetzt $\hbar = 1$ setzen, wenn nicht explizit anders angegeben. Die fundamentalen Kommutatorrelationen (Vertauschungsrelationen) sind, vgl. (1.22),

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}. \quad (1.32)$$

Mit diesen Ersetzungen werden die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen zu

$$\frac{d\hat{q}_i}{dt} = \frac{1}{i}[\hat{q}_i, H], \quad \frac{d\hat{p}_i}{dt} = \frac{1}{i}[\hat{p}_i, H]. \quad (1.33)$$

Wenn eine klassische Größe A keine explizite Zeitabhängigkeit hat, genügt A derselben Gleichung wie die Hamilton-Funktion. Ganz analog ergibt sich für den Fall, dass der Operator \hat{A} nicht explizit von t abhängt, die **Heisenberg'sche Bewegungsgleichung**:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i}[\hat{A}, \hat{H}]. \quad (1.34)$$

- A4. Sei $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ein beliebiger Zustand. Weiterhin nehmen wir an, dass wir viele Systeme in jeweils diesem Zustand präpariert haben. Dann ergibt eine Beobachtung von A in diesen Systemen zur Zeit t im Allgemeinen zufällige Messwerte mit dem Erwartungswert

$$\langle A \rangle_t = \frac{\langle \psi | \hat{A}(t) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (1.35)$$

- A5. Für jeden physikalischen Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ gibt es einen Operator, für den $|\psi\rangle$ einer der Eigenzustände ist.¹⁰

Diese fünf Axiome sollen ab jetzt als die Spielregeln gelten. Ein paar Kommentare dazu sind sicherlich angebracht. Sehen wir uns als erstes das Axiom A4 näher an. Wir

⁹ Ein Operator auf \mathcal{H} wird normalerweise mit einem „~“ gekennzeichnet. Wir werden dieses Symbol später weglassen, sofern dies keine allzu große Verwirrung stiftet.

¹⁰ Dieses Axiom wird in der Literatur oft ignoriert. Die *raison d'être* dieses Axioms wird später klar werden.

nehmen der Einfachheit halber an, dass $|\psi\rangle$ normiert ist, also gilt: $\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$. Es habe nun $\hat{A}(t)$ eine Menge $\{a_n\}$ von diskreten Eigenwerten mit den zugehörigen normierten Eigenvektoren $\{|n\rangle\}$:¹¹

$$\hat{A}(t)|n\rangle = a_n|n\rangle, \quad \langle n|n\rangle = 1.$$

Der Erwartungswert von $\hat{A}(t)$ bezüglich eines beliebigen Zustands

$$|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle \quad \text{mit} \quad \psi_n = \langle n|\psi\rangle$$

ist dann

$$\langle\psi|\hat{A}(t)|\psi\rangle = \sum_{m,n} \psi_m^* \psi_n \langle m|\hat{A}(t)|n\rangle = \sum_n a_n |\psi_n|^2.$$

Aus der Tatsache, dass das Ergebnis einer Messung von A im Zustand $|n\rangle$ immer a_n ist, folgt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Messwert a_n , d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass sich $|\psi\rangle$ im Zustand $|n\rangle$ befindet, durch

$$|\psi_n|^2 = |\langle n|\psi\rangle|^2$$

gegeben ist. Die Zahl $\langle n|\psi\rangle$ stellt das „Gewicht“ (den Wichtungsfaktor) des Zustands $|n\rangle$ im Zustand $|\psi\rangle$ dar und wird **Wahrscheinlichkeitsamplitude** genannt.

Wenn \hat{A} ein stetiges Spektrum a hat, entwickelt man den Zustand $|\psi\rangle$ gemäß

$$|\psi\rangle = \int da \psi(a) |a\rangle.$$

Die Vollständigkeitsrelation nimmt nun die Form

$$\int da |a\rangle \langle a| = I \tag{1.36}$$

an. Wegen der Identität $\int da' |a'\rangle \langle a'|a\rangle = |a\rangle$ müssen wir dann die Normierung

$$\langle a'|a\rangle = \delta(a' - a) \tag{1.37}$$

verwenden, mit der **Dirac'schen δ -Funktion** $\delta(a)$. Den Entwicklungskoeffizienten $\psi(a)$ erhält man aus der Normierungsbedingung als $\psi(a) = \langle a|\psi\rangle$. Wenn $|\psi\rangle$ als $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ normiert wird, sollte man

$$1 = \int da \int da' \psi^*(a)\psi(a') \langle a|a'\rangle = \int da |\psi(a)|^2$$

erhalten. Aus der Relation

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \int a |\psi(a)|^2 da$$

¹¹ Da $\hat{A}(t)$ Hermite'sch ist, kann man immer $\{|n\rangle\}$ orthonormal wählen.

folgt auch, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der man den Messwert von A im Intervall $[a, a + da]$ findet, $|\psi(a)|^2 da$ beträgt. Daher ist die Wahrscheinlichkeitsdichte durch

$$\rho(a) = |\langle a | \psi \rangle|^2 \quad (1.38)$$

gegeben.

Zum Schluss wollen wir noch aufklären, wozu das Axiom A5 benötigt wird. Nehmen wir an, dass sich das System im Zustand $|\psi\rangle$ befindet und die Wahrscheinlichkeit, es zugleich im Zustand $|\phi\rangle$ anzutreffen, $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ ist. Es wurde bereits erwähnt, dass dies der Fall ist, wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand einer Observablen ist. Axiom A5 garantiert, dass dies für jeden beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ gilt.

1.2.3 Heisenberg-Gleichung, Heisenberg-Bild und Schrödinger-Bild

Die formale Lösung der Heisenberg'schen Bewegungsgleichung

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i} [\hat{A}, \hat{H}]$$

erhält man leicht als

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t}. \quad (1.39)$$

Daher sind die Operatoren $\hat{A}(t)$ und $\hat{A}(0)$ durch den unitären Operator

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t} \quad (1.40)$$

miteinander verknüpft und darum unitär äquivalent. Dieser Formalismus, in welchem die Operatoren von t abhängen, die Zustände dagegen nicht, wird **Heisenberg-Bild** genannt.

Man kann ebenso gut ein anderes, zum Heisenberg-Bild äquivalentes Bild verwenden. Wir bilden den Erwartungswert von \hat{A} in Bezug auf den Zustand $|\psi\rangle$ als

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(t) \rangle &= \langle \psi | e^{i\hat{H}t} \hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t} | \psi \rangle \\ &= (\langle \psi | e^{i\hat{H}t}) \hat{A}(0) (e^{-i\hat{H}t} | \psi \rangle). \end{aligned}$$

Mit $|\psi(t)\rangle \equiv e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle$ finden wir, dass der Erwartungswert zur Zeit t sich auch als

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{A}(0) | \psi(t) \rangle \quad (1.41)$$

ausdrücken lässt. Somit sind dieses Mal die Zustände zeitabhängig und nicht die Operatoren. Dieser Formalismus ist das **Schrödinger-Bild**.

Unsere nächste Aufgabe ist es, die Bewegungsgleichung für $|\psi(t)\rangle$ zu finden. Um Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir zunächst Größen im Schrödinger-Bild mit einem Index „S“, solche im Heisenberg-Bild mit einem Index H. Somit sind $|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H$ und $\hat{A}_S = \hat{A}_H(0)$. Durch Ableiten von $|\psi(t)\rangle_S$ nach t findet man die **Schrödinger-Gleichung**:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S = \hat{H} |\psi(t)\rangle_S. \quad (1.42)$$

Beachten Sie, dass der Hamilton-Operator \hat{H} im Schrödinger- wie im Heisenberg-Bild derselbe ist. Wenn es im Folgenden keine Konfusion anrichtet, werden bei der weiteren Diskussion auf den Index S bzw. H verzichten.

1.2.4 Wellenfunktionen

Lassen Sie uns ein Teilchen betrachten, dass sich auf der reellen Achse \mathbb{R} bewegt. \hat{x} sei der Ortsoperator mit dem Eigenwert y und dem zugehörigen Eigenvektor $|y\rangle$: $\hat{x}|y\rangle = y|y\rangle$. Die Eigenvektoren sind normiert gemäß $\langle x|y\rangle = \delta(x - y)$.

In ähnlicher Weise sei q der Eigenwert von \hat{p} mit dem Eigenvektor $|q\rangle$: $\hat{p}|q\rangle = q|q\rangle$, sodass $\langle p|q\rangle = \delta(p - q)$ ist.

Sei $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ein Zustand. Das innere Produkt

$$\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle \quad (1.43)$$

ist die Komponente von $|\psi\rangle$ in der Basis $|x\rangle$:

$$|\psi\rangle = \int |x\rangle\langle x| dx |\psi\rangle = \int \psi(x)|x\rangle dx.$$

Der Koeffizient $\psi(x) \in \mathbb{C}$ wird **Wellenfunktion** genannt. Entsprechend den oben genannten Axiomen der Quantenmechanik ist dies die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass man das Teilchen an der Stelle x im Zustand $|\psi\rangle$ findet, d. h., $|\psi(x)|^2 dx$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen im Intervall $[x, x + dx]$ anzutreffen. Es ist nur natürlich, als Normierungsbedingung

$$\int dx |\psi(x)|^2 = \langle \psi|\psi \rangle = 1 \quad (1.44)$$

zu wählen, denn die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen irgendwo auf der reellen Achse befindet, ist immer eins.

Ganz analog ist $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass man das Teilchen in dem Zustand mit dem Impuls p findet, und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Impuls im Intervall $[p, p + dp]$ liegt, ist $|\psi(p)|^2 dp$.

Das innere Produkt zweier Zustände ist, ausgedrückt über die Wellenfunktionen,

$$\langle \psi|\phi\rangle = \int dx \langle \psi|x\rangle\langle x|\phi\rangle = \int dx \psi^*(x)\phi(x), \quad (1.45a)$$

$$= \int dp \langle \psi|p\rangle\langle p|\phi\rangle = \int dp \psi^*(p)\phi(p). \quad (1.45b)$$

Wir haben jetzt also den abstrakten Ket-Vektor über die etwas konkreteren Wellenfunktionen $\psi(x)$ bzw. $\psi(p)$ ausgedrückt. Was ist mit den Operatoren? Wir drücken die Operatoren in der Basis $|x\rangle$ aus. Aus der Definitionsgleichung $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$ erhalten wir $\langle x|\hat{x} = \langle x|x$, was nach Rechtsmultiplikation mit $|\psi\rangle$ auf

$$\langle x|\hat{x}|\psi\rangle = x\langle x|\psi\rangle = x\psi(x) \quad (1.46)$$

führt. Dies schreibt man oft als $(\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x)$.

Und wie steht es mit dem Impulsoperator \hat{p} ? Betrachten wir hierzu den unitären Operator

$$\hat{U}(a) = e^{-ia\hat{p}}.$$

Lemma 1.1. Der Operator $\hat{U}(a)$, wie soeben definiert, genügt der Gleichung

$$\hat{U}(a)|x\rangle = |x+a\rangle. \quad (1.47)$$

Beweis

Aus $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ folgt $[\hat{x}, \hat{p}^n] = in\hat{p}^{n-1}$ für $n = 1, 2, \dots$. Demzufolge ist

$$[\hat{x}, \hat{U}(a)] = \left[\hat{x}, \sum_n \frac{(-ia)^n}{n!} \hat{p}^n \right] = a\hat{U}(a),$$

was sich auch als

$$\hat{x}\hat{U}(a)|x\rangle = \hat{U}(a)(\hat{x}+a)|x\rangle = (x+a)\hat{U}(a)|x\rangle$$

schreiben lässt. Dies zeigt, dass $\hat{U}(a)|x\rangle \propto |x+a\rangle$ ist. Da $\hat{U}(a)$ unitär ist, erhält es die Norm eines Vektors. Somit ist $\hat{U}(a)|x\rangle = |x+a\rangle$. \square

Es sei nun ε eine infinitesimale Zahl. Dann ist

$$\hat{U}(\varepsilon)|x\rangle = |x+\varepsilon\rangle \simeq (1 - i\varepsilon\hat{p})|x\rangle.$$

Daraus folgt

$$\hat{p}|x\rangle = \frac{|x+\varepsilon\rangle - |x\rangle}{-i\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} i \frac{d}{dx}|x\rangle \quad (1.48)$$

und im Dualraum

$$\langle x|\hat{p} = \frac{\langle x+\varepsilon\rangle - \langle x\rangle}{i\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -i \frac{d}{dx}\langle x|. \quad (1.49)$$

Darum gilt für jeden Zustand $|\psi\rangle$:

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i \frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle = -i \frac{d}{dx}\psi(x). \quad (1.50)$$

Dies lässt sich auch in der Form $(\hat{p}\psi)(x) = -i d\psi(x)/dx$ schreiben.

Analog hat man, mit einer Basis $|p\rangle$, die Impulsdarstellung der Operatoren als

$$\hat{x}|p\rangle = -i \frac{d}{dp}|p\rangle \quad (1.51)$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad (1.52)$$

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i \frac{d}{dp}\psi(p) \quad (1.53)$$

$$\langle p|\hat{p}|\psi\rangle = p\psi(p). \quad (1.54)$$

Übung 1.2 Beweisen Sie die Gleichungen (1.51) bis (1.54).

Behauptung 1.1.

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \quad (1.55)$$

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} \quad (1.56)$$

Beweis

Wir setzen in der Beziehung

$$(\hat{p}\psi)(x) = \langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\frac{d}{dx}\psi(x)$$

nun $|\psi\rangle = |p\rangle$ und erhalten damit

$$p\langle x|p\rangle = \langle x|\hat{p}|p\rangle = -i\frac{d}{dx}\langle x|p\rangle.$$

Die Lösung ist leicht zu finden:

$$\langle x|p\rangle = Ce^{ipx}.$$

Die Normierungsbedingung verlangt:

$$\begin{aligned} \delta(x-y) &= \langle x|y\rangle = \langle x|\int |p\rangle\langle p| dp|y\rangle \\ &= C^2 \int dp e^{ip(x-y)} \\ &= C^2 2\pi\delta(x-y), \end{aligned}$$

mit einer reellen Zahl C . Damit muss $C = 1/\sqrt{2\pi}$ sein. Den Beweis von (1.56) überlasse ich Ihnen als Übung. \square

Somit besteht zwischen $\psi(x)$ und $\psi(p)$ die Beziehung

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \int dx \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} \psi(x), \quad (1.57)$$

was nichts anderes als eine Fourier-Transformation von $\psi(x)$ ist.

Als nächstes wollen wir die Schrödinger-Gleichung herleiten, der $\psi(x)$ genügt. Indem wir $\langle x|$ von links auf (1.42) anwenden, erhalten wir

$$\langle x|i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \langle x|\hat{H}|\psi(t)\rangle$$

(auf den Index „S“ haben wir verzichtet). Für einen Hamilton-Operator vom Typ $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$ erhalten wir damit die **zeitabhängige Schrödinger-Gleichung**:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\psi(x,t) &= \left\langle x \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right| \psi(t) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x,t) + V(x)\psi(x,t), \end{aligned} \quad (1.58)$$

mit $\psi(x,t) \equiv \langle x|\psi(t)\rangle$.

Nehmen wir an, wir hätten eine separierte Lösung dieser Gleichung in der Form $\psi(x,t) = T(t)\phi(x)$. Indem wir dies in (1.58) einsetzen und das Ergebnis durch $\psi(x,t)$ teilen, erhalten wir

$$\frac{iT'(t)}{T(t)} = \frac{-\phi''(x)/2m + V(x)\phi(x)}{\phi(x)},$$

wobei der Strich „‘“ für die Ableitung nach einer relevanten Variablen steht. Da die linke Seite der Gleichung eine Funktion von t allein ist und die rechte Seite nur von x abhängt, müssen sie beide eine Konstante sein, welche wir als „ E “ bezeichnen. Dementsprechend haben wir jetzt zwei Gleichungen, die gleichzeitig erfüllt sein sollen:

$$iT'(t) = ET(t) \quad (1.59)$$

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + V(x)\phi(x) = E\phi(x). \quad (1.60)$$

Die erste Gleichung löst man sofort mit

$$T(t) = \exp(-iEt), \quad (1.61)$$

während die zweite das Eigenwertproblem des Hamilton-Operators ist. Man nennt es **stationäre Schrödinger-Gleichung, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung** oder einfach **Schrödinger-Gleichung**. In drei Dimensionen schreibt sie sich als

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \phi(x) + V(x)\phi(x) = E\phi(x). \quad (1.62)$$

1.2.5 Harmonischer Oszillator

Es ist instruktiv, an dieser Stelle kurz innezuhalten und ein nichttriviales Beispiel durchzurechnen. Wir betrachten dazu einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, denn dieser ist einerseits nichttrivial, andererseits aber immer noch exakt lösbar und außerdem sehr wichtig für die nachfolgenden Anwendungen.

Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i. \quad (1.63)$$

Die (zeitunabhängige) Schrödinger-Gleichung lautet

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x). \quad (1.64)$$

Wir substituieren die Variablen gemäß $\xi = \sqrt{m\omega}x$, $\varepsilon = E/\hbar\omega$ und kommen damit auf

$$\psi'' + (\varepsilon - \xi^2)\psi = 0. \quad (1.65)$$

Eine normierbare Lösung dieser gewöhnlichen DGL existiert nur, wenn $\varepsilon = \varepsilon_n \equiv (n + \frac{1}{2})$ (für $n = 0, 1, 2, \dots$) ist, d. h., wenn gilt:

$$E = E_n \equiv (n + \frac{1}{2})\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.66)$$

Mit den Hermite'schen Polynomen

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2/2} \frac{d^n e^{-\xi^2/2}}{d\xi^n} \quad (1.67)$$

schreibt sich die normierte Lösung als

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{m\omega}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}. \quad (1.68)$$

Dieses Eigenwertproblem kann man auch algebraisch lösen. Wir definieren dazu den **Vernichtungsoperator** \hat{a} und den **Erzeugungsoperator** \hat{a}^\dagger durch

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \hat{p}, \quad (1.69)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \hat{p}. \quad (1.70)$$

Der Besetzungszahloperator \hat{N} ist durch

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.71)$$

definiert.

Übung 1.3 Zeigen Sie, dass gilt:

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (1.72)$$

und

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (1.73)$$

Zeigen Sie außerdem, dass gilt:

$$\hat{H} = (\hat{N} + \frac{1}{2})\omega. \quad (1.74)$$

Es sei $|n\rangle$ ein normierter Eigenvektor von \hat{N} , also

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Dann folgt aus den soeben in Übung 1.3 bewiesenen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{a}|n\rangle) &= (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|n\rangle = (n-1)(\hat{a}|n\rangle), \\ \hat{N}(\hat{a}^\dagger|n\rangle) &= (\hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle = (n+1)(\hat{a}^\dagger|n\rangle). \end{aligned}$$

Darum erniedrigt \hat{a} den Eigenwert um eins, während \hat{a}^\dagger ihn um eins erhöht, womit sich die Namen *Vernichtungs-* und *Erzeugungsoperator* erklären. Beachten Sie, dass der Eigenwert $n \geq 0$ ist. Es ist nämlich

$$n = \langle n|\hat{N}|n\rangle = (\langle n|\hat{a}^\dagger)(\hat{a}|n\rangle) = \|\hat{a}|n\rangle\|^2 \geq 0.$$

Diese Gleichung gilt dann und nur dann, wenn $\hat{a}|n\rangle = 0$ ist. Wenn wir nun eine beliebige positive Zahl $n_0 > 0$ wählen und \hat{a} viele, genauer gesagt k Male auf $|n_0\rangle$ anwenden, wird der Eigenwert von $\hat{a}^k|n_0\rangle$ ab einer gewissen ganzen Zahl $k > n_0$ negativ werden, was im Widerspruch zum gerade Gesagten steht. Dies kann man nur dann vermeiden, wenn auch n_0 eine positive ganze Zahl ist. Darum muss es einen Zustand $|0\rangle$ geben, für den $\hat{a}|0\rangle = 0$ gilt. Der Zustand $|0\rangle$ heißt aus naheliegenden Gründen **Grundzustand**. Wegen $\hat{N}|0\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$ ist dieser Zustand ein Eigenvektor von \hat{N} zu dem Eigenwert 0. Die Wellenfunktion $\psi_0(x) \equiv \langle x|0\rangle$ erhält man durch Lösen der gewöhnlichen DGL erster Ordnung

$$\langle x|\hat{a}|0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \left(\frac{d}{dx} \psi_0(x) + m\omega x \psi_0(x) \right) = 0. \quad (1.75)$$

Die Lösung ergibt sich leicht zu

$$\psi_0(x) = Ce^{-m\omega x^2/2}, \quad (1.76)$$

wobei C für die Normierungskonstante aus Gleichung (1.68) steht. Einen beliebigen Vektor $|n\rangle$ erhält man aus $|0\rangle$ durch wiederholte Anwendung von \hat{a}^\dagger .

Übung 1.4 Zeigen Sie, dass gilt:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (1.77)$$

die Bedingung $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ erfüllt und normiert ist.

Auf diese Weise stellt sich heraus, dass das Spektrum von \hat{N} einfach aus den natürlichen Zahlen besteht: $\sigma(\hat{N}) = \{0, 1, 2, \dots\}$. Dementsprechend ist das Spektrum des Hamilton-Operators

$$\sigma(\hat{H}) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \right\}. \quad (1.78)$$

1.3 Pfadintegral-Quantisierung für ein Boson

Im vorangehenden Abschnitt wurde die kanonische Quantisierung eines klassischen Systems diskutiert. Dabei spielte die Hamilton-Funktion (bzw. der Hamilton-Operator) die Hauptrolle, und die Lagrange-Funktion war überhaupt nicht aufgetaucht. In diesem Abschnitt werden wir mit der Pfadintegral-Quantisierung einen Quantisierungsprozess kennenlernen, der ganz wesentlich auf der Lagrange-Funktion aufbaut.

1.3.1 Pfadintegral-Quantisierung

Wir beginnen unsere Analyse mit eindimensionalen Systemen. Sei $\hat{x}(t)$ der Ortsoperator im Heisenberg-Bild. Nehmen wir an, das Teilchen werde zur Zeit $t_A (> 0)$ am

Ort x_A gefunden. Dann ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dieses Teilchen bei x_E zu einer späteren Zeit t_E ($> t_A$) anzutreffen,

$$\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle, \quad (1.79)$$

wobei die Vektoren im Heisenberg-Bild definiert sind:¹²

$$\hat{x}(t_A) |x_A, t_A\rangle = x_A |x_A, t_A\rangle, \quad (1.80)$$

$$\hat{x}(t_E) |x_E, t_E\rangle = x_E |x_E, t_E\rangle. \quad (1.81)$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude (1.79) heißt auch **Übergangsamplitude**.

Jetzt formulieren wir die Wahrscheinlichkeitsamplitude im Schrödinger-Bild. Es sei $\hat{x} = \hat{x}(0)$ der Ortsoperator mit dem Eigenvektor

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle. \quad (1.82)$$

Da \hat{x} keine Zeitabhängigkeit hat, sollte sein Eigenvektor ebenso zeitunabhängig sein. Wenn wir

$$\hat{x}(t_A) = e^{i\hat{H}t_A} \hat{x} e^{-i\hat{H}t_A} \quad (1.83)$$

in (1.80) einsetzen, erhalten wir

$$e^{i\hat{H}t_A} \hat{x} e^{-i\hat{H}t_A} |x_A, t_A\rangle = x_A |x_A, t_A\rangle.$$

Durch Linksmultiplikation mit $e^{-i\hat{H}t_A}$ erhalten wir dann

$$\hat{x}[e^{-i\hat{H}t_A} |x_A, t_A\rangle] = x_A [e^{-i\hat{H}t_A} |x_A, t_A\rangle].$$

Dies zeigt, dass die zwei Eigenvektoren wie folgt zusammenhängen:

$$|x_A, t_A\rangle = e^{i\hat{H}t_A} |x_A\rangle. \quad (1.84)$$

Entsprechend ist

$$|x_E, t_E\rangle = e^{i\hat{H}t_E} |x_E\rangle, \quad (1.85)$$

woraus wir

$$\langle x_E, t_E | = \langle x_E | e^{-i\hat{H}t_E} \quad (1.86)$$

erhalten. Hiermit können wir die Wahrscheinlichkeitsamplitude im Schrödinger-Bild folgendermaßen ausdrücken:

$$\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle = \langle x_E | e^{-i\hat{H}(t_E - t_A)} |x_A\rangle. \quad (1.87)$$

¹² Wir haben erneut auf die Indizes „S“ und „H“ verzichtet, um die Notation übersichtlicher zu halten. Beachten Sie, dass $|x_A, t_A\rangle$ ein instantaner Eigenvektor ist und daher durch die Zeit t_A parametrisiert wird, wenn der Ort gemessen wird. Dies sollte man nicht mit der dynamischen Zeitabhängigkeit einer Wellenfunktion im Schrödinger-Bild verwechseln.

Im Allgemeinen heißt die Funktion

$$h(x, y; \beta) \equiv \langle x | e^{-\hat{H}\beta} | y \rangle \quad (1.88)$$

Wärmeleitungskern von \hat{H} . Diese Bezeichnung röhrt von der Ähnlichkeit zwischen der Schrödinger- und der Wärmetransportgleichung her. Die Amplitude (1.87) ist der Wärmeleitungskern von \hat{H} mit imaginärem β :

$$\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle = h(x_E, x_A; i(t_E - t_A)). \quad (1.89)$$

Nun drücken wir die Amplitude (1.87) im Pfadintegral-Formalismus aus. Hierzu betrachten wir den Fall, in welchem $t_E - t_A = \varepsilon$ eine infinitesimale positive Zahl ist. Wir setzen der Übersichtlichkeit halber $x_A = x$ und $x_E = y$ und nehmen an, dass der Hamilton-Operator die Form

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (1.90)$$

hat. Als erstes beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.2. Sei a eine positive Konstante. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iap^2} dp = \sqrt{\frac{\pi}{ia}}. \quad (1.91)$$

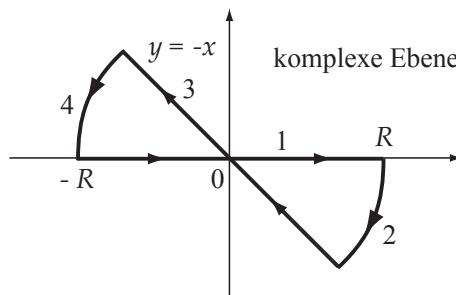


Abb. 1.1. Der Integrationsweg für den Beweis von Lemma 1.2.

Beweis

Das Integral unterscheidet sich von einem gewöhnlichen Gauß-Integral¹³ insofern, als der Koeffizient von p^2 eine rein imaginäre Zahl ist. Wir ersetzen zuerst p durch $z = x + iy$. Der Integrand $\exp(-iaz^2)$ ist in der gesamten komplexen Ebene analytisch. Nun

¹³ Wir bezeichnen in diesem Buch das Gauß'sche Fehlerintegral in Anlehnung an den angelsächsischen Sprachgebrauch einfach als Gauß-Integral (Anm. d. Ü.).

wählen wir anstelle der reellen Achse den in Abb. 1.1 gezeigten Integrationsweg. Entlang Abschnitt 1 dieses Pfads ist $dz = dx$, dort ergibt sich also derselbe Beitrag wie in der ursprünglichen Integration (1.91). Die Beiträge von Abschnitt 2 und 4 verschwinden für $R \rightarrow \infty$. Für Abschnitt 3 bemerken wir, dass die Variable dort $z = (1 - i)x$ ist, und erhalten als Beitrag

$$(1 - i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = -e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Die Summe über alle Beiträge muss nach dem Cauchy'schen Integralsatz verschwinden, sodass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-iap^2} = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{ia}}. \quad \square$$

Jetzt können wir dieses Lemma verwenden, um den Wärmeleitungskern für ein infinitesimales Zeitintervall zu bestimmen.

Behauptung 1.2. Es seien \hat{H} ein Hamilton-Operator von der Form (1.90) und ε eine infinitesimale positive Zahl. Dann gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\langle x | e^{-i\hat{H}\varepsilon} | y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\varepsilon}} \exp \left[i\varepsilon \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{(x-y)^2}{\varepsilon} \right)^2 - V \left(\frac{x+y}{2} \right) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon(x-y)^2) \right]. \quad (1.92)$$

Beweis

Einsetzen der Vollständigkeitsrelation für die Impuls-Eigenvektoren in die linke Seite von (1.92) ergibt

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-i\hat{H}\varepsilon} | y \rangle &= \int dk \langle x | e^{-i\varepsilon\hat{H}} | k \rangle \langle k | y \rangle \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-iky} e^{-i\varepsilon\hat{H}_x} e^{ikx}, \end{aligned}$$

mit

$$\hat{H}_x = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

Aus der Vertauschungsrelation von $\partial_x \equiv d/dx$ und e^{ikx} folgt

$$\partial_x e^{ikx} = ik e^{ikx} + e^{ikx} \partial_x = e^{ikx} (ik + \partial_x).$$

Wiederholtes Anwenden dieser Vertauschungsrelation führt auf

$$\partial_x^n e^{ikx} = e^{ikx} (ik + \partial_x)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

woraus wir

$$e^{-i\varepsilon[-\partial_x^2/2m+V(x)]} e^{ikx} = e^{ikx} e^{-i\varepsilon[-(ik+\partial_x)^2/2m+V(x)]}$$

erhalten. Daher ist

$$\begin{aligned}\langle x|e^{-i\hat{H}\varepsilon}|y\rangle &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} e^{-i\varepsilon[-(ik+\partial_x)^2/2m+V(x)]} \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-i[\varepsilon k^2/2m-k(x-y)]} e^{-i\varepsilon[-ik\partial_x/m-\partial_x^2/2m+V(x)]} \cdot 1.\end{aligned}$$

Dabei soll die „1“ am Ende der letzten Zeile explizit daran erinnern, dass $\partial_x 1 = 0$ ist. Wenn wir weiterhin $p = \sqrt{\varepsilon/2m}k$ setzen und die letzte Exponentialfunktion in der letzten Zeile entwickeln, erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle x|e^{-i\varepsilon\hat{H}}|y\rangle &= \sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}} e^{im(x-y)^2/2\varepsilon} \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i[p+\sqrt{m/2\varepsilon}(x-y)]^2} \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varepsilon)^n}{n!} \left[i\sqrt{\frac{2}{\varepsilon m}} p\partial_x - \frac{\partial_x^2}{2m} + V(x) \right]^n \cdot 1.\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir $q = p + \sqrt{m/2\varepsilon}(x-y)$ und verwenden Lemma 1.2, was auf

$$\begin{aligned}\langle x|e^{-i\varepsilon\hat{H}}|y\rangle &= \sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}} e^{im(x-y)^2/2\varepsilon} \int \frac{dq}{2\pi} e^{-iq^2} \\ &\quad \cdot \left[1 + (-i\varepsilon)V(x) + \frac{(-\varepsilon^2)}{2} \frac{(-i)}{\varepsilon} (x-y)\partial_x V(x) \right. \\ &\quad \left. + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon|x-y|^2) \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}} e^{i\varepsilon(m/2)[(x-y)/\varepsilon]^2} \\ &\quad \cdot \exp \left[-i\varepsilon V\left(\frac{x+y}{2}\right) + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon|x-y|^2) \right]\end{aligned}$$

führt. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Beachten Sie, dass der Mittelwert $(x+y)/2$ in (1.92) als Variable von V auftaucht. Dies wird oft als **Weyl-Ordnung** bezeichnet.

Man findet in (1.92), dass der Integrand für $|x-y| > \sqrt{\varepsilon}$ sehr schnell oszilliert und damit im Distributionssinn als null betrachtet werden kann (vgl. das Lemma von Riemann-Lebesgue). Darum nähert sich wegen $x-y < \varepsilon$ der Exponent von (1.92) der Wirkung für ein infinitesimales Zeitintervall $[0, \varepsilon]$ an:

$$\Delta S = \int_0^\varepsilon dt \left[\frac{m}{2} v^2 - V(x) \right] \simeq \left[\frac{m}{2} v^2 - V(x) \right] \varepsilon. \quad (1.93)$$

Dabei sind $v = (x-y)/\varepsilon$ die mittlere Geschwindigkeit und x der mittlere Ort.

Gleichung (1.92) erfüllt ebenso die Randbedingung für $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\langle x|e^{-i\hat{H}\varepsilon}|y\rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle x|y\rangle = \delta(x-y). \quad (1.94)$$

Dies kann man zeigen, wenn man bedenkt, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} e^{im(x-y)^2/2\varepsilon} = 1.$$

Die Übergangsamplitude (1.79) für ein finites Zeitintervall erhält man, indem man die Übergangsamplitude für eine unendliche Anzahl von infinitesimalen Zeitintervallen unendlich oft wiederholt anwendet. Teilen wir dazu zuerst das Intervall $t_E - t_A$ in n gleich große Intervalle:

$$\varepsilon = \frac{t_E - t_A}{n}.$$

Dann setzen wir $t_0 = t_A$ und $t_k = t_0 + \varepsilon k$ ($0 \leq k \leq n$). Logischerweise ist $t_n = t_E$. Setzen wir nun die Vollständigkeitsrelation

$$1 = \int dx_k |x_k, t_k\rangle \langle x_k, t_k| \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

für jeden Zeitpunkt t_k in (1.79) ein; dies ergibt

$$\begin{aligned} \langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle &= \langle x_E, t_E | \int dx_{n-1} |x_{n-1}, t_{n-1}\rangle \langle x_{n-1}, t_{n-1}| \\ &\quad \cdot \int dx_{n-2} |x_{n-2}, t_{n-2}\rangle \dots \int dx_1 |x_1, t_1\rangle \langle x_1, t_1| x_0, t_0 \rangle. \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt den Limes $\varepsilon \rightarrow 0$, d. h. $n \rightarrow \infty$. Behauptung 1.2 besagt, dass für ein infinitesimales ε gilt:

$$\langle x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1} \rangle \simeq \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon}} e^{i \Delta S_k},$$

mit

$$\Delta S_k = \varepsilon \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V \left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right) \right].$$

Darum ist

$$\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon} \right)^{n/2} \int \prod_{j=1}^{n-1} dx_j \exp \left(i \sum_{k=1}^n \Delta S_k \right). \quad (1.95)$$

Wenn $n-1$ Punkte x_1, x_2, \dots, x_{n-1} festgehalten werden, erhalten wir einen stückweise linearen Pfad von x_0 bis x_n über diese Punkte. Dann definieren wir $S(\{x_k\}) = \sum_k \Delta S_k$, was sich im Limes $n \rightarrow \infty$ als

$$S(\{x_k\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S[x(t)] = \int_{t_A}^{t_E} dt \left[\frac{m}{2} v^2 - V(x) \right] \quad (1.96)$$

schreiben lässt. Beachten Sie jedoch, dass das hier definierte $S[x(t)]$ rein formal ist; die Variablen x_k und x_{k-1} müssen nicht nahe beieinander liegen, und darum kann

$v = (x_k - x_{k-1})/\varepsilon$ möglicherweise divergieren. Diese Übergangsamplitude lässt sich symbolisch als

$$\begin{aligned}\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle &= \int \mathcal{D}x \exp\left[i \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\frac{m}{2}v^2 - V(x)\right)\right] \\ &= \int \mathcal{D}x \exp\left[i \int_{t_A}^{t_E} dt L(x, \dot{x})\right]\end{aligned}\quad (1.97)$$

schreiben, was man als **Pfadintegral-Darstellung** dieser Übergangsamplitude bezeichnet. Es sollte noch einmal betont werden, dass das „ v “ nicht wohldefiniert ist und dieser Ausdruck nur eine symbolische Darstellung der Grenzwerts (1.95) ist.

Das Integrationsmaß ist als

$$\int \mathcal{D}x = \text{Summation über alle Pfade } x(t) \text{ mit } x(t_A) = x_A, x(t_E) = x_E \quad (1.98)$$

zu verstehen, siehe Abb. 1.2. Obwohl $\mathcal{D}x$ oder $S(\{x_k\})$ im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ nicht definiert ist, ist die aus $\mathcal{D}x$ und $S(\{x_k\})$ zusammen konstruierte Amplitude $\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle$ wohldefiniert und daher physikalisch sinnvoll. Dieser Punkt wird durch das folgende Beispiel verdeutlicht.

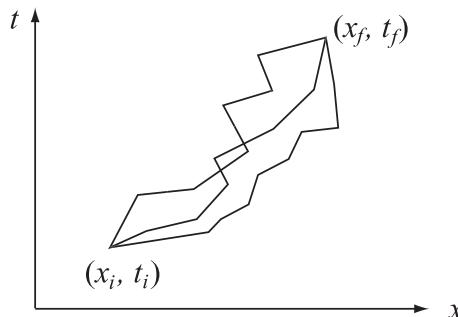


Abb. 1.2. Das Pfadintegral berücksichtigt alle Pfade mit festen Endpunkten. Der Integrand $\exp[iS(\{x_k\})]$ wird über diese Pfade integriert.

Beispiel 1.5. Lassen Sie uns die Übergangsamplitude eines freien Teilchens berechnen, das sich auf der reellen Achse bewegt. Seine Lagrange-Funktion lautet

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (1.99)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls ist $p = \partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x}$, und der Hamilton-Operator ist

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.100)$$

Die Übergangsamplitude ergibt sich in der kanonischen Quantentheorie zu

$$\begin{aligned}\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle &= \langle x_E | e^{-i\hat{H}T} | x_A \rangle = \int dp \langle x_E | e^{-i\hat{H}T} | p \rangle \langle p | x_A \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x_E - x_A)} e^{-iT(p^2/2m)} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi iT}} \exp\left(\frac{i m (x_E - x_A)^2}{2T}\right),\end{aligned}\quad (1.101)$$

mit $T = t_E - t_A$.

Wir leiten dieses Ergebnis jetzt mit dem Pfadintegral-Formalismus her. Die Amplitude wird dort als

$$\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon} \right)^{n/2} \int dx_1 \dots dx_{n-1} \exp \left[i\varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{m}{2} \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (1.102)$$

ausgedrückt, mit $\varepsilon = T/n$. Nach Skalieren der Koordinaten gemäß

$$y_k = \left(\frac{m}{2\varepsilon} \right)^{1/2} x_k$$

wird die Amplitude zu

$$\begin{aligned}\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon} \right)^{n/2} \left(\frac{2\varepsilon}{m} \right)^{(n-1)/2} \\ &\quad \cdot \int dy_1 \dots dy_{n-1} \exp \left[i \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})^2 \right].\end{aligned}\quad (1.103)$$

Es lässt sich durch Induktion zeigen (als Übung), dass gilt:

$$\int dy_1 \dots dy_{n-1} \exp \left[i \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})^2 \right] = \left[\frac{(i\pi)^{(n-1)}}{n} \right]^{1/2} e^{i(y_n - y_0)^2/n}.$$

Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon} \right)^{n/2} \left(\frac{2\pi i\varepsilon}{m} \right)^{(n-1)/2} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{im(x_E - x_A)^2/(2n\varepsilon)} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi iT}} \exp \left[\frac{im(x_E - x_A)^2}{2T} \right].\end{aligned}\quad (1.104)$$

Man sollte hier erwähnen, dass der Exponent die klassische Wirkung ist. Wenn wir bedenken, dass die mittlere Geschwindigkeit $v = (x_E - x_A)/(t_E - t_A)$ ist, erhalten wir für die klassische Wirkung in der Tat

$$S_{\text{cl}} = \int_{t_A}^{t_E} dt \frac{1}{2} mv^2 = \frac{m(x_E - x_A)^2}{2(t_E - t_A)}.$$

Es geschieht bei vielen exakt lösbar Systemen, dass die Übergangsamplitude die Form

$$\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle = A e^{i S_{\text{cl}}} \quad (1.105)$$

annimmt, wobei alle Auswirkungen von Quantenfluktuation im Vorfaktor A stecken.

◊

1.3.2 Imaginäre Zeit und Zustandssumme

Nehmen wir an, das Spektrum eines Hamilton-Operators \hat{H} sei nach unten beschränkt. Dann ist es immer möglich, \hat{H} durch eine additive positive Konstante positiv definit zu machen:

$$\sigma(\hat{H}) = \{0 < E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots\}. \quad (1.106)$$

Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass der Grundzustand nicht entartet ist. Die Spektralzerlegung von $e^{-i\hat{H}t}$,

$$e^{-i\hat{H}t} = \sum_n e^{-iE_n t} |n\rangle\langle n|, \quad (1.107)$$

ist analytisch in der unteren Halbebene von t , wobei $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$. Wir führen die **Wick-Rotation** durch die Substitution

$$t = -i\tau \quad (\tau \in \mathbb{R}^+) \quad (1.108)$$

ein, mit \mathbb{R}^+ als der Menge der positiven reellen Zahlen. Die Variable τ lässt sich als eine imaginäre Zeit ansehen. Eine andere Bezeichnung ist euklidische Zeit, da sich die Länge der Weltlinie (die „Welt-Distanz“ bzw. Metrik) von $t^2 - x^2$ zu $-(\tau^2 + x^2)$ ändert. Physikalische Größen transformieren sich unter dieser Variablenubstitution wie

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = i \frac{dx}{d\tau}, \\ e^{-i\hat{H}t} &= e^{-\hat{H}\tau}, \\ i \int_{t_A}^{t_E} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right] &= i(-i) \int_{\tau_A}^{\tau_E} d\tau \left[-\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \right], \\ &= - \int_{\tau_A}^{\tau_E} d\tau \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right]. \end{aligned}$$

Dementsprechend sieht das Pfadintegral in Abhängigkeit von der neuen Variablen so aus:

$$\langle x_E, \tau_E | x_A, \tau_A \rangle = \langle x_E | e^{-\hat{H}(\tau_E - \tau_A)} | x_A \rangle = \int \bar{\mathcal{D}}x e^{-\int_{\tau_A}^{\tau_E} d\tau \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right]}, \quad (1.109)$$

dabei ist $\bar{\mathcal{D}}$ das Integrationsmaß in der imaginären Zeit τ .

Für einen gegebenen Hamilton-Operator \hat{H} wird die **Zustandssumme** definiert als

$$Z(\beta) = \text{Sp } e^{-\beta \hat{H}} \quad (\beta > 0), \quad (1.110)$$

die Spur wird dabei über den mit \hat{H} assoziierten Hilbert-Raum gebildet.

Betrachten wir nun die Eigenzustände $\{|E_n\rangle\}$ von \hat{H} als die Basisvektoren des Hilbert-Raums:

$$\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle, \quad \langle E_m|E_n\rangle = \delta_{mn}.$$

Für die Zustandssumme gilt dann

$$Z(\beta) = \sum_n \langle E_n | e^{-\beta \hat{H}} | E_n \rangle = \sum_n \langle E_n | e^{-\beta E_n} | E_n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (1.111)$$

Die Zustandssumme wird also in Abhängigkeit von dem Eigenvektor $|x\rangle$ von \hat{x} ausgedrückt:

$$Z(\beta) = \int dx \langle x | e^{-\beta \hat{H}} | x \rangle. \quad (1.112)$$

Wenn wir $\beta = iT$ setzen und damit β mit der euklidischen Zeit identifizieren, ergibt sich

$$\langle x_E | e^{-i\hat{H}T} | x_A \rangle = \langle x_E | e^{-\beta \hat{H}} | x_A \rangle,$$

woraus wir dann die Pfadintegral-Formulierung der Zustandssumme erhalten:

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int dy \int_{x(0)=x(\beta)=y}^{} \bar{\mathcal{D}}x \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \right) \right\} \\ &= \int_{\text{periodische Pfade}}^{} \bar{\mathcal{D}}x \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Das Integral in der letzten Zeile läuft dabei über alle in $[0, \beta]$ periodischen Pfade.

1.3.3 Zeitgeordnetes Produkt und erzeugendes Funktional

Wir definieren das **T -Produkt** von zwei Heisenberg-Operatoren $A(t)$ und $B(t)$ durch

$$T[A(t_1)B(t_2)] = A(t_1)B(t_2)\theta(t_1 - t_2) + B(t_2)A(t_1)\theta(t_2 - t_1), \quad (1.114)$$

mit der Heaviside-Funktion $\theta(t)$.¹⁴ Die Verallgemeinerung auf den Fall mit mehr als zwei Operatoren sollte trivial sein; Operatoren in der eckigen Klammer werden so umsortiert, dass der Zeitparameter von links nach rechts abnimmt. Das T -Produkt

¹⁴ Die Heaviside-Funktion ist definiert durch

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

von n Operatoren enthält $n!$ Terme, von denen jeder proportional zum Produkt der $n-1$ Heaviside-Funktionen ist. Eine wichtige Größe in der Quantenmechanik ist das Matrixelement des T -Produkts:

$$\langle x_E, t_E | T[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \cdots \hat{x}(t_n)] | x_A, t_A \rangle \quad (t_A < t_1, t_2, \dots, t_n < t_E). \quad (1.115)$$

Nehmen wir an, in Gleichung (1.115) sei $t_A < t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n < t_E$. Durch Einsetzen der Vollständigkeitsrelation

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_k |x_k, t_k\rangle \langle x_k, t_k| \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

in Gleichung (1.115) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \langle x_E, t_E | \hat{x}(t_n) \cdots \hat{x}(t_1) | x_A, t_A \rangle \\ &= \langle x_E, t_E | \hat{x}(t_n) \int dx_n |x_n, t_n\rangle \langle x_n, t_n| \cdots \hat{x}(t_1) \int dx_1 |x_1, t_1\rangle \langle x_1, t_1| x_A, t_A \rangle \\ &= \int dx_1 \dots dx_n x_1 \dots x_n \langle x_E, t_E | x_n, t_n \rangle \cdots \langle x_1, t_1 | x_A, t_A \rangle, \end{aligned} \quad (1.116)$$

wobei wir die Eigenwertgleichung $\hat{x}(t_k) |x_k, t_k\rangle = x_k |x_k, t_k\rangle$ verwendet haben. Wenn $\langle x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1} \rangle$ in der letzten Zeile mit einem Pfadintegral ausgedrückt wird, erhalten wir

$$\langle x_E, t_E | \hat{x}(t_n) \dots \hat{x}(t_1) | x_A, t_A \rangle = \int \mathcal{D}x x(t_1) \dots x(t_n) e^{iS}. \quad (1.117)$$

Hier ist es entscheidend, dass $\hat{x}(t_k)$ auf der linken Seite der Gleichung ein Heisenberg-Operator, $x(t_k) (= x_k)$ auf der rechten Seite dagegen der reelle Wert eines klassischen Pfads zur Zeit t_k ist. Dementsprechend bleibt die rechte Seite gleich, egal wie die Zeitparameter auf der linken Seite angeordnet sind, solange die Heisenberg-Operatoren entsprechend dem T -Produkt sortiert sind. Auf diese Weise übernimmt der Pfadintegral-Ausdruck automatisch die T -Produkt-Reihenfolge und ergibt daher

$$\langle x_E, t_E | T[\hat{x}(t_n) \dots \hat{x}(t_1)] | x_A, t_A \rangle = \int \mathcal{D}x x(t_1) \dots x(t_n) e^{iS}. \quad (1.118)$$

Fühlen Sie sich ermutigt, dieses Resultat für $n = 2$ explizit zu überprüfen!

Es erweist sich als nützlich, das **erzeugende Funktional** $Z[J]$ zu definieren, um auf effiziente Weise die Matrixelemente des T -Produkts zu erhalten. Wir koppeln ein **äußeres Feld** $J(t)$ (auch **Quelle** genannt) mit der Koordinate $x(t)$ als $x(t)J(t)$ in der Lagrange-Funktion, wobei $J(t)$ auf dem Intervall $[t_A, t_E]$ definiert ist. Die Wirkung wird mit der Quelle als

$$S[x(t), J(t)] = \int_{t_A}^{t_E} dt [\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) + xJ] \quad (1.119)$$

definiert. Die Übergangsamplitude in Anwesenheit von $J(t)$ ist dann durch

$$\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle_J = \int \mathcal{D}x \exp \left[i \int_{t_A}^{t_E} dt (\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) + xJ) \right] \quad (1.120)$$

gegeben. Die Variationsableitung dieser Gleichung nach $J(t)$ ($t_A < t < t_E$) ergibt

$$\frac{\delta}{\delta J(t)} \langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle_J = \int \mathcal{D}x \, ix(t) \exp \left[i \int_{t_A}^{t_E} dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) + xJ \right) \right]. \quad (1.121)$$

Höhere Variationsableitungen sind leicht zu erhalten: Der Faktor $ix(t_k)$ erscheint im Integranden des Pfadintegrals jedes Mal, wenn $\delta/\delta J(t)$ auf $\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle_J$ wirkt. Dies ist nichts anderes als das Matrixelement des T -Produkts des Heisenberg-Operators $\hat{x}(t)$ in Anwesenheit der Quelle $J(t)$. Dementsprechend erhalten wir, wenn wir am Ende der Berechnung $J(t) = 0$ setzen:

$$\begin{aligned} & \langle x_E, t_E | T [x(t_n) \dots x(t_1)] | x_A, t_A \rangle \\ &= (-i)^n \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \int \mathcal{D}x \, e^{iS[x(t), J(t)]} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Bei physikalischen Anwendungen kommt es oft vor, dass die Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude zwischen allgemeinen Zuständen, insbesondere Grundzuständen, von größerem Interesse ist als die zwischen Koordinateneigenzuständen. Nehmen wir an, das betrachtete System befindet sich in dem Grundzustand $|0\rangle$ zur Zeit t_A . Wir wollen die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür berechnen, dass das System zu einer späteren Zeit t_E ebenfalls bzw. immer noch den Grundzustand einnimmt. Weiterhin sei $J(t)$ auf einem Intervall $[a, b] \subset [t_A, t_E]$ nichtverschwindend. (Der Grund für diese Annahme wird später klar werden.) Die Übergangssamplitude in Anwesenheit von $J(t)$ lässt sich aus dem Hamilton-Operator $H^J = H - x(t)J(t)$ und dem unitären Operator $U^J(t_E, t_A)$ des Hamilton-Operators erhalten. Die Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude zwischen den Koordinateneigenzuständen ist

$$\begin{aligned} \langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle_J &= \langle x_E | U^J(t_E, t_A) | x_A \rangle \\ &= \langle x_E | e^{-iH(t_E-b)} U^J(b, a) e^{-iH(a-t_A)} | x_A \rangle, \end{aligned} \quad (1.123)$$

wobei wir die Tatsache ausgenutzt haben, dass $H^J = H$ ist, sofern wir uns außerhalb des Intervalls $[a, b]$ befinden. Durch Einsetzen der Vollständigkeitsrelationen der Energieniveaus $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ in diese Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle_J &= \sum_{m,n} \langle x_E | e^{-iH(t_E-b)} | m \rangle \langle m | U^J(b, a) | n \rangle \langle n | e^{-iH(a-t_A)} | x_A \rangle \\ &= \sum_{m,n} e^{-iE_m(t_E-b)} e^{-iE_n(a-t_A)} \langle x_E | m \rangle \langle n | x_A \rangle \langle m | U^J(b, a) | n \rangle. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Nun Wick-rotieren wir die Zeitvariable $t \rightarrow -i\tau$, was für die Exponentialfunktion $e^{-iEt} \rightarrow e^{-E\tau}$ bedeutet. Dann trägt im Grenzfall $\tau_E \rightarrow \infty, \tau_A \rightarrow -\infty$ nur der Grundzustand $m = n = 0$ bei. Alternativ können wir einen kleinen imaginären Term $-i\epsilon x^2$ in den Hamilton-Operator einführen, sodass der Eigenwert einen kleinen negativ-imaginären Anteil erhält. Dann „überlebt“ in der Summation über m und n unter $\tau_E \rightarrow \infty, \tau_A \rightarrow -\infty$ nur der Grundzustand.

Letzten Endes haben wir damit bewiesen, dass gilt:

$$\lim_{\substack{t_E \rightarrow \infty \\ t_A \rightarrow -\infty}} \langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle_J = \langle x_E | 0 \rangle \langle 0 | x_A \rangle Z[J], \quad (1.125)$$

wobei wir das **erzeugende Funktional**

$$Z[J] = \langle 0 | U^J(b, a) | 0 \rangle = \lim_{\substack{t_E \rightarrow \infty \\ t_A \rightarrow -\infty}} \langle 0 | U^J(t_E, t_A) | 0 \rangle \quad (1.126)$$

definiert haben. Das erzeugende Funktional lässt sich auch als

$$Z[J] = \lim_{\substack{t_E \rightarrow \infty \\ t_A \rightarrow -\infty}} \frac{\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle_J}{\langle x_E | 0 \rangle \langle 0 | x_A \rangle} \quad (1.127)$$

ausdrücken. Beachten Sie, dass der Nenner nur eine von $Z[J]$ unabhängige Konstante ist. Wir haben damit eine Pfadintegral-Darstellung für $Z[J]$ gefunden:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x e^{iS[x,J]}. \quad (1.128)$$

Dabei wird das Pfadintegral über Pfade mit beliebigen festen x_A und x_E ausgeführt. Die Normierungskonstante \mathcal{N} wird so gewählt, dass $Z[0] = 1$ ist und damit gilt:

$$\mathcal{N}^{-1} = \int \mathcal{D}x e^{iS[x,0]}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass $Z[J]$ die Matrixelemente des T -Produkts zwischen den Grundzuständen erzeugt:

$$\langle 0 | T [x(t_1) \cdots x(t_n)] | 0 \rangle = (-i)^n \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (1.129)$$

1.4 Harmonischer Oszillator

Wir erarbeiten uns nun die Pfadintegral-Quantisierung eines harmonischen Oszillators, eines der Beispieldsysteme, für die das Pfadintegral exakt ausgeführt werden kann. Wir führen außerdem die ζ -Funktion-Regularisierung ein, ein ausgesprochen hilfreiches Werkzeug in vielen Gebieten der theoretischen Physik.

1.4.1 Übergangsamplitude

Die Lagrange-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators ist

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2. \quad (1.130)$$

Die Übergangsamplitude ist durch

$$\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS[x(t)]} \quad (1.131)$$

gegeben, mit der Wirkung $S[x(t)] = \int_{t_A}^{t_E} L dt$.

Lassen Sie uns $S[x]$ um das Extremum $x_c(t)$ entwickeln, unter der Voraussetzung

$$\left. \frac{\delta S[x]}{\delta x} \right|_{x=x_c(t)} = 0. \quad (1.132)$$

Offenkundig ist $x_c(t)$ der klassische Pfad von (x_A, t_A) nach (x_E, t_E) , welcher der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\ddot{x}_c + \omega^2 x_c = 0 \quad (1.133)$$

genügt. Die Lösung dieser Gleichung, für welche $x_c(t_A) = x_A$ und $x_c(t_E) = x_E$ ist, erhält man leicht als

$$x_c(t) = \frac{1}{\sin \omega T} [x_E \sin \omega(t - t_A) + x_A \sin \omega(t_E - t)], \quad (1.134)$$

mit $T = t_E - t_A$. Durch Einsetzen dieser Lösung in die Wirkung (als Übung) erhalten wir

$$\begin{aligned} S_c &\equiv S[x_c] \\ &= \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(x_E^2 + x_A^2) \cos \omega T - 2x_Ex_A]. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Damit nimmt die Entwicklung von $S[x]$ um $x = x_c$ die Form

$$S[x_c + y] = S[x_c] + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 y(t_1)y(t_2) \left. \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \right|_{x=x_c} \quad (1.136)$$

an, wobei $y(t)$ die Randbedingung $y(t_A) = y(t_E) = 0$ erfüllt. Beachten Sie (1), dass der Term erster Ordnung wegen $\delta S[x]/\delta x = 0$ bei $x = x_c$ verschwindet, und (2), dass Terme von dritter und höherer Ordnung nicht existieren, da die Wirkung von zweiter Ordnung in x ist. Damit ist die Entwicklung *exakt*, und das Problem kann exakt gelöst werden, wie wir später sehen werden.

Indem wir feststellen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x(t_1)} \int_{t_A}^{t_E} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x(t)^2 \right] &= -m \frac{d^2}{dt_1^2} x(t_1) - m \omega^2 x(t_1) \\ &= -m \left(\frac{d^2}{dt_1^2} + \omega^2 \right) x(t_1) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\delta x(t_1)}{\delta x(t_2)} = \delta(t_1 - t_2),$$

erhalten wir die zweite Variationsableitung

$$\frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} = -m \left(\frac{d^2}{dt_1^2} + \omega^2 \right) \delta(t_1 - t_2). \quad (1.137)$$

Einsetzen in Gleichung (1.136) führt auf

$$\begin{aligned} S[x_c + y] &= S[x_c] - \frac{m}{2!} \int dt_1 dt_2 y(t_1) y(t_2) \left(\frac{d^2}{dt_1^2} + \omega^2 \right) \delta(t_1 - t_2) \\ &= S[x_c] + \frac{m}{2} \int dt (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2), \end{aligned} \quad (1.138)$$

unter Berücksichtigung der Randbedingung $y(t_A) = y(t_E) = 0$.

Da $\mathcal{D}x$ translationsinvariant¹⁵ ist, können wir $\mathcal{D}x$ durch $\mathcal{D}y$ ersetzen und erhalten

$$\langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle = e^{iS[x_c]} \int_{y(t_A)=y(t_E)=0} \mathcal{D}y e^{i\frac{m}{2} \int_{t_A}^{t_E} dt (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2)}. \quad (1.139)$$

Lassen Sie uns den fluktuierenden Anteil

$$I_E = \int_{y(0)=y(T)=0} \mathcal{D}y e^{i\frac{m}{2} \int_0^T dt (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2)} \quad (1.140)$$

bestimmen (wir haben hier den Ursprung der t -Variable verschoben, damit t_A zu $t = 0$ wird). Wir entwickeln $y(t)$ als

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin \frac{n\pi t}{T} \quad (1.141)$$

in Einklang mit der Randbedingung. Einsetzen dieser Entwicklung in das Integral im Exponenten ergibt

$$\int_0^T dt (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) = \frac{T}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right].$$

Die Fourier-Transformation von $y(t)$ zu $\{a_n\}$ kann man als eine Variablensubstitution für die Integration auffassen. Damit diese Transformation wohldefiniert ist, muss die Zahl der Variablen die gleiche bleiben. Nehmen wir an, die Anzahl der Zeitabschnitte sei $N+1$, einschließlich $t=0$ und $t=T$, wofür es $N-1$ unabhängige y_k gibt. Dementsprechend müssen wir $a_n = 0$ setzen, wenn $n > N-1$ ist. Die Jacobi-Determinante, die mit dieser Variablentransformation assoziiert ist, lautet

$$J_N = \det \frac{\partial y_k}{\partial a_n} = \det \left[\sin \left(\frac{n\pi t_k}{T} \right) \right]. \quad (1.142)$$

¹⁵ Die Integration über alle erlaubten Pfade $x(t)$ mit $x(t_A) = x_A$ und $x(t_E) = x_E$ ist äquivalent zur Integration über alle erlaubten Pfade $y(t)$ mit $y(t_A) = y(t_E) = 0$, mit $x(t) = x_c(t) + y(t)$.

Dabei ist t_k der k -te Zeitschritt, wenn $[0, T]$ in N infinitesimale Abschnitte unterteilt wird.

Diese Jacobi-Determinante lässt sich am einfachsten für ein freies Teilchen bestimmen. Da die Transformation $\{y_k\} \rightarrow \{a_n\}$ unabhängig vom Potenzial ist, sollte die Jacobi-Determinante in beiden Fällen identisch sein. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für ein freies Teilchen wurde in Gleichung (1.104) ermittelt, demzufolge ist

$$\langle x_E, T | x_A, 0 \rangle = \left(\frac{1}{2\pi i T} \right)^{1/2} \exp \left[i \frac{m}{2T} (x_E - x_A)^2 \right] = \left(\frac{1}{2\pi i T} \right)^{1/2} e^{iS[x_c]}. \quad (1.143)$$

Dieser Term schreibt sich im Pfadintegral-Formalismus als

$$e^{iS[x_c]} \int_{y(0)=y(T)=0} \mathcal{D}y e^{i \frac{m}{2} \int_0^T dt y^2}. \quad (1.144)$$

Durch den Vergleich dieser zwei Ausdrücke und unter Berücksichtigung der Tatsache

$$\frac{m}{2} \int_0^T dt y^2 \rightarrow m \sum_{n=1}^N \frac{a_n^2 n^2 \pi^2}{4T}$$

gelangen wir schließlich zu der Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi i T} \right)^{1/2} &= \int_{y(0)=y(T)=0} \mathcal{D}y e^{i \frac{m}{2} \int_0^T dt y^2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} J_N \left(\frac{1}{2\pi i \epsilon} \right)^{1/2} \int da_1 \dots da_{N-1} \exp \left(i m \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n^2 \pi^2 n^2}{4T} \right). \end{aligned}$$

Durch Ausführen der Gauß-Integrale (Gauß'schen Fehlerintegrale) ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi i T} \right)^{1/2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} J_N \left(\frac{1}{2\pi i \epsilon} \right)^{N/2} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \left(\frac{4\pi i T}{\pi^2} \right)^{1/2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} J_N \left(\frac{1}{2\pi i \epsilon} \right)^{N/2} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{4\pi i T}{\pi^2} \right)^{(N-1)/2}, \end{aligned}$$

woraus wir schließlich für *endliche N*

$$J_N = N^{-N/2} 2^{-(N-1)/2} \pi^{N-1} (N-1)! \quad (1.145)$$

erhalten. J_N divergiert ganz offensichtlich für $N \rightarrow \infty$. Dies schadet aber überhaupt nichts, denn uns interessiert J_N immer nur in Kombination mit anderen (divergenten) Faktoren.

Die Übergangsamplitude eines harmonischen Oszillators ist jetzt durch

$$\langle x_E, T | x_A, 0 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N \left(\frac{1}{2\pi i \epsilon} \right)^{N/2} e^{iS[x_c]} \cdot \int da_1 \dots da_{N-1} \exp \left[i \frac{mT}{4} \sum_{n=1}^{N-1} a_n^2 \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right\} \right] \quad (1.146)$$

gegeben. Die Integrale über a_n sind einfache Gauß-Integrale und können leicht ausgeführt werden:

$$\int da_n \exp \left[i \frac{mT}{4} a_n^2 \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right\} \right] = \left(\frac{4iT}{\pi n^2} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in Gleichung (1.146) erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} J_N \left(\frac{N}{2\pi i T} \right)^{N/2} e^{iS[x_c]} \\ &\cdot \prod_{k=1}^{N-1} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{4iT}{\pi} \right)^{1/2} \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[1 - \left(\frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i T} \right)^{1/2} e^{iS[x_c]} \prod_{n=1}^{N-1} \left[1 - \left(\frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.147)$$

Das unendliche Produkt über n ist wohlbekannt und reduziert sich auf

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[1 - \left(\frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right] = \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \quad (1.148)$$

Beachten Sie, dass die Divergenz von J_N sich mit der Divergenz der anderen Terme weghebt, sodass wir einen endlichen Wert erhalten. Alles in allem haben wir damit gezeigt, dass gilt:

$$\begin{aligned} \langle x_E, t_E | x_A, t_A \rangle &= \left(\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega T} \right)^{1/2} e^{iS[x_c]} \\ &= \left(\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega T} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{i\omega}{2 \sin \omega T} \{ (x_E^2 + x_A^2) \cos \omega T - 2x_A x_E \} \right]. \end{aligned} \quad (1.149)$$

1.4.2 Zustandssumme

Die Zustandssumme eines harmonischen Oszillators lässt sich ohne Schwierigkeiten aus dem Eigenwert $E_n = (n + 1/2)\omega$ erhalten:

$$\text{Sp } e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\omega} = \frac{1}{2 \sinh(\beta\omega/2)}. \quad (1.150)$$

Wir können die inverse Temperatur β als imaginäre Zeit auffassen, indem wir $iT = \beta$ setzen. Dann lässt sich die Zustandssumme mit dem Pfadintegral-Formalismus bestimmen.

Methode 1: Die erste Möglichkeit dazu besteht darin, die Spur über $\{|x\rangle\}$ zu bilden, was auf

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int dx \langle x | e^{-\beta \hat{H}} | x \rangle \\
 &= \left(\frac{\omega}{2\pi i (-i \sinh \beta \omega)} \right)^{1/2} \\
 &\quad \cdot \int dx \exp i \left[\frac{\omega}{-2i \sinh \beta \omega} (2x^2 \cosh \beta \omega - 2x^2) \right] \\
 &= \left(\frac{\omega}{2\pi \sinh \beta \omega} \right)^{1/2} \left[\frac{\pi}{\omega \tanh(\beta \omega/2)} \right]^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2 \sinh(\beta \omega/2)}
 \end{aligned} \tag{1.151}$$

führt; dabei haben wir Gleichung (1.149) verwendet.

Die folgende Übung dient zur Vorbereitung von Methode 2.

Übung 1.5 (1) Sei A eine symmetrische positiv definite $(n \times n)$ -Matrix. Zeigen Sie:

$$\int dx_1 \dots dx_n \exp \left(- \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j \right) = \pi^{n/2} (\det A)^{-1/2} = \pi^{n/2} \prod_i \lambda_i^{-1/2}, \tag{1.152}$$

mit einem Eigenwert λ_i von A .

(2) Sei A eine positiv definite Hermite'sche $(n \times n)$ -Matrix. Zeigen Sie:

$$\int dz_1 d\bar{z}_1 \dots dz_n d\bar{z}_n \exp \left(- \sum_{i,j} \bar{z}_i A_{ij} z_j \right) = \pi^n (\det A)^{-1} = \pi^n \prod_i \lambda_i^{-1}. \tag{1.153}$$

Methode 2: Diesmal leiten wir die Zustandssumme her, indem wir das Pfadintegral über die Fluktuationen bestimmen, und zwar mithilfe der Funktionaldeterminanten und der ζ -Funktion-Regularisierung. Wir führen wieder die imaginäre Zeit $\tau = it$ ein und schreiben das Pfadintegral um:

$$\begin{aligned}
 &\int_{y(0)=y(T)=0} \mathcal{D}y \exp \left[\frac{i}{2} \int dt y \left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) y \right] \\
 &\rightarrow \int_{y(0)=y(\beta)=0} \bar{\mathcal{D}}y \exp \left[-\frac{1}{2} \int d\tau y \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) y \right],
 \end{aligned}$$

dabei haben wir die Randbedingung $y(0) = y(\beta) = 0$ beachtet. Der Überstrich bei $\bar{\mathcal{D}}$ steht für das Pfadintegrationsmaß mit imaginärer Zeit.

Sei A eine Hermite'sche $(n \times n)$ -Matrix mit positiv definiten Eigenwerten λ_k ($1 \leq k \leq n$). Dann folgt aus Übung 1.5 für reelle Variablen x_k :

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_k \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{p,q} x_p A_{pq} x_q} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{1}{\sqrt{\det A}},$$

wobei wir numerische Faktoren vernachlässigt haben. Dies ist eine Verallgemeinerung des bekannten Gauß-Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2} \lambda x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

für $\lambda > 0$. Wir definieren die Determinante eines Operators O durch das (geeignet regularisierte) unendliche Produkt seiner Eigenwerte λ_k als $\text{Det } O = \prod_k \lambda_k$.¹⁶ Das obige Pfadintegral schreibt sich damit als

$$\int_{y(0)=y(\beta)=0} \bar{\mathcal{D}}y \exp \left[-\frac{1}{2} \int d\tau y \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) y \right] = \frac{1}{\sqrt{\text{Det}_D(-d^2/d\tau^2 + \omega^2)}}. \quad (1.154)$$

Der Index „D“ bedeutet, dass die Eigenwerte mit der Dirichlet-Randbedingung $y(0) = y(\beta) = 0$ ermittelt werden.

Die allgemeine Lösung $y(\tau)$ für diese Randbedingung hat die Gestalt

$$y(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n \sin \frac{n\pi\tau}{\beta}. \quad (1.155)$$

Beachten Sie, dass $y_n \in \mathbb{R}$ ist, da $y(\tau)$ eine reelle Funktion ist. Der Eigenwert der Eigenfunktion $\sin(n\pi\tau/\beta)$ ist $\lambda_n = (n\pi/\beta)^2 + \omega^2$, darum lässt sich die Funktionaldeterminante formal als

$$\begin{aligned} \text{Det}_D \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) &= \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\beta} \right)^2 \prod_{p=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{\beta\omega}{p\pi} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.156)$$

schreiben. Das erste unendliche Produkt in der letzten Zeile können wir auch als

$$\text{Det}_D \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} \right)$$

¹⁶ Wir werden in diesem Buch durchgängig das Symbol „det“ für die Determinante einer endlichdimensionalen Matrix verwenden, während „Det“ für die (formale) Determinante eines Operators stehen soll. Ähnlich wird die Spur einer endlichdimensionalen Matrix mit „sp“ bezeichnet, während „Sp“ für die Spur eines Operators steht.

formulieren. Dieses unendliche Produkt berechnen wir mittels der ζ -Funktion-Regularisierung. Sei \mathcal{O} ein Operator mit positiv definiten Eigenwerten λ_n . Dann gilt *formal*

$$\log \text{Det } \mathcal{O} = \text{Sp} \log \mathcal{O} = \sum_n \log \lambda_n. \quad (1.157)$$

Jetzt definieren wir die **spektrale ζ -Funktion** als

$$\zeta_{\mathcal{O}}(s) \equiv \sum_n \frac{1}{\lambda_n^s}. \quad (1.158)$$

Die rechte Seite konvergiert für hinreichend große $\text{Re } s$, und $\zeta_{\mathcal{O}}(s)$ ist analytisch bezüglich s in diesem Gebiet. Es kann sogar in die gesamte s -Ebene analytisch fortgesetzt werden, gegebenenfalls mit Ausnahme einer endlichen Zahl von Punkten. Indem wir berücksichtigen, dass

$$\left. \frac{d\zeta_{\mathcal{O}}(s)}{ds} \right|_{s=0} = - \sum_n \log \lambda_n$$

ist, gelangen wir zu dem Ausdruck

$$\text{Det } \mathcal{O} = \exp \left[- \left. \frac{d\zeta_{\mathcal{O}}(s)}{ds} \right|_{s=0} \right]. \quad (1.159)$$

Wir ersetzen \mathcal{O} im vorliegenden Fall durch $-d^2/d\tau^2$ und erhalten

$$\zeta_{-d^2/d\tau^2}(s) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n\pi}{\beta} \right)^{-2s} = \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{2s} \zeta(2s), \quad (1.160)$$

wobei $\zeta(2s)$ die berühmte **Riemann'sche ζ -Funktion** ist. Sie ist auf der gesamten s -Ebene analytisch, bis auf die einfache Polstelle bei $s = 1$. Aus den bekannten Werten

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) \quad (1.161)$$

erhalten wir

$$\zeta'_{-d^2/d\tau^2}(0) = 2 \log \left(\frac{\beta}{\pi} \right) \zeta(0) + 2\zeta'(0) = -\log(2\beta).$$

Wir haben letztlich gezeigt, dass gilt:

$$\text{Det}_D \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} \right) = e^{\log(2\beta)} = 2\beta \quad (1.162)$$

und

$$\text{Det}_D \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) = 2\beta \prod_{p=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{\beta\omega}{p\pi} \right)^2 \right]. \quad (1.163)$$

Das unendliche Produkt in dieser Gleichung ist natürlich bekannt, aber lassen Sie uns im Moment so tun, als wüssten wir nichts über dieses Produkt.

Die Zustandssumme ist nun

$$\text{Sp } e^{-\beta H} = \left[2\beta \prod_{p=1}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{\beta\pi}{p\pi} \right)^2 \right\} \right]^{-1/2} \left[\frac{\pi}{\omega \tanh(\beta\omega/2)} \right]^{1/2}. \quad (1.164)$$

Durch Vergleich mit Gleichung (1.151) haben wir die Formel

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{\beta\omega}{n\pi} \right)^2 \right] = \frac{\pi}{\beta\omega} \sinh(\beta\omega)$$

bewiesen, also

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2} \right) = \frac{\sinh(\pi x)}{\pi x}. \quad (1.165)$$

Wie sieht es mit der Entwicklung der Funktion cosh in ein unendliches Produkt aus? Diese erhalten wir mithilfe des Pfadintegrals für Fermionen, das wir uns im nächsten Abschnitt erarbeiten werden.

1.5 Pfadintegral-Quantisierung eines Fermi-Teilchens

Die Teilchen, die man in der Natur beobachtet, sind nicht notwendigerweise Bose-Teilchen, bei denen Orts- und Impuls-Operator der Vertauschungs- bzw. Kommutatorrelation $[p, x] = -i$ gehorchen. Es gibt auch Fermionen genannte Teilchen, deren Operatoren Antikommutatorrelationen genügen. Die klassische Beschreibung eines Fermions erfordert antikommutierende Zahlen, die man **Graßmann-Zahlen** nennt.

1.5.1 Fermionischer harmonischer Oszillator

Der bosonische harmonische Oszillator im vorigen Abschnitt wird durch den Hamilton-Operator¹⁷

$$H = \frac{1}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger)\omega$$

beschrieben, wobei a und a^\dagger die Vertauschungsrelationen

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

erfüllen. Der Hamilton-Operator hat die Eigenwerte $(n + 1/2)\omega$ ($n \in \mathbb{N}$) mit den Eigenvektoren $|n\rangle$:

$$H|n\rangle = (n + \frac{1}{2})\omega|n\rangle.$$

Betrachten wir nun einen Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2}(c^\dagger c - c c^\dagger)\omega, \quad (1.166)$$

¹⁷ Wir lassen ab jetzt das Symbol „ $\hat{}$ “ bei Operatoren weg, wenn es nicht zu Verwechslungen führen kann.

den **fermionischen harmonischen Oszillator**. Man kann ihn als eine Fourier-Komponente des Dirac'schen Hamilton-Operators für relativistische Fermionen auffassen. Wenn für die Operatoren c und c^\dagger dieselben Kommutatorrelationen gelten würden wie für Bosonen, wäre der Hamilton-Operator eine Konstante: $H = -\omega/2$. Wenn wir stattdessen die **Antikommatorrelationen** verwenden,

$$\{c, c^\dagger\} \equiv cc^\dagger + c^\dagger c = 1, \quad \{c, c\} = \{c^\dagger, c^\dagger\} = 0, \quad (1.167)$$

nimmt der Hamilton-Operator die Form

$$H = \frac{1}{2}[c^\dagger c - (1 - cc^\dagger)]\omega = (N - \frac{1}{2})\omega \quad (1.168)$$

an, mit $N = c^\dagger c$. Man sieht leicht, dass der Eigenwert von N entweder 0 oder 1 sein muss. Genauer gesagt, genügt N der Gleichung $N^2 = c^\dagger cc^\dagger c = N$, also $N(N-1) = 0$. Dies ist nichts anderes als das Pauli-Prinzip.

Betrachten wir den Hilbert-Raum des Hamilton-Operators H . Sei $|n\rangle$ ein Eigenvektor von H zum Eigenwert n , mit (wie gesagt) $n = 0, 1$. Sie können leicht die folgenden Relationen überprüfen:

$$H|0\rangle = -\frac{\omega}{2}|0\rangle, \quad H|1\rangle = \frac{\omega}{2}|1\rangle;$$

$$c^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad c|0\rangle = 0, \quad c^\dagger|1\rangle = 0, \quad c|1\rangle = |0\rangle.$$

Bei nur zwei möglichen Eigenwerten bietet sich die Komponentenschreibweise an:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Übung 1.6 Es mögen die Basisvektoren diese Form haben. Zeigen Sie, dass die Operatoren die folgenden Matrixdarstellungen aufweisen:

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Kommutatorrelation $[x, p] = i$ für Bosonen wurde im Pfadintegral-Formalismus durch $[x, p] = 0$ ersetzt. Für Fermionen sollte die Antikommatorrelation $\{c, c^\dagger\} = 1$ zu $\{\theta, \theta^*\} = 0$ werden, wobei θ und θ^* antikommutierende klassische Zahlen und damit Graßmann-Zahlen sind.

1.5.2 Graßmann-Kalkül

Um die antikommutierenden Graßmann-Zahlen von den kommutierenden reellen und komplexen Zahlen zu unterscheiden, nennen wir letztere ab jetzt „c-Zahlen“, wobei „c“ für engl. „commuting“ steht. Wir betrachten n Erzeugende $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$,

welche die Antikommutatorrelationen

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad (\forall i, j) \quad (1.169)$$

erfüllen. Dann heißen die Linearkombinationen der $\{\theta_i\}$ mit c-Zahl-Koeffizienten **Graßmann-Zahlen**, und die von den $\{\theta_i\}$ erzeugte Algebra ist eine **Graßmann-Algebra**, symbolisiert durch Λ^n . Ein beliebiges Element f von Λ^n lässt sich entwickeln gemäß

$$f(\theta) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i \theta_i + \sum_{i < j} f_{ij} \theta_i \theta_j + \dots = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} \sum_{\{i\}} f_{i_1 \dots i_k} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_k}, \quad (1.170)$$

wobei die f_0, f_i, f_{ij}, \dots und $f_{i_1 \dots i_k}$ unter der Vertauschung zweier beliebiger Indizes anti-symmetrische c-Zahlen sind. Das Element f kann auch als

$$f(\theta) = \sum_{k_i=0,1} \tilde{f}_{k_1, \dots, k_n} \theta_1^{k_1} \dots \theta_n^{k_n} \quad (1.171)$$

geschrieben werden. Nehmen wir als Beispiel $n = 2$. Dann ist

$$f(\theta) = f_0 + f_1 \theta_1 + f_2 \theta_2 + f_{12} \theta_1 \theta_2 = \tilde{f}_{00} + \tilde{f}_{10} \theta_1 + \tilde{f}_{01} \theta_2 + \tilde{f}_{11} \theta_1 \theta_2.$$

Die Teilmengen von Λ^n , die von Monomen mit geraden bzw. ungeraden Potenzen von θ_k erzeugt werden, bezeichnet man als Λ_+^n bzw. Λ_-^n :

$$\Lambda^n = \Lambda_+^n \oplus \Lambda_-^n. \quad (1.172)$$

Die Separation von Λ^n in diese beiden Unterräume nennt man **\mathbb{Z}_2 -Graduierung**. Wir bezeichnen ein Element von Λ_+^n (Λ_-^n) als G-gerade bzw. G-ungerade; manchmal sagt man hier auch „Graßmann-gerade“ bzw. „-ungerade“. Beachten Sie, dass $\dim \Lambda^n = 2^n$ ist, aber $\dim \Lambda_+^n = \dim \Lambda_-^n = 2^{(n-1)}$.

Die Erzeugende θ_k hat keinen Betrag, weswegen die Menge der Graßmann-Zahlen keine geordnete Menge ist. Die Null ist die einzige Zahl, die sowohl eine c-Zahl als auch eine Graßmann-Zahl ist. Eine Graßmann-Zahl kommutiert mit einer c-Zahl. Es sollte klar sein, dass für die Erzeugenden die folgenden Relationen gelten:

$$\begin{aligned} \theta_k^2 &= 0, \\ \theta_{k_1} \theta_{k_2} \dots \theta_{k_n} &= \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n, \\ \theta_{k_1} \theta_{k_2} \dots \theta_{k_m} &= 0 \quad (m > n), \end{aligned} \quad (1.173)$$

mit

$$\varepsilon_{k_1 \dots k_n} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \{k_1 \dots k_n\} \text{ eine gerade Permutation von } \{1 \dots n\} \text{ ist,} \\ -1, & \text{wenn } \{k_1 \dots k_n\} \text{ eine ungerade Permutation von } \{1 \dots n\} \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Funktion von Graßmann-Zahlen ist definiert als eine Taylor-Entwicklung dieser Funktion. Wenn beispielsweise $n = 1$ ist, ergibt sich

$$e^\theta = 1 + \theta,$$

da Terme höherer Ordnung in θ identisch verschwinden.

1.5.3 Differenziation

Es wird angenommen, dass der Differentialoperator auf eine Funktion von links wirkt:

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j = \delta_{ij}. \quad (1.174)$$

Weiterhin soll der Differentialoperator mit θ_k antikommutieren. Die Produktregel hat dann die Form

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_j \theta_k) = \frac{\partial \theta_j}{\partial \theta_i} \theta_k - \theta_j \frac{\partial \theta_k}{\partial \theta_i} = \delta_{ij} \theta_k - \delta_{ik} \theta_j. \quad (1.175)$$

Übung 1.7 Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} = 0. \quad (1.176)$$

Mit dieser Übung zeigt sich leicht, dass der Differentialoperator nilpotent ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} = 0. \quad (1.177)$$

Übung 1.8 Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j + \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_i} = \delta_{ij}. \quad (1.178)$$

1.5.4 Integration

Überraschenderweise ist die Integration über eine Graßmann-Variable äquivalent zur Differenziation. Es bezeichne D die Differenziation nach einer Graßmann-Variablen und I die Integration, wobei die Integration hier als bestimmtes Integral zu verstehen ist. Nehmen wir an, es gelten die Beziehungen

- (1) $ID = 0$,
- (2) $DI = 0$,
- (3) $D(A) = 0 \Rightarrow I(BA) = I(B)A$,

mit zwei beliebigen Funktionen A und B von Graßmann-Variablen. Die erste Beziehung besagt, dass die Integration der Ableitung irgendeiner Funktion den Oberflächenterm ergibt, der auf null gesetzt wird. Die zweite Beziehung bedeutet, dass die Ableitung eines bestimmten Integrals verschwindet. Die dritte Beziehung impliziert, dass A konstant ist, wenn $D(A) = 0$ ist, und daher aus dem Integral (nach rechts) herausgezogen werden kann. Diese drei Relationen gelten immer noch, wenn wir $I \propto D$ annehmen. Wir wählen die Normierung $I = D$ und setzen

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}. \quad (1.179)$$

Aus der vorigen Definition ergibt sich

$$\int d\theta = \frac{\partial 1}{\partial \theta} = 0, \quad \int d\theta \theta = \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 1.$$

Wenn es n Erzeugende $\{\theta_k\}$ gibt, verallgemeinert sich Gleichung (1.179) zu

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \dots \frac{\partial}{\partial \theta_n} f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \quad (1.180)$$

Beachten Sie die Reihenfolge von $d\theta_k$ bzw. $\partial/\partial\theta_k$.

Die Äquivalenz von Differenziation und Integration führt zu einem bemerkenswerten Verhalten des Integrals bei Substitution der Integrationsvariablen. Betrachten wir den Fall $n = 1$ zuerst. Bei einer Substitution $\theta' = a\theta$ ($a \in \mathbb{C}$) erhalten wir

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial f(\theta'/a)}{\partial \theta'/a} = a \int d\theta' f(\theta'/a),$$

was auf $d\theta' = (1/a)d\theta$ führt. Dies lässt sich sofort auf den Fall von n Variablen erweitern. Sei $\theta_i \rightarrow \theta'_i = a_{ij}\theta_j$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int d\theta_1 \dots d\theta_n f(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta_1} \dots \frac{\partial}{\partial \theta_n} f(\theta) \\ &= \sum_{k_i=1}^n \frac{\partial \theta'_{k_1}}{\partial \theta_1} \dots \frac{\partial \theta'_{k_n}}{\partial \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta'_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \theta'_{k_n}} f(a^{-1}\theta') \\ &= \sum_{k_i=1}^n \varepsilon_{k_1 \dots k_n} a_{k_1 1} \dots a_{k_n n} \frac{\partial}{\partial \theta'_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \theta'_{k_n}} f(a^{-1}\theta') \\ &= \det a \int d\theta'_1 \dots d\theta'_n f(a^{-1}\theta'). \end{aligned}$$

Dementsprechend transformiert sich das Integralmaß wie

$$d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n = \det a d\theta'_1 d\theta'_2 \dots d\theta'_n. \quad (1.181)$$

1.5.5 Delta-Funktion

Die δ -Funktion einer Graßmann-Variablen wird über die Beziehung

$$\int d\theta \delta(\theta - \alpha) f(\theta) = f(\alpha) \quad (1.182)$$

eingeführt (für eine einzelne Variable). Wenn wir die Entwicklung $f(\theta) = a + b\theta$ in diese Definition einsetzen, erhalten wir

$$\int d\theta \delta(\theta - \alpha)(a + b\theta) = a + b\alpha,$$

woraus wir ersehen, dass die δ -Funktion explizit durch

$$\delta(\theta - \alpha) = \theta - \alpha \quad (1.183)$$

gegeben ist. Erweitern dieses Resultats auf n Variablen führt direkt auf (beachten Sie die Reihenfolge der Variablen):

$$\delta^n(\theta - \alpha) = (\theta_n - \alpha_n) \dots (\theta_2 - \alpha_2)(\theta_1 - \alpha_1). \quad (1.184)$$

Die Integralform der δ -Funktion ergibt sich aus

$$\int d\xi e^{i\xi\theta} = \int d\xi (1 + i\xi\theta) = i\theta$$

zu

$$\delta(\theta) = \theta = -i \int d\xi e^{i\xi\theta}. \quad (1.185)$$

1.5.6 Gauß-Integral

Lassen Sie uns das verallgemeinerte Gauß-Integral

$$I = \int d\theta_1^* d\theta_1 \dots d\theta_n^* d\theta_n e^{-\sum_{ij} \theta_i^* M_{ij} \theta_j} \quad (1.186)$$

betrachten, dabei seien $\{\theta_i\}$ und $\{\theta_i^*\}$ zwei Mengen von unabhängigen Grassmann-Variablen. Die $(n \times n)$ -c-Zahl-Matrix M muss antisymmetrisch sein, da θ_i und θ_i^* antikommutieren. Das Integral berechnen wir mithilfe der Variablensubstitution $\theta'_i = \sum_j M_{ij} \theta_j$ zu

$$\begin{aligned} I &= \det M \int d\theta_1^* d\theta'_1 \dots d\theta_n^* d\theta'_n e^{-\sum_i \theta_i^* \theta'_i} \\ &= \det M \left[\int d\theta^* d\theta (1 + \theta' \theta^*) \right]^n = \det M. \end{aligned} \quad (1.187)$$

Wir beweisen nun eine interessante Beziehung als Anwendung des Gauß-Integrals.

Behauptung 1.3. Es sei a eine antisymmetrische Matrix der Ordnung $2n$. Wir definieren die **Pfaff'sche Determinante** von a als

$$\text{Pf}(a) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\text{Permutationen } P \text{ von} \\ \{i_1, \dots, i_{2n}\}}} \text{sgn}(P) a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{2n-1} i_{2n}}. \quad (1.188)$$

Dann ist

$$\det a = \text{Pf}(a)^2. \quad (1.189)$$

Beweis

Wir beachten, dass gilt:

$$I = \int d\theta_{2n} \dots d\theta_1 \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{ij} \theta_i a_{ij} \theta_j \right] = \frac{1}{2^n n!} \int d\theta_{2n} \dots d\theta_1 \left(\sum_{ij} \theta_i a_{ij} \theta_j \right)^n = \text{Pf}(a)$$

und außerdem

$$I^2 = \int d\theta_{2n} \dots d\theta_1 d\theta'_{2n} \dots d\theta_1 \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{ij} (\theta_i a_{ij} \theta_j + \theta'_i a_{ij} \theta'_j) \right].$$

Nach Substitution der Variablen

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_k + \theta'_k), \quad \eta_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\theta_k - \theta'_k)$$

sehen wir, dass die Jacobi-Determinante gleich $(-1)^n$ ist und damit folgt:

$$\begin{aligned} \theta_i \theta_j + \theta'_i \theta'_j &= \eta_i \eta_j^* - \eta_j^* \eta_i, \\ d\eta_{2n} \dots d\eta_i d\eta_{2n}^* \dots d\eta_1^* &= (-1)^{n^2} d\eta_1 d\eta_1^* \dots d\eta_{2n} d\eta_{2n}^*. \end{aligned}$$

Daraus können wir bestätigen:

$$\text{Pf}(a)^2 = \int d\eta_1 d\eta_1^* \dots d\eta_{2n} d\eta_{2n}^* \exp \left[\sum_{ij} \eta_i^* a_{ij} \eta_j \right] = \det a. \quad \square$$

Übung 1.9 (1) Seien M eine schiefsymmetrische Matrix und K_i Graßmann-Zahlen. Zeigen Sie:

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n e^{-\frac{1}{2} \theta \cdot M \cdot \theta + t K \cdot \theta} = 2^{n/2} \sqrt{\det M} e^{-t K \cdot M^{-1} \cdot K / 4}. \quad (1.190)$$

(2) Seien M eine schief-Hermite'sche Matrix und K_i und K_i^* Graßmann-Zahlen. Zeigen Sie:

$$\int d\theta_1^* d\theta_1 \dots d\theta_n^* d\theta_n e^{-\theta^\dagger \cdot M \cdot \theta + K^\dagger \cdot \theta + \theta^\dagger \cdot K} = \det M e^{K^\dagger \cdot M^{-1} \cdot K}. \quad (1.191)$$

1.5.7 Variationsableitung

Die Variationsableitung nach einer Graßmann-Variablen kann man ähnlich definieren wie bei einer kommutierenden Variablen. Sei $\psi(t)$ eine Graßmann-Variable, die von einem c-Zahl-Parameter t abhängt, und sei $F[\psi(t)]$ ein Funktional von ψ . Dann definieren wir

$$\frac{\delta F[\psi(t)]}{\delta \psi(s)} = \frac{1}{\varepsilon} \{F[\psi(t) + \varepsilon \delta(t-s)] - F[\psi(t)]\}, \quad (1.192)$$

mit einem Graßmann-Parameter ε . Die Taylor-Entwicklung von $F[\psi(t) - \varepsilon \delta(t-s)]$ nach ε ist linear in ε , wegen $\varepsilon^2 = 0$. Demzufolge ist der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht notwendig. Aber Vorsicht: Die Division durch eine Graßmann-Zahl ist im Allgemeinen nicht wohldefiniert. Hier allerdings ist der Zähler proportional zu ε , und Division durch ε bedeutet einfach, den Koeffizienten von ε im Zähler herauszupicken.

1.5.8 Komplexe Konjugation

Es seien $\{\theta_i\}$ und $\{\theta_i^*\}$ zwei Erzeugendensysteme von Graßmann-Zahlen. Wir definieren die komplexe Konjugation von θ_i durch $(\theta_i)^* = \theta_i^*$ und $(\theta_i^*)^* = \theta_i$. Außerdem definieren wir

$$(\theta_i \theta_j)^* = \theta_j^* \theta_i^*. \quad (1.193)$$

Andernfalls würde die *reelle c-Zahl* $\theta_i \theta_i^*$ nicht die Bedingung $(\theta_i \theta_i^*)^* = \theta_i \theta_i^*$ erfüllen.

1.5.9 Kohärente Zustände und Vollständigkeitsrelation

Die fermionischen Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren c und c^\dagger erfüllen die Antikommatorrelationen $\{c, c\} = \{c^\dagger, c^\dagger\} = 0$ und $\{c, c^\dagger\} = 1$, und der Besetzungszahloperator $N = c^\dagger c$ hat die Eigenvektoren $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Betrachten wir nun den von diesen Vektoren aufgespannten Hilbert-Raum

$$\mathcal{H} = \text{Span}\{|0\rangle, |1\rangle\}.$$

Ein beliebiger Vektor $|f\rangle \in \mathcal{H}$ lässt sich in der Form

$$|f\rangle = |0\rangle f_0 + |1\rangle f_1$$

schreiben, mit $f_0, f_1 \in \mathbb{C}$.

Nun untersuchen wir die Zustände

$$|\theta\rangle = |0\rangle + |1\rangle \theta, \quad (1.194)$$

$$\langle \theta| = \langle 0| + \theta^* \langle 1|, \quad (1.195)$$

mit den Graßmann-Zahlen θ und θ^* . Diese Zustände bezeichnet man als **kohärente Zustände**, sie sind Eigenzustände von c bzw. c^\dagger :

$$c|\theta\rangle = |0\rangle \theta = |\theta\rangle \theta, \quad \langle \theta| c^\dagger = \theta^* \langle 0| = \theta^* \langle \theta|.$$

Übung 1.10 Bestätigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\langle \theta'|\theta\rangle = 1 + \theta'^* \theta = e^{\theta'^* \theta},$$

$$\langle \theta|f\rangle = f_0 + \theta^* f_1,$$

$$\langle \theta|c^\dagger|f\rangle = \langle \theta|1\rangle f_0 = \theta^* f_0 = \theta^* \langle \theta|f\rangle,$$

$$\langle \theta|c|f\rangle = \langle \theta|0\rangle f_1 = \frac{\partial}{\partial \theta^*} \langle \theta|f\rangle.$$

Es sei

$$h(c, c^\dagger) = h_{00} + h_{10} c^\dagger + h_{01} c + h_{11} c^\dagger c \quad (h_{ij} \in \mathbb{C})$$

eine beliebige Funktion von c und c^\dagger . Dann sind die Matrixelemente von h

$$\langle 0|h|0 \rangle = h_{00}, \quad \langle 0|h|1 \rangle = h_{01}, \quad \langle 1|h|0 \rangle = h_{10}, \quad \langle 1|h|1 \rangle = h_{00} + h_{11}.$$

Hieraus folgt auf einfache Weise

$$\langle \theta|h|\theta' \rangle = (h_{00} + \theta^* h_{10} + h_{01} \theta' + \theta^* \theta' h_{11}) e^{\theta^* \theta'}. \quad (1.196)$$

Lemma 1.3. Es seien $|\theta\rangle$ und $\langle\theta|$ definiert wie zuvor. Dann lautet die Vollständigkeitsrelation

$$\int d\theta^* d\theta |\theta\rangle \langle\theta| e^{-\theta^* \theta} = I. \quad (1.197)$$

Beweis

Einfaches Ausrechnen ergibt

$$\begin{aligned} & \int d\theta^* d\theta |\theta\rangle \langle\theta| e^{-\theta^* \theta} \\ &= \int d\theta^* d\theta (|0\rangle + |1\rangle \theta) (\langle 0| + \theta^* \langle 1|) (1 - \theta^* \theta) \\ &= \int d\theta^* d\theta (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \theta \langle 0| + |0\rangle \theta^* \langle 1| + |1\rangle \theta \theta^* \langle 1|) (1 - \theta^* \theta) \\ &= |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| = I. \end{aligned} \quad \square$$

1.5.10 Zustandssumme eines fermionischen Oszillators

Wir bestimmen jetzt die Zustandssumme eines fermionischen harmonischen Oszillators als Anwendung des Pfadintegral-Formalismus für Fermionen. Der Hamilton-Operator ist $H = (c^\dagger c - 1/2)\omega$ und hat die Eigenwerte $\pm\omega/2$. Die Zustandssumme ist dann

$$Z(\beta) = \text{Sp } e^{-\beta H} = \sum_{n=0}^1 \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle = e^{\beta\omega/2} + e^{-\beta\omega/2} = 2 \cosh(\beta\omega/2). \quad (1.198)$$

Nun berechnen wir $Z(\beta)$ auf zwei verschiedenen Wegen mit einem Pfadintegral. Wir starten die Herleitung mit dem folgenden Lemma:

Lemma 1.4. Sei H der Hamilton-Operator eines fermionischen harmonischen Oszillators. Dann schreibt sich die Zustandssumme als

$$\text{Sp } e^{-\beta H} = \int d\theta^* d\theta \langle -\theta | e^{-\beta H} | \theta \rangle e^{-\theta^* \theta}. \quad (1.199)$$

Beweis

Wir setzen die Vollständigkeitsrelation (1.197) in die Definition einer Zustandssumme ein und erhalten

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \sum_{n=0,1} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle \\
 &= \sum_n \int d\theta^* d\theta e^{-\theta^* \theta} \langle n | \theta \rangle \langle \theta | e^{-\beta H} | n \rangle \\
 &= \sum_n \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* \theta) (\langle n | 0 \rangle + \langle n | 1 \rangle \theta) \left(\langle 0 | e^{-\beta H} | n \rangle + \theta^* \langle 1 | e^{-\beta H} | n \rangle \right) \\
 &= \sum_n \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* \theta) \left[\langle 0 | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | 0 \rangle \right. \\
 &\quad \left. - \theta^* \theta \langle 1 | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | 1 \rangle + \theta \langle 0 | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | 1 \rangle + \theta^* \langle 1 | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | 0 \rangle \right].
 \end{aligned}$$

Der letzte Term in der letzten Zeile trägt nicht zum Integral bei, weswegen wir θ^* durch $-\theta^*$ ersetzen können. Dann ist

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \sum_n \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* \theta) [\langle 0 | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | 0 \rangle \\
 &\quad - \theta^* \theta \langle 1 | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | 1 \rangle + \theta \langle 0 | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | 1 \rangle - \theta^* \langle 1 | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | 0 \rangle] \\
 &= \int d\theta^* d\theta e^{-\theta^* \theta} \langle -\theta | e^{-\beta H} | \theta \rangle. \quad \square
 \end{aligned}$$

Dementsprechend läuft die Koordinate in der Spur über *antiperiodische* Orbiten. Die Graßmann-Variablen ist θ bei $\tau = 0$, aber $-\theta$ bei $\tau = \beta$ und wir müssen in der Spur eine antiperiodische Randbedingung über $[0, \beta]$ wählen.

Wenn wir den Ausdruck

$$e^{-\beta H} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - \beta H/N)^N$$

verwenden und die Vollständigkeitsrelation an jedem Zeitschritt einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\theta^* d\theta e^{-\theta^* \theta} \langle -\theta | (1 - \beta H/N)^N | \theta \rangle \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\theta^* d\theta \prod_{k=1}^{N-1} \int d\theta_k^* d\theta_k e^{-\sum_{n=1}^{N-1} \theta_n^* \theta_n} \\
 &\quad \cdot \langle -\theta | (1 - \varepsilon H) | \theta_{N-1} \rangle \langle \theta_{N-1} | \dots | \theta_1 \rangle \langle \theta_1 | (1 - \varepsilon H) | \theta \rangle \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^N d\theta_k^* d\theta_k e^{-\sum_{n=1}^N \theta_n^* \theta_n} \\
 &\quad \cdot \langle \theta_N | (1 - \varepsilon H) | \theta_{N-1} \rangle \langle \theta_{N-1} | \dots | \theta_1 \rangle \langle \theta_1 | (1 - \varepsilon H) | -\theta_N \rangle.
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\varepsilon = \beta/N$, $\theta = -\theta_N = \theta_0$ und $\theta^* = -\theta_N^* = \theta_0^*$ gesetzt.

Die einzelnen Matrixelemente ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\langle \theta_k | (1 - \varepsilon H) | \theta_{k-1} \rangle &= \langle \theta_k | \theta_{k-1} \rangle \left[1 - \varepsilon \frac{\langle \theta_k | H | \theta_{k-1} \rangle}{\langle \theta_k | \theta_{k-1} \rangle} \right] \\ &\simeq \langle \theta_k | \theta_{k-1} \rangle e^{-\varepsilon \langle \theta_k | H | \theta_{k-1} \rangle / \langle \theta_k | \theta_{k-1} \rangle} \\ &= e^{\theta_k^* \theta_{k-1}} e^{-\varepsilon \omega (\theta_k^* \theta_{k-1} - 1/2)} \\ &= e^{\varepsilon \omega / 2} e^{(1 - \varepsilon \omega) \theta_k^* \theta_{k-1}}.\end{aligned}$$

Die Zustandssumme wird jetzt abhängig vom Pfadintegral folgendermaßen ausgedrückt:

$$\begin{aligned}Z(\beta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\beta \omega / 2} \prod_{k=1}^N \int d\theta_k^* d\theta_k e^{-\sum_{n=1}^N \theta_n^* \theta_n} e^{(1 - \varepsilon \omega) \sum_{n=1}^N \theta_n^* \theta_{n-1}} \\ &= e^{\beta \omega / 2} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \int d\theta_k^* d\theta_k e^{-\sum_{n=1}^N [\theta_n^*(\theta_n - \theta_{n-1}) + \varepsilon \omega \theta_n^* \theta_{n-1}]} \\ &= e^{\beta \omega / 2} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \int d\theta_k^* d\theta_k e^{-\theta^\dagger \cdot B_N \cdot \theta},\end{aligned}\tag{1.200}$$

mit

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{pmatrix}, \quad \theta^\dagger = (\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*), \quad B_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -y \\ y & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & 1 \end{pmatrix}.$$

In der letzten Gleichung ist $y = -1 + \varepsilon \omega$. Schließlich folgern wir aus der Definition des Gauß-Integrals von Graßmann-Zahlen:

$$\begin{aligned}Z(\beta) &= e^{\beta \omega / 2} \lim_{N \rightarrow \infty} \det B_N = e^{\beta \omega / 2} \lim_{N \rightarrow \infty} [1 + (1 - \beta \omega / N)^N] \\ &= e^{\beta \omega / 2} (1 + e^{-\beta \omega}) = 2 \cosh \frac{1}{2} \beta \omega.\end{aligned}\tag{1.201}$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Zustandssumme (1.151) des bosonischen harmonischen Oszillators!

Dieselbe Zustandssumme erhält man auch mithilfe der ζ -Funktion-Regularisierung. Aus der zweiten Zeile von Gleichung (1.200) folgt:

$$\begin{aligned}Z(\beta) &= e^{\beta \omega / 2} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \int d\theta_k^* d\theta_k e^{-\sum_n [(1 - \varepsilon \omega) \theta_n^* (\theta_n - \theta_{n-1}) / \varepsilon + \omega \theta_n^* \theta_n]} \\ &= e^{\beta \omega / 2} \int \mathcal{D}\theta^* \mathcal{D}\theta \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \theta^* \left((1 - \varepsilon \omega) \frac{d}{d\tau} + \omega \right) \theta \right] \\ &= e^{\beta \omega / 2} \text{Det}_{\text{apRB}} \left((1 - \varepsilon \omega) \frac{d}{d\tau} + \omega \right).\end{aligned}$$

Hier steht der Index „apRB“ dafür, dass der Eigenwert für solche Lösungen bestimmt werden soll, welche der antiperiodischen Randbedingung $\theta(\beta) = -\theta(0)$ genügen. Es kommt Ihnen vielleicht merkwürdig vor, dass der Differentialoperator ε enthält. Wir werden später herausfinden, dass dies einen endlichen Beitrag zu dem unendlichen Produkt der Eigenwerte liefert. Lassen Sie uns den Orbit $\theta(\tau)$ nach den Fourier-Moden entwickeln. Die Eigenmoden und korrespondierenden Eigenwerte sind

$$\exp\left(\frac{\pi i(2n+1)\tau}{\beta}\right) \quad \text{bzw.} \quad (1-\varepsilon\omega)\frac{\pi i(2n+1)}{\beta} + \omega,$$

mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Es sei hier bemerkt, dass die kohärenten Zustände übervollständig sind und die tatsächliche Anzahl der Freiheitsgrade N ist, welche mit ε über $\varepsilon = \beta/N$ zusammenhängt. Darum müssen wir das Produkt bei $-N/4 \leq k \leq N/4$ abschneiden, da eine komplexe Variable zwei reelle Freiheitsgrade hat. Dementsprechend nimmt die Zustandssumme die Form

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= e^{\beta\omega/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=-N/4}^{N/4} \left[i(1-\varepsilon\omega) \frac{\pi(2n-1)}{\beta} + \omega \right] \\ &= e^{\beta\omega/2} e^{-\beta\omega/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi(n-1/2)}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right] \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\pi(2k-1)}{\beta} \right]^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{\beta\omega}{\pi(2n-1)} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

an. Das erste unendliche Produkt nennen wir P , es ist divergent und erfordert Regularisierung. Beachten Sie zunächst die Beziehung

$$\log P = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \log \left[\frac{2\pi(k-1/2)}{\beta} \right].$$

Wir definieren die zugehörige ζ -Funktion durch

$$\tilde{\zeta}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi(k-1/2)}{\beta} \right]^{-s} = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^s \zeta(s, 1/2),$$

womit wir $P = e^{-2\tilde{\zeta}'(0)}$ erhalten. Hier ist

$$\zeta(s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^s} \quad (0 < a < 1) \tag{1.202}$$

die **verallgemeinerte ζ -Funktion** oder **Hurwitz- ζ -Funktion**. Die Ableitung von $\zeta(s)$ bei $s = 0$ ergibt

$$\tilde{\zeta}'(0) = \log\left(\frac{\beta}{2\pi}\right) \zeta(0, 1/2) + \zeta'(0, 1/2) = -\frac{1}{2} \log 2,$$

wobei wir die Werte¹⁸

$$\zeta(0, 1/2) = 0, \quad \zeta'(0, 1/2) = -\frac{1}{2} \log 2$$

verwendet haben. Damit erhalten wir schließlich

$$P = e^{-2\tilde{\zeta}'(0)} = e^{\log 2} = 2. \quad (1.203)$$

Beachten Sie, dass P nach der Regularisierung unabhängig von β ist.

Wenn wir alles zusammenfügen, gelangen wir zu der Zustandssumme

$$Z(\beta) = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{\beta \omega}{\pi(2n-1)} \right)^2 \right]. \quad (1.204)$$

Mit der bekannten Formel

$$\cosh \frac{x}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2}{\pi^2(2n-1)^2} \right] \quad (1.205)$$

erhalten wir daraus

$$Z(\beta) = 2 \cosh \frac{\beta \omega}{2}. \quad (1.206)$$

Angenommen, wir würden die Formel (1.205) nicht kennen. Dann hätten wir durch Gleichsetzen von Gleichung (1.201) mit Gleichung (1.204) die Formel (1.205) mithilfe von Pfadintegralen *bewiesen*. Dies ist eine typische Anwendung der Physik in der Mathematik: Bestimme eine physikalische Größe mit zwei unterschiedlichen Methoden und setze die beide Resultate gleich. Daraus ergibt sich dann oft eine nicht-triviale Beziehung, die sich in der Mathematik als nützlich erweist.

1.6 Quantisierung eines skalaren Felds

1.6.1 Freies skalares Feld

Die Diskussion der vorigen Abschnitte kann auf einfache Weise auf den Fall vieler Freiheitsgrade verallgemeinert werden. Insbesondere interessieren wir uns für ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden, mit anderen Worten, für die **Quantenfeldtheorie** (QFT). Beginnen wir unsere Vorstellung mit dem einfachsten Fall, d. h. der skalaren Feldtheorie. Sei $\phi(x)$ ein reelles skalares Feld mit den Raumzeit-Koordinaten $x = (x, x^0)$, wobei x die räumliche und x^0 die Zeitkoordinate sein soll. Die Wirkung hängt von ϕ und seinen Ableitungen $\partial_\mu \phi(x) = \partial \phi(x)/\partial x^\mu$ ab:

$$S = \int dx \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (1.207)$$

¹⁸ Die erste Gleichung folgt aus der Relation $\zeta(s, 1/2) = (2^s - 1)\zeta(s)$, die sich aus der Identität $\zeta(s, 1/2) + \zeta(s) = 2^s \sum_{n=1}^{\infty} [1/(2n-1)^s + 1/(2n)^s] = 2^s \zeta(s)$ herleitet. Die zweite Gleichung ergibt sich durch Differenzieren von $\zeta(s, 1/2) = (2^s - 1)\zeta(s)$ nach s und aus $\zeta(0) = -1/2$.

Hier ist \mathcal{L} die Lagrange-Dichte. Die Euler-Lagrange-Gleichung hat jetzt die Form

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.208)$$

Die Lagrange-Dichte eines freien Skalarfelds ist

$$\mathcal{L}_0(\phi, \partial_\mu \phi) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2). \quad (1.209)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung, die sich aus dieser Lagrange-Dichte ergibt, ist die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\square - m^2)\phi = 0, \quad (1.210)$$

mit dem D'Alembert-Operator $\square = \partial^\mu \partial_\mu = -\partial_0^2 + \nabla^2$.

Die Vakuum-zu-Vakuum-Übergangsamplitude in Anwesenheit einer Quelle J hat die **Pfadintegral-Darstellung** $\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \propto Z_0[J]$, mit

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}_0 + J\phi + \frac{i}{2}\varepsilon\phi^2 \right) \right]. \quad (1.211)$$

Dabei wurde der $i\varepsilon$ -Term hinzugefügt, um das Pfadintegral zu regularisieren.¹⁹ Partielle Integration führt auf

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int dx \left(\frac{1}{2} \{ \phi(\square - m^2)\phi + i\varepsilon\phi^2 \} + J\phi \right) \right]. \quad (1.212)$$

Nun sei ϕ_c die klassische Lösung der Klein-Gordon-Gleichung in Anwesenheit der Quelle:

$$(\square - m^2 + i\varepsilon)\phi_c = -J. \quad (1.213)$$

Diese Lösung lautet, wie man leicht feststellt:

$$\phi_c(x) = - \int dy \Delta(x-y) J(y). \quad (1.214)$$

$\Delta(x-y)$ ist dabei der Feynman-Propagator:

$$\Delta(x-y) = \frac{-1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon}, \quad (1.215)$$

und d gibt die Raumzeit-Dimension an. Beachten Sie, dass $\Delta(x-y)$ der Gleichung

$$(\square - m^2 + i\varepsilon)\Delta(x-y) = \delta^d(x-y)$$

genügt. Es ist eine gute (und nicht sehr schwere) Übung für Sie, zu zeigen, dass das Funktional $Z_0[J]$ sich jetzt als

$$Z_0[J] = Z_0[0] \exp \left[-\frac{i}{2} \int dx dy J(x) \Delta(x-y) J(y) \right] \quad (1.216)$$

¹⁹ Alternativ könnten wir auch die imaginäre Zeit $\tau = ix^0$ einführen und die Zeitachse Wick-rotieren.

schreibt. Es ist außerdem instruktiv zu bemerken, dass man umgekehrt den Propagator aus der Variationsableitung von $Z_0[J]$ erhalten kann:

$$\Delta(x-y) = \frac{i}{Z_0[0]} \left. \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \right|_{J=0}. \quad (1.217)$$

Die Amplitude $Z_0[0]$ ist die Vakuum-zu-Vakuum-Amplitude in Abwesenheit der Quelle und lässt sich folgendermaßen ermitteln: Als erstes führen wir wieder die imaginäre Zeit $x^4 = \tau = ix^0$ ein:

$$Z_0[0] = \int \bar{\mathcal{D}}\phi \exp \left[\frac{1}{2} \int dx \phi (\bar{\square} - m^2) \phi \right] = [\text{Det}(\bar{\square} - m^2)]^{-1/2}, \quad (1.218)$$

mit $\bar{\square} = \partial_\tau^2 + \nabla^2$. Diese Determinante ist im Sinne von Abschnitt 1.4 zu verstehen, d. h., sie ist das Produkt von Eigenwerten mit einer geeigneten Randbedingung.

Eine freie komplexe skalare Feldtheorie hat einschließlich der Quellenterme die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0 = -\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2 + J\phi^* + J^*\phi. \quad (1.219)$$

Das erzeugende Funktional ist nun durch

$$\begin{aligned} Z_0[J, J^*] &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp \left[i \int dx (\mathcal{L}_0 - i\varepsilon|\phi|^2) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp \left[i \int dx \{ \phi^*(\square - m^2 + i\varepsilon)\phi + J^*\phi + J\phi^* \} \right] \end{aligned} \quad (1.220)$$

gegeben und der Propagator durch

$$\Delta(x-y) = \frac{i}{Z_0[0,0]} \left. \frac{\delta^2 Z_0[J, J^*]}{\delta J^*(x) \delta J(y)} \right|_{J=J^*=0}. \quad (1.221)$$

Durch Einsetzen der Klein-Gordon-Gleichungen

$$(\square - m^2)\phi_c = -J \quad \text{und} \quad (\square - m^2)\phi_c^* = -J^* \quad (1.222)$$

separieren wir das erzeugende Funktional gemäß

$$Z_0[J, J^*] = Z_0[0,0] \exp \left[-i \int dx dy J^*(x) \Delta(x-y) J(y) \right], \quad (1.223)$$

mit

$$\begin{aligned} Z_0[0,0] &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp \left[-i \int dx \phi^*(\square - m^2 - i\varepsilon)\phi \right] \\ &= [\text{Det}(\bar{\square} - m^2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (1.224)$$

(Die Wick-Rotation wurde in der letzten Zeile vorgenommen.)

1.6.2 Wechselwirkendes skalares Feld

Es ist möglich, Wechselwirkungsterme zu einer Lagrange-Funktion für freie Felder (1.209) hinzuzufügen:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}_0(\phi, \partial_\mu \phi) - V(\phi). \quad (1.225)$$

Die mögliche Form von $V(\phi)$ ist beschränkt durch die Symmetrie und Renormierbarkeit der Theorie. Eine typische Form von V ist ein Polynom

$$V(\phi) = \frac{g}{n!} \phi^n \quad (n \geq 3, n \in \mathbb{N}),$$

dabei bestimmt die Konstante $g \in \mathbb{R}$ die Stärke der Wechselwirkung. Das erzeugende Funktional wird ähnlich definiert wie in der freien Theorie:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int dx \{ \frac{1}{2} \phi (\square - m^2) \phi - V(\phi) + J\phi \} \right]. \quad (1.226)$$

Die Anwesenheit von $V(\phi)$ macht die Dinge natürlich ein wenig komplizierter. Das Funktional kann aber zumindest störungstheoretisch behandelt werden als

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int dx V(\phi) \right] \exp \left[i \int dx \{ \mathcal{L}_0 + J\phi \} \right] \\ &= \exp \left[-i \int dx V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int dx \{ \mathcal{L}_0 + J\phi \} \right] \\ &= \exp \left[-i \int dx V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int dx_1 \dots \int dx_k \frac{(-i)^k}{k!} \cdot V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \dots V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_k)} \right) Z_0[J]. \end{aligned} \quad (1.227)$$

Das erzeugende Funktional $Z[J]$ erzeugt den Vakuumerwartungswert des T -Produkts von Feldoperatoren, auch bekannt als **Green-Funktion** $G_n(x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} G_n(x_1, \dots, x_n) &\equiv \langle 0 | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle \\ &= \frac{(-i)^n \delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (1.228)$$

Da dies die n -te Variationsableitung von $Z[J]$ um $J = 0$ ist, erhalten wir die Funktional-Taylor-Entwicklung von $Z[J]$ als

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{i=1}^n \int dx_i J(x_i) \right] \langle 0 | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T e^{\int dx J(x) \phi(x)} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.229)$$

Die verbundenen n -Punkt-Funktionen werden durch $W[J]$ erzeugt gemäß

$$Z[J] = e^{-W[J]}. \quad (1.230)$$

Die **effektive Wirkung** $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ wird durch die Legendre-Transformation

$$\Gamma[\phi_{\text{cl}}] \equiv W[J] - \int d\tau dx J\phi_{\text{cl}} \quad (1.231)$$

definiert, mit

$$\phi_{\text{cl}} \equiv \langle \phi \rangle^J = \frac{\delta W[J]}{\delta J}. \quad (1.232)$$

Das Funktional $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ erzeugt **irreduzible Ein-Teilchen-Diagramme**.

1.7 Quantisierung eines Dirac-Felds

Die Lagrange-Funktion des freien **Dirac-Felds** ψ ist

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi, \quad (1.233)$$

mit $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. Im Allgemeinen ist $A \equiv \gamma^\mu A_\mu$. Variation bezüglich $\bar{\psi}$ führt auf die **Dirac-Gleichung**

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0. \quad (1.234)$$

Das Dirac-Feld genügt in kanonischer Quantisierung der Antikommutatorrelation

$$\{\bar{\psi}(x^0, x), \psi(x^0, y)\} = \delta(x - y). \quad (1.235)$$

Dementsprechend wird es als eine Grassmann-Zahl-wertige Funktion in Pfadintegralen ausgedrückt. Das erzeugende Funktional ist

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int dx (\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi) \right]. \quad (1.236)$$

Dabei sind $\eta, \bar{\eta}$ Grassmann'sche Quellen.

Der Propagator ist durch die Variationsableitung nach den Quellen gegeben:

$$\begin{aligned} S(x - y) &= -\frac{\delta^2 Z_0[\bar{\eta}, \eta]}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{e^{ikx}}{k - m - i\varepsilon} = (i\cancel{\partial} + m + i\varepsilon) \Delta(x - y), \end{aligned} \quad (1.237)$$

mit dem skalaren Feldpropagator $\Delta(x - y)$.

Durch Ausnutzen der Dirac-Gleichungen

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = -\eta \quad \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + m) = \bar{\eta} \quad (1.238)$$

bringen wir das erzeugende Funktional in die Form

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = Z_0[0, 0] \exp \left[-i \int dx dy \bar{\eta}(x) S(x - y) \eta(y) \right]. \quad (1.239)$$

Nach Wick-Rotation ($\tau = ix^0$) erhält man den Normierungsfaktor zu

$$Z_0[0,0] = \text{Det}(i\cancel{\partial} - m) = \prod_i \lambda_i. \quad (1.240)$$

Dabei ist λ_i der i -te Eigenwert des Dirac-Operators $i\cancel{\partial} - m$.

1.8 Eichtheorien

Derzeit basieren alle physikalisch sinnvollen Theorien der fundamentalen Wechselwirkungen auf Eichtheorien. Die Idee der Eichsymmetrie – *die Physik sollte unabhängig von der Art sein, in der wir sie beschreiben* – harmoniert mit dem Allgemeinen Relativitätsprinzip. Wir wollen an dieser Stelle eine kurze Zusammenfassung einiger klassischer Aspekte dieser Theorien geben. Für weitergehende Diskussionen sei auf die Bücher verwiesen, die ich zu Beginn dieses Kapitels genannt habe.

1.8.1 Abel'sche Eichtheorien

Diese Gleichungen kennen Sie vermutlich:

$$\text{div } B = 0, \quad (1.241a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \text{rot } E = 0, \quad (1.241b)$$

$$\text{div } E = \rho, \quad (1.241c)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \text{rot } E = -j. \quad (1.241d)$$

Im Formalismus der Maxwell-Gleichungen werden das magnetische Feld B und das elektrische Feld E mithilfe des Vektorpotentials $A_\mu = (\phi, A)$ ausgedrückt:

$$B = \text{rot } A, \quad E = \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \phi. \quad (1.242)$$

Maxwells Gleichungen sind invariant unter der **Eichtransformation**

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad (1.243)$$

mit einer skalaren Funktion χ . Diese Invarianz wird manifest, wenn wir den **elektromagnetischen Feldtensor** $F_{\mu\nu}$ gemäß

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_z \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.244)$$

definieren. Durch seine Konstruktion ist F invariant unter (1.243). Die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Felds ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \quad (1.245)$$

gegeben, mit $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$.

Übung 1.11 (a) Zeigen Sie, dass (1.241a) und (1.241b) sich als

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0 \quad (1.246a)$$

schreiben lassen, während man (1.241c) und (1.241d) zu

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad (1.246b)$$

zusammenfassen kann. Das Heben bzw. Senken der Raumzeit-Indizes erfolgt mit Hilfe der Minkowski-Metrik $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

(b) Weisen Sie nach, dass (1.246b) die sich aus (1.245) ergebende Euler-Lagrange-Gleichung ist.

Es sei ψ ein Dirac-Feld mit der elektrischen Ladung e . Die freie Dirac-Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi \quad (1.247)$$

ist offensichtlich invariant unter der *globalen* Eichtransformation

$$\psi \rightarrow e^{-ie\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{ie\alpha}, \quad (1.248)$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir erweitern diese Eichsymmetrie zur Invarianz unter der *lokalen* Eichtransformation

$$\psi \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{ie\alpha(x)}. \quad (1.249)$$

Die Lagrange-Funktion transformiert sich unter (1.249) wie

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi \rightarrow \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu \partial_\mu \alpha + m)\psi. \quad (1.250)$$

Da der Extraterm $e\partial_\mu \alpha$ wie eine Eichtransformation des Vektorpotenzials aussieht, koppeln wir das Eichfeld A_μ mit ψ , sodass die Lagrange-Funktion eine lokale Eichsymmetrie erhält. Wir stellen dann fest, dass

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) + m \right] \psi \quad (1.251)$$

unter der kombinierten Eichtransformation

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{-ie\alpha(x)}\psi, & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{ie\alpha(x)} \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned} \quad (1.252)$$

invariant ist. Als nächstes führen wir die **kovarianten Ableitungen** ein:

$$\nabla_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu, \quad \nabla'_\mu \equiv \partial_\mu - ieA'_\mu. \quad (1.253)$$

Sie sollten sich davon überzeugen, dass $\nabla_\mu \psi$ sich „anständig“ transformiert, dass also gilt:

$$\nabla'_\mu \psi' = e^{-ie\alpha(x)} \nabla_\mu \psi. \quad (1.254)$$

Die komplette quantenelektrodynamische (QED-)Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \nabla_\mu + m)\psi. \quad (1.255)$$

Übung 1.12 Sei $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ ein komplexes skalares Feld mit der elektrischen Ladung e . Zeigen Sie: Die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \eta^{\mu\nu}(\nabla_\mu \phi)^\dagger (\nabla_\nu \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi \quad (1.256)$$

ist invariant unter der Eichtransformation

$$\phi \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\phi, \quad \phi^\dagger \rightarrow \phi^\dagger e^{ie\alpha(x)}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.257)$$

1.8.2 Nicht-Abel'sche Eichtheorien

Die soeben vorgestellte Eichtransformation ist Element einer U(1)-Gruppe, d. h. einer komplexen Zahl vom Betrag 1, die zufälligerweise eine Abel'sche Gruppe ist. Mitte des 20. Jahrhunderts führten Yang und Mills (1954) nicht-Abel'sche Eichtheorien ein. Zu dieser Zeit waren solche nicht-Abel'schen Eichtheorien eher ein Kurosum. Heute dagegen spielen sie eine zentrale Rolle in der Elementarteilchenphysik.

Sei G eine kompakte halbeinfache Lie-Gruppe, etwa SO(N) oder SU(N). Die anti-Hermite'schen Erzeuger $\{T_\alpha\}$ erfüllen die Kommutatorrelationen

$$[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma, \quad (1.258)$$

wobei die Zahlen $f_{\alpha\beta}{}^\gamma$ die **Strukturkonstanten** von G sind. Ein Element U von G in der Nähe des neutralen Elements lässt sich als

$$U = \exp(-\theta^\alpha T_\alpha) \quad (1.259)$$

ausdrücken. Wir nehmen an, dass sich ein Dirac-Feld ψ unter $U \in G$ wie

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}U^\dagger \quad (1.260)$$

transformiert [Anmerkung: Streng genommen müssten wir die Darstellung von G angeben, zu der ψ gehört. Wenn Sie sich mit Gleichung (1.260) unsicher fühlen, stellen Sie sich ψ beispielsweise in der Fundamentaldarstellung vor.]

Wir betrachten die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu + g\mathcal{A}_\mu) + m]\psi, \quad (1.261)$$

in welcher das **Yang-Mills-Eichfeld** \mathcal{A}_μ seine Werte in der Lie-Algebra von G hat, d. h., \mathcal{A}_μ lässt sich nach T_α entwickeln gemäß $\mathcal{A}_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha$. (Felder in Schreibschrift sind anti-Hermite'sch.) Die Konstante g ist die Kopplungskonstante, welche die Stärke der Kopplung zwischen dem Dirac-Feld und dem Eichfeld bestimmt. Sie können leicht nachprüfen, dass \mathcal{L} invariant unter

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = U\psi, & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^\dagger, \\ \mathcal{A}_\mu &\rightarrow \mathcal{A}'_\mu = U\mathcal{A}_\mu U^\dagger + g^{-1}U\partial_\mu U^\dagger\end{aligned}\tag{1.262}$$

bleibt. Die kovariante Ableitung ist wie gehabt definiert durch $\nabla_\mu = \partial_\mu + g\mathcal{A}_\mu$. Die kovariante Ableitung $\nabla'_\mu \psi$ transformiert sich kovariant unter der Eichtransformation

$$\nabla'_\mu \psi' = U\nabla_\mu \psi,\tag{1.263}$$

und der **Yang-Mills-Feldtensor** ist

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + g[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu].\tag{1.264}$$

Die Komponente $F_{\mu\nu}^\alpha$ ist

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g f_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma.\tag{1.265}$$

Wenn wir den **dualen Feldtensor** (Abschnitt 7.9.2) als $*\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\mathcal{F}^{\kappa\lambda}$ definieren, erfüllt er die **Bianchi-Identität**:

$$\mathcal{D}_\mu * \mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu * \mathcal{F}^{\mu\nu} + g[\mathcal{A}_\mu, * \mathcal{F}^{\mu\nu}] = 0.\tag{1.266}$$

Übung 1.13 Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ sich unter (1.262) wie

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \rightarrow U\mathcal{F}_{\mu\nu} U^\dagger\tag{1.267}$$

transformiert.

Diese Übung führt uns auf eine eichinvariante Wirkung:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2}\text{sp}(\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}),\tag{1.268a}$$

wobei die Spur über die Gruppenmatrix gebildet wird. Die Komponentenform ist

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}^\beta \text{sp}(T_\alpha T_\beta) = \frac{1}{4}F^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu\alpha}.\tag{1.268b}$$

Wir haben hier $\{T_\alpha\}$ so normiert, dass $\text{sp}(T_\alpha T_\beta) = -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ ist. Die sich aus (1.268) ergebende Feldgleichung lautet

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} + g[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0.\tag{1.269}$$

1.8.3 Higgs-Felder

Wenn die Eichsymmetrie in unserer Welt tatsächlich manifest wäre, gäbe es viele beobachtbare masselose Vektorfelder. Das Fehlen solcher Felder, mit Ausnahme des elektromagnetischen Felds, zwingt uns zu einer Brechung der Eichsymmetrie. Die Theorie bleibt aber renormierbar für den Fall einer spontanen Symmetriebrechung.

Untersuchen wir ein U(1)-Eichfeld, das an ein komplexes Skalarfeld ϕ koppelt, dessen Lagrange-Funktion durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (\nabla_\mu\phi)^\dagger(\nabla_\mu\phi) - \lambda(\phi^\dagger\phi - v^2)^2 \quad (1.270)$$

gegeben ist. Das Potenzial $V(\phi) = \lambda(\phi^\dagger\phi - v^2)^2$ hat Minima mit $V = 0$ bei $|\phi| = v$. Die Lagrange-Funktion (1.270) ist invariant unter der lokalen Eichtransformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\alpha \quad \phi \rightarrow e^{-ie\alpha}\phi \quad \phi^\dagger \rightarrow e^{ie\alpha}\phi^\dagger. \quad (1.271)$$

Diese Symmetrie wird aufgrund des **Vakuumerwartungswerts** $\langle\phi\rangle$ des **Higgs-Felds** ϕ spontan gebrochen. Wir entwickeln ϕ gemäß

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x)]e^{i\alpha(x)/v} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x) + i\alpha(x)]$$

unter der Annahme $v \neq 0$. Unter dieser Voraussetzung können wir die **unitäre Eichung** wählen, in der die Phase von ϕ „weggeeicht“ wird, sodass ϕ rein reell ist:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x)). \quad (1.272)$$

Wenn wir Gleichung (1.272) in (1.270) einsetzen und um ρ entwickeln, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \frac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu(v^2 + 2v\rho + \rho^2) \\ & - \frac{1}{4}\lambda(4v^2\rho^2 + 4v\rho^3 + \rho^4). \end{aligned} \quad (1.273)$$

Die Bewegungsgleichungen für A_μ und ρ , die sich aus den freien Anteilen ergeben, sind

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} + 2e^2v^2A_\mu = 0 \quad \text{und} \quad \partial_\mu\partial^\mu\rho + 2\lambda v^2\rho = 0. \quad (1.274)$$

Aus der ersten Gleichung folgern wir, dass A_μ der Lorenz²⁰-Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ genügen muss. Die offenkundigen Freiheitsgrade von (1.270) sind 2(Photon) + 2(komplexer Skalar) = 4. Wenn der Vakuumerwartungswert $\neq 0$ ist, ergibt sich 3(massiver Vektor) + 1(reeller Skalar) = 4. Das Feld A_0 hat einen Massenterm mit dem falschen Vorzeichen und kann daher kein physikalischer Freiheitsgrad sein. Die Erzeugung von massiven Feldern aus einem Eichfeld heraus nennt man **Higgs-Mechanismus**.

²⁰ Die Lorenz-Bedingung bzw. -Eichung wird oft fälschlich Hendrik Antoon Lorentz zugeschrieben, sie geht aber auf den dänischen Physiker Ludvig Lorenz zurück (Anm. d. Ü.).

1.9 Magnetische Monopole

Die Maxwell-Gleichungen verknüpften Elektrizität und Magnetismus miteinander. In der Geschichte der Physik war dies der erste Versuch einer Vereinheitlichung von Naturkräften. Ihrem großen Erfolg zum Trotz erkannte Dirac (1931) eine Asymmetrie in den Maxwell-Gleichungen: Die Gleichung $\operatorname{div} B = 0$ verneint die Existenz magnetischer Ladungen. Er postulierte darum einen magnetischen Monopol, d. h. eine magnetische Punktladung, um die Theorie vollständig symmetrisch zu machen.

1.9.1 Dirac-Monopole

Wir betrachten einen Monopol der Stärke g , der an der Stelle $r = 0$ sitzt:

$$\operatorname{div} B = 4\pi g \delta^3(r). \quad (1.275)$$

Mit $\Delta(1/r) = -4\pi g \delta^3(r)$ und $\nabla(1/r) = -r/r^3$ folgt, dass die Lösung dieser Gleichung

$$B = gr/r^3 \quad (1.276)$$

ist. Den magnetischen Fluss Φ erhält man durch Integration von B über eine Sphäre S mit dem Radius R :

$$\Phi = \oint_S B \cdot dS = 4\pi g. \quad (1.277)$$

Wie sieht das Vektorpotenzial aus, aus dem sich das Monopolfeld (1.276) ergibt? Wenn wir das Vektorpotenzial A^N durch

$$A^N_x = \frac{-gy}{r(r+z)}, \quad A^N_y = \frac{gx}{r(r+z)}, \quad A^N_z = 0 \quad (1.278a)$$

definieren, können wir leicht nachweisen, dass gilt:

$$\operatorname{rot} A^N = gr/r^3 + 4\pi g \delta(x)\delta(y)\theta(-z). \quad (1.279)$$

Es ist $\operatorname{rot} A^N = B$, außer auf der negativen z -Achse ($\theta = \pi$). Die Singularität entlang der z -Achse nennt man **Dirac-String**; sie spiegelt im Wesentlichen die ungeschickte Wahl des Koordinatensystems wieder. Wenn wir stattdessen das Vektorpotenzial

$$A^S_x = \frac{gy}{r(r-z)}, \quad A^S_y = \frac{-gx}{r(r-z)}, \quad A^S_z = 0 \quad (1.278b)$$

definieren, erhalten wir $\operatorname{rot} A^S = B$ außer auf der positiven z -Achse ($\theta = 0$). Die Existenz einer Singularität ist eine natürliche Konsequenz aus (1.277). Wenn es einen Vektor A gäbe, sodass überall ohne Singularität $B = \operatorname{rot} A$ wäre, dann erhielten wir mit dem Gauß'schen Gesetz

$$\Phi = \oint_S B \cdot dS = \oint_S \operatorname{rot} A \cdot dS = \int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot} A) dV = 0$$

für ein Volumen V innerhalb der Oberfläche S . Wir können dieses Problem nur dadurch umgehen, dass wir die Idee eines einzelnen, überall gültigen Vektorpotenzials fallen lassen.

Übung 1.14 Verwenden Sie Polarkoordinaten (r, θ, ϕ) und zeigen Sie, dass die Vektorpotenziale A^N und A^S sich durch

$$A^N(r) = \frac{g(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{e}_\phi, \quad (1.280a)$$

$$A^S(r) = -\frac{g(1 + \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{e}_\phi \quad (1.280b)$$

ausdrücken lassen, mit $\hat{e}_\phi = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y$.

1.9.2 Der Wu-Yang-Monopol

Wu und Yang (1975) erkannten, dass sich die geometrischen und topologischen Strukturen hinter dem Dirac-Monopol am besten durch Faserbündel beschreiben lassen. In Kapitel 9 und 10 werden wir über Dirac-Monopole im Kontext von Faserbündeln und ihren Zusammenhängen berichten. An dieser Stelle wollen wir nur die grundlegende Idee von Wu und Yang skizzieren, ohne das Faserbündel einzuführen. Wu und Yang hatten bemerkt, dass es möglich ist, mehr als ein Vektorpotential für die Beschreibung eines Monopols zu verwenden. Beispielsweise können wir Singularitäten vermeiden, wenn wir A^N in der nördlichen Hemisphäre von S und A^S in der südlichen verwenden, wobei die Sphäre S den Monopol umgibt. Diese Vektorpotenziale ergeben das magnetische Feld $B = gr/r^3$, das nirgendwo auf der Sphäre singulär wird. Am Äquator der Sphäre, also der Grenzlinie zwischen nördlicher und südlicher Hemisphäre, sind A^N und A^S durch die Eichtransformation $A^N - A^S = \text{grad } \Lambda$ miteinander verknüpft. Um diese Größe Λ zu berechnen, verwenden wir die Gleichungen von Übung 1.14:

$$A^N - A^S = \frac{2g}{r \sin \theta} \hat{e}_\phi = \text{grad}(2g\phi), \quad (1.281)$$

wobei wir den Ausdruck

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

nutzen. Dementsprechend lautet die Eichtransformationsfunktion, die A^N und A^S miteinander verknüpft,

$$\Lambda = 2g\phi. \quad (1.282)$$

Beachten Sie, dass Λ bei $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ nicht wohldefiniert ist. Da wir die Eichtransformation nur bei $\theta = \pi/2$ ausführen, machen sich diese Singularitäten jedoch in unserer Berechnung nicht bemerkbar. Der totale Fluss ist dann

$$\Phi = \oint_S \text{rot } A \cdot dS = \int_{U_N} \text{rot } A^N \cdot dS + \int_{U_S} \text{rot } A^S \cdot dS. \quad (1.283)$$

Dabei stehen U_N und U_S für die nördliche bzw. die südliche Hemisphäre. Der Satz von Stokes liefert

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_{\text{Äquator}} A^N \cdot d\mathbf{s} - \oint_{\text{Äquator}} A^S \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\text{Äquator}} (A^N - A^S) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \oint_{\text{Äquator}} \text{grad}(2g\phi) \cdot d\mathbf{s} = 4g\pi,\end{aligned}\quad (1.284)$$

in Übereinstimmung mit (1.277).

1.9.3 Ladungsquantisierung

Betrachten wir ein Punktteilchen mit der elektrischen Ladung e und der Masse m , das sich im Feld eines magnetischen Monopols der (magnetischen) Ladung g bewegt. Wenn der Monopol schwer genug ist, nimmt die Schrödinger-Gleichung des Teilchens die Form

$$\frac{1}{2m} \left(p - \frac{e}{c} A \right)^2 \psi(r) = E\psi(r) \quad (1.285)$$

an. Man zeigt leicht, dass sich unter der Eichtransformation $A \rightarrow A + \text{grad } \Lambda$ die Wellenfunktion wie $\psi \rightarrow \exp(i\epsilon\Lambda/\hbar c)\psi$ transformiert. Im vorliegenden Fall unterscheiden sich A^N und A^S nur durch die Eichtransformation $A^N - A^S = \text{grad}(2g\phi)$. Wenn ψ^N und ψ^S auf U_N bzw. U_S definierte Wellenfunktionen sind, hängen sie über den Phasensprung

$$\psi^S(r) = \exp\left(\frac{-ie\Lambda}{\hbar c}\right) \psi^N(r) \quad (1.286)$$

miteinander zusammen. Betrachten wir den Fall $\theta = \pi/2$: Wie verhalten sich die Wellenfunktionen, wenn wir die Sphäre auf dem Äquator von $\phi = 0$ bis $\phi = 2\pi$ umrunden? Da die Wellenfunktion eindeutige Werte haben muss, zwingt uns (1.286) dazu,

$$\frac{2eg}{\hbar c} = n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (1.287)$$

zu wählen. Dies ist die berühmte **Dirac'sche Quantisierungsbedingung** für die magnetische Ladung: Wenn es elektrische Monopole gibt (und es gibt sie), nimmt die magnetische Ladung nur diskrete Werte an:

$$g = \frac{\hbar c n}{2e} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (1.288)$$

Mit derselben Argumentation folgt: Wenn irgendwo im Universum ein magnetischer Monopol existiert, dann sind alle elektrischen Ladungen quantisiert (was sie offensichtlich sind).

1.10 Instantonen

Die Vakuum-zu-Vakuum-Amplitude in der euklidischen Theorie ist

$$Z \equiv \langle 0|0 \rangle \propto \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi, \partial_\mu \phi]}, \quad (1.289)$$

mit der euklidischen Wirkung S . Diese Gleichung zeigt, dass der Hauptbeitrag zu Z aus den Werten von $\phi(x)$ stammt, für die $S[\phi, \partial_\mu \phi]$ lokale Minima annimmt. In vielen Theorien gibt es zusätzlich zum absoluten Minimum eine Anzahl von lokalen Minima. Im Fall von nicht-Abel'schen Eichtheorien heißen diese Minima **Instantonen**.

1.10.1 Einführung

Betrachten wir die im vierdimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^4 definierte SU(2)-Eichtheorie. Die Wirkung ist

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x [-\frac{1}{2} \text{sp } \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}], \quad (1.290)$$

wobei die Feldstärke durch

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + g[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \quad (1.291)$$

gegeben ist, mit

$$\mathcal{A}_\mu \equiv A_\mu^\alpha \frac{\sigma_\alpha}{2i} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^\alpha \frac{\sigma_\alpha}{2i}.$$

Die Feldgleichung lautet

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} + g[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0. \quad (1.292)$$

Nur die Feldkonfigurationen mit endlicher Wirkung tragen zum Pfadintegral bei. Nehmen wir an, dass \mathcal{A}_μ für $|x| \rightarrow \infty$ die Bedingung

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow U(x)^{-1} \partial_\mu U(x) \quad (1.293)$$

erfüllt, wobei $U(x)$ ein Element von SU(2) ist. Wir finden leicht heraus, dass $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ für die \mathcal{A}_μ aus (1.293) verschwindet. Wir können also fordern, dass auf einer Sphäre S^3 mit großem Radius das Eichpotenzial durch (1.293) gegeben ist.

Wir werden später zeigen, dass diese Konfiguration durch die Art charakterisiert wird, in welcher die S^3 auf die Eichgruppe SU(2) abgebildet wird. Nichttriviale Konfigurationen sind solche, die nicht stetig zu einer gleichförmigen Konfiguration deformiert werden können. Diese Konfigurationen wurden von Belavin *et al.* (1975) vorgeschlagen und werden **Instantonen** genannt.

1.10.2 Die (anti-)selbstduale Lösung

Im Allgemeinen ist das Lösen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung schwieriger als bei einer Gleichung erster Ordnung. Insofern ist es nett, wenn man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung durch eine Gleichung erster Ordnung ersetzen kann, die äquivalent zum ursprünglichen Problem ist. Betrachten wir die Ungleichung

$$\int d^4x \operatorname{sp} (\mathcal{F}_{\mu\nu} \pm * \mathcal{F}_{\mu\nu})^2 \geq 0. \quad (1.294)$$

Offensichtlich wird (1.294) erfüllt, wenn gilt:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \pm * \mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (1.295)$$

Wird das positive Vorzeichen gewählt, dann sagt man, dass \mathcal{F} **selbstdual** ist, während man bei negativem Vorzeichen von einer **antiselbstdualen** Lösung spricht. Wenn (1.295) erfüllt ist, trifft dies automatisch auch auf die Feldgleichung zu, wegen der Bianchi-Identität:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = \pm \mathcal{D}_\mu * \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.296)$$

Wie wir in Abschnitt 10.5 zeigen werden, ist das Integral

$$Q \equiv \frac{-1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{sp} \mathcal{F}_{\mu\nu} * \mathcal{F}^{\mu\nu} \quad (1.297)$$

eine ganze Zahl, welche die Art charakterisiert, in welcher die S^3 auf die SU(2) abgebildet wird. Wenn \mathcal{F} selbstdual ist, dann ist Q positiv, und Q ist negativ, wenn \mathcal{F} antiselbstdual ist. Aus (1.294) ergibt sich (beachten Sie $*\mathcal{F}_{\mu\nu} *\mathcal{F}^{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$):

$$\int d^4x (2\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \pm 2 * \mathcal{F}_{\mu\nu} * \mathcal{F}^{\mu\nu}) \geq 0. \quad (1.298)$$

Mit dieser Ungleichung und der Definition der Wirkung folgt

$$S \geq 8\pi^2 |Q|, \quad (1.299)$$

wobei die Ungleichung mit (1.295) erfüllt wird. Konzentrieren wir uns auf die selbstduale Lösung $\mathcal{F} = *\mathcal{F}$. Wir suchen eine Instanton-Lösung von der Form

$$\mathcal{A}_\mu = f(r) U(x)^{-1} \partial_\mu U(x), \quad (1.300)$$

mit $r \equiv |x|$, und

$$f(r) \rightarrow 1 \text{ für } r \rightarrow \infty, \quad (1.301a)$$

$$U(x) = \frac{1}{r} (x_4 - ix_i \sigma_i). \quad (1.301b)$$

Einsetzen von (1.300) in (1.295) ergibt, dass f die Gleichung

$$r \frac{df(r)}{dr} = 2f(1-f) \quad (1.302)$$

erfüllt. Die Lösung, die der Randbedingung (1.301a) genügt, ist

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2}, \quad (1.303)$$

wobei λ ein Parameter ist, der die Größe des Instantons angibt. Wenn wir dies in (1.300) einsetzen, folgt:

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} U(x)^{-1} \partial_\mu U(x). \quad (1.304)$$

Die zugehörige Feldstärke ist

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \frac{4\lambda^2}{r^2 + \lambda^2} \sigma_{\mu\nu}, \quad (1.305)$$

mit

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{4i} [\sigma_i, \sigma_j], \quad \sigma_{i0} \equiv \frac{1}{2} \sigma_i = -\sigma_{0i}. \quad (1.306)$$

Diese Lösung ergibt $Q = +1$ und $S = 8\pi^2$.

Aufgabe

1.1 Betrachten Sie einen Hamilton-Operator der Form

$$H = \int d^n x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right],$$

wobei $V(\phi)$ (≥ 0) ein Potenzial ist. Wenn ϕ eine zeitunabhängige klassische Lösung ist, können wir den ersten Term ignorieren und $H[\phi] = H_1[\phi] + H_2[\phi]$ schreiben, mit

$$H_1[\phi] \equiv \frac{1}{2} \int d^n x (\nabla \phi)^2 \quad \text{und} \quad H_2[\phi] \equiv \int d^n x V(\phi).$$

(1) Betrachten Sie eine Skalentransformation $\phi(x) \rightarrow \phi(\lambda x)$. Zeigen Sie, dass $H_i[\phi]$ sich wie

$$H_1[\phi] \rightarrow H_1^\lambda[\phi] = \lambda^{(2-n)} H_1[\phi] \quad \text{und} \quad H_2[\phi] \rightarrow H_2^\lambda[\phi] = \lambda^{-n} H_2[\phi]$$

transformiert.

(2) Angenommen, ϕ erfüllt die Feldgleichung. Zeigen Sie:

$$(2-n)H_1[\phi] - nH_2[\phi] = 0.$$

(Tipp: Bilden Sie die λ -Ableitung von $H_1^\lambda[\phi] + H_2^\lambda[\phi]$ und setzen sie $\lambda = 1$.)

(3) Zeigen Sie, dass die zeitunabhängigen topologischen Anregungen von $H[\phi]$ dann und nur dann existieren, wenn $n = 1$ ist (**Derrick-Theorem**). Wie ließe sich diese Beschränkung umgehen?

2

Mathematische Grundlagen

Im vorliegenden Kapitel führen wir elementare Konzepte aus der Theorie von Abbildungen, Vektorräumen und Topologie ein. Ein bescheidenes Vorwissen aus dem mathematischen Grundstudium, wie Mengentheorie, reelle und komplexe Analysis sowie lineare Algebra, wird vorausgesetzt.

Die Hauptaufgabe dieses Buchs ist die Anwendung der Theorie der Mannigfaltigkeiten auf physikalische Fragestellungen. Vektorräume und Topologie sind, in gewisser Weise, zwei extreme Sichtweisen auf Mannigfaltigkeiten: „Vom Vektorraum aus“ betrachtet ist eine Mannigfaltigkeit ein Raum, der lokal wie der \mathbb{R}^n (oder der \mathbb{C}^n) aussieht, aber nicht notwendigerweise auch global. Als erste Näherung können wir einen kleinen Teil einer Mannigfaltigkeit mit einem euklidischen Raum \mathbb{R}^n (oder \mathbb{C}^n) modellieren (ein kleines Gebiet um einen Punkt auf einer Fläche lässt sich durch die Tangentialebene in diesem Punkt approximieren). In der Topologie untersuchen wir dagegen Mannigfaltigkeiten als Ganzes. Wir möchten ihre Eigenschaften betrachten und Mannigfaltigkeiten mithilfe einer Art von „Maßen“ klassifizieren. Die Topologie kommt gewöhnlich mit einem Adjektiv daher: Algebraische (Kombinatorische) Topologie, Allgemeine Topologie, auch Differentialtopologie usw. Diese Adjektive beziehen sich auf das Maß, anhand dessen wir Mannigfaltigkeiten klassifizieren.

2.1 Abbildungen

2.1.1 Definitionen

Seien X und Y Mengen. Eine **Abbildung** f ist eine Regel, nach der wir jedem $x \in X$ ein $y \in Y$ zuweisen. Man schreibt

$$f : X \rightarrow Y. \quad (2.1)$$

Wenn f durch eine explizite Formel beschrieben werden kann, können wir auch

$$f : x \mapsto f(x) \quad (2.2)$$

schreiben. Es können zwei oder mehr Elemente aus X mit demselben $y \in Y$ verbunden sein. Eine Teilmenge von X , deren Elemente unter f alle auf $y \in Y$ abgebildet werden, wird **Urbild** von y genannt, geschrieben $f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$. Die Menge X heißt

Definitionsbereich der Abbildung, während Y der **Wertebereich** dieser Abbildung ist. Das **Bild** (bzw. der Bildbereich) der Abbildung ist $f(X) = \{y \in Y | y = f(x)$ für ein $x \in X\} \subset Y$. Für das Bild $f(X)$ verwendet man auch das Symbol „im f “ (von engl. „image“). Sie sollten beachten, dass eine Abbildung nicht ohne die Angabe von Definitions- und Wertebereich definiert werden kann. Wir betrachten beispielsweise $f(x) = \exp x$. Wenn sowohl Definitionsbereich- als auch Wertebereich der Menge \mathbb{R} sind, hat $f(x) = -1$ kein Urbild. Wenn hingegen Definitionsbereich und Wertebereich beide die komplexe Ebene \mathbb{C} sind, erhalten wir $f^{-1}(-1) = \{(2n+1)\pi i | n \in \mathbb{Z}\}$. Definitionsbereich X und Wertebereich Y sind genauso wichtig wie f selbst, wenn es darum geht, eine Abbildung zu beschreiben.

Beispiel 2.1. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin x$. Außerdem können wir $f : x \mapsto \sin x$ schreiben. Definitionsbereich und Wertebereich sind \mathbb{R} , das Bild ist $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Das Urbild von 0 ist $f^{-1}(0) = \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$. Lassen Sie uns dieselbe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ im Komplexen betrachten, mit $f(x) = \sin x = (\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})/2i$. Das Bild $f(\mathbb{C})$ ist nun die ganze komplexe Ebene \mathbb{C} . ◇

Definition 2.1. Wenn Abbildungen gewisse Bedingungen erfüllen, haben sie besondere Namen verdient:

- (a) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **injektiv**, wenn aus $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$.
- (b) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **surjektiv** (sprich: „surjektiv“), wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein Element $x \in X$ gibt, sodass $f(x) = y$ ist.
- (c) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispiel 2.2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto ax$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ist bijektiv. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto \exp x$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. ◇

Übung 2.1 Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f : x \mapsto \sin x$, ist weder injektiv noch surjektiv. Beschränken Sie Definitionsbereich- und Wertebereich so, dass f bijektiv wird.

Beispiel 2.3. Die Elemente der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ („GL“ für engl. „general linear“) haben als Matrixdarstellungen die $(n \times n)$ -Matrizen mit nicht-verschwindender Determinante. Es sei $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dann ist $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto Mx$ bijektiv. Wäre dagegen $\det M = 0$, dann wäre die Abbildung weder injektiv noch surjektiv. ◇

Eine **konstante Abbildung** $c : X \rightarrow Y$ ist durch $c(x) = y_0$ definiert, wobei y_0 ein festes Element von Y ist und x ein beliebiges Element von X ist. Für eine gegebene Abbildung $f : X \rightarrow Y$ können wir ihre **Einschränkung** auf $A \subset X$ betrachten, welche

wir als $f|_A : A \rightarrow Y$ schreiben. Mit zwei Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ definiert man die **Verkettung** von f und g als eine Abbildung $g \circ f : X \rightarrow Z$, mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ein Diagramm von Abbildungen wird **kommutativ** genannt, wenn jede Verkettung von Abbildungen zwischen zwei Mengen unabhängig von der Art (Reihenfolge) der Verkettung ist. Zum Beispiel ist in Abb. 2.1 $f \circ g = h \circ j = k$ etc.

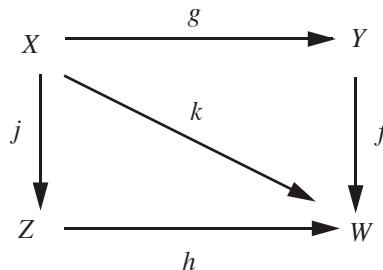


Abb. 2.1. Ein kommutatives Diagramm von Abbildungen.

Übung 2.2 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f : x \mapsto x^2$ definiert und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g : x \mapsto \exp x$. Was sind $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Wenn $A \subset X$ ist, dann ist die **Einbettung** (Inklusionsabbildung) $i : A \rightarrow X$ durch $i(a) = a$ für jedes $a \in A$ definiert. Eine Einbettung schreibt man oft als $i : A \hookrightarrow X$. Ein Spezialfall einer Einbettung ist die **identische Abbildung** $\text{id}_X : X \rightarrow X$ mit $\text{id}(x) = x$, in diesem Fall ist $A = X$. Wenn $f : X \rightarrow Y$ mit $f : x \mapsto f(x)$ bijektiv ist, existiert eine **inverse Abbildung** $f^{-1} : Y \rightarrow X$, sodass $f^{-1} : f(x) \mapsto x$ ist; die inverse Abbildung ist dann ebenfalls bijektiv. Für die Abbildungen f und f^{-1} gilt $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$. Umgekehrt sind, wenn $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ die Relationen $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$ erfüllen, f und g Bijektionen. Dies lässt sich mithilfe der folgenden Übung beweisen.

Übung 2.3 Zeigen Sie, dass, wenn $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ die Gleichung $g \circ f = \text{id}_X$ erfüllen, f injektiv und g surjektiv ist. Wenn wir dies entsprechend auf $f \circ g = \text{id}_Y$ anwenden, erhalten wir das eben angesprochene Ergebnis.

Beispiel 2.4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ eine Bijektion, die durch $f : x \mapsto \exp x$ definiert ist. Dann ist die inverse Abbildung $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f^{-1} : x \mapsto \ln x$ gegeben. Sei $g : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-1, 1)$ eine durch $g : x \mapsto \sin x$ definierte Bijektion. Die inverse Abbildung ist dann $g^{-1} : x \mapsto \sin^{-1} x$. ◇

Übung 2.4 Die n -dimensionale euklidische Gruppe (Bewegungsgruppe) E^n besteht aus den n -dimensionalen Translationen $a : x \mapsto x + a$ ($x, a \in \mathbb{R}^n$) und den $O(n)$ -Rotationen $R : x \mapsto Rx$ ($R \in O(n)$). Ein allgemeines Element (R, a) von E^n wirkt auf

x gemäß $(R, a) : x \mapsto Rx + a$. Die Verkettung bzw. das Produkt zweier Bewegungen aus der Gruppe E^n ist dann definiert durch $(R_2, a_2) \times (R_1, a_1) : x \mapsto R_2(R_1x + a_1) + a_2$ bzw. $(R_2, a_2) \circ (R_1, a_1) = (R_2R_1, R_2a_1 + a_2)$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen a, R und (R, a) Bijektionen sind. Ermitteln Sie die zugehörigen inversen Abbildungen.

Nehmen wir an, die Mengen X und Y seien mit gewissen algebraischen Strukturen (sagen wir Produkt oder Addition) versehen. Wenn $f : X \rightarrow Y$ diese algebraischen Strukturen erhält, dann heißt f ein **Homomorphismus**. Sei beispielsweise X mit einem Produkt versehen. Wenn die Abbildung f ein Homomorphismus ist, erhält sie dieses Produkt: $f(ab) = f(a)f(b)$. Beachten Sie, dass ab durch das Gruppenprodukt in X definiert ist und $f(a)f(b)$ durch das in Y . Wenn ein Homomorphismus f bijektiv ist, ist f ein **Isomorphismus**, und X und Y sind zueinander **isomorph**, geschrieben $x \cong y$.

2.1.2 Äquivalenzrelation und Äquivalenzklasse

Zu den wichtigsten Konzepten in der Mathematik überhaupt gehören **Äquivalenzrelationen** und **Äquivalenzklassen**. Obwohl diese Themen nicht direkt mit Abbildungen zusammenhängen, ist es angebracht, sie an dieser Stelle zu definieren, bevor wir weiter fortfahren. Eine in einer Menge X definierte **Relation** R ist eine Teilmenge von X^2 . Wenn ein Punkt $(a, b) \in X^2$ in R liegt, können wir aRb schreiben. Zum Beispiel ist die Relation „ $>$ “ eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 . Wenn $(a, b) \in >$ ist, dann gilt $a > b$.

Definition 2.2. Eine **Äquivalenzrelation** \sim ist eine Relation, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $a \sim a$ (reflektiv),
- (ii) Wenn $a \sim b$, dann $b \sim a$ (symmetrisch),
- (iii) Wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, dann $a \sim c$ (transitiv).

Übung 2.5 Wenn eine ganze Zahl durch 2 geteilt wird, ist der Rest entweder 0 oder 1. Wenn zwei ganze Zahlen n und m bei der Division denselben Rest ergeben, schreiben wir $m \sim n$. Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation in \mathbb{Z} ist.

Es seien eine Menge X und eine Äquivalenzrelation \sim gegeben. Dann ergibt sich eine Zerlegung von X in *paarweise disjunkte* Teilmengen, die man **Äquivalenzklassen** nennt. Eine Klasse $[a]$ besteht aus all denjenigen Elementen x aus X , für die $x \sim a$ ist:

$$[a] = \{x \in X | x \sim a\}. \quad (2.3)$$

$[a]$ kann nicht leer sein, wegen $a \sim a$. Wir beweisen jetzt, dass für $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ gilt: $[a] = [b]$. Beachten Sie zunächst, dass $a \sim b$ ist. (Wegen $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ gibt es mindestens ein Element in $[a] \cap [b]$, für das $c \sim a$ und $c \sim b$ gelten. Wegen der Transitivität ist wir $a \sim b$.) Als nächstes zeigen wir, dass $[a] \subset [b]$ ist. Wir betrachten ein beliebiges

Element a' in $[a]$: $a' \sim a$. Dann bedeutet $a \sim b$, dass $b \sim a'$, also $a' \in [b]$ ist. So mit ergibt sich $[a] \subset [b]$. Ganz ähnlich können wir zeigen, dass $[a] \supset [b]$, und es folgt $[a] = [b]$. Daher gilt für zwei Klassen $[a]$ und $[b]$ entweder $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$. Auf diese Weise lässt sich eine Menge X in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen zerlegen. Die Menge all dieser Klassen ist der **Quotientenraum**, geschrieben als X/\sim . Das Element a (oder jedes Element in $[a]$) heißt **Repräsentant** der Klasse $[a]$. In Übung 2.5 teilt die Äquivalenzrelation \sim die ganzen Zahlen in zwei Klassen, gerade und ungerade Zahlen. Wir können als Repräsentanten der geraden Klasse die Null wählen und als Repräsentanten der ungeraden Klasse die Eins. Diesen Quotientenraum schreiben wir \mathbb{Z}/\sim . \mathbb{Z}/\sim ist isomorph zu \mathbb{Z}_2 , der **zyklischen Gruppe** zweiter Ordnung, deren Algebra durch $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$ und $1+1=0$ definiert ist. Wenn die Menge der ganzen Zahlen in Äquivalenzklassen entsprechend dem Divisionsrest bei Division durch n zerlegt wird, dann ist der Quotientenraum isomorph zu \mathbb{Z}_n , der zyklischen Gruppe n -ter Ordnung.

Sei X ein Raum im üblichen Sinne. (Um hier präziser zu sein, benötigen wir den Begriff des topologischen Raums, den wir in Abschnitt 2.3 definieren werden. Für erste bleiben wir auf unsere intuitive Vorstellung eines „Raums“ angewiesen.) Dann können wir Quotientenräume als geometrische Figuren darstellen. Stellen wir uns z. B. zwei Punkte x und y in \mathbb{R} vor sowie eine Relation \sim , mit der $x \sim y$ ist, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $y = x + 2\pi n$ ist. Man zeigt leicht, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist. Die Klasse $[x]$ ist die Menge $\{\dots, x - 2\pi, x, x + 2\pi, \dots\}$. Eine Zahl $x \in [0, 2\pi)$ dient als Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]$, siehe Abb. 2.2(a). Beachten Sie, dass 0 und 2π in \mathbb{R} unterschiedliche Punkte sind, aber entsprechend unserer Äquivalenzrelation in \mathbb{R}/\sim als dasselbe Element angesehen werden können. Wir kommen so zu der Schlussfolgerung, dass der Quotientenraum \mathbb{R}/\sim der Kreis $S^1 = \{e^{i\theta} | 0 \leq \theta < 2\pi\}$ ist; siehe Abb. 2.2(b). Wir beachten außerdem, dass für infinitesimale ε der Punkt ε nahe

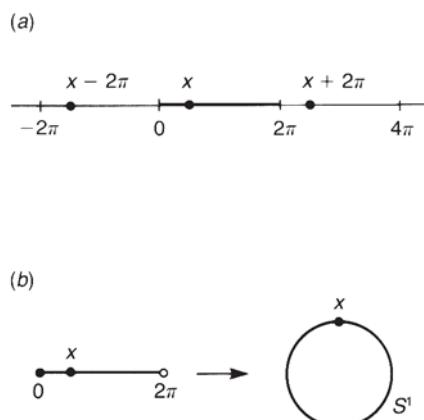


Abb. 2.2. (a) Alle Punkte $x + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) befinden sich in derselben Äquivalenzklasse $[x]$; jedes $x \in [0, 2\pi)$ kann als Repräsentant von $[x]$ fungieren. (b) Der Quotientenraum \mathbb{R}/\sim ist der Kreis S^1 .

am Punkt $2\pi - \varepsilon$ liegt. Sicherlich ist dies für den S^1 der Fall, wo ein Winkel ε dicht bei dem Winkel $2\pi - \varepsilon$ liegt, aber es gilt natürlich nicht für \mathbb{R} . Das Konzept der „Nähe“ von Punkten ist eine der wichtigsten Ingredienzen der Topologie.

Beispiel 2.5. (a) Sei X eine quadratische Scheibe mit $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Wenn wir jetzt beispielsweise die Punkte auf einander gegenüberliegenden Kanten miteinander identifizieren, also $(-1,y) \sim (1,y)$, erhalten wir einen Zylinder, siehe Abb. 2.3(a). Mit der Relation $(-1,-y) \sim (1,y)$ erhalten wir ein Möbius-Band, Abb. 2.3(b).¹

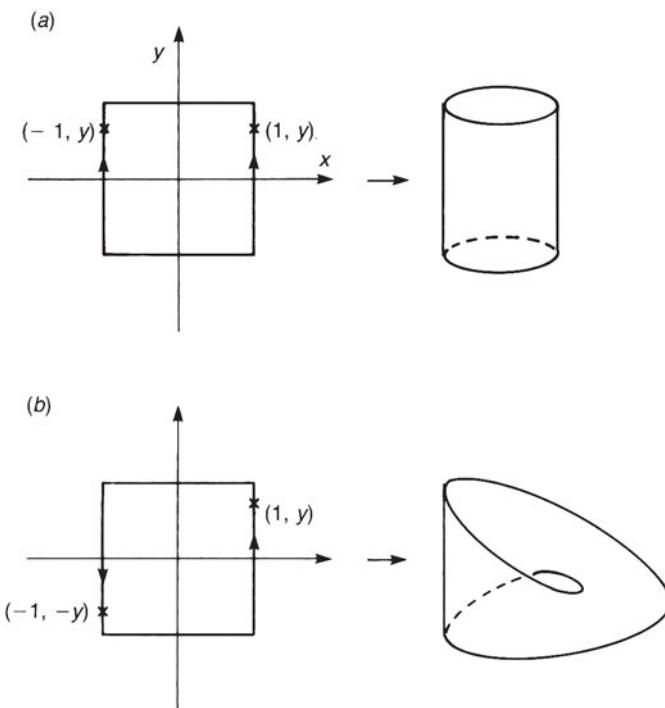


Abb. 2.3. (a) Wenn die Kanten $|x| = 1$ in Pfeilrichtung identifiziert werden, erhält man einen Zylinder. (b) Werden die Kanten andersherum orientiert miteinander identifiziert, erhält man ein Möbius-Band.

¹ Wenn Sie mit dem Möbius-Band nicht vertraut sind, dann nehmen Sie einen Papierstreifen, verdrehen ihn um π und kleben Sie dann die Enden aneinander. Wegen dieser Verdrehung wird die eine Bandseite mit der anderen verbunden, so dass die Oberfläche nur aus einer Seite besteht. Das Möbius-Band ist ein Beispiel für eine **nichtorientierbare** Fläche, während man beim Zylinder klar zwischen Innen- und Außenseite unterscheiden kann – daher nennt man diesen **orientierbar**. Orientierbarkeit wird in Abschnitt 5.5 in Zusammenhang mit den Differentialformen diskutiert.

(b) Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte in \mathbb{R}^2 , und für die Relation \sim zwischen zwei solchen Punkten gelte $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, wenn $x_2 = x_1 + 2\pi n_x$ und $y_2 = y_1 + 2\pi n_y$ ($n_x, n_y \in \mathbb{Z}$). Dann ist \sim eine Äquivalenzrelation. Der Quotientenraum \mathbb{R}_2/\sim ist der **Torus** T^2 (die Oberfläche eines Doughnuts), siehe Abb. 2.4(a). Alternativ lässt sich der T^2 auch als ein Rechteck darstellen, dessen Kanten wie in Abb. 2.4(b) miteinander identifiziert werden.

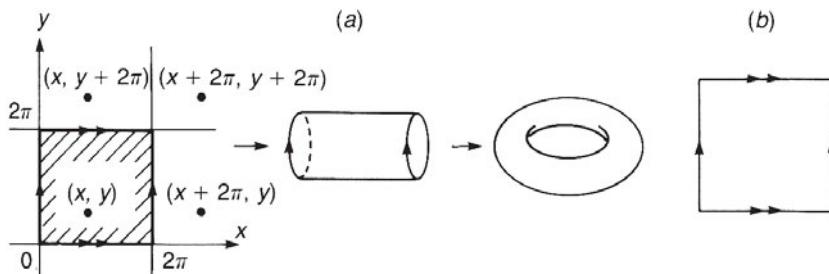


Abb. 2.4. Wenn alle Punkte $(x + 2\pi n_x, y + 2\pi n_y)$ mit $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ wie in (a) miteinander identifiziert werden, ist der Quotientenraum die schraffierte Fläche, deren Kanten gemäß (b) identifiziert werden. Dieser Quotientenraum ist der Torus T^2 .

(c) Wie können wir die Kanten eines Rechtecks noch miteinander identifizieren? Abb. 2.5 zeigt zwei weitere Möglichkeiten. Die sich dadurch ergebenden Räume heißen **Klein'sche Flasche** (a) und **projektive Ebene** (b). Keiner von beiden lässt sich im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 realisieren (bzw. in diesen *einbetten*), ohne sich selbst zu schneiden. Beide Räume sind nichtorientierbar.

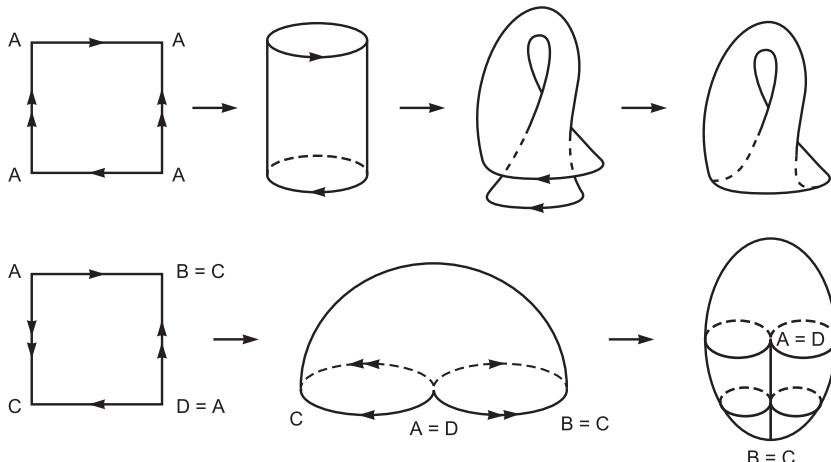


Abb. 2.5. Klein'sche Flasche (a) und projektive Ebene (b).

Die projektive Ebene, die wir als $\mathbb{R}P^2$ bezeichnen, kann man folgendermaßen visualisieren. Betrachten wir einen Einheitsvektor n und identifizieren wir n mit $-n$, siehe Abb. 2.6. Diese Identifikation gilt, wenn wir einen Stab ohne markierten „Kopf“ oder „Schwanz“ beschreiben. Es liegt nahe, einen Punkt auf der Sphäre S^2 mit dem „Vektor“ n gleichzusetzen. Dies funktioniert überall, mit Ausnahme eines Punkts. Zwei einander gegenüberliegende Punkte $n = (\theta, \phi)$ und $-n = (\pi - \theta, \pi + \phi)$ repräsentieren denselben Zustand. Wir können dann die Nordhemisphäre als Nebenklassenraum S^2/\sim ansehen, da nur die halbe S^2 benötigt wird. Allerdings ist dieser Nebenklassenraum keine gewöhnliche Hemisphäre, denn auch auf dem Äquator werden gegenüberliegende Punkte identifiziert. Durch stetige Deformation dieser Hemisphäre erhalten wir das Quadrat in Abb. 2.5(b).

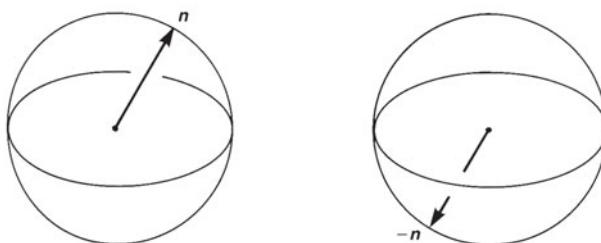


Abb. 2.6. Wenn n weder Anfang noch Ende hat, kann man n nicht von $-n$ unterscheiden, man muss sie daher identifizieren. Hierdurch ($n \sim -n$) erhält man die projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$; $\mathbb{R}P^2 \simeq S^2/\sim$. Es genügt eine Hemisphäre, um den Nebenklassenraum darzustellen. Beachten Sie jedoch, dass auf dem Äquator einander gegenüberliegende Punkte identifiziert werden.

(d) Lassen Sie uns nun Paare von Kanten des Achtecks in Abb. 2.7(a) identifizieren. Der Quotientenraum ist ein Σ_2 genannter Torus mit zwei Löchern, Schlaufen bzw. Henkeln, siehe Abb. 2.7(b). Σ_g , der Torus mit g Henkeln, ergibt sich ähnlich, siehe Aufgabe 2.1. Die ganze Zahl g heißt das (topologische) **Geschlecht** des Torus.

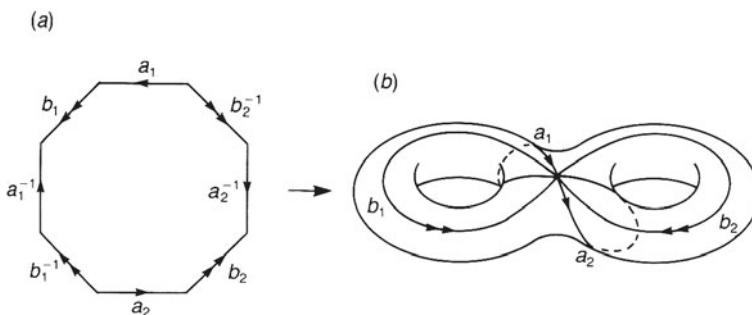


Abb. 2.7. Wenn die Kanten eines Achtecks wie in (a) identifiziert werden, erhält man einen Torus mit zwei Löchern (also mit Geschlecht 2).

(e) Sei schließlich $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe. Wir fassen alle Punkte $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$, die auf ihrer Begrenzungslinie liegen, als einen einzigen Punkt auf, es sei also $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, wenn $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$ ist. Damit erhalten wir die Sphäre S^1 als Quotientenraum D^2/\sim , geschrieben als D^2/S^1 , siehe Abb. 2.8. Wenn wir entsprechend in der n -dimensionalen Scheibe $D^n = \{(x_0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_0)^2 + \dots + (x^n)^2 \leq 1\}$ die Punkte auf deren Rand S^{n-1} miteinander identifizieren, erhalten wir die n -Sphäre S^n , also $D^n/S^{n-1} = S^n$. \diamond

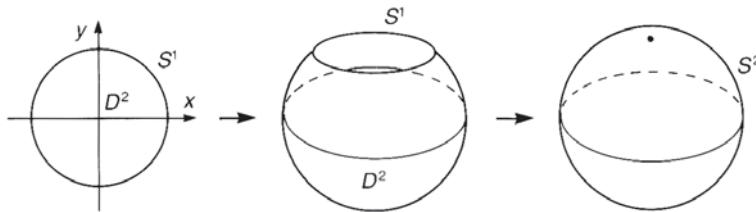


Abb. 2.8. Eine Scheibe D^2 , bei der alle Punkte ihres Rands S^1 miteinander identifiziert werden, ist die Sphäre S^2 .

Übung 2.6 Sei H die obere Hälfte der komplexen Ebene $\{\tau \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} \tau \geq 0\}$. Definieren Sie eine Gruppe

$$\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z}) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}. \quad (2.4)$$

Führen Sie eine Relation \sim für $\tau, \tau' \in H$ ein, nach der $\tau \sim \tau'$ gelten soll, wenn es eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$$

gibt, sodass gilt:

$$\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d). \quad (2.5)$$

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. (Der Quotientenraum $H/\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$ ist in Abb. 8.3 dargestellt.)

Beispiel 2.6. Es seien G eine Gruppe, außerdem $g, g' \in G$ und H eine Untergruppe von G . Wir führen eine Äquivalenzrelation \sim ein durch $g \sim g'$, wenn es ein $h \in H$ gibt, sodass $g' = gh$ ist. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse $[g] = \{gh | h \in H\}$ mit gH . Die Klasse gH wird eine (**linke**) **Nebenklasse** (engl. coset) genannt. Für gH gilt entweder $gH \cap g'H = \emptyset$ oder $gH = g'H$. Den Quotientenraum bezeichnen wir mit G/H . Im Allgemeinen ist G/H keine Gruppe, es sei denn, H ist ein **Normalteiler** (auch: eine normale bzw. invariante Untergruppe) von G , also $ghg^{-1} \in H$ für beliebige $g \in G$ und $h \in H$. Wenn H ein Normalteiler von G ist, nennt man G/H eine **Quotientengruppe**,

deren Gruppenoperation durch $[g]*[g'] = [gg']$ gegeben ist, dabei ist „*“ das Produkt in G/H . Betrachten wir ein $gh \in [g]$ und ein $g'h' \in [g']$. Dann existiert ein $h'' \in H$, sodass $hg' = g'h''$ ist und daher $ghg'h' = gg'h''h' \in [gg']$. Das neutrale Element von G/H ist die Äquivalenzklasse $[e]$, und das inverse Element von $[g]$ ist $[g^{-1}]$. \diamond

Übung 2.7 Sei G eine Gruppe. Zwei Elemente $a, b \in G$ nennt man zueinander konjugiert, $a \simeq b$, wenn es ein $g \in G$ gibt, sodass $b = gag^{-1}$ ist. Zeigen Sie, dass \simeq eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse $[a] = \{gag^{-1} | g \in G\}$ heißt **Konjugationsklasse**.

2.2 Vektorräume

2.2.1 Vektoren und ihre Räume

Ein **Vektorraum** (oder **linearer Raum**) V über einem Körper K ist eine Menge, in der zwei Operationen bzw. Verknüpfungen definiert sind: die Addition und die **Skalarmultiplikation** mit einem Element von K (einem Skalar; in diesem Buch sind wir im Wesentlichen an den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ interessiert). Die Elemente von V nennt man naheliegenderweise **Vektoren**; sie genügen den folgenden Axiomen:

- (i) $u + v = v + u$;
- (ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- (iii) es gibt einen Nullvektor $\mathbf{0}$, sodass $v + \mathbf{0} = v$;
- (iv) für jeden Vektor u existiert ein $-u$, sodass $u + (-u) = \mathbf{0}$ ist;
- (v) $c(u + v) = cu + cv$;
- (vi) $(c + d)u = cu + du$;
- (vii) $(cd)u = c(du)$;
- (viii) $1u = u$.

Hierbei sind jeweils $u, v, w \in V$ und $c, d \in K$, und 1 ist das neutrale Element von K .

Sei $\{v_i\}$ eine Menge von $k (>0)$ Vektoren. Wenn die Gleichung

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

eine nichttriviale Lösung mit $x_i \neq 0$ für (mindestens) ein i hat, heißt diese Menge $\{v_j\}$ von Vektoren **linear abhängig**. Wenn dagegen (2.6) nur die triviale Lösung $x_i = 0$ hat (für alle i), sind die $\{v_i\}$ **linear unabhängig**. Wenn mindestens ein Vektor der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist, ist die Menge immer linear abhängig.

Eine Menge von linear unabhängigen Vektoren $\{e_i\}$ heißt eine Basis von V , wenn jedes Element $v \in V$ eindeutig als eine Linearkombination der $\{e_i\}$ geschrieben werden kann:

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \cdots + v^n e_n. \quad (2.7)$$

Die Zahlen $v^i \in K$ heißen **Komponenten** von \mathbf{v} bezüglich der Basis $\{e_j\}$. Wenn die Basis n Elemente enthält, hat V die Dimension n : $\dim V = n$. Wir schreiben gewöhnlich einen n -dimensionalen Vektorraum über K als $V(n, K)$ – oder einfach V , wenn sich n und K aus dem Kontext ergeben. Wir nehmen an, dass n endlich ist.

2.2.2 Lineare Abbildungen, Bilder und Kerne

Gegeben seien zwei Vektorräume V und W . Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt **lineare Abbildung**, wenn für beliebige $a_1, a_2 \in K$ und $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ gilt: $f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = a_1f(\mathbf{v}_1) + a_2f(\mathbf{v}_2)$. Eine lineare Abbildung ist ein Beispiel für einen Homomorphismus, der Vektoraddition und Skalarmultiplikation erhält. Das **Bild** von f ist $f(V) \subset W$, und der **Kern** von f ist $\{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$, wir schreiben dafür auch im f (von engl. „image“) bzw. $\ker f$. $\ker f$ kann nicht leer sein, da $f(\mathbf{0})$ immer $\mathbf{0}$ ist. Wenn W der Körper K selbst ist, nennt man f eine **lineare Funktion**. Wenn f ein Isomorphismus ist, sagt man, dass V **isomorph** zu W ist (und umgekehrt): $V \cong W$. Daraus folgt dann $\dim V = \dim W$. Tatsächlich sind alle n -dimensionalen Vektorräume isomorph zu K^n und werden als identische Vektorräume angesehen. Der Isomorphismus zwischen den Vektorräumen ist ein Element von $\mathrm{GL}(n, K)$.

Satz 2.1. Wenn $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung ist, dann ist

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{im} \, f). \quad (2.8)$$

Beweis

Da f eine lineare Abbildung ist, sind $\ker f$ und $\mathrm{im} \, f$ Vektorräume, siehe Übung 2.8. Sei $\{g_1, \dots, g_r\}$ die Basis von $\ker f$ und $\{h'_1, \dots, h'_s\}$ die von $\mathrm{im} \, f$. Für jedes i ($1 \leq i \leq s$) wählen wir $h_i \in V$, sodass $f(h_i) = h'_i$ ist, und betrachten die Menge von Vektoren $\{g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_s\}$.

Jetzt zeigen wir, dass diese Vektoren eine linear unabhängige Basis von V bilden. Wir betrachten einen beliebigen Vektor $\mathbf{v} \in V$. Wegen $f(\mathbf{v}) \in \mathrm{im} \, f$ können wir $f(\mathbf{v})$ in der Basis des Bildraums als $f(\mathbf{v}) = c^i h'_i = c^i f(h_i)$ entwickeln. Aus der Linearität von f folgt dann $f(\mathbf{v} - c^i h_i) = \mathbf{0}$, also $\mathbf{v} - c^i h_i \in \ker f$. Dies zeigt, dass ein beliebiger Vektor \mathbf{v} eine Linearkombination der Vektoren $\{g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_s\}$ ist. Also wird V von $r+s$ Vektoren aufgespannt. Nehmen wir als nächstes $a^i g_i + b^i h_i = \mathbf{0}$ an. Dann ist $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) = f(a^i g_i + b^i h_i) = b^i f(h_i) = b^i h'_i$, woraus wir $b^i = 0$ erhalten. Dann folgt aus $a^i g_i = \mathbf{0}$, dass $a^i = 0$ ist, und die Menge $\{g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_s\}$ ist linear unabhängig in V . Schließlich ergibt sich $\dim V = r+s = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{im} \, f)$. \square

Anmerkung: Der von $\{h_1, \dots, h_s\}$ aufgespannte Vektorraum wird **orthogonales Komplement** von $\ker f$ genannt, man schreibt dafür $(\ker f)^\perp$.

Übung 2.8 (1) Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass sowohl $\ker f$ als auch $\mathrm{im} \, f$ Vektorräume sind.

(2) Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ dann und nur dann ein Isomorphismus ist, wenn $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ ist.

2.2.3 Dualer Vektorraum

Den dualen Vektorraum haben wir bereits in Abschnitt 1.2 im Kontext der Quantenmechanik kennengelernt. Die Darstellung hier ist mathematischer und insofern komplementär zur dortigen Diskussion.

Sei $f : V \rightarrow K$ eine lineare Funktion auf einem Vektorraum $V(n, K)$ über einem Körper K . Sei $\{e_i\}$ eine Basis und $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$ ein beliebiger Vektor. Aus der Linearität von f erhalten wir $f(v) = v^1 f(e_1) + \dots + v^n f(e_n)$. Wenn wir also $f(e_i)$ für alle i kennen, wissen wir, was das Ergebnis der Anwendung von f auf einen beliebigen Vektor ist. Bemerkenswerterweise kann man die Menge der linearen Funktionen selbst zu einem Vektorraum machen, denn eine Linearkombination von zwei linearen Funktionen ist wieder eine lineare Funktion:

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)(v) = a_1 f_1(v) + a_2 f_2(v) \quad (2.9)$$

Dieser lineare Raum wird der zu $V(n, K)$ **duale Vektorraum** genannt und mit $V^*(n, K)$ oder einfacher V^* bezeichnet. Wenn $\dim V$ endlich ist, ist $\dim V^* = \dim V$. Führen wir nun eine Basis $\{e^{*i}\}$ von V^* ein. Da e^{*i} eine lineare Funktion ist, wird es vollständig beschrieben durch die Angabe von $e^{*i}(e_j)$ für alle j . Wir wählen nun die **duale Basis**

$$e^{*i}(e_j) = \delta_j^i. \quad (2.10)$$

Jede lineare Funktion f , in diesem Zusammenhang auch **dualer Vektor** genannt, kann in den $\{e^{*i}\}$ entwickelt werden:

$$f = f_i e^{*i}. \quad (2.11)$$

Die Wirkung von f auf v interpretieren wir als ein **inneres Produkt** zwischen einem Spalten- und einem Zeilenvektor:

$$f(v) = f_i e^{*i} (v^j e_j) = f_i v^j e^{*i}(e_j) = f_i v^i. \quad (2.12)$$

Wir verwenden für dieses innere Produkt manchmal die Notation $\langle , \rangle : V^* \times V \rightarrow K$.

Jetzt seien V und W Vektorräume mit einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$, und $g : W \rightarrow K$ sei eine lineare Funktion auf W (also $g \in W^*$). Man sieht leicht, dass die Verkettung von f und g , also $g \circ f$, eine lineare Funktion auf V ist. Auf diese Weise ergeben f und g ein Element $h \in V^*$, das durch

$$h(v) \equiv g(f(v)) \quad (v \in V) \quad (2.13)$$

definiert wird. Ist $g \in W^*$ gegeben, hat die Abbildung $f : V \rightarrow W$ eine Abbildung $h \in V^*$ erzeugt. Dementsprechend liegt wir eine Abbildung $f^* : W^* \rightarrow V^*$ vor, die durch $f^* : g \mapsto h = f^*(g)$ gegeben ist (Abb. 2.9). Die Abbildung h heißt **Rücktransport** (auch Pullback) von g bezüglich f^* .

Wegen $\dim V^* = \dim V$ existiert ein Isomorphismus zwischen V und V^* . Dieser Isomorphismus ist jedoch nicht kanonisch; wir müssen ein inneres Produkt in V festlegen, um einen Isomorphismus zwischen V und V^* und umgekehrt zu definieren, siehe den nächsten Abschnitt. Die Äquivalenz eines Vektorraums mit seinem dualen Vektorraum wird uns im Verlauf des Buchs immer wieder begegnen.

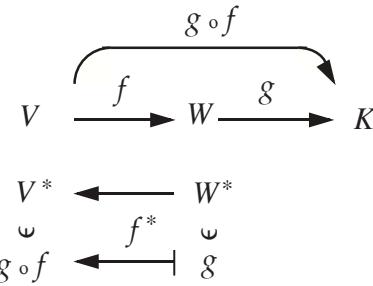


Abb. 2.9. Der Rücktransport einer Funktion g ist eine Funktion $f^*(g) = g \circ f$.

Übung 2.9 Nehmen wir an, $\{f_j\}$ sei eine andere Basis von V und $\{f^{*i}\}$ die duale Basis. Bezogen auf die alte Basis schreibt sich f_i als $f_i = A_i^j e_j$, mit $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Zeigen Sie, dass zwischen den dualen Basen die Beziehung $e^{*i} = f^{*j} A_j^i$ besteht.

2.2.4 Inneres Produkt und Adjungierte

Seien $V = V(m, K)$ ein Vektorraum mit einer Basis $\{e_i\}$ und ein beliebiges Element g von $\mathrm{GL}(m, K)$ ein Vektorraum-Isomorphismus, $g : V \rightarrow V^*$. Die Komponentendarstellung von g ist

$$g : v^j \mapsto g_{ij} v^j. \quad (2.14)$$

Ist dieser Isomorphismus erst einmal gegeben, können wir das **innere Produkt** von zwei Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ durch

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \equiv \langle g\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \quad (2.15)$$

definieren. Nehmen wir der Deutlichkeit halber an, K sei die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen. Dann hat Gleichung (2.15) eine Komponentendarstellung:

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = v_1^i g_{ji} v_2^j. \quad (2.16)$$

Wir fordern, dass die Matrix (g_{ij}) positiv definit sein soll, sodass das innere Produkt $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ die Bedeutung einer quadrierten Norm von \mathbf{v} hat. Wir fordern außerdem, dass die Metrik symmetrisch ist: $g_{ij} = g_{ji}$, sodass $g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = g(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$ ist.

Als nächstes sei $W = W(n, \mathbb{R})$ ein Vektorraum mit einer Basis $\{f_\alpha\}$ und einem Vektorraum-Isomorphismus $G : W \rightarrow W^*$. Zu einer gegebenen Abbildung $f : V \rightarrow W$ können wir die **Adjungierte** \tilde{f} von f definieren:

$$G(\mathbf{w}, f\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \tilde{f}\mathbf{w}), \quad (2.17)$$

mit $\mathbf{v} \in V$ und $\mathbf{w} \in W$. Man sieht leicht, dass $(\tilde{f}) = f$ ist. Die Komponentenform von Gleichung (2.17) ist

$$w^\alpha G_{\alpha\beta} f^\beta{}_i v^i = v^i g_{ij} \tilde{f}^j{}_\alpha w^\alpha, \quad (2.18)$$

wobei f^β_i und \tilde{f}^j_α die Matrixdarstellungen von f bzw. \tilde{f} sind. Wenn $g_{ij} = \delta_{ij}$ und $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ist, dann reduziert sich die Adjungierte \tilde{f} zur Transponierten f^T der Matrix f .

Wir wollen jetzt zeigen, dass $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } \tilde{f})$ ist. Da (2.18) für beliebige $v \in V$ und $w \in W$ gilt, erhalten wir $G_{\alpha\beta} f^\beta_i = g_{ij} \tilde{f}^j_\alpha$, also

$$\tilde{f} = g^{-1} f^T G^T. \quad (2.19)$$

Wenn wir das Resultat der folgenden Übung ausnutzen, erhalten wir $\text{rang } f = \text{rang } \tilde{f}$, wobei der Rang einer Abbildung durch den Rang der korrespondierenden Matrix definiert wird (beachten Sie, dass $g \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$, aber $G \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ist). Es ist offensichtlich, dass $\dim(\text{im } f)$ der Rang einer Matrixdarstellung der Abbildung f ist, und wir folgern $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } \tilde{f})$.

Übung 2.10 Es seien $V = V(m, \mathbb{R})$, $W = W(n, \mathbb{R})$, und es sei f eine zu einer linearen Abbildung von V nach W zugehörige Matrix. Überprüfen Sie, dass $\text{rang } f = \text{rang } f^T = \text{rang}(M f^T N)$ ist, für zwei Abbildungen bzw. Matrizen $M \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$ und $N \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Übung 2.11 Sei V ein Vektorraum über \mathbb{C} . Das innere Produkt von zwei Vektoren v_1 und v_2 aus V ist definiert durch

$$g(v_1, v_2) = \bar{v}_1^i g_{ij} v_2^j, \quad (2.20)$$

dabei steht der Überstrich „-“ für die komplexe Konjugation. Da das innere Produkt positiv und symmetrisch ist, $\underline{g(v_1, v_2)} = \underline{g(v_2, v_1)}$, muss der Vektorraum-Isomorphismus $g : V \rightarrow V^*$ eine positiv-definite Hermite'sche Matrix sein. Wenn jetzt $f : V \rightarrow W$ eine (komplexe) lineare Abbildung ist und $G : W \rightarrow W^*$ ein Vektorraum-Isomorphismus, dann definieren wir die Adjungierte von f durch $\underline{g(v, \tilde{f}w)} = \underline{\overline{G(w, fv)}}$. Wiederholen Sie die Argumentation, um zu zeigen, dass gilt:

- (a) $\tilde{f} = g^{-1} f^\dagger G^\dagger$, wobei \dagger für den adjungierten Operator steht, und
- (b) $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } \tilde{f})$.

Satz 2.2. (Baby-Indexesatz) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\dim(\ker f) - \dim(\ker \tilde{f}) = \dim V - \dim W. \quad (2.21)$$

Beweis

Satz 2.1 sagt uns, dass

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

ist, und dass, angewandt auf $\tilde{f} : W \rightarrow V$, gilt:

$$\dim W = \dim(\ker \tilde{f}) + \dim(\text{im } \tilde{f}).$$

Wir haben vorher schon gesehen, dass $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } \tilde{f})$ ist, woraus wir

$$\dim V - \dim(\ker f) = \dim W - \dim(\ker \tilde{f})$$

erhalten. \square

Beachten Sie in (2.21), dass jeder Term auf der linken Seite von den Details der Abbildung f abhängig ist. Die rechte Seite dagegen besagt, dass die *Differenz* der zwei Terme unabhängig von f ist! Dies kann man als endlichdimensionales Analogon zu den Indexsätzen ansehen, siehe Kapitel 12.

2.2.5 Tensoren

Ein dualer Vektor ist ein lineares Objekt, das einen Vektor auf einen Skalar abbildet. Dies lässt sich auf multilinear Objekte verallgemeinern, die man **Tensoren** nennt. Diese bilden mehrere Vektoren und duale Vektoren auf einen Skalar ab. Ein Tensor T vom Typ (p, q) ist eine multilinear Abbildung, die p duale Vektoren und q Vektoren nach \mathbb{R} abbildet:

$$T : \bigotimes^p V^* \bigotimes^q V \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Zum Beispiel bildet ein Tensor vom Typ $(0, 1)$ einen Vektor auf eine reelle Zahl ab und kann darum mit einem dualen Vektor identifiziert werden. Dementsprechend ist ein Tensor vom Typ $(1, 0)$ ein Vektor. Bildet ω einen dualen Vektor und zwei Vektoren auf einen Skalar ab, $\omega : V^* \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ist ω ein Tensor vom Typ $(1, 2)$.

Die Menge aller Tensoren vom Typ (p, q) heißt **Tensorraum** vom Typ (p, q) und wird mit \mathcal{T}_q^p bezeichnet. Das **Tensorprodukt** $\tau = \mu \otimes \nu \in \mathcal{T}_q^p \otimes \mathcal{T}_{q'}^{p'}$ ist ein Element von $\mathcal{T}_{q+q'}^{p+p'}$ und ist definiert durch

$$\begin{aligned} \tau(\omega_1, \dots, \omega_p, \xi_1, \dots, \xi_{p'}; u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_{q'}) \\ = \mu(\omega_1, \dots, \omega_p; u_1, \dots, u_q) \nu(\xi_1, \dots, \xi_{p'}; v_1, \dots, v_{q'}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Eine weitere Operation in einem Tensorraum ist die **Verjüngung** oder Kontraktion. Sie ist eine Abbildung von einem Tensorraum vom Typ (p, q) in einen vom Typ $(p-1, q-1)$:

$$\tau(\dots, e^{*i}, \dots; \dots, e_i, \dots) \quad (2.24)$$

Hier sind die $\{e_i\}$ und $\{e^{*i}\}$ die dualen Basen.

Übung 2.12 Seien V und W Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass f ein Tensor vom Typ $(1, 1)$ ist.

2.3 Topologische Räume

Die allgemeinste Struktur, mit der wir hier arbeiten werden, ist ein topologischer Raum. Physiker neigen zu der Auffassung, dass alle Räume, mit denen sie es zu tun bekommen, mit einer Metrik ausgestattet sind. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Tatsächlich bilden die metrischen Räume eine Teilmenge der Mannigfaltigkeiten und die Mannigfaltigkeiten eine Teilmenge der topologischen Räume.

2.3.1 Definitionen

Definition 2.3. Sei X irgendeine Menge und $\mathcal{T} = \{U_i | i \in I\}$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, also eine gewisse Kollektion von Teilmengen von X . Das Paar (X, \mathcal{T}) ist ein **topologischer Raum**, wenn \mathcal{T} den folgenden Bedingungen genügt:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- (ii) Wenn J irgendeine (endliche oder unendliche) Teilkollektion der Indexmenge I ist, gilt für die Familie $\{U_j | j \in J\}$ die Aussage $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}$ (die Vereinigung von offenen Mengen ist wieder eine offene Menge).
- (iii) Wenn K irgendeine *endliche* Teilkollektion von I ist, erfüllt die Familie $\{U_k | k \in K\}$ die Aussage $\bigcap_{k \in K} U_k \in \mathcal{T}$ (der Durchschnitt einer endlichen Zahl von offenen Mengen ist wieder eine offene Menge).

Manchmal nennt man auch X allein einen topologischen Raum. Die M_i werden **offene Mengen** genannt, und man sagt, dass \mathcal{T} der Menge X eine **Topologie** gibt.

Beispiel 2.7. (a) Wenn X eine Menge ist und \mathcal{T} alle Teilmengen von X enthält, dann sind (i)–(iii) automatisch erfüllt. Diese Topologie nennt man **diskrete Topologie**.

(b) Wenn X eine Menge und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ist, erfüllt \mathcal{T} natürlich ebenfalls (i)–(iii). In diesem Fall spricht man von der **trivialen** oder **indiskreten Topologie**. Im Allgemeinen ist die diskrete Topologie zu streng und die triviale Topologie zu trivial, um der Menge X irgendwelche interessanten Strukturen zu verleihen.

(c) Sei X die reelle Zahlengerade \mathbb{R} . Alle offenen Intervalle (a, b) und ihre Vereinigungen definieren eine Topologie namens **gewöhnliche Topologie**; a und b können auch für $-\infty$ bzw. ∞ stehen. In ähnlicher Weise wird die gewöhnliche Topologie im \mathbb{R}^n definiert (wir betrachten ein Produkt $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ und die entsprechenden Vereinigungsmengen...). \diamond

Übung 2.13 In Definition 2.3 sehen die Axiome (ii) und (iii) etwas unausgewogen aus. Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Topologie in \mathbb{R} sich auf die diskrete reduzierte (und damit ziemlich uninteressant würde), wenn wir in (iii) unendliche Schnittmengen erlauben würden.

Eine **Metrik** $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion, welche für beliebige $x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (ii) $d(x, y) \geq 0$, wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $x = y$ ist;
- (iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Wenn X mit einer Metrik d versehen ist, wird X zu einem topologischen Raum, dessen offene Mengen durch „offene Scheiben“

$$M_\varepsilon(X) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad (2.25)$$

zusammen mit allen ihren möglichen Vereinigungen gegeben sind. Die auf diese Weise definierte Topologie \mathcal{T} heißt **metrische Topologie** und hängt natürlich von d ab. Der topologische Raum (X, \mathcal{T}) heißt dann **metrischer Raum**. (*Übung*: Verifizieren Sie, dass ein metrischer Raum (X, \mathcal{T}) wirklich ein topologischer Raum ist.)

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und A irgendeine Teilmenge von X . Dann induziert $\mathcal{T} = \{M_i\}$ die **relative Topologie** oder Unterraumtopologie in A durch $\mathcal{T}' = \{M_i \cap A \mid M_i \in \mathcal{T}\}$.

Beispiel 2.8. Für $X = \mathbb{R}^{n+1}$ sei die n -Sphäre S^n gegeben durch

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = 1. \quad (2.26)$$

Eine Topologie in S^n erhält man durch die relative Topologie, die von der gewöhnlichen Topologie des \mathbb{R}^{n+1} induziert wird. \diamond

2.3.2 Stetige Abbildungen

Definition 2.4. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist **stetig**, wenn das *inverse* Bild einer offenen Menge in Y eine offene Menge in X ist.

Diese Definition steht in Einklang mit unserer intuitiven Vorstellung von Stetigkeit. Sei etwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x \leq 0 \\ -x + \frac{1}{2} & x > 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Wir verwenden die gewöhnliche Topologie in \mathbb{R} , also ist jedes offene Intervall (a, b) eine offene Menge. In der konventionellen Analysis hat f eine Unstetigkeit bei $x = 0$. Für ein offenes Intervall bzw. eine offene Menge $(3/2, 2) \subset Y$ ergibt sich $f^{-1}((3/2, 2)) = (-1, -1/2)$, was eine offene Menge in X ist. Betrachten wir stattdessen eine offene Menge $(1 - 1/4, 1 + 1/4) \subset Y$, dann ist $f^{-1}((1 - 1/4, 1 + 1/4)) = (-1/4, 0]$, was keine offene Menge in der gewöhnlichen Topologie ist.

Übung 2.14 Nehmen Sie als Beispiel die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und zeigen Sie, dass die umgekehrte Definition „eine Abbildung f ist stetig, wenn sie eine offene Menge in X auf eine offene Menge in Y abbildet“ nicht funktioniert. (Tipp: Finden Sie heraus, wohin $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ unter f abgebildet wird.)

2.3.3 Umgebungen und Hausdorff-Räume

Definition 2.5. Nehmen wir an, dass \mathcal{T} der Menge X eine Topologie verleiht. U ist eine **Umgebung** eines Punkts $x \in X$, wenn U eine Teilmenge von X ist und U mindestens eine offene Menge M enthält, zu der x gehört: $x \in M \subset U$. Die Teilmenge U braucht selbst keine offene Menge zu sein. Wenn U eine offene Menge in \mathcal{T} ist, wird sie **offene Umgebung** genannt.

Beispiel 2.9. Wir betrachten $X = \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Topologie. Das Intervall $[-1, 1]$ ist eine Umgebung eines beliebigen Punkts $x \in (-1, 1)$. \diamond

Definition 2.6. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) ist ein **Hausdorff-Raum**, wenn für ein beliebiges Paar von unterschiedlichen Punkten $x, x' \in X$ immer Umgebungen U_x von x und $U_{x'}$ von x' existieren, sodass $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$ ist.

Übung 2.15 Es seien $X = \{\text{John}, \text{Paul}, \text{Ringo}, \text{George}\}$ und $M_0 = \emptyset$, $M_1 = \{\text{John}\}$, $M_2 = \{\text{John}, \text{Paul}\}$, $M_3 = \{\text{John}, \text{Paul}, \text{Ringo}, \text{George}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T} = \{M_0, M_1, M_2, M_3\}$ die Menge X mit einer Topologie versieht. Zeigen Sie auch, dass (X, \mathcal{T}) kein Hausdorff-Raum ist.

Anders als in dieser Übung sind die meisten Räume, die uns in der Physik begegnen, Hausdorff-Räume. Für den Rest dieses Buchs werden wir davon ausgehen, dass dies bei allen behandelten Räumen der Fall ist.

Übung 2.16 Zeigen Sie, dass \mathbb{R} mit der gewöhnlichen Topologie ein Hausdorff-Raum ist. Zeigen Sie dann, dass jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum ist.

2.3.4 Abgeschlossene Mengen

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge A von X heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement in X eine offene Menge ist, also gilt: $X \setminus A \in \mathcal{T}$. Nach dieser Definition sind X und \emptyset beide offen *und* abgeschlossen. Betrachten wir eine Menge A (entweder offen oder abgeschlossen). Die **abgeschlossene Hülle** bzw. der Abschluss \bar{A} von A ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Der **offene Kern** oder das **Innere** A° von A ist die größte offene Teilmenge von A . Der **Rand** ∂A von A ist das Komplement von A° in A : $\partial A = A \setminus A^\circ$. Eine offene Menge und ihr Rand sind immer disjunkt, während eine abgeschlossene Menge immer ihren Rand enthält.

Beispiel 2.10. Betrachten wir $X = \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Topologie und ein Paar von offenen Intervallen $(-\infty, a)$ und (b, ∞) mit $a < b$. Da $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ unter der gewöhnlichen Topologie offen ist, ist das Komplement $[a, b]$ abgeschlossen. Jedes abgeschlossene Intervall ist eine abgeschlossene Menge unter der gewöhnlichen Topologie. Wenn $A = (a, b)$ ist, dann ist $\bar{A} = [a, b]$. Der Rand ∂A besteht aus den zwei Punkten $\{a, b\}$. Die Mengen (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, und $[a, b)$ haben alle jeweils denselben Rand, Abschluss und offenen Kern. Im \mathbb{R}^n ist das Produkt $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ eine abgeschlossene Menge unter der gewöhnlichen Topologie. \diamond

Übung 2.17 Ob eine Menge $A \subset X$ offen oder abgeschlossen ist, hängt von X ab. Betrachten Sie ein Intervall $I = (0, 1)$ auf der x -Achse. Zeigen Sie, dass I offen innerhalb der x -Achse \mathbb{R} ist, während es in der xy -Ebene des \mathbb{R}^2 weder offen noch abgeschlossen ist.

2.3.5 Kompaktheit

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Familie $\{A_i\}$ von Teilmengen von X heißt eine **Überdeckung** von X , wenn gilt:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X.$$

Sollten alle A_i offene Mengen der Topologie \mathcal{T} sein, dann heißt die Überdeckung **offene Überdeckung**.

Definition 2.7. Wir betrachten eine Menge X und alle möglichen Überdeckungen von X . Die Menge X ist **kompakt**, wenn für jede offene Überdeckung $\{U_i | i \in I\}$ eine *endliche* Teilmenge J von I existiert, sodass $\{U_j | j \in J\}$ ebenfalls eine Überdeckung von X ist.

Im Allgemeinen muss eine Menge, die kompakt im \mathbb{R}^n ist, beschränkt sein. Was ist sonst noch notwendig? Wir führen das Ergebnis ohne Beweis an.

Satz 2.3. Sei X eine Teilmenge des \mathbb{R}^n . X ist dann und nur dann kompakt, wenn X *abgeschlossen* und *beschränkt* ist.

Beispiel 2.11. (a) Ein Punkt ist kompakt.

(b) Sei (a, b) ein offenes Intervall in \mathbb{R} und $U_n = (a, b - 1/n)$ ($n \in \mathbb{N}$) eine offene Überdeckung. Offensichtlich ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n = (a, b).$$

Es bedeckt aber keine endliche Unterfamilie von $\{U_n\}$ das Intervall (a, b) . Daher ist ein offenes Intervall (a, b) nichtkompakt in Einklang mit Satz 2.3.

(c) S^n in Beispiel 2.8 ist mit der relativen Topologie kompakt, da es abgeschlossen und beschränkt in \mathbb{R}^{n+1} ist. \diamond

Ihnen mag die Bedeutung der Kompaktheit aus dieser Definition und den wenigen Beispielen nicht direkt ersichtlich sein. Es sei daher bemerkt, dass eine Reihe von mathematischen wie auch physikalischen Diskussionen sich auf einem kompakten Raum ziemlich vereinfachen. Betrachten wir z. B. ein System von Elektronen in einem Festkörper. Wenn der Festkörper nichtkompakt mit unendlichem Volumen ist, müssen wir Quantenstatistik in einem unendlich großen Volumen betreiben. Dies ist bekanntermaßen mathematisch recht kompliziert und erfordert die Kenntnis fortgeschrittener Theorien von Hilbert-Räumen. Daher beschränken wir gewöhnlich das System auf ein endliches Volumen V , das von harten Wänden umgeben ist, sodass die Elektronen-Wellenfunktionen an den Wänden verschwinden oder an den Wänden periodische Randbedingungen gelten, was darauf hinausläuft, das System in einem Torus anzusiedeln, siehe Beispiel 2.5(b). So oder so befindet sich das System nun in einem kompakten Raum. Wir können dann einen Fock-Raum konstruieren, dessen Anregungen mit diskreten Indizes durchnummierter werden. Eine andere physikalische Anwendung kompakter Räume wird uns begegnen, wenn wir ausgedehnte Objekte wie Instantonen und Belavin-Polyakov-Monopole untersuchen, siehe Abschnitt 4.8.1. In Feldtheorien nehmen wir normalerweise an, dass das Feld irgendeine dem Vakuum (oder einem der Vakua) entsprechende asymptotische Form annimmt, wenn die räumlichen Koordinaten gegen unendlich gehen. In ähnlicher Weise ist eine Klasse von Ordnungsparameter-Verteilungen, deren räumliche Unendlichkeiten einen gemeinsamen Ordnungsparameter haben, unter verschiedenen Gesichtspunkten von Interesse, wie wir später sehen werden. Da dabei alle Punkte im Unendlichen auf einen gemeinsamen Punkt abgebildet werden, haben wir im Endeffekt den nicht-kompaten Raum \mathbb{R}^n zu einem kompakten Raum $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ kompaktifiziert. Dieser Vorgang wird **Ein-Punkt-Kompaktifizierung** genannt.

2.3.6 Zusammenhang

Definition 2.8. (a) Ein topologischer Raum X ist **zusammenhängend**, wenn man ihn nicht als Vereinigung $X = X_1 \cup X_2$ zweier disjunkter offener Mengen X_1, X_2 ($X_1 \cap X_2 = \emptyset$) schreiben kann. Andernfalls heißt X **unzusammenhängend**.

(b) Ein topologischer Raum X wird **bogenweise zusammenhängend** genannt, wenn für beliebige Punkte $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow X$ existiert, sodass $f(0) = x$ und $f(1) = y$ ist. Bis auf wenige pathologische Ausnahmen ist bogenweiser Zusammenhang äquivalent mit Zusammenhang.

(c) Eine **Schleife** in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow X$, sodass $f(0) = f(1)$ ist. Wenn jede Schleife in X stetig in einem Punkt zusammengezogen werden kann, heißt X **einfach zusammenhängend**.

Beispiel 2.12. (a) Die reelle Gerade \mathbb{R} ist bogenweise zusammenhängend, während $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dies nicht ist. Der \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) ist bogenweise zusammenhängend und ebenfalls die Menge $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) S^n ist bogenweise zusammenhängend. Der Kreis S^1 ist nicht einfach zusammenhängend. Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend. Der n -dimensionale Torus

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_n \quad (n \geq 2)$$

ist bogenweise, aber nicht einfach zusammenhängend.

(c) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$ ist nicht bogenweise zusammenhängend. $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist bogenweise, aber nicht einfach zusammenhängend. $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist bogenweise und einfach zusammenhängend. \diamond

2.4 Homöomorphismen und topologische Invarianten

2.4.1 Homöomorphismen

Wie wir bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnt haben, ist der Hauptzweck der Topologie die Klassifikation von Räumen. Nehmen Sie an, wir haben mehrere geometrische Objekte bzw. Figuren und fragen uns, ob diese gleich oder verschieden sind. Da wir noch nicht definiert haben, was wir mit *gleich* und *verschieden* meinen, könnten wir ebenso gut sagen: „alle sind voneinander verschieden“ wie: „dies sind alles gleiche Figuren“. Einige Definitionen von Äquivalenz sind zu eng und andere zu weit gefasst, um eine sinnvolle Klassifikation von Figuren oder Räumen zu ergeben. Beispielsweise ist in der elementaren Geometrie die Äquivalenz von Figuren durch Kongruenz gegeben, was sich als zu streng für unsere Zwecke erweisen wird. In der Topologie sagen wir, dass zwei Figuren äquivalent sind, wenn es möglich ist, die eine Figur in die andere durch eine *stetige Deformation* zu verwandeln. Das heißt, wir führen eine Äquivalenzrelation ein, unter welcher geometrische Objekte klassifiziert werden – je nachdem, ob man ein Objekt in ein anderes stetig deformieren kann oder eben nicht. Um es etwas mathematischer zu fassen: Wir führen den Begriff des Homöomorphismus ein.

Definition 2.9. Seien X_1 und X_2 topologische Räume. Eine Abbildung $f : X_1 \rightarrow X_2$ ist ein **Homöomorphismus**, wenn sie stetig ist und eine Inverse $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ hat, die ebenfalls stetig ist. Wenn es einen Homöomorphismus zwischen X_1 und X_2 gibt, sagen wir, dass X_1 **homöomorph** zu X_2 ist und umgekehrt.

Mit anderen Worten: X_1 ist homöomorph zu X_2 , wenn Abbildungen $f : X_1 \rightarrow X_2$ und $g : X_2 \rightarrow X_1$ existieren, sodass $f \circ g = \text{id}_{X_2}$ und $g \circ f = \text{id}_{X_1}$ ist. Man zeigt leicht, dass ein Homöomorphismus eine Äquivalenzrelation ist. Die Reflektivität folgt aus der Wahl $f = \text{id}_X$, während die Symmetrie sich aus der Tatsache ergibt, dass, wenn $f : X_1 \rightarrow X_2$ ein Homöomorphismus ist, dies per definitionem auch für $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ so ist. Transitivität schließlich liegt vor, weil für zwei Homöomorphismen $f : X_1 \rightarrow X_2$

und $g : X_2 \rightarrow X_3$ deren Verkettung $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$ ebenfalls ein Homöomorphismus ist. Wir teilen jetzt alle topologischen Räume auf in Äquivalenzklassen bezüglich der Frage, ob es möglich ist, einen Raum mit einem Homöomorphismus in einen anderen zu überführen. Intuitiv gesprochen gehen wir davon aus, dass topologische Räume aus einer Art idealem Gummi bestehen, das wir nach Belieben in jeder erdenklichen Art und Weise verformen können. Zwei topologische Räume sind homöomorph zueinander, wenn wir den einen in den anderen *stetig* verformen können, d. h. ohne Auseinanderreißen oder Zusammenkleben.

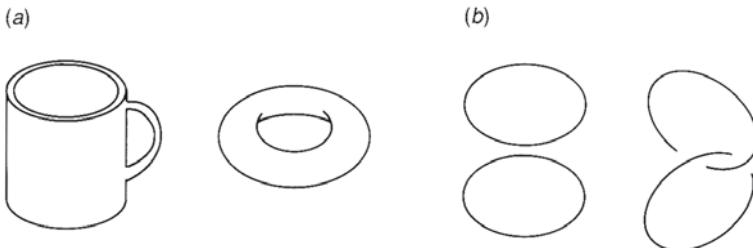


Abb. 2.10. (a) Eine Kaffeetasse ist homöomorph zu einem Doughnut. (b) Die getrennten Ringe sind homöomorph zu den verketteten Ringen.

Abb. 2.10 zeigt zwei Beispiele von Homöomorphismen. Es scheint auf den ersten Blick unmöglich, die linke Figur in Abb. 2.10(b) stetig in die rechte zu verformen. Dies ist jedoch lediglich ein Artefakt der willkürlichen Einbettung dieser Objekte in den \mathbb{R}^3 . Tatsächlich lassen sie sich im \mathbb{R}^4 problemlos ineinander überführen, siehe Aufgabe 2.3. Um die beiden Objekte voneinander zu unterscheiden, müssten wir sie beispielsweise in die S^3 einbetten und dann ihre Komplemente in der S^3 vergleichen. Dieser Ansatz geht allerdings über den Rahmen dieses Buchs hinaus, in dem wir uns mit der Untersuchung von Homöomorphismen zufrieden geben wollen.

2.4.2 Topologische Invarianten

Die wichtigste Frage ist für uns nun: „Wie können wir die Äquivalenzklassen von Homöomorphismen charakterisieren?“ Eine vollständige Antwort können wir bisher noch nicht geben. Stattdessen haben wir nur das ziemlich bescheidene Statement, dass zwei Räume mit verschiedenen „**topologischen Invarianten**“ nicht homöomorph zueinander sind. Dabei sind topologische Invarianten gerade jene Größen, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben. Eine topologische Invariante kann z. B. die Zahl der zusammenhängenden Komponenten eines Raums sein, eine algebraische Struktur wie eine Gruppe oder ein Ring, die aus dem Raum konstruiert werden, oder so etwas wie Zusammenhang, Kompaktheit oder die Hausdorff-Eigenschaft. (Obwohl es intuitiv klar zu sein scheint, dass diese Größen wirklich topologische Invarianten sind, muss dies natürlich bewiesen werden – aber nicht hier. Wenn Sie

sich dafür interessieren, finden Sie ihn in jedem Topologie-Lehrbuch.) Wenn wir die komplette Menge der topologischen Invarianten kennen würden, könnten wir die Äquivalenzklassen durch Angabe dieser Invarianten festlegen. Bis jetzt kennen wir jedoch nur einen Teil der Menge topologischer Invarianten, was bedeutet, dass, selbst wenn alle bekannten topologischen Invarianten zweier topologischer Räume übereinstimmen würden, diese möglicherweise trotzdem nicht homöomorph zueinander wären. Stattdessen können wir lediglich die folgende Aussage machen: *Wenn zwei topologische Räume unterschiedliche topologische Invarianten haben, können sie nicht homöomorph zueinander sein.*

Beispiel 2.13. (a) Eine abgeschlossene Strecke $[-1, 1]$ ist nicht homöomorph zu einer offenen Strecke $(-1, 1)$, denn $[-1, 1]$ ist kompakt, $(-1, 1)$ dagegen nicht.

(b) Der Kreis S^1 ist nicht homöomorph zu \mathbb{R} , denn S^1 ist kompakt in \mathbb{R}^2 , während \mathbb{R} dies nicht ist.

(c) Eine Parabel ($y = x^2$) ist nicht homöomorph zu einer Hyperbel ($x^2 - y^2 = 1$), obwohl sie beide nichtkompakt sind, denn die Parabel ist (bogenweise) zusammenhängend, die Hyperbel nicht.

(d) Der Kreis S^1 ist nicht homöomorph zu einem (abgeschlossenen) Intervall $[-1, 1]$, obwohl beide kompakt und (bogenweise) zusammenhängend sind. $[-1, 1]$ ist einfach zusammenhängend, der S^1 nicht. Alternativ ist $S^1 \setminus \{p\}$ ($p \in S^1$) zusammenhängend, während $[-1, 1] \setminus \{0\}$ dies nicht ist, was ebenfalls gegen ihre Äquivalenz spricht.

(e) Überraschenderweise ist ein Intervall ohne seine Randpunkte homöomorph zur reellen Geraden \mathbb{R} . Um dies zu sehen, betrachten wir $X = (-\pi/2, \pi/2)$ und $Y = \mathbb{R}$ sowie eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = \tan x$. Da $\tan x$ injektiv auf X ist und eine Inverse hat, $\tan^{-1} x$, die injektiv auf \mathbb{R} ist, ist dies in der Tat ein Homöomorphismus. Darum ist *Beschränktheit* keine topologische Invariante.

(f) Eine offene Scheibe $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ ist homöomorph zum \mathbb{R}^2 . Ein Homöomorphismus zwischen diesen beiden Räumen ist beispielsweise $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right). \quad (2.28)$$

Seine Inverse ist $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow D^2$ mit

$$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right). \quad (2.29)$$

Überprüfen Sie, dass $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ und $f^{-1} \circ f = \text{id}_{D^2}$ ist. Wie wir in Beispiel 2.5(e) gesehen haben, ist eine abgeschlossene Scheibe, deren Rand S^1 zu einem Punkt „zusammengezogen“ wird, homöomorph zu S^2 . Wenn wir diesen Punkt entfernen, liegt eine offene Scheibe vor. Die vorliegende Argumentation zeigt, dass diese offene Scheibe homöomorph zum \mathbb{R}^2 ist. Wenn wir die Argumentation umkehren, stellen wir fest, dass das Hinzufügen eines Punkts „Unendlich“ zum \mathbb{R}^2 diesen homöomorph

zum kompakten Raum S^2 macht. Dieses Vorgehen ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ aus dem vorigen Abschnitt. Entsprechend ist $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

(g) Ein Kreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ ist homöomorph zu einem Quadrat, das durch $I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (|x| = 1, |y| \leq 1), (|x| \leq 1, |y| = 1)\}$ beschrieben wird. Als Homöomorphismus $f : I^2 \rightarrow S^1$ können wir beispielsweise wählen:

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.30)$$

Da r nicht verschwinden kann, ist (2.30) invertierbar (und somit in diesem Fall die Quadratur des Kreises gelungen). \diamond

Übung 2.18 Finden Sie einen Homöomorphismus zwischen einem Kreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ und einer Ellipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$.

2.4.3 Homotopietyp

Eine Äquivalenzklasse, die etwas größer als die Homöomorphismen, aber trotzdem durchaus nützlich ist, lautet „vom **selben Homotopietyp**“. Wir schwächen die Bedingungen in Definition 2.9 so ab, dass die stetigen Funktionen f und g keine Inversen zu haben brauchen. Betrachten wir beispielsweise $X = (0, 1)$ und $Y = \{0\}$ sowie die Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = 0$, und $g : Y \rightarrow X$, $g(0) = \frac{1}{2}$. Dann ist $f \circ g = \text{id}_Y$, aber $g \circ f \neq \text{id}_X$. Dies zeigt, dass ein offenes Intervall $(0, 1)$ vom selben Homotopietyp ist wie ein Punkt $\{0\}$, obwohl es nicht homöomorph zu $\{0\}$ ist. Mehr hierzu werden wir in Abschnitt 4.2 erfahren.

Beispiel 2.14. (a) S^1 ist vom selben Homotopietyp wie ein Zylinder, da ein Zylinder ein direktes Produkt $S^1 \times \mathbb{R}$ ist und wir \mathbb{R} an jedem beliebigen Punkt von S^1 zu einem Punkt zusammenziehen können. Aus demselben Grund ist das Möbius-Band vom selben Homotopietyp wie S^1 .

(b) Eine Scheibe $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ ist vom selben Homotopietyp wie ein Punkt. $D^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist vom selben Homotopietyp wie S^1 . Entsprechend ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vom selben Homotopietyp wie S^1 und $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ wie S^2 . \diamond

2.4.4 Euler-Charakteristik: ein Beispiel

Die Euler-Charakteristik ist eine der nützlichsten topologischen Invarianten. Und nicht nur das, sie ist ein besonders gutes Beispiel für den algebraischen Zugang zur Topologie. Um unnötige Verkomplizierungen zu vermeiden, beschränken wir uns hier auf Punkte, Linien und Flächen im \mathbb{R}^3 . Ein **Polyeder** ist ein geometrisches Objekt, das von Flächen umgeben ist. Zwei Flächen treffen sich in einer Kante und zwei Kanten in einer Ecke. Wir erweitern diese Definition eines Polyeders noch ein wenig, um auch Polygone und deren Ecken und Kanten miteinzubeziehen. Die Flächen,

Kanten und Ecken eines Polyeders nennen wir **Simplexe**². Beachten Sie, dass zwei Simplexe entweder in einem anderen Simplex zusammenstoßen oder gar nicht (ihre Schnittmenge ist leer oder ein Simplex – beispielsweise treffen sich zwei Flächen, wie gesagt, in einer Kante). Formale Definitionen von Simplex und Polyeder für beliebig viele Dimensionen werden in Kapitel 3 gegeben. Damit sind wir so weit, die Euler-Charakteristik eines Körpers im \mathbb{R}^3 zu definieren:

Definition 2.10. Sei X eine zu einem Polyeder K homöomorphe Teilmenge des \mathbb{R}^3 . Dann ist die **Euler-Charakteristik** $\chi(X)$ von X definiert durch

$$\begin{aligned}\chi(X) = & (\text{Zahl der Ecken von } K) - (\text{Zahl der Kanten von } K) \\ & + (\text{Zahl der Flächen von } K).\end{aligned}\tag{2.31}$$

Möglicherweise argwöhnen Sie jetzt, dass $\chi(X)$ von der Art des Polyeders K abhängen könnte. Der folgende Satz von Poincaré und Alexander garantiert uns, dass die Euler-Charakteristik tatsächlich unabhängig vom betrachteten Polyeder K ist.

Satz 2.4. (Poincaré-Alexander-Theorem) Die Euler-Charakteristik $\chi(X)$ ist unabhängig vom betrachteten Polyeder K , solange K homöomorph zu X ist.

Ein paar Beispiele sind sicherlich angebracht. Die Euler-Charakteristik eines Punkts ist per definitionem $\chi(\cdot) = 1$. Die Euler-Charakteristik einer Linie ist $\chi(\text{---}) = 2 - 1 = 1$, da sie zwei Ecken und eine Kante hat. Für eine dreieckige Scheibe ergibt sich $\chi(\text{Dreieck}) = 3 - 3 + 1 = 1$. Ein etwas weniger triviales Beispiel ist die Euler-Charakteristik von S^1 . Das einfachste zu S^1 homöomorphe Polyeder besteht aus den drei Kanten eines Dreiecks, also ist $\chi(S^1) = 3 - 3 = 0$. Dementsprechend hat die zur Oberfläche eines Tetraeders homöomorphe Sphäre S^2 die Euler-Charakteristik $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$. Man sieht leicht, dass die S^2 ebenso homöomorph zur Oberfläche eines Würfels ist. Berechnen wir die Euler-Charakteristik von S^2 anhand der Würfeloberfläche, erhalten wir wiederum $\chi(S^2) = 8 - 12 + 6 = 2$, in Übereinstimmung mit Satz 2.4. Historisch gesehen ist dies eine Schlussfolgerung aus dem **Euler'schen Polyedersatz**: Wenn K ein beliebiges zur S^2 homöomorphes Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f zweidimensionalen Flächen ist, dann gilt $e - k + f = 2$.

Beispiel 2.15. Wir berechnen die Euler-Charakteristik des Torus T^2 . Abb. 2.11(a) zeigt ein Beispiel für ein zu T^2 homöomorphes Polyeder. Bei diesem Polyeder ergibt sich $\chi(T^2) = 16 - 32 + 16 = 0$. Wie wir in Beispiel 2.5(b) gesehen haben, ist T^2 äquivalent zu einem Rechteck, dessen Kanten wie in Abb. 2.4 dargestellt miteinan-

² Dies ist eine etwas andere Bedeutung des Worts „Simplex“ als diejenige, in der Punkt, Strecke, Dreieck, Tetraeder, Pentatop, … „ n -Simplex“ genannt werden und die wir in Kapitel 3 vorstellen werden (Anm. d. Ü.).

der identifiziert werden. Ausgehend von dieser Identifikation kommen wir zu einem Beispiel für ein Polyeder mit rechteckigen Begrenzungsflächen, wie in Abb. 2.11(b) dargestellt, woraus sich ebenfalls $\chi(T^2) = 0$ ergibt. Dieser Ansatz ist sehr praktisch, wenn eine Figur nicht im \mathbb{R}^3 realisiert (in ihn eingebettet) werden kann. So lässt sich die Klein'sche Flasche in Abb. 2.5(a) nicht im \mathbb{R}^3 realisieren, ohne dass sie sich selbst schneidet. Aus dem Rechteck in Abb. 2.5(a) können wir jedoch auch in diesem Fall bestimmen, dass $\chi(\text{Klein'sche Flasche}) = 0$ ist. Auf ähnliche Weise erhalten wir $\chi(\text{projektive Ebene}) = 1$. \diamond

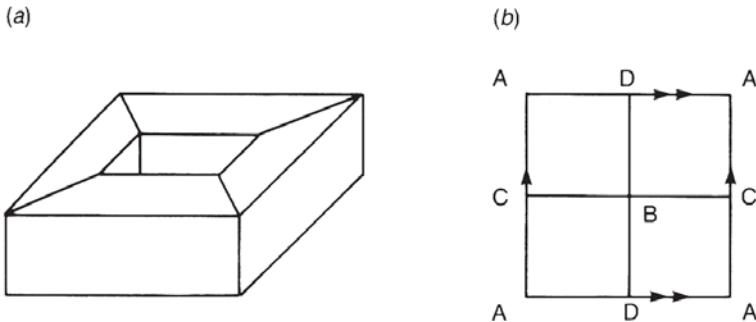


Abb. 2.11. Beispiel für ein zu einem Torus homöomorphes Polyeder.

Übung 2.19 (a) Zeigen Sie, dass $\chi(\text{Möbius-Band}) = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\chi(\Sigma_2) = -2$ ist, wobei Σ_2 für den Torus mit zwei Henkeln aus Beispiel 2.5 steht. Konstruieren Sie hierzu entweder ein Polyeder, das homöomorph zu Σ_2 ist, oder verwenden Sie das Achteck in Abb. 2.7(a). Wir werden später zeigen, dass $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ ist, wenn Σ_g ein Torus mit g Henkeln ist.

Die **zusammenhängende Summe** $X \# Y$ von zwei Flächen X und Y ist die Fläche, die man erhält, wenn man von X und Y jeweils eine kleine Scheibe entfernt und die so entstandenen Löcher durch einen Zylinder verbindet; siehe Abb. 2.12. Sei X eine beliebige Fläche. Es ist leicht zu sehen, dass gilt:

$$S^2 \# X = X, \quad (2.32)$$

denn S^2 und der Zylinder können so verformt werden, dass sie das Loch in X schließen; siehe Abb. 2.12(a). Als zusammenhängende Summe von zwei Tori erhalten wir die in Abb. 2.12(b) dargestellte Figur:

$$T^2 \# T^2 = \Sigma_2. \quad (2.33)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich Σ_g als die zusammenhängende Summe von g Tori:

$$\underbrace{T^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2}_{g \text{ Faktoren}} = \Sigma_g. \quad (2.34)$$

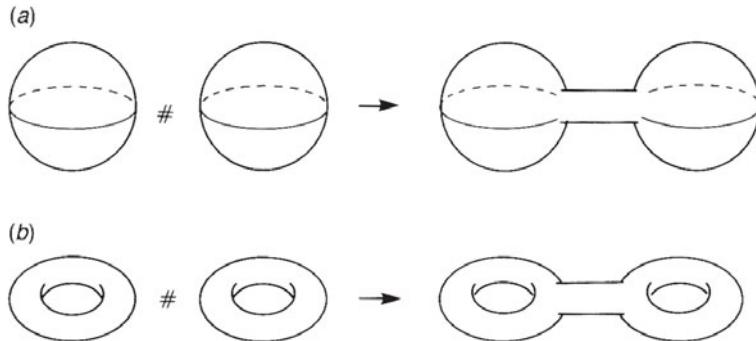


Abb. 2.12. Die zusammenhängende Summe von zwei 2-Sphären (a) ist die 2-Sphäre ($S^2 \# S^2 = S^2$), und die von zwei Tori (b) ist der Doppeltorus Σ_2 ($T^2 \# T^2 = \Sigma_2$).

Die zusammenhängende Summe lässt sich als Rechentrick nutzen, um die Euler-Charakteristik einer kompliziert geformten Fläche auf die von bekannten Flächen zurückzuführen. Lassen Sie uns den folgenden Satz beweisen.

Satz 2.5. Es seien X und Y zwei Flächen. Dann ist die Euler-Charakteristik der zusammenhängenden Summe $X \# Y$ gegeben durch

$$\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

Beweis

Wir betrachten zwei Polyeder K_X und K_Y , die homöomorph zu X bzw. Y sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass sowohl K_X als auch K_Y ein Dreieck enthalten. Wir entfernen diese Dreiecke und verbinden die so entstehenden Löcher durch einen dreieckigen Zylinder (bzw. ein dreieckiges Prisma). Dadurch ändert sich die Zahl der Ecken nicht, während sich die Zahl der Kanten um drei erhöht. Außerdem haben wir zwei Flächen entfernt und drei hinzugefügt, also erhöht sich die Zahl der Flächen um $-2 + 3 = 1$. Damit hat sich die Euler-Charakteristik um $0 - 3 + 1 = -2$ geändert. \square

Aus dem soeben bewiesenen Satz und wegen $\chi(T^2) = 0$ folgern wir, dass $\chi(\Sigma_2) = 0 + 0 - 2 = -2$ und $\chi(\Sigma_g) = g \times 0 - 2(g - 1) = 2 - 2g$ ist, vgl. Übung 2.19(b).

Die Bedeutung der Euler-Charakteristik liegt darin, dass sie als topologische Invariante relativ leicht zu berechnen ist. Ohne Beweis akzeptieren wir den folgenden Satz:

Satz 2.6. Es seien X und Y zwei Figuren im \mathbb{R}^3 . Wenn X homöomorph zu Y ist, dann ist $\chi(X) = \chi(Y)$. Mit anderen Worten: Wenn $\chi(X) \neq \chi(Y)$ ist, dann kann X nicht homöomorph zu Y sein.

Beispiel 2.16. (a) S^1 ist nicht homöomorph zu S^2 , da $\chi(S^1) = 0$ ist, jedoch $\chi(S^2) = 2$ ist.

(b) Zwei nicht zueinander homöomorphe Figuren können dieselbe Euler-Charakteristik haben: Ein Punkt (\cdot) ist nicht homöomorph zu einer Linie ($—$), aber es ist $\chi(\cdot) = \chi(—) = 1$. Dies ist eine allgemeine Konsequenz aus der folgenden Tatsache: *Wenn eine Figur X vom selben Homotopietyp ist wie eine Figur Y, dann ist $\chi(X) = \chi(Y)$.* \diamond

Vielleicht ist es Ihnen aufgefallen, dass die Euler-Charakteristik sich grundsätzlich von anderen topologischen Invarianten wie Kompaktheit oder Zusammenhang unterscheidet. Kompaktheit und Zusammenhang sind geometrische Eigenschaften einer Figur oder eines Raums, während die Euler-Charakteristik eine *ganze Zahl* $\chi(X) \in \mathbb{Z}$ ist. Beachten Sie, dass \mathbb{Z} eher ein algebraisches Objekt ist als ein geometrisches. Seit Eulers bahnbrechenden Arbeiten haben viele Mathematiker die sich hierin zeigende Beziehung zwischen Geometrie und Algebra herausgearbeitet und im vorigen Jahrhundert die Kombinatorische bzw. Algebraische Topologie etabliert. Wir können die Euler-Charakteristik einer glatten Fläche mithilfe des berühmten Satzes von Gauß-Bonnet berechnen, der das Integral über die Gauß'sche Krümmung einer Fläche mit der Euler-Charakteristik des zugehörigen Polyeders verknüpft. Die allgemeine Form des Satzes von Gauß-Bonnet werden wir in Kapitel 12 kennenlernen.

Aufgaben

2.1 Zeigen Sie, dass das $4g$ -gon in Abb. 2.13(a) zusammen mit der angegebenen Identifikation der Kanten den Torus mit Geschlecht g aus Abb. 2.13(b) repräsentiert. Sie können hierzu Gleichung (2.34) verwenden.

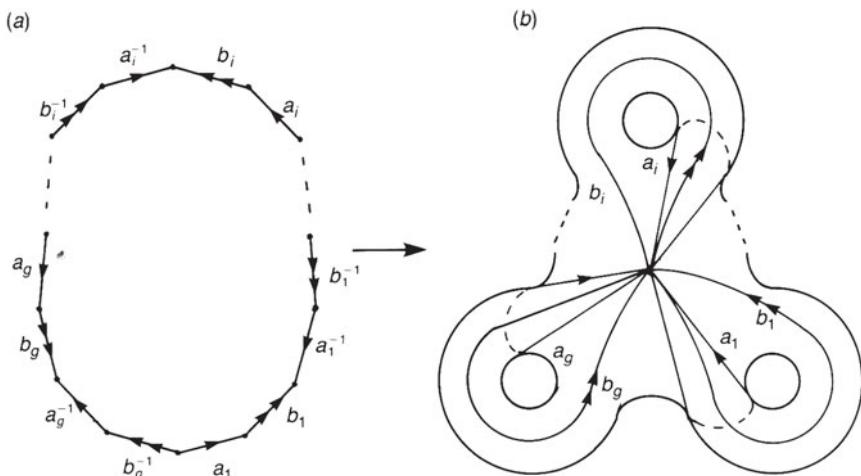


Abb. 2.13. Wenn bei dem Polygon (a) die Kanten wie dargestellt identifiziert werden, ist es der Torus Σ_g mit Geschlecht g .

2.2 Es sei $X = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ eine Teilmenge von \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass X nicht abgeschlossen in \mathbb{R} ist. Zeigen Sie, dass $Y = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots, 0\}$ abgeschlossen in \mathbb{R} ist, also kompakt.

2.3 Zeigen Sie, dass die zwei Figuren in Abb. 2.10(b) homöomorph zueinander sind. Finden Sie heraus, wie sich die beiden Ringe im rechten Teilbild im \mathbb{R}^4 entkoppeln lassen.

2.4 Zeigen Sie, dass es nur fünf reguläre Polyeder (platonische Körper) gibt: Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. (*Tipp:* Nutzen Sie den Euler'schen Polyedersatz.)

3

Homologiegruppen

Unter den topologischen Invarianten ist die Euler-Charakteristik eine Größe, die sich relativ einfach berechnen lässt, wenn man den Raum „polydrisiert“. Homologiegruppen sind sozusagen eine *Verfeinerung* dieser Euler-Charakteristik. Darüber hinaus können wir aus Homologiegruppen leicht die Euler-Charakteristik ablesen. Schauen wir uns Abb. 3.1 an. In Abb. 3.1(a) gehört das Innere des Dreiecks zur Figur, in Abb. 3.1(b) nicht. Wie können wir diesen Unterschied sauber formulieren? Offensichtlich bilden die drei Kanten in Abb. 3.1(a) den Rand der Fläche in ihrem Inneren, während die Kanten in Abb. 3.1(b) nicht die Kanten von irgendetwas sind, weil es dort *kein Inneres gibt*. Natürlich bilden die Kanten in beiden Fällen einen in sich geschlossenen Pfad (eine Schleife), der somit jeweils selbst keinen Rand hat. Mit anderen Worten: Die Existenz einer Schleife, die nicht der Rand von irgendeiner Fläche ist, impliziert die Existenz eines Lochs innerhalb der Schleife. Dies ist die Richtschnur, anhand der wir in diesem Kapitel Räume klassifizieren werden: *Finde ein Gebiet ohne Ränder, das nicht selbst der Rand von irgendeinem Gebiet ist.* Mathematisch ausformuliert wird dieses Prinzip mit der Theorie der Homologiegruppen.

Unsere Darstellung folgt Armstrong (1983), Croom (1978) sowie Nash und Sen (1983). Eine Einführung in die Gruppentheorie finden Sie bei Fraleigh (1976).

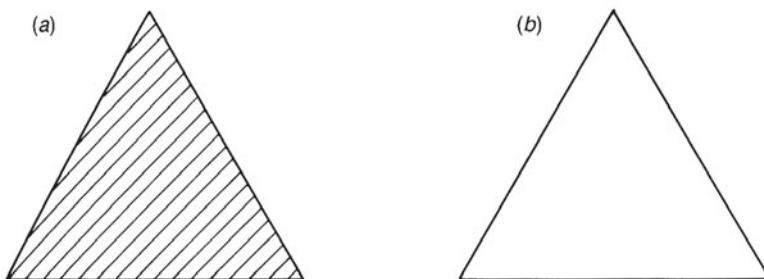


Abb. 3.1. (a) ist eine komplette Dreiecksfläche mit Rand, während (b) nur aus den Kanten eines Dreiecks ohne dessen Inneres besteht.

3.1 Abel'sche Gruppen

Die mathematische Struktur, die den Homologiegruppen zugrunde liegt, ist die *endlich erzeugte Abel'sche Gruppe*. In diesem Kapitel verwenden wir für die Gruppenoperation durchgängig das Zeichen „+“, da alle betrachteten Gruppen Abel'sch, d. h. kommutativ sind. Das neutrale Element bezeichnen wir mit „0“.

3.1.1 Elementare Gruppentheorie

Es seien G_1 und G_2 Abel'sche Gruppen. Eine Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ nennt man einen **Homomorphismus**, wenn

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (3.1)$$

für beliebige $x, y \in G_1$ gilt. Wenn f auch eine *Bijektion* ist, nennt man f einen **Isomorphismus**. Wenn ein Isomorphismus $f : G_1 \rightarrow G_2$ existiert, sind G_1 und G_2 zueinander **isomorph**: $G_1 \cong G_2$. Beispielsweise ist eine Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, die definiert ist durch

$$f(2n) = 0, \quad f(2n+1) = 1,$$

ein Homomorphismus. In der Tat ist

$$\begin{aligned} f(2m+2n) &= f(2(m+n)) = 0 = 0+0 = f(2m)+f(2n), \\ f(2m+1+2n+1) &= f(2(m+n+1)) = 0 = 1+1 = f(2m+1)+f(2n+1), \\ f(2m+1+2n) &= f(2(m+n)+1) = 1 = 1+0 = f(2m+1)+f(2n). \end{aligned}$$

Eine Teilmenge $H \subset G$ ist eine Untergruppe, wenn sie bezüglich der Gruppenoperation von G eine Gruppe ist. Zum Beispiel ist

$$j\mathbb{Z} \equiv \{jn \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad (j \in \mathbb{N})$$

eine Untergruppe von \mathbb{Z} , während $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ keine Untergruppe von \mathbb{Z} ist.

Sei H eine Untergruppe von G . Wir sagen, dass $x, y \in G$ äquivalent sind, wenn

$$x - y \in H \quad (3.2)$$

ist, und schreiben $x \sim y$. Natürlich ist \sim eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse, der x angehört, bezeichnen wir als $[x]$. Sei G/H der Quotientenraum. Die Gruppenoperation $+$ von G induziert auf natürliche Weise eine Gruppenoperation $+$ in G/H durch

$$[x] + [y] = [x + y]. \quad (3.3)$$

Beachten Sie, dass das „+“ auf der linken Seite der Gleichung eine Operation in G/H bezeichnet, während das „+“ auf der rechten Seite für eine Operation in G steht. Die Operation in G/H sollte unabhängig von der Wahl der Repräsentanten

sein. Tatsächlich ergibt sich für $[x'] = [x]$ und $[y'] = [y]$, dass $x - x' = h$, $y - y' = g$ für gewisse $h, g \in H$ ist. Außerdem ist dann

$$x' + y' = x + y - (h + g) \in [x + y].$$

Weiterhin wird G/H mit dieser Operation eine Gruppe, da H immer ein Normalteiler von G ist; siehe Beispiel 2.6. Das neutrale Element von G/H ist $[0] = [h]$ ($h \in H$). Für $H = G$ ist $0 - x \in G$ für jedes $x \in G$, und G/G hat nur das eine Element $[0]$. Wenn $H = \{0\}$, dann ist G/H die Gruppe G selbst, denn es ist $x - y = 0$ dann und nur dann, wenn $x = y$ ist.

Beispiel 3.1. Lassen Sie uns die Quotientengruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bestimmen. Für gerade Zahlen ergibt sich $2n - 2m = 2(n - m) \in 2\mathbb{Z}$ und $[2m] = [2n]$. Für ungerade Zahlen ist $(2n+1) - (2m+1) = 2(n-m) \in 2\mathbb{Z}$ und $[2m+1] = [2n+1]$. Gerade und ungerade Zahlen gehören niemals zur selben Äquivalenzklasse, wegen $2n - (2m+1) \notin 2\mathbb{Z}$. Daraus folgt

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0], [1]\}. \quad (3.4)$$

Wenn wir einen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ durch $\varphi([0]) = 0$ und $\varphi([1]) = 1$ definieren, ergibt sich $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$. Für eine beliebige natürliche Zahl $j \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{Z}/j\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_j. \quad (3.5)$$

◊

Lemma 3.1. Es sei $f : G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

- (a) $\ker f = \{x | x \in G_1, f(x) = 0\}$ ist eine Untergruppe von G_1 und
- (b) $\operatorname{im} f = \{x | x \in f(G_1) \subset G_2\}$ ist eine Untergruppe von G_2 .

Beweis

(a) Seien $x, y \in \ker f$. Dann ist $x + y \in \ker f$ wegen $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$. Beachten Sie, dass $0 \in \ker f$ ist, wegen $f(0) = f(0) + f(0)$. Es ist außerdem $-x \in \ker f$, wegen $f(-x) = f(x - x) = f(x) + f(-x) = 0$.

(b) Seien $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) \in \operatorname{im} f$ mit $x_1, x_2 \in G_1$. Da f ein Homomorphismus ist, gilt $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in \operatorname{im} f$. Offenkundig ist $0 \in \operatorname{im} f$ wegen $f(0) = 0$. Wenn $y = f(x)$, ist auch $-y \in \operatorname{im} f$, denn $0 = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ impliziert $f(-x) = -y$. □

Satz 3.1. (Homomorphiesatz) Es sei $f : G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus. Dann ist

$$G_1/\ker f \cong \operatorname{im} f. \quad (3.6)$$

Beweis

Nach Lemma 3.1 sind beide Seiten Gruppen. Wir definieren $\varphi : G_1/\ker f \rightarrow \operatorname{im} f$ durch $\varphi([x]) = f(x)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für jedes $x' \in [x]$ exis-

tiert $h \in \ker f$, sodass $x' = x + h$ und $f(x') = f(x + h) = f(x) + f(h) = f(x)$ ist. Jetzt zeigen wir, dass φ ein Isomorphismus ist. Erstens ist φ ein Homomorphismus:

$$\begin{aligned}\varphi([x] + [y]) &= \varphi([x+y]) = f(x+y) \\ &= f(x) + f(y) = \varphi([x]) + \varphi([y]).\end{aligned}$$

Zweitens ist φ injektiv: Aus $\varphi([x]) = \varphi([y])$ folgt $f(x) = f(y)$ oder $f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$. Dies zeigt, dass $x-y \in \ker f$ und $[x] = [y]$ ist. Schließlich ist φ surjektiv: Für $y \in \text{im } f$ existiert $x \in G_1$, sodass $f(x) = y = \varphi([x])$ ist. \square

Beispiel 3.2. Es sei $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definiert durch $f(2n) = 0$ und $f(2n+1) = 1$. Dann sind $\ker f = 2\mathbb{Z}$ und $\text{im } f = \mathbb{Z}_2$ Gruppen. Satz 3.1 besagt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$, in Einklang mit Beispiel 3.1. \diamond

3.1.2 Endlich erzeugte Abel'sche Gruppen und freie Abel'sche Gruppen

Sei x ein Element einer Gruppe G . Für $n \in \mathbb{Z}$ bedeutet nx

$$\underbrace{x + \cdots + x}_n \quad (\text{wenn } n > 0)$$

bzw.

$$\underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{|n|} \quad (\text{wenn } n < 0).$$

Wenn $n = 0$ ist, setzen wir $0x = 0$. Betrachten wir r Elemente x_1, \dots, x_r aus G . Die Elemente von G von der Form

$$n_1x_1 + \cdots + n_rx_r \quad (n_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq r) \tag{3.7}$$

bilden eine Untergruppe H von G . Wir nennen H eine von den **Erzeugern** x_1, \dots, x_r **erzeugte** Untergruppe von G . Wenn G selbst von der endlichen Zahl von Elementen x_1, \dots, x_r erzeugt wird, heißt G **endlich erzeugt**. Wenn $n_1x_1 + \cdots + n_rx_r = 0$ nur dann erfüllt ist, wenn alle $n_1 = \cdots = n_r = 0$ sind, dann sagt man, die x_1, \dots, x_r seien **linear unabhängig**.

Definition 3.1. Wenn G durch r linear unabhängige Elemente endlich erzeugt wird, nennt man G eine **freie Abel'sche Gruppe** vom **Rang** r .

Beispiel 3.3. Die ganzen Zahlen \mathbb{Z} sind eine freie Abel'sche Gruppe vom Rang 1, die durch 1 (oder -1) endlich erzeugt wird. Sei $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ die Menge von Zahlenpaaren $\{(i, j) | i, j \in \mathbb{Z}\}$. Diese Menge ist eine freie Abel'sche Gruppe vom Rang 2, die durch die Erzeuger $(1, 0)$ und $(0, 1)$ endlich erzeugt wird. Allgemeiner ist

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_r$$

eine freie Abel'sche Gruppe vom Rang r . Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ wird von der 1 endlich erzeugt, ist aber *nicht* frei, denn 1 ist nicht linear unabhängig (beachten Sie $1 + 1 = 0$). \diamond

3.1.3 Zyklische Gruppen

Wenn G durch ein Element x erzeugt wird, $G = \{0, \pm x, \pm 2x, \dots\}$, heißt G **zyklische Gruppe**. Wenn $nx \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist, handelt es sich um eine **unendliche zyklische Gruppe**. Ist dagegen $nx = 0$ für irgendein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so liegt eine **endliche zyklische Gruppe** vor. Sei G eine zyklische Gruppe, die durch x erzeugt wird, und sei $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$ ein Homomorphismus mit $f(n) = nx$. f bildet \mathbb{Z} surjektiv auf G ab, aber nicht notwendigerweise injektiv. Aus Satz 3.1 wissen wir: $G = \text{im } f \cong \mathbb{Z}/\ker f$. Sei nun N die kleinste positive ganze Zahl, mit der $Nx = 0$ wird. Offensichtlich ist dann

$$\ker f = \{0, \pm N, \pm 2N, \dots\} = N\mathbb{Z}, \quad (3.8)$$

und es folgt

$$G \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_N. \quad (3.9)$$

Wenn G eine unendliche zyklische Gruppe ist, dann gilt $\ker f = \{0\}$ und $G \cong \mathbb{Z}$. Jede unendliche zyklische Gruppe ist isomorph zur Menge \mathbb{Z} , während eine finite zyklische Gruppe isomorph zu einem \mathbb{Z}_N ist.

Wir werden zu gegebener Zeit das folgende Lemma und den folgenden Satz benötigen. Als erstes zitieren wir das Lemma ohne Beweis:

Lemma 3.2. Seien G eine freie Abel'sche Gruppe vom Rang r und $H (\neq \emptyset)$ eine Untergruppe von G . Wir können immer p Erzeuger x_1, \dots, x_p aus den r Erzeugern von G wählen, sodass k_1x_1, \dots, k_px_p die Untergruppe H erzeugen. Somit ist $H \cong k_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus k_p\mathbb{Z}$, also hat H den Rang p .

Satz 3.2. (Hauptsatz über endlich erzeugte Abel'sche Gruppen) Sei G eine endlich erzeugte (aber nicht notwendigerweise freie) Abel'sche Gruppe mit m Erzeugern. Dann ist G isomorph zu einer direkten Summe zyklischer Gruppen

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_r \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_p}, \quad (3.10)$$

mit $m = r + p$. Die Zahl r ist der **Rang** von G .

Beweis

Es werde G von m Elementen x_1, \dots, x_m erzeugt, und es sei

$$f : \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m \rightarrow G$$

ein surjektiver Homomorphismus:

$$f(n_1, \dots, n_m) = n_1x_1 + \dots + n_mx_m.$$

Satz 3.1 besagt:

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_m / \ker f \cong G.$$

Da $\ker f$ eine Untergruppe von

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_m$$

ist, garantiert Lemma 3.2 bei richtiger Wahl der Erzeuger, dass gilt:

$$\ker f \cong k_1 \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus k_p \mathbb{Z}.$$

Schließlich erhalten wir

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_m / \ker f \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_m / (k_1 \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus k_p \mathbb{Z}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m-p} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_p}.$$

□

3.2 Simplexe und Simplizialkomplexe

Erinnern wir uns, wie wir die Euler-Charakteristik einer Figur berechnet haben: Wir haben zuerst ein Polyeder konstruiert, das homöomorph zu der gegebenen Figur ist, und dann die Ecken, Kanten und Flächen gezählt. Die Euler-Charakteristik des Polyeders, und damit der Figur, ist dann durch Gleichung (2.31) gegeben. Wir abstrahieren diese Prozedur, sodass wir jeden Teil einer Figur durch ein gewisses *Standardobjekt* darstellen können. Als solche Standardobjekte wählen wir Dreiecke sowie ihre Analoga in anderen Dimensionen, genannt Simplexe. Durch diese Standardisierung wird es möglich, jeder Figur Abel'sche Gruppenstrukturen zuzuschreiben.

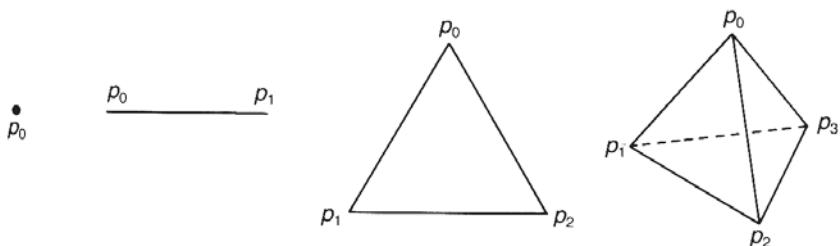


Abb. 3.2. 0-, 1-, 2- und 3-Simplex, also Punkt, Strecke, Dreieck und Tetraeder.

3.2.1 Simplexe

Simplexe sind die Grundbausteine von Polyedern. Ein 0-Simplex $\langle p_0 \rangle$ ist ein Punkt (oder eine Ecke), und ein 1-Simplex $\langle p_0 p_1 \rangle$ ist eine Linie, Strecke bzw. Kante. Ein 2-Simplex $\langle p_0 p_1 p_2 \rangle$ ist definiert als ein Dreieck einschließlich seines Inneren, und ein 3-Simplex $\langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$ ist ein Tetraeder, ebenfalls inklusive des eingeschlossenen Raums (Abb. 3.2). Es ist üblich, ein 0-Simplex ohne die spitze Klammer zu schreiben, also p_0 statt $\langle p_0 \rangle$. Es ist wirklich nicht schwer, ein beliebiges r -Simplex $\langle p_0 p_1 \dots p_r \rangle$ zu konstruieren. Beachten Sie Folgendes: Damit ein r -Simplex ein r -dimensionales Objekt repräsentieren kann, müssen die Ecken p_i geometrisch unabhängig sein, d. h., es darf keine $(r-1)$ -dimensionale Hyperebene alle $r+1$ Punkte enthalten. Es seien also p_0, \dots, p_r geometrisch unabhängige Punkte im \mathbb{R}^m mit $m \geq r$. Das r -Simplex $\sigma_r = \langle p_0, \dots, p_r \rangle$ wird ausgedrückt als

$$\sigma^r = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=0}^r c_i p_i, \quad c_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^r c_i = 1 \right\}. \quad (3.11)$$

Die (c_0, \dots, c_r) heißen **baryzentrische Koordinaten** von x . Da σ_r eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^m ist, ist es kompakt.

Sei q eine ganze Zahl, sodass $0 \leq q \leq r$ ist. Wenn wir $q+1$ Punkte p_{i_0}, \dots, p_{i_q} aus den p_0, \dots, p_r auswählen, definieren diese $q+1$ Punkte ein q -Simplex $\sigma_q = \langle p_{i_0}, \dots, p_{i_q} \rangle$, das wir eine **q -Seite** (q -Facette) von σ_r nennen. Wir schreiben $\sigma_q \leq \sigma_r$, wenn σ_q eine Seite von σ_r ist. Wenn $\sigma_q \neq \sigma_r$ ist, sagen wir, dass σ_q eine **eigentliche Seite** von σ_r ist, geschrieben als $\sigma_q < \sigma_r$. Abb. 3.3 zeigt eine 0-Seite (Ecke) p_0 und eine 2-Seite (Seitenfläche) $\langle p_1 p_2 p_3 \rangle$ eines 3-Simplexes $\langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$. Das 3-Simplex hat eine 3-Seite, vier 2-Seiten, sechs 1-Seiten und vier 0-Seiten. (Haben Sie die Binomialkoeffizienten erkannt? Weisen Sie nach, dass die Anzahl der q -Seiten eines

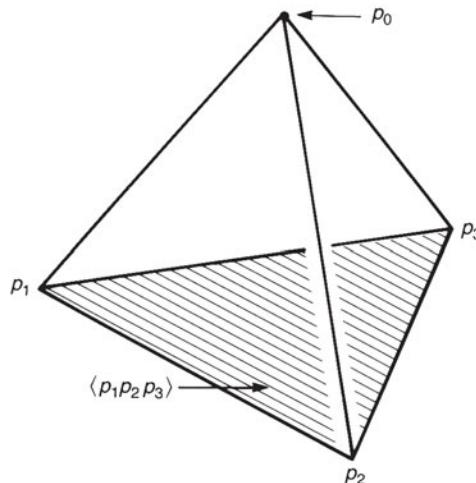


Abb. 3.3. Eine 0-Seite p_0 und eine 2-Seite $\langle p_1 p_2 p_3 \rangle$ eines 3-Simplexes $\langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$.

r -Simplexes gegeben ist durch $\binom{r+1}{q+1}$.) Ein 0-Simplex hat definitionsgemäß keine eigentlichen Seiten.

3.2.2 Simplizialkomplexe und Polyeder

Sei K eine endliche Menge von Simplexen im Raum \mathbb{R}^m . Wenn diese Simplexe *ordentlich* aneinandergesetzt sind, nennen wir K einen **Simplizialkomplex**. Mit „ordentlich“ meinen wir dabei:

- (i) Eine beliebige Seite eines Simplexes aus K gehört zu K , d. h., wenn $\sigma \in K$ und $\sigma' \leq \sigma$ ist, dann ist $\sigma' \in K$.
- (ii) Wenn σ und σ' zwei Simplexe aus K sind, ist ihre Schnittmenge $\sigma \cap \sigma'$ entweder leer oder eine gemeinsame Seite von σ und σ' , d. h., wenn $\sigma, \sigma' \in K$ ist, dann ist entweder $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$, oder es gilt $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$ und $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$.

Abb. 3.4(a) ist beispielsweise ein Simplizialkomplex, Abb. 3.4(b) dagegen nicht. Die Dimension eines Simplizialkomplexes K ist definiert als die größte Dimension eines Simplexes in K .

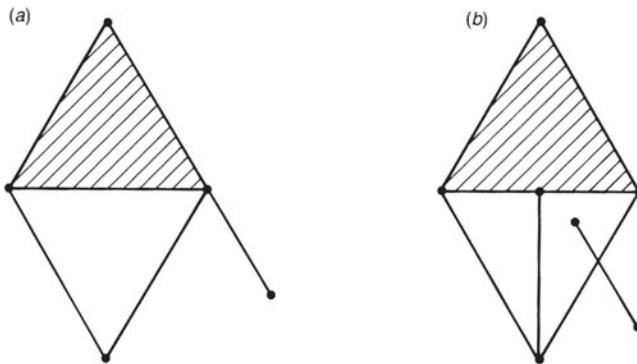


Abb. 3.4. (a) ist ein Simplizialkomplex, (b) nicht.

Beispiel 3.4. Seien σ_r ein r -Simplex und $K = \{\sigma' | \sigma' \leq \sigma_r\}$ eine Menge von Seiten von σ_r . K ist ein r -dimensionaler Simplizialkomplex. Betrachten wir z. B. $\sigma_3 = \langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$ (Abb. 3.3). Dann gehören zu K die folgenden Simplexe:

$$K = \{p_0, p_1, p_2, p_3, \langle p_0 p_1 \rangle, \langle p_0 p_2 \rangle, \langle p_0 p_3 \rangle, \langle p_1 p_2 \rangle, \langle p_1 p_3 \rangle, \langle p_2 p_3 \rangle, \langle p_0 p_1 p_2 \rangle, \langle p_0 p_1 p_3 \rangle, \langle p_0 p_2 p_3 \rangle, \langle p_1 p_2 p_3 \rangle, \langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle\}. \quad (3.12)$$

◇

Ein Simplizialkomplex K ist eine *Menge*, deren Elemente Simplexe sind. Wenn man jedes Simplex als eine Teilmenge des \mathbb{R}^m ansieht ($m \geq \dim K$), dann ist die Vereinigung aller Simplexe eine Teilmenge von \mathbb{R}^m . Diese Teilmenge wird als **Polyeder**

$|K|$ des Simplizialkomplexes K bezeichnet. Die Dimension von $|K|$ als eine Teilmenge des \mathbb{R}^m ist die gleiche wie die von K : $\dim |K| = \dim K$.

Sei X ein topologischer Raum. Existieren ein Simplizialkomplex K und ein Homöomorphismus $f : |K| \rightarrow X$, dann heißt X **triangulierbar**, und das Paar (K, f) ist eine **Triangulation** von X . Bei einem gegebenen topologischen Raum X ist seine Triangulation alles andere als eindeutig. Wir werden es ausschließlich mit triangulierbaren Räumen zu tun haben.

Beispiel 3.5. Abb. 3.5(a) ist eine Triangulation des Zylinders $S^1 \times [0, 1]$. Sie könnten jetzt einwenden, dass es etwas einfachere Möglichkeiten dafür geben sollte, etwa die Abb. 3.5(b) gezeigte. Diese ist jedoch keine Triangulation, denn für $\sigma_2 = \langle p_0 p_1 p_2 \rangle$ und $\sigma'_2 = \langle p_2 p_3 p_0 \rangle$ ergibt sich $\sigma_2 \cap \sigma'_2 = \langle p_0 \rangle \cup \langle p_2 \rangle$, was weder die leere Menge noch ein Simplex ist. \diamond

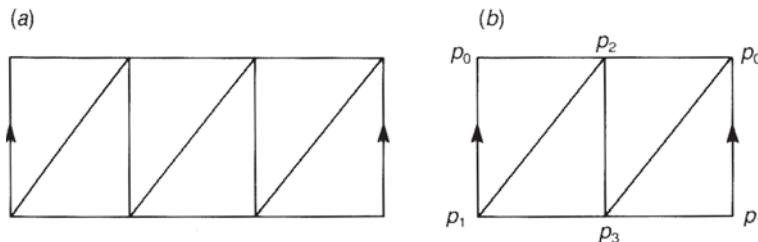


Abb. 3.5. (a) ist die Triangulation eines Zylinders, (b) dagegen nicht.

3.3 Homologiegruppen von Simplizialkomplexen

3.3.1 Orientierte Simplexe

Wir können einem r -Simplex für $r \geq 1$ eine *Orientierung* zuschreiben. Anstelle von „ $\langle \dots \rangle$ “ für ein nichtorientiertes Simplex werden wir für ein orientiertes Simplex die Schreibweise „ (\dots) “ verwenden. Das Symbol σ_r wird für beiden Arten von Simplexen stehen. Ein orientiertes 1-Simplex $\sigma_1 = (p_0 p_1)$ ist ein Linienstück, dessen Richtung von p_0 nach p_1 weist, siehe Abb. 3.6(a). Nun sollte sich natürlich $(p_0 p_1)$ von $(p_1 p_0)$ unterscheiden. Wir legen daher fest:

$$(p_0 p_1) = -(p_1 p_0). \quad (3.13)$$

Hier ist das Minuszeichen vor $(p_1 p_0)$ im Sinn einer endlich erzeugten Abel'schen Gruppe zu verstehen. Tatsächlich lässt sich $(p_1 p_0)$ als das zu $(p_0 p_1)$ *inverse Element*

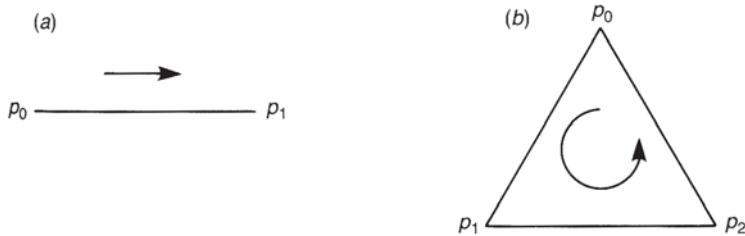


Abb. 3.6. Ein orientiertes 1-Simplex (a) und ein orientiertes 2-Simplex (b).

auffassen. Von \$p_0\$ nach \$p_1\$ und anschließend von \$p_1\$ nach \$p_0\$ zu gehen, bedeutet, nirgendwohin zu gehen: \$(p_0 p_1) + (p_1 p_0) = 0\$, also ist \$-(p_1 p_0) = (p_0 p_1)\$.

In ähnlicher Weise ist ein orientiertes 2-Simplex \$\sigma_2 = (p_0 p_1 p_2)\$ ein dreieckiges Gebiet \$p_0 p_1 p_2\$ mit einem durch die Reihenfolge der Ecken vorgegebenen Drehsinn, siehe Abb. 3.6(b). Beachten Sie, dass die durch \$p_0 p_1 p_2\$ gegebene Orientierung dieselbe ist wie die von \$p_2 p_0 p_1\$ oder \$p_1 p_2 p_0\$, aber entgegengesetzt zu der von \$p_0 p_2 p_1\$, \$p_2 p_1 p_0\$ oder \$p_1 p_0 p_2\$. Wir setzen also

$$\begin{aligned}(p_0 p_1 p_2) &= (p_2 p_0 p_1) = (p_1 p_2 p_0) \\ &= -(p_0 p_2 p_1) = -(p_2 p_1 p_0) = -(p_1 p_0 p_2).\end{aligned}$$

Wenn \$P\$ eine Permutation von \$0, 1, 2\$ ist, mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ i & j & k \end{pmatrix},$$

dann lässt sich dies übersichtlicher wie folgt fassen:

$$(p_i p_j p_k) = \text{sgn}(P)(p_0 p_1 p_2),$$

mit \$\text{sgn}(P) = +1 (-1)\$, wenn \$P\$ eine gerade (ungerade) Permutation ist.

Ein orientiertes 3-Simplex \$\sigma_3 = (p_0 p_1 p_2 p_3)\$ ist eine geordnete Abfolge (Folge) von vier Ecken eines Tetraeders. Sei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$$

eine Permutation. Dann setzen wir

$$(p_i p_j p_k p_l) = \text{sgn}(P)(p_0 p_1 p_2 p_3).$$

Nun liegt es auf der Hand, wie ein allgemeines orientiertes \$r\$-Simplex für beliebige \$r \geq 1\$ zu konstruieren ist. Die formale Definition geht wie folgt: Wir betrachten \$r+1\$ geometrisch unabhängige Punkte \$p_0, p_1, \dots, p_r\$ aus dem \$\mathbb{R}^m\$. Sei \$\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_r}\}\$ eine Folge von Punkten, die man durch eine Permutation der Punkte \$p_0, \dots, p_r\$ erhält. Wir definieren, dass \$\{p_0, \dots, p_r\}\$ und \$\{p_{i_0}, \dots, p_{i_r}\}\$ äquivalent sind, wenn

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & r \\ i_0 & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}$$

eine gerade Permutation ist. Natürlich ist dies eine Äquivalenzrelation, und die entsprechende Äquivalenzklasse wird ein **orientiertes r -Simplex** genannt. Es gibt zwei Äquivalenzklassen, die geraden Permutationen von p_0, \dots, p_r und die ungeraden. Die Äquivalenzklasse (orientiertes r -Simplex), welche $\{p_0, \dots, p_r\}$ enthält, wird als $\sigma_r = (p_0 p_1 \dots p_r)$ bezeichnet, während wir die andere mit $-\sigma_r = -(p_0 p_1 \dots p_r)$ bezeichnen. Anders ausgedrückt:

$$(p_{i_0} p_{i_1} \dots p_{i_r}) = \text{sgn}(P)(p_0 p_1 \dots p_r). \quad (3.14)$$

Für $r = 0$ definieren wir formal, dass ein orientiertes 0-Simplex einfach nur der Punkt $\sigma_0 = p_0$ sein soll.

3.3.2 Kettengruppe, Zyklengruppe und Rändergruppe

Sei $K = \{\sigma_\alpha\}$ ein n -dimensionaler Simplizialkomplex. Wir betrachten die Simplexe σ_α aus K als orientierte Simplexe und verwenden dafür, wie gesagt, die gleichen Symbole σ_α .

Definition 3.2. Die **r -Kettengruppe** $C_r(K)$ eines Simplizialkomplexes K ist eine freie Abel'sche Gruppe, die von den orientierten r -Simplexen von K erzeugt wird („ C “ steht für engl. chain). Wenn $r > \dim K$ ist, dann ist $C_r(K)$ definitionsgemäß 0. Ein Element von $C_r(K)$ wird eine **r -Kette** genannt.

Wir betrachten I_r r -Simplexe in K , die jeweils mit $\sigma_{r,i}$ bezeichnet seien ($1 \leq i \leq I_r$). Dann kann man $c \in C_r(K)$ als

$$c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i} \quad (c_i \in \mathbb{Z}) \quad (3.15)$$

ausdrücken. Die ganzen Zahlen c_i sind die Koeffizienten von c . Die Gruppenstruktur ist die folgende: Als Addition von zwei r -Ketten $c = \sum_i c_i \sigma_{r,i}$ und $c' = \sum_i c'_i \sigma_{r,i}$ wählen wir

$$c + c' = \sum_i (c_i + c'_i) \sigma_{r,i}. \quad (3.16)$$

Das neutrale Element ist $0 = \sum_i 0 \cdot \sigma_{r,i}$, während das inverse Element von c durch $-c = \sum_i (-c_i) \sigma_{r,i}$ gegeben ist. (Anmerkung: Ein entgegengesetzt orientiertes r -Simplex $-\sigma_r$ identifizieren wir mit $(-1)\sigma_r \in C_r(K)$.) Damit ist $C_r(K)$ eine freie Abel'sche Gruppe vom Rang I_r :

$$C_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{I_r}. \quad (3.17)$$

Bevor wir die Zyklengruppe und die Rändergruppe definieren, müssen wir den Randoperator einführen. Wir bezeichnen den Rand eines r -Simplexes σ_r mit $\partial_r \sigma_r$. Dabei sollte ∂_r als ein *Operator* aufgefasst werden, der auf σ_r angewandt dessen

Rand zurückgibt. Auf diese Sichtweise werden wir später noch näher eingehen. Werfen wir einen Blick auf die Ränder von niedrigdimensionalen Simplexen. Da ein 0-Simplex keinen Rand hat, definieren wir

$$\partial_0 p_0 = 0. \quad (3.18)$$

Für ein 1-Simplex $(p_0 p_1)$ setzen wir

$$\partial_1(p_0 p_1) = p_1 - p_0. \quad (3.19)$$

Sie wundern sich vielleicht über das Minuszeichen vor p_0 . Dies hängt wiederum mit der Orientierung zusammen. Die folgenden Beispiele verdeutlichen diesen Punkt: In Abb. 3.7(a) teilen wir ein orientiertes 1-Simplex $(p_0 p_2)$ in zwei Teile, $(p_0 p_1)$ und $(p_1 p_2)$. Sie stimmen sicherlich zu, dass der Rand $(p_0 p_2)$ die Menge $\{p_0\} \cup \{p_2\}$ ist, dies sollte ebenso für den Rand von $(p_0 p_1) + (p_1 p_2)$ gelten. Wenn $\partial_1(p_0 p_2)$ als $p_0 + p_2$ definiert wäre, hätten wir $\partial_1(p_0 p_1) + \partial_1(p_1 p_2) = p_0 + p_1 + p_1 + p_2$. Dies ist unschön, denn p_1 ist eine *fiktive* Unterteilung. Wenn wir hingegen $\partial_1(p_0 p_2) = p_2 - p_0$ setzen, erhalten wir wie gewünscht $\partial_1(p_0 p_1) + \partial_1(p_1 p_2) = p_1 - p_0 + p_2 - p_1 = p_2 - p_0 = \partial_1(p_0 p_2)$. Das nächste Beispiel ist das Dreieck in Abb. 3.7(b). Es ist die Summe aus drei orientierten 1-Simplexen: $(p_0 p_1) + (p_1 p_2) + (p_2 p_0)$. Ihrer (und meiner) Intuition zufolge hat dieses Simplex keinen Rand.¹ Wenn wir auf der Festlegung $\partial_1(p_0 p_1) = p_0 + p_1$ beständen, hätten wir

$$\partial_1(p_0 p_1) + \partial_1(p_1 p_2) + \partial_1(p_2 p_0) = p_0 + p_1 + p_1 + p_2 + p_2 + p_0,$$

was unserer Intuition widerspräche. Wenn wir auf der anderen Seite $\partial_1(p_0 p_1) = p_1 - p_0$ ansetzen, erhalten wir wiederum wie gewünscht

$$\partial_1(p_0 p_1) + \partial_1(p_1 p_2) + \partial_1(p_2 p_0) = p_1 - p_0 + p_2 - p_1 + p_0 - p_2 = 0.$$

Somit müssen wir ein Pluszeichen setzen, wenn in einem Summanden die erste Ecke fehlt, und ein Minuszeichen, wenn die zweite Ecke ausgelassen wurde. Auf dieser Grundlage definieren wir jetzt den Rand eines allgemeinen r -Simplexes.

Sei $\sigma_r(p_0 \dots p_r)$ mit $r > 0$ ein orientiertes r -Simplex. Der **Rand** $\partial_r \sigma_r$ von σ_r ist eine $(r-1)$ -Kette, die durch

$$\partial_r \sigma_r \equiv \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r) \quad (3.20)$$

definiert wird, wobei im i -ten Summanden der Punkt p_i unter dem $\hat{}$ ausgelassen wird. Es ist also

$$\partial_2(p_0 p_1 p_2) = (p_1 p_2) - (p_0 p_2) + (p_0 p_1),$$

$$\partial_3(p_0 p_1 p_2 p_3) = (p_1 p_2 p_3) - (p_0 p_2 p_3) + (p_0 p_1 p_3) - (p_0 p_1 p_2).$$

Formal definieren wir $\partial_0 \sigma_0 = 0$ für $r = 0$.

¹ Das heißt, keine Randpunkte; es geht nicht darum, ob es der Rand eines dreieckigen 2-Simplexes sein könnte.

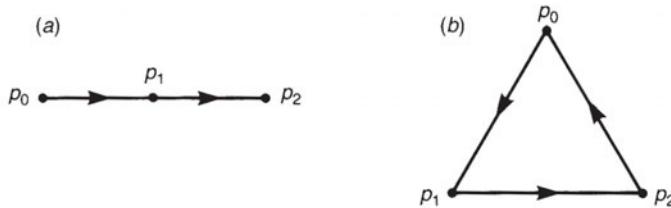


Abb. 3.7. (a) Ein orientiertes 1-Simplex mit einer fiktiven Unterteilung bei p_1 ; (b) ein Simplizialkomplex ohne Rand.

Der Operator ∂_r wirkt auf ein Element $c = \sum_i c_i \sigma_{r,i}$ von $C_r(K)$ linear:

$$\partial_r c = \sum_i c_i \partial_r \sigma_{r,i}. \quad (3.21)$$

Die rechte Seite von Gleichung (3.21) ist ein Element von $C_{r-1}(K)$. Dementsprechend definiert ∂_r eine Abbildung

$$\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K). \quad (3.22)$$

∂_r heißt **Randoperator**. Man sieht leicht, dass der Randoperator ein Homomorphismus ist.

Sei K ein n -dimensionaler Simplizialkomplex. Es existiert eine Folge von freien Abel'sche Gruppen und Homomorphismen,

$$0 \xrightarrow{i} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0, \quad (3.23)$$

wobei $i : 0 \hookrightarrow C_n(K)$ eine Einbettung ist (0 wird hier als das neutrale Element von $C_n(K)$ angesehen). Diese Folge nennt man den mit K assoziierten **Kettenkomplex** $C(K)$. Es ist interessant, *Bild* und *Kern* der Homomorphismen ∂_r zu untersuchen.

Definition 3.3. Wenn $c \in C_r(K)$ die Beziehung

$$\partial_r c = 0 \quad (3.24)$$

erfüllt, nennt man c einen **r -Zyklus** (engl. „ r -cycle“). Die Menge der r -Zyklen $Z_r(K)$ ist eine Untergruppe von $C_r(K)$ und heißt **r -Zyklengruppe**. Beachten Sie, dass $Z_r(K) = \ker \partial_r$ ist.²

Definition 3.4. Sei K ein n -dimensionaler Simplizialkomplex und gelte $c \in C_r(K)$. Wenn ein Element $d \in C_{r+1}(K)$ existiert, sodass

$$c = \partial_{r+1} d, \quad (3.25)$$

² Wenn $r = 0$ ist, verschwindet $\partial_0 c$ identisch, und es ist $Z_0(K) = C_0(K)$, siehe Gleichung (3.23).

ist, dann wird c ein **r -Rand** genannt. Die Menge der r -Ränder $B_r(K)$ („ B “ für engl. „boundary“) ist eine Untergruppe von $C_r(K)$ und wird **r -Rändergruppe** genannt. Beachten Sie, dass $B_r(K) = \text{im } \partial_{r+1}$ ist. ($B_n(K)$ ist definitionsgemäß 0.)

Aus Lemma 3.1 folgt, dass $Z_r(K)$ und $B_r(K)$ Untergruppen von $C_r(K)$ sind. Wir beweisen jetzt eine wichtige Beziehung zwischen $Z_r(K)$ und $B_r(K)$, die entscheidend für die Definition von Homologiegruppen ist.

Lemma 3.3. Die verkettete Abbildung $\partial_r \circ \partial_{r+1} : C_{r+1}(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ ist eine Nullabbildung, d. h., für beliebige $c \in C_{r+1}(K)$ ist $\partial_r(\partial_{r+1}c) = 0$.

Beweis

Da ∂_r ein linearer Operator auf $C_r(K)$ ist, genügt es, die Identität $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$ für die Erzeuger von $C_{r+1}(K)$ zu beweisen. Wenn $r = 0$ ist, dann ist $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$, denn ∂_0 ist ein Nulloperator. Nehmen wir also $r > 0$ an und betrachten $\sigma = (p_0 \dots p_r p_{r+1}) \in C_{r+1}(K)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_r(\partial_{r+1}\sigma) &= \partial_r \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \partial_r(p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) \right) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (p_0 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &\quad - \sum_{j > i} (-1)^{i+j} (p_0 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) = 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

womit das Lemma bewiesen ist. \square

Satz 3.3. Es seien $Z_r(K)$ und $B_r(K)$ die r -Zyklengruppe bzw. die r -Rändergruppe von $C_r(K)$. Dann gilt

$$B_r(K) \subset Z_r(K) \quad (\subset C_r(K)). \tag{3.27}$$

Beweis

Dies ist mit Lemma 3.3 offensichtlich. Jedes Element c von $B_r(K)$ lässt sich für ein $d \in C_{r+1}(K)$ als $c = \partial_{r+1}d$ schreiben. Daher folgt $\partial_r c = \partial_r(\partial_{r+1}d) = 0$, also $c \in Z_r(K)$. Daraus folgt $Z_r(K) \supset B_r(K)$. \square

Was bedeuten die r -Zyklen und r -Ränder geometrisch? Mit unseren Definitionen liefert ∂_r den Rand einer r -Kette. Wenn c ein r -Zyklus ist, sagt uns $\partial_r c = 0$, dass c keinen Rand hat. Wenn $c = \partial_{r+1}d$ ein r -Rand ist, dann ist c der Rand einer $(r+1)$ -Kette d , deren Dimension um eins größer ist als die von c . Unsere Intuition sagt uns,

dass ein Rand keinen Rand hat, daher ist $Z_r(K) \supset B_r(K)$. Diejenigen Elemente von $Z_r(K)$, die *keine* Ränder sind, spielen in diesem Kapitel die Hauptrolle.

3.3.3 Homologiegruppen

Wir haben jetzt drei mit einem Simplizialkomplex K assoziierte Gruppen definiert: $C_r(K)$, $Z_r(K)$ und $B_r(K)$. Wie hängen diese mit den topologischen Eigenschaften von K oder mit dem topologischen Raum zusammen, dessen Triangulation K ist? Ist es möglich, mit $C_r(K)$ alle unter einem Homöomorphismus erhaltenen Eigenschaften auszudrücken? Wir wissen alle, dass die Kanten eines Dreiecks und eines Quadrats homöomorph zueinander sind. Wie sieht es mit ihren Kettengruppen aus? Es seien z. B. die mit einem Dreieck assoziierte 1-Kettengruppe

$$\begin{aligned} C_1(K_1) &= \{i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\} \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

und die mit einem Quadrat assoziierte 1-Kettengruppe

$$C_1(K_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Es ist klar, dass $C_1(K_1)$ nicht isomorph zu $C_1(K_2)$ ist, daher kann $C_r(K)$ kein Kandidat für eine topologische Invariante sein. Dasselbe gilt für $Z_r(K)$ und $B_r(K)$. Es wird sich herausstellen, dass die im Folgenden definierten Homologiegruppen uns zu den gewünschten topologischen Invarianten verhelfen werden.

Definition 3.5. Es sei K ein n -dimensionaler Simplizialkomplex. Die mit K assoziierte **r -te Homologiegruppe** $H_r(K)$ ($0 \leq r \leq n$) ist durch

$$H_r(K) \equiv Z_r(K)/B_r(K) \tag{3.28}$$

definiert.³

$B_r(K)$ ist eine Untergruppe von $Z_r(K)$, also ist $H_r(K)$ wohldefiniert. Die Gruppe $H_r(K)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von r -Zyklen,

$$H_r(K) \equiv \{[z] \mid z \in Z_r(K)\}, \tag{3.29}$$

wobei eine Äquivalenzklasse $[z]$ hier **Homologieklasse** genannt wird. Zwei r -Zyklen z und z' befinden sich in derselben Äquivalenzklasse dann und nur dann, wenn $z - z' \in B_r(K)$ ist. In diesem Fall sagt man, z sei **homolog** zu z' und schreibt daher $z \sim z'$ oder $[z] = [z']$. Geometrisch ist $z - z'$ der Rand eines Raums. Per definitionem ist jeder

³ Wenn nötig, definieren wir $H_r(K) = 0$ für $r > n$ oder $r < 0$. Wenn wir Wert darauf legen, dass die Gruppenstruktur mit ganzzahligen Koeffizienten definiert ist, schreiben wir $H_r(K; \mathbb{Z})$. Ebenso können wir die Homologiegruppen mit reellen Koeffizienten, $H_r(K; \mathbb{R})$ oder mit Koeffizienten aus \mathbb{Z}_2 , $H_r(K; \mathbb{Z}_2)$ definieren.

Rand $b \in B_r(K)$ homolog zu 0 wegen $b - 0 \in B_r(K)$. Wir akzeptieren den folgenden Satz ohne Beweis:

Satz 3.4. Homologiegruppen sind topologische Invarianten. Sei X homöomorph zu Y und seien (K, f) und (L, g) Triangulationen von X bzw. Y . Dann ergibt sich

$$H_r(K) \cong H_r(L) \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.30)$$

Insbesondere gilt dies, wenn (K, f) und (L, g) Triangulationen desselben Raums X sind:

$$H_r(K) \cong H_r(L) \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.31)$$

Es ist somit sinnvoll, von Homologiegruppen eines topologischen Raums X zu sprechen, der nicht notwendigerweise ein Polyeder, aber triangulierbar ist. Für eine beliebige Triangulation (K, f) wird $H_r(X)$ definiert als

$$H_r(X) \equiv H_r(K) \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.32)$$

Satz 3.4 sagt uns, dass dies unabhängig von der Wahl der Triangulation (K, f) ist.

Beispiel 3.6. Es sei $K = \{p_0\}$. Die 0-Kette ist $C_0(K) = \{ip_0 | i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Offensichtlich sind $Z_0(K) = C_0(K)$ und $B_0(K) = \{0\}$ (weder $\partial_0 p_0 = 0$ noch p_0 kann ein Rand von irgendetwas sein). Somit ist

$$H_0(K) \equiv Z_0(K)/B_0(K) = C_0(K) \cong \mathbb{Z}. \quad (3.33)$$

◊

Übung 3.1 Sei $K = \{p_0, p_1\}$ ein Simplizialkomplex, der aus zwei 0-Simplexen besteht. Zeigen Sie, dass gilt:

$$H_r(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (r = 0) \\ \{0\} & (r \neq 0) \end{cases}. \quad (3.34)$$

Beispiel 3.7. Es sei $K = \{p_0, p_1, (p_0 p_1)\}$, und es gilt

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \{ip_0 + jp_1 | i, j \in \mathbb{Z}\}, \\ C_1(K) &= \{k(p_0 p_1) | k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Weil $(p_0 p_1)$ nicht der Rand von irgendeinem Simplex in K ist, gilt $B_1(K) = \{0\}$, und es ist

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K).$$

Wenn $z = m(p_0 p_1) \in Z_1(K)$ ist, dann erfüllt es die Gleichung

$$\partial_1 z = m\partial_1(p_0 p_1) = m\{p_1 - p_0\} = mp_1 - mp_0 = 0.$$

Darum muss m verschwinden und $Z_1(K) = 0$ sein, also

$$H_1(K) = 0. \quad (3.35)$$

Wie für $H_0(K)$ gilt $Z_0(K) = C_0(K) = \{ip_0 + jp_1\}$ und

$$B_0(K) = \text{im } \partial_1 = \{\partial_1 i(p_0 p_1) | i \in \mathbb{Z}\} = \{i(p_0 - p_1) | i \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir definieren einen surjektiven Homomorphismus $f : Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ durch

$$f(ip_0 + jp_1) = i + j.$$

Dann ergibt sich

$$\ker f = f^{-1}(0) = B_0(K).$$

Nach Satz 3.1 ist $Z_0(K)/\ker f \cong \text{im } f = \mathbb{Z}$ oder

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z}. \quad (3.36)$$

◊

Beispiel 3.8. Es sei $K = \{p_0, p_1, p_2, (p_0 p_1), (p_1 p_2), (p_2 p_0)\}$, siehe Abb. 3.7(b). Dies ist eine Triangulation von S^1 . Da es keine 2-Simplexe in K gibt, gilt $B_1(K) = 0$ und $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K)$. Sei $z = i(p_0 p_1) + j(p_1 p_2) + k(p_2 p_0) \in Z_1(K)$ mit ganzen Zahlen $i, j, k \in \mathbb{Z}$. Wir fordern:

$$\begin{aligned} \partial_1 z &= i(p_1 - p_0) + j(p_2 - p_1) + k(p_0 - p_2) \\ &= (k - i)p_0 + (i - j)p_1 + (j - k)p_2 = 0. \end{aligned}$$

Dies ist nur erfüllt, wenn $i = j = k$ ist. Damit erhalten wir

$$Z_1(K) = \{i((p_0 p_1) + (p_1 p_2) + (p_2 p_0)) | i \in \mathbb{Z}\}.$$

Dies zeigt, dass $Z_1(K)$ isomorph zu \mathbb{Z} ist und dass gilt:

$$H_1(K) = Z_1(K) \cong \mathbb{Z}. \quad (3.37)$$

Lassen Sie uns $H_0(K)$ bestimmen. Es ist $Z_0(K) = C_0(K)$ und

$$\begin{aligned} B_0(K) &= \{\partial_1 [l(p_0 p_1) + m(p_1 p_2) + n(p_2 p_0)] | l, m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(n - l)p_0 + (l - m)p_1 + (m - n)p_2 | l, m, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Wir definieren einen surjektiven Homomorphismus $f : Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ durch

$$f(ip_0 + jp_1 + kp_2) = i + j + k$$

und überprüfen, dass gilt:

$$\ker f = f^{-1}(0) = B_0(K).$$

Aus Satz 3.1 folgern wir $Z_0(K)/\ker f \cong \text{im } f = \mathbb{Z}$ oder

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z}. \quad (3.38)$$

K ist eine Triangulation des Kreises S^1 , und (3.37) und (3.38) sind die Homologiegruppen von S^1 . ◊

Übung 3.2 Sei $K = \{p_0, p_1, p_2, p_3, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_3), (p_3p_0)\}$ ein Simplizialkomplex, dessen Polyeder ein Quadrat ist. Weisen Sie nach, dass die Homologiegruppen dieselben sind wie in Beispiel 3.8.

Beispiel 3.9. Sei $K = \{p_0, p_1, p_2, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_0), (p_0p_1p_2)\}$; siehe Abb. 3.6(b). Da die Struktur aus 0-Simplexen und 1-Simplexen dieselbe ist wie in Beispiel 3.8, ergibt sich

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}. \quad (3.39)$$

Nun wollen wir $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$ bestimmen. Aus dem vorherigen Beispiel wissen wir, dass gilt:

$$Z_1(K) = \{i\{(p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0)\} \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

Sei $c = m(p_0p_1p_2) \in C_2(K)$. Wenn $b = \partial_2 c \in B_1(K)$ ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} b &= m\{(p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)\} \\ &= m\{(p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0)\} \quad (m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $Z_1(K) \cong B_1(K)$ ist. Also folgt

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) \cong \{0\}. \quad (3.40)$$

K enthält keine 3-Simplexe, darum ist $B_2(K) = \{0\}$ und damit $H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = Z_2(K)$. Sei $z = m(p_0p_1p_2) \in Z_2(K)$. Wegen $\partial_2 z = m\{(p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)\} = 0$ muss m verschwinden. Somit ist $Z_1(K) = \{0\}$, und wir erhalten

$$H_2(K) \cong \{0\}. \quad (3.41)$$

◊

Übung 3.3 Sei

$$\begin{aligned} K = \{p_0, p_1, p_2, p_3, (p_0p_1), (p_0p_2), (p_0p_3), (p_1p_2), (p_1p_3), (p_2p_3), \\ (p_0p_1p_2), (p_0p_1p_3), (p_0p_2p_3), (p_1p_2p_3)\} \end{aligned}$$

ein Simplizialkomplex, dessen Polyeder die Oberfläche eines Tetraeders ist. Weisen Sie nach, dass gilt:

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(K) \cong \{0\}, \quad H_2(K) \cong \mathbb{Z}. \quad (3.42)$$

K ist eine Triangulation der Sphäre S^2 , und (3.42) gibt uns die Homologiegruppen von S^2 .

3.3.4 Bestimmung von $H_0(K)$

Die Beispiele 3.6 bis 3.9 sowie die Übungen 3.2 und 3.3 enthalten alle dieselbe nullte Homologiegruppe $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$. Was haben diese Simplizialkomplexe gemeinsam? Wir haben darauf die folgende Antwort:

Satz 3.5. Sei K ein zusammenhängender Simplizialkomplex. Dann ist

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}. \quad (3.43)$$

Beweis

Da K zusammenhängt, existiert für jedes Paar von 0-Simplexen p_i und p_j eine Folge von 1-Simplexen $(p_ip_k), (p_kp_l), \dots, (p_mp_j)$, sodass gilt: $\partial_1((p_ip_k) + (p_kp_l) + \dots + (p_mp_j)) = p_j - p_i$. Daraus folgt, dass p_i homolog zu p_j ist, also $[p_i] = [p_j]$. Somit ist jeder 0-Simplex in K homolog etwa zu p_1 . Nehmen wir an, es sei

$$z = \sum_{i=1}^{I_0} n_i p_i \in Z_0(K),$$

wobei I_0 die Anzahl der 0-Simplexe in K ist. Dann wird die Homologieklassse $[z]$ von einem einzigen Punkt erzeugt:

$$[z] = \left[\sum_i n_i p_i \right] = \sum_i n_i [p_i] = \sum_i n_i [p_1].$$

Es ist klar, dass $[z] = 0$ ist, also $z \in B_0(K)$, wenn $\sum n_i = 0$ ist.

Es seien $\sigma_j = (p_{j,1}p_{j,2})$ ($1 \leq j \leq I_1$) die I_1 1-Simplexe in K . Dann ist

$$\begin{aligned} B_0(K) &= \text{im } \partial_1 = \{\partial_1(n_1\sigma_1 + \dots + n_{I_1}\sigma_{I_1}) \mid n_1, \dots, n_{I_1} \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{n_1(p_{1,2} - p_{1,1}) + \dots + n_{I_1}(p_{I_1,2} - p_{I_1,1}) \mid n_1, \dots, n_{I_1} \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass n_j ($1 \leq j \leq I_1$) immer als ein Paar $+n_j$ und $-n_j$ in einem Element von $B_0(K)$ auftaucht. Wenn also gilt

$$z = \sum_j n_j p_j \in B_0(K), \quad \text{dann ist} \quad \sum_j n_j = 0.$$

Wir haben jetzt für einen zusammenhängenden Simplizialkomplex K bewiesen, dass dann und nur dann $z = \sum n_i p_i \in B_0(K)$ ist, wenn $\sum n_i = 0$ ist.

Wir definieren nun noch einen surjektiven Homomorphismus $f : Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ durch

$$f(n_1 p_1 + \dots + n_{I_0} p_{I_0}) = \sum_{i=1}^{I_0} n_i.$$

Damit erhalten wir $\ker f = f^{-1}(0) = B_0(K)$. Aus Satz 3.1 folgt $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = Z_0(K)/\ker f \cong \text{im } f = \mathbb{Z}$. \square

3.3.5 Weitere Homologieberechnungen

Beispiel 3.10. Dieses und das nächste Beispiel behandeln Homologiegruppen von nichtorientierbaren Räumen. In Abb. 3.8 sehen Sie eine Triangulation des Möbius-Bands. Es ist klar, dass $B_2(K) = 0$ ist. Betrachten wir einen Zyklus $z \in Z_2(K)$:

$$z = i(p_0 p_1 p_2) + j(p_2 p_1 p_4) + k(p_2 p_4 p_3) + l(p_3 p_4 p_5) + m(p_3 p_5 p_1) + n(p_1 p_5 p_0).$$

z erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_2 z &= i\{(p_1 p_2) - (p_0 p_2) + (p_0 p_1)\} + j\{(p_1 p_4) - (p_2 p_4) + (p_2 p_1)\} \\ &\quad + k\{(p_4 p_3) - (p_2 p_3) + (p_2 p_4)\} + l\{(p_4 p_5) - (p_3 p_5) + (p_3 p_4)\} \\ &\quad + m\{(p_5 p_1) - (p_3 p_1) + (p_3 p_5)\} + n\{(p_5 p_0) - (p_1 p_0) + (p_1 p_5)\} = 0. \end{aligned}$$

Da jedes der $(p_0 p_2), (p_1 p_4), (p_2 p_3), (p_4 p_5), (p_3 p_1)$ und $(p_5 p_0)$ genau einmal in $\partial_2 z$ erscheint, müssen alle Koeffizienten verschwinden: $i = j = k = l = m = n = 0$. Somit ist $Z_2(K) = \{0\}$, und es ergibt sich

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) \cong \{0\}. \quad (3.44)$$

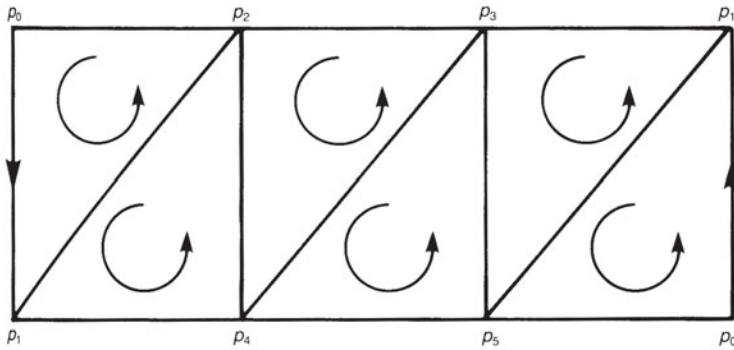


Abb. 3.8. Eine Triangulation des Möbius-Bands.

Um $H_1(K)$ zu ermitteln, verlassen wir uns lieber auf unsere Intuition als auf mühsames Ausrechnen. Suchen wir die Schleifen, die komplette Umläufe ausführen. Eine solche Schleife ist

$$z = (p_0 p_1) + (p_1 p_4) + (p_4 p_5) + (p_5 p_0).$$

Alle anderen Umläufe sind dann homolog zu Vielfachen von z . Betrachten wir z. B.

$$z' = (p_1 p_2) + (p_2 p_3) + (p_3 p_5) + (p_5 p_1).$$

Wir sehen, dass $z \sim z'$ gilt, wegen

$$z - z' = \partial_2 \{(p_2 p_1 p_4) + (p_2 p_4 p_3) + (p_3 p_4 p_5) + (p_1 p_5 p_0)\}.$$

Wenn wir dagegen

$$z'' = (p_1 p_4) + (p_4 p_5) + (p_5 p_0) + (p_0 p_2) + (p_2 p_3) + (p_3 p_1)$$

wählen, erhalten wir $z'' \sim 2z$, denn es ist

$$\begin{aligned} 2z - z'' &= 2(p_0 p_1) + (p_1 p_4) + (p_4 p_5) + (p_5 p_0) - (p_0 p_2) - (p_2 p_3) - (p_3 p_1) \\ &= \partial_2 \{(p_0 p_1 p_2) + (p_1 p_4 p_2) + (p_2 p_4 p_3) + (p_3 p_4 p_5) + (p_3 p_5 p_1) + (p_0 p_1 p_5)\}. \end{aligned}$$

Wir prüfen leicht, dass alle geschlossenen Umläufe homolog zu nz sind ($n \in \mathbb{Z}$). $H_1(K)$ wird nur durch das eine Element $[z]$ erzeugt:

$$H_1(K) = \{i[z] | i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}. \quad (3.45)$$

Da K zusammenhängend ist, folgt aus Satz 3.5: $H_0(K) = \{i[p_a] | i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ mit irgendeinem 0-Simplex p_a aus K . \diamond

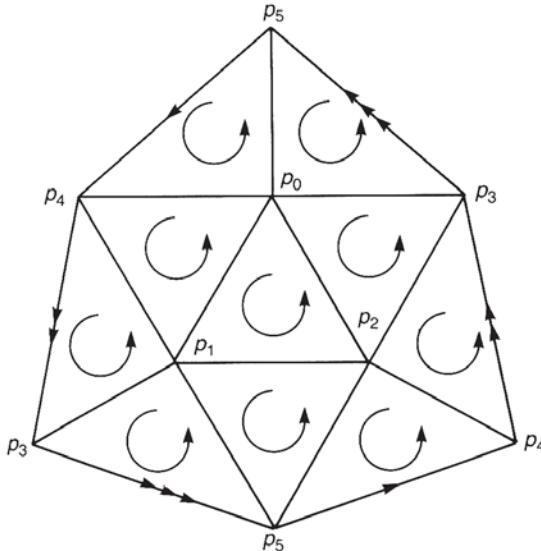


Abb. 3.9. Eine Triangulation der projektiven Ebene.

Beispiel 3.11. Die projektive Ebene \mathbb{RP}^2 wurde in Beispiel 2.5(c) definiert als die Sphäre S^2 , bei der einander gegenüberliegende Punkte miteinander identifiziert werden. Als Nebenklassenraum können wir die Hemisphäre (oder Kreisscheibe D^2) wählen, auf deren Rand S^1 einander gegenüberliegende Punkte identifiziert werden, siehe Abb. 2.5(b). Abb. 3.9 zeigt eine Triangulation der projektiven Ebene. Offenkundig ist $B_2(K) = \{0\}$. Betrachten wir einen Zyklus $z \in Z_2(K)$:

$$\begin{aligned} z = & m_1(p_0p_1p_2) + m_2(p_0p_4p_1) + m_3(p_0p_5p_4) + m_4(p_0p_3p_5) + m_5(p_0p_2p_3) \\ & + m_6(p_2p_4p_3) + m_7(p_2p_5p_4) + m_8(p_2p_1p_5) + m_9(p_1p_3p_5) + m_{10}(p_1p_4p_3). \end{aligned}$$

Der Rand von z ist

$$\begin{aligned} \partial_2 z = & m_1\{(p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)\} + m_2\{(p_4p_1) - (p_0p_1) + (p_0p_4)\} \\ & + m_3\{(p_5p_4) - (p_0p_4) + (p_0p_5)\} + m_4\{(p_3p_5) - (p_0p_5) + (p_0p_3)\} \\ & + m_5\{(p_2p_3) - (p_0p_3) + (p_0p_2)\} + m_6\{(p_4p_3) - (p_2p_3) + (p_2p_4)\} \\ & + m_7\{(p_5p_4) - (p_2p_4) + (p_2p_5)\} + m_8\{(p_1p_5) - (p_2p_5) + (p_2p_1)\} \\ & + m_9\{(p_3p_5) - (p_1p_5) + (p_1p_3)\} + m_{10}\{(p_4p_3) - (p_1p_3) + (p_1p_4)\} = 0. \end{aligned}$$

Betrachten wir die Koeffizienten der einzelnen 1-Simplexe. Es ist beispielsweise $(m_1 - m_2)(p_0 p_1)$ und daher $m_1 - m_2 = 0$. Ähnlich erhalten wir

$$\begin{aligned} -m_1 + m_5 &= 0, & m_4 - m_5 &= 0, & m_2 - m_3 &= 0, & m_1 - m_8 &= 0, & m_9 - m_{10} &= 0, \\ -m_2 + m_{10} &= 0, & m_5 - m_6 &= 0, & m_6 - m_7 &= 0, & m_6 + m_{10} &= 0. \end{aligned}$$

Diese insgesamt zehn Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn $m_i = 0$ ($1 \leq i \leq 10$) ist. Dies bedeutet, dass die Zyklengruppe $Z_2(K)$ trivial ist, sodass wir erhalten:

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) \cong \{0\}. \quad (3.46)$$

Bevor wir $H_1(K)$ berechnen, untersuchen wir $H_2(K)$ von einem etwas anderen Blickpunkt aus. Lassen Sie uns alle 2-Simplexe in K mit demselben Koeffizienten aufaddieren:

$$z \equiv \sum_{i=1}^{10} m \sigma_{2,i} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Beachten Sie, dass jedes 1-Simplex aus K eine gemeinsame Seite von genau zwei 2-Simplexen ist. Als eine Konsequenz daraus ist der Rand von z

$$\partial_2 z = 2m(p_3 p_5) + 2m(p_5 p_4) + 2m(p_4 p_3). \quad (3.47)$$

Somit muss, wenn $z \in Z_2(K)$ ist, m verschwinden, und wir erhalten $Z_2(K) = \{0\}$ wie gehabt. Diese Beobachtung vereinfacht die Berechnung von $H_1(K)$ spürbar. Beachten Sie, dass jeder 1-Zyklus homolog zu einem Vielfachen von

$$z = (p_3 p_5) + (p_5 p_4) + (p_4 p_3)$$

ist, vgl. Beispiel 3.10. Weiterhin zeigt Gleichung (3.47), dass ein gerades Vielfaches von z der Rand einer 2-Kette ist. Darum ist z ein Zyklus und $z + z$ homolog zu 0. Hieraus folgt

$$H_1(K) = \{[z] | [z] + [z] \sim [0]\} \cong \mathbb{Z}_2. \quad (3.48)$$

Dieses Beispiel zeigt, dass eine Homologiegruppe nicht notwendigerweise eine freie Abel'sche Gruppe ist, sie kann aber die volle Struktur einer endlich erzeugten Abel'schen Gruppe aufweisen. Da K zusammenhängend ist, folgt $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$. \diamond

Es ist interessant, Beispiel 3.11 mit den folgenden Beispielen zu vergleichen. In diesen Beispielen werden wir die Intuition nutzen, die wir im Abschnitt über Ränder und Zyklen entwickelt haben, um Resultate eher zusammenzustellen, als sie mühevoll Schritt für Schritt auszurechnen.

Beispiel 3.12. Betrachten wir den Torus T^2 . Eine formale Herleitung der Homologiegruppen des T^2 überlassen wir Ihnen als Übung, siehe z. B. Fraleigh (1976). Dies ist jetzt der richtige Zeitpunkt, um sich die intuitive Bedeutung der Homologiegruppen noch einmal klarzumachen: Die r -te Homologiegruppe wird von denjenigen randlosen r -Ketten erzeugt, die nicht selbst Ränder von irgendwelchen $(r+1)$ -Ketten sind.

Beispielsweise hat die Oberfläche des Torus zwar keinen Rand, aber sie ist ihrerseits nicht der Rand von einer 3-Kette. Darum wird $H_2(T^2)$ frei von (nur) einem Erzeuger erzeugt, der Oberfläche selbst: $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$. Sehen wir uns als nächstes $H_1(T^2)$ an. Sicherlich haben die Schleifen a und b in Abb. 3.10 keinen Rand, aber sie sind auch keine Ränder von einer 2-Kette. Betrachten wir eine andere Schleife a' . Diese ist homolog zu a , weil $a' - a$ die schraffierte Fläche in Abb. 3.10 begrenzt. Daher wird $H_1(T^2)$ frei erzeugt durch a und b , und es ist $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Da T^2 zusammenhängend ist, erhalten wir $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$.

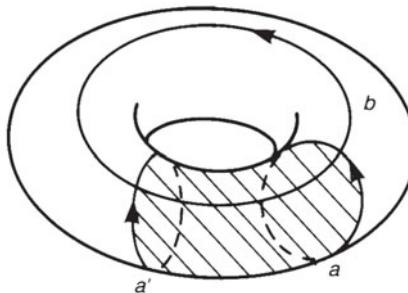


Abb. 3.10. a' ist homolog zu a , aber b nicht. a und b erzeugen $H_1(T^2)$.

Wir können das Bisherige leicht auf den Torus Σ_g mit dem Geschlecht g übertragen. Da Σ_g keinen Rand hat und es keine 3-Simplexe gibt, erzeugt die Fläche Σ_g selbst frei $H_2(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$. Die erste Homologiegruppe $H_1(\Sigma_g)$ wird von denjenigen Schleifen erzeugt, die nicht Ränder einer Fläche sind. Abb. 3.11 zeigt die standardmäßig gewählten Erzeuger, es ist

$$\begin{aligned} H_1(\Sigma_g) &= \{i_1[a_1] + j_1[b_1] + \dots + i_g[a_g] + j_g[b_g]\} \\ &\cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{2g}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Da Σ_g zusammenhängt, ist $H_0(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$. Wir bemerken, dass a_i (b_i) homolog zu der Kante a_i (b_i) in Abb. 3.11 ist. Die $2g$ Kurven $\{a_i, b_i\}$ nennt man das **kanonische Kurvensystem** auf dem Torus Σ_g . \diamond

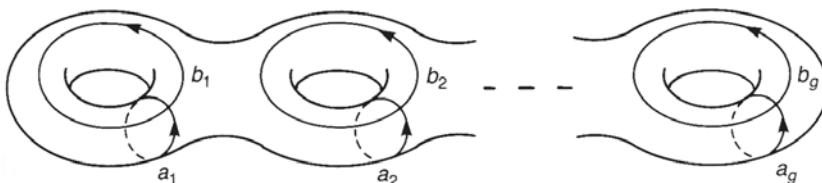


Abb. 3.11. Die a_i und b_i ($1 \leq i \leq g$) erzeugen $H_1(\Sigma_g)$.

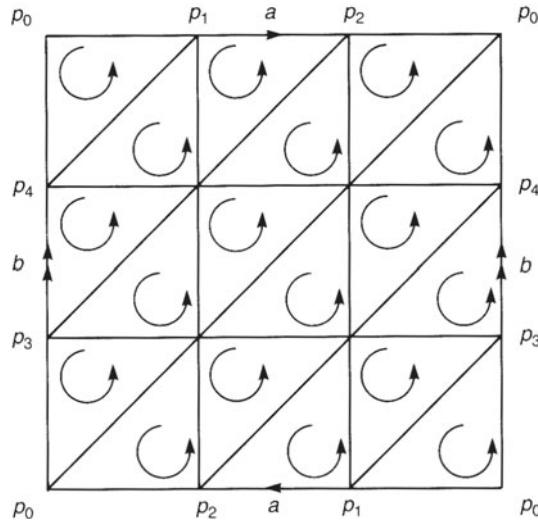


Abb. 3.12. Eine Triangulation der Klein'schen Flasche.

Beispiel 3.13. Abb. 3.12 stellte eine Triangulation der Klein'schen Flasche dar. Die Bestimmung der Homologiegruppen läuft sehr ähnlich ab wie bei der projektiven Ebene. Wegen $B_2(K) = 0$ gilt $H_2(K) = Z_2(K)$. Sei $z \in Z_2(K)$. Wenn z eine Kombination von allen 2-Simplexen in K mit demselben Koeffizienten ist, $z = \sum m\sigma_{2,i}$, heben sich die inneren 1-Simplexe gegenseitig weg, und es bleiben nur die äußeren 1-Simplexe

$$\partial_2 z = -2ma$$

übrig, mit $a = (p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0)$. Damit $\partial_2 z$ zu 0 wird, muss die ganze Zahl m verschwinden, und wir erhalten

$$H_2(K) = Z_2(K) \cong \{0\}. \quad (3.50)$$

Um $H_1(K)$ zu berechnen, sehen wir zuerst – aus unseren Erfahrungen mit dem Torus –, dass jeder 1-Zyklus homolog zu $ia + jb$ ist, für irgendwelche $i, j \in \mathbb{Z}$. Damit eine 2-Kette einen Rand hat, der nur aus a und b besteht, muss man alle 2-Simplexe in K mit demselben Koeffizienten addieren. Als Ergebnis erhalten wir für eine solche 2-Kette $z = \sum m\sigma_{2,i}$ den Rand $\partial z = 2ma$. Dies zeigt, dass $2ma \sim 0$ ist. Somit wird $H_1(K)$ von zwei Zyklen a und b erzeugt, sodass $a + a = 0$ ist, also

$$H_1(K) = \{i[a] + j[b] \mid i, j \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}. \quad (3.51)$$

Wir erhalten $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, denn K ist zusammenhängend. \diamond

3.4 Allgemeine Eigenschaften von Homologiegruppen

3.4.1 Zusammenhang und Homologiegruppen

Es seien $K = \{p_0\}$ und $L = \{p_0, p_1\}$. Aus Beispiel 3.6 und Übung 3.1 wissen wir: $H_0(K) = \mathbb{Z}$ und $H_0(L) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Allgemeiner gilt der folgende Satz:

Satz 3.6. Es sei $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_N$ eine disjunkte Vereinigung von N zusammenhängenden Komponenten ($K_i \cap K_j = \emptyset$). Dann ist

$$H_r(K) = H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \oplus \dots \oplus H_r(K_N). \quad (3.52)$$

Beweis

Wir bemerken zunächst, dass eine r -Kettengruppe sich konsistent in eine direkte Summe von N r -Kettenuntergruppen zerlegen lässt. Sei

$$C_r(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i} \mid c_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

mit I_r als der Anzahl linear unabhängiger r -Simplexe in K . Es ist immer möglich, σ_i so umzuordnen, dass die r -Simplexe in K_1 zuerst kommen, dann die in K_2 usw. Dann wird $C_r(K)$ in eine direkte Summe von Untergruppen zerlegt:

$$C_r(K) = C_r(K_1) \oplus C_r(K_2) \oplus \dots \oplus C_r(K_N).$$

Diese Zerlegung wird ebenso für $Z_r(K)$ und $B_r(K)$ durchgeführt:

$$Z_r(K) = Z_r(K_1) \oplus Z_r(K_2) \oplus \dots \oplus Z_r(K_N)$$

$$B_r(K) = B_r(K_1) \oplus B_r(K_2) \oplus \dots \oplus B_r(K_N).$$

Jetzt definieren wir die Homologiegruppen von jeder Komponente K_i durch

$$H_r(K_i) = Z_r(K_i)/B_r(K_i).$$

Dies ist wohldefiniert wegen $Z_r(K_i) \supset B_r(K_i)$. Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned} H_r(K) &= Z_r(K)/B_r(K) \\ &= Z_r(K_1) \oplus \dots \oplus Z_r(K_N)/B_r(K_1) \oplus \dots \oplus B_r(K_N) \\ &= \{Z_r(K_1)/B_r(K_1)\} \oplus \dots \oplus \{Z_r(K_N)/B_r(K_N)\} \\ &= H_r(K_1) \oplus \dots \oplus H_r(K_N). \end{aligned}$$
□

Korollar 3.1. (a) Sei K eine disjunkte Vereinigung von N zusammenhängenden Komponenten K_1, \dots, K_N . Dann folgt:

$$H_0(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{N \text{ Faktoren}}. \quad (3.53)$$

(b) Wenn $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ ist, dann ist K zusammenhängend. (Mit Satz 3.5 wissen wir nun, dass $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ dann und nur dann gilt, wenn K zusammenhängend ist.)

3.4.2 Struktur von Homologiegruppen

$Z_r(K)$ und $B_r(K)$ sind freie Abel'sche Gruppen, weil sie Untergruppen einer freien Abel'schen Gruppe $C_r(K)$ sind. Das bedeutet nicht, dass auch $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$ eine freie Abel'sche Gruppe ist. Tatsächlich ist, gemäß Satz 3.2, die allgemeinste Form von $H_r(K)$ die folgende:

$$H_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_f \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_p}. \quad (3.54)$$

Aus unseren bisherigen Erfahrungen ist klar, dass die Anzahl der Erzeuger von $H_r(K)$ die Zahl der $(r+1)$ -dimensionalen Löcher in $|K|$ angibt. Die ersten f Faktoren bilden eine freie Abel'sche Gruppe vom Rang f , die nächsten p Faktoren werden **Torsionsuntergruppe** von $H_r(K)$ genannt. Zum Beispiel hat die projektive Ebene $H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2$, und die Klein'sche Flasche hat $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. In einem gewissen Sinn beschreibt die Torsionsuntergruppe die „Verdrehung“ innerhalb des Polyeders $|K|$. Wir machen nun klar, warum die Homologiegruppen mit \mathbb{Z} -Koeffizienten denjenigen mit \mathbb{Z}_2 - oder \mathbb{R} -Koeffizienten vorzuziehen sind. Da \mathbb{Z}_2 keine nichttrivialen Untergruppen hat, lässt sich die Torsionsuntergruppe niemals erkennen. In ähnlicher Weise können wir mit \mathbb{R} -Koeffizienten die Torsionsuntergruppe ebenfalls nicht sehen, denn es ist $\mathbb{R}/m\mathbb{R} \cong \{0\}$ für alle $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.⁴ Wenn $H_r(K; \mathbb{Z})$ durch (3.54) gegeben ist, gilt:

$$H_r(K; \mathbb{R}) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_f. \quad (3.55)$$

3.4.3 Betti-Zahlen und der Euler-Poincaré-Satz

Definition 3.6. Sei K ein Simplizialkomplex. Die r -te **Betti-Zahl** $b_r(K)$ ist definiert als

$$b_r(K) \equiv \dim H_r(K; \mathbb{R}). \quad (3.56)$$

Mit anderen Worten: $b_r(K)$ ist der Rang des freien Abel'schen Anteils von $H_r(K; \mathbb{Z})$.

Beispielsweise sind die Betti-Zahlen des Torus T^2 (siehe Beispiel 3.12):

$$b_0(K) = 1, \quad b_1(K) = 2, \quad b_2(K) = 1,$$

und die Betti-Zahlen der Sphäre S^2 (Übung 3.3) sind

$$b_0(K) = 1, \quad b_1(K) = 0, \quad b_2(K) = 1.$$

⁴ Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ existiert eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodass $a - b = mc$ ist.

Der folgende Satz setzt die Euler-Charakteristik in Beziehung zu den Betti-Zahlen:

Satz 3.7. (Euler-Poincaré-Satz) Seien K ein n -dimensionaler Simplizialkomplex und I_r die Anzahl der r -Simplexe in K . Dann ist die Euler-Charakteristik von K die alternierende Summe der Betti-Zahlen von K :

$$\chi(K) \equiv \sum_{r=0}^n (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^n (-1)^r b_r(K). \quad (3.57)$$

Anmerkung: Das erste Gleichheitszeichen *definiert* die Euler-Charakteristik eines allgemeinen Polyeders $|K|$. Beachten Sie, dass dies die Verallgemeinerung der Euler-Charakteristik ist, die wir in Abschnitt 2.4 für Flächen definiert haben.

Beweis

Wir betrachten den Rand-Homomorphismus

$$\partial_r : C_r(K; \mathbb{R}) \rightarrow C_{r-1}(K; \mathbb{R}),$$

wobei wir $C_{-1}(K; \mathbb{R}) = \{0\}$ setzen. Da sowohl $C_{r-1}(K; \mathbb{R})$ als auch $C_r(K; \mathbb{R})$ Vektorräume sind, kann man Satz 2.1 anwenden und erhält

$$I_r = \dim C_r(K; \mathbb{R}) = \dim(\ker \partial_r) + \dim(\text{im } \partial_r) = \dim Z_r(K; \mathbb{R}) + \dim B_{r-1}(K; \mathbb{R}),$$

wobei wir $B_{-1}(K)$ als trivial definiert haben. Außerdem ist

$$b_r(K) = \dim H_r(K; \mathbb{R}) = \dim(Z_r(K; \mathbb{R})/B_r(K; \mathbb{R})) = \dim Z_r(K; \mathbb{R}) - \dim B_r(K; \mathbb{R}).$$

Aus diesen Beziehungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{r=0}^n (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^n (-1)^r (\dim Z_r(K; \mathbb{R}) + \dim B_{r-1}(K; \mathbb{R})) \\ &= \sum_{r=0}^n \{(-1)^r \dim Z_r(K; \mathbb{R}) - (-1)^r \dim B_r(K; \mathbb{R})\} = \sum_{r=0}^n (-1)^r b_r(K). \quad \square \end{aligned}$$

Da die Betti-Zahlen topologische Invarianten sind, bleibt auch $\chi(K)$ unter einem Homöomorphismus erhalten. Insbesondere gilt, wenn $f : |K| \rightarrow X$ und $g : |K'| \rightarrow X$ zwei Triangulationen von X sind: $\chi(K) = \chi(K')$. Somit ist es sinnvoll, die Euler-Charakteristik von X durch $\chi(K)$ für eine beliebige Triangulation (K, f) von X zu definieren.

Aufgaben

3.1 Die allgemeinste orientierbare zweidimensionale Fläche ist eine 2-Sphäre mit h Henkeln und q Löchern. Berechnen Sie die Homologiegruppen und die Euler-Charakteristik dieser Fläche.

3.2 Betrachten Sie eine Sphäre mit einem Loch und identifizieren Sie die Kanten des Lochs wie in Abb. 3.13 gezeigt. Die Fläche, die wir dann erhalten würden, wäre einfach die projektive Ebene \mathbb{RP}^2 . Betrachten Sie noch allgemeiner eine Sphäre mit q solchen „Kreuzhauben-Löchern“ und ermitteln Sie die Homologiegruppen und die Euler-Charakteristik dieser Fläche.

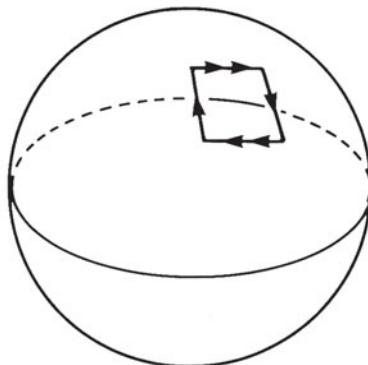


Abb. 3.13. Ein Loch in der S^2 , dessen Kanten wie dargestellt miteinander identifiziert werden. Stellen Sie sich die S^2 mit q solcher „Kreuzhauben-Löcher“ vor.

4

Homotopiegruppen

Der Witz bzw. die Grundidee bei den Homologiegruppen im vorigen Kapitel war es, Zyklen, die keine Ränder sind, eine Gruppenstruktur zuzuschreiben. Bei den Homotopiegruppen interessieren uns dagegen stetige Deformationen, die eine Abbildung in eine andere überführen. Es seien X und Y topologische Räume und \mathcal{F} die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y . Wir führen eine Äquivalenzrelation namens „homotop zu“ in der Menge \mathcal{F} ein, und zwar sollen zwei Abbildungen $f, g \in \mathcal{F}$ miteinander identifiziert werden, wenn das Bild $f(X)$ in Y stetig nach $g(X)$ deformiert werden kann. Wir wählen als X einen topologischen *Standardraum*, dessen Strukturen gut bekannt sind. Zum Beispiel könnten wir die n -Sphäre S^n als Standardraum ansehen und alle Abbildungen von S^n nach Y daraufhin untersuchen, wie diese Abbildungen sich bezüglich homotoper Äquivalenz klassifizieren lassen. Dies ist die Grundidee von Homotopiegruppen.

Wir beschränken uns hierbei auf eine elementare Behandlung der Homotopiegruppen, was für unsere Zwecke völlig ausreicht. Bei Nash und Sen (1983) und Croom (1978) finden sich ausführliche Ergänzungen zu diesem Kapitel.

4.1 Fundamentalgruppen

4.1.1 Grundlagen

Sehen wir uns Abb. 4.1 an. Die linke Scheibe hat ein Loch, die rechte hat keines. Wie können wir den Unterschied zwischen diesen zwei Scheiben formal sauber formulieren? Offenbar kann jede beliebige Schleife in der Menge Y in Abb. 4.1(b) stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden. Im Gegensatz dazu lässt sich die Schleife α in der Menge X in Abb. 4.1(a) wegen des Lochs nicht zu einem Punkt zusammenziehen – in X können somit zwar manche Schleifen zu einem Punkt zusammengezogen werden, aber nicht alle. Wir sagen, eine Schleife α sei homotop zu einer Schleife β , wenn wir α durch eine *stetige* Deformation aus β erhalten können. Beispielsweise ist jede Schleife in Y homotop zu einem Punkt. Es wird sich herausstellen, dass „ist homotop zu“ eine Äquivalenzrelation ist; die entsprechende Äquivalenzklasse wird Homotopieklassse genannt. In Abb. 4.1 ist mit der Menge Y nur eine einzige Homotopieklassse assoziiert. In X gibt es dagegen mehr als eine Homotopieklassse; jede von ihnen ist durch eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ charakterisiert, welche angibt, wie oft eine Schleife

das Loch umläuft. Dabei bedeuten $n < 0$ einen Umlauf im Uhrzeigersinn und $n > 0$ einen Umlauf gegen den Uhrzeigersinn. Für $n = 0$ befindet sich das Loch außerhalb der Schleife („0 Umläufe“). \mathbb{Z} ist hier eine additive Gruppe, und die Gruppenoperation (Addition) hat eine geometrische Bedeutung: $n + m$ bedeutet, dass man zuerst n -mal um das Loch läuft und dann noch m weitere Male. Die Menge der Homotopieklassen ist mit einer Gruppenstruktur versehen, die man Fundamentalgruppe nennt.

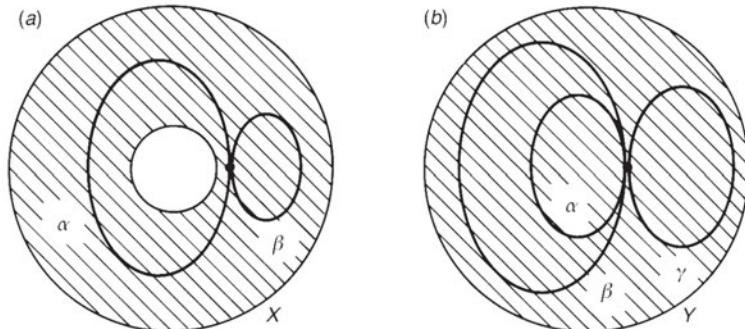


Abb. 4.1. Eine Schleife mit (a) und ohne Loch (b). Das Loch in (a) verhindert, dass die Schleife α zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

4.1.2 Pfade und Schleifen

Definition 4.1. Sei X ein topologischer Raum und $I = [0, 1]$. Eine stetige Abbildung $\alpha : I \rightarrow X$ heißt **Pfad** mit einem Anfangspunkt x_0 und einem Endpunkt x_1 , wenn $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x_1$ ist. Wenn $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ ist, wird der Pfad als **Schleife** bezeichnet, mit dem **Basispunkt** (Grundpunkt) x_0 (oder kurz: als Schleife bei x_0).

Für $x \in X$ definieren wir den **konstanten Pfad** $c_x : I \rightarrow X$ durch $c_x(s) = x$ ($s \in I$). Ein konstanter Pfad ist immer auch eine konstante Schleife wegen $c_x(0) = c_x(1) = x$. Die Menge der Pfade oder Schleifen in einem topologischen Raum X können wir wie folgt mit einer algebraischen Struktur versehen:

Definition 4.2. Seien $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ Pfade, sodass $\alpha(1) = \beta(0)$ ist. Das Produkt von α und β , geschrieben $\alpha * \beta$, ist der in X definierte Pfad

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

siehe Abb. 4.2. Wegen $\alpha(1) = \beta(0)$ ist $\alpha * \beta$ eine stetige Abbildung von I nach X .¹

¹ Geometrisch gesehen korrespondiert $\alpha * \beta$ damit, in der ersten Hälfte des Pfads das Bild $\alpha(I)$ abzulaufen und dann in der zweiten Hälfte das Bild $\beta(I)$ – wohlgernekt mit der doppelten Geschwindigkeit.

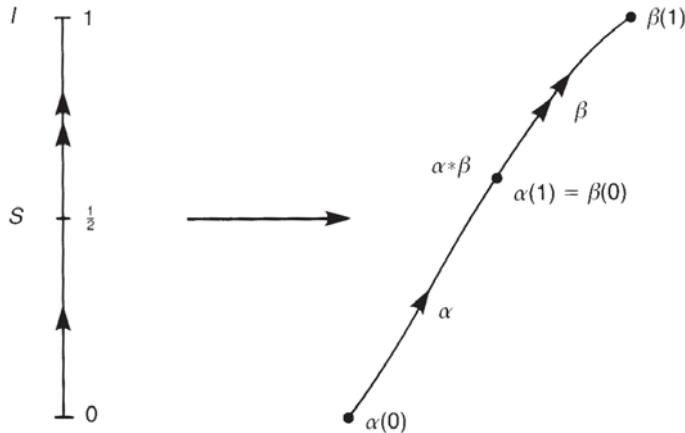


Abb. 4.2. Das Produkt $\alpha * \beta$ zweier Pfade α und β mit einem gemeinsamen Punkt.

Definition 4.3. Sei $\alpha : I \rightarrow X$ ein Pfad von x_0 nach x_1 . Der zu α inverse Pfad α^{-1} ist definiert durch²

$$\alpha^{-1}(s) \equiv \alpha(1-s) \quad (s \in I). \quad (4.2)$$

Da eine Schleife ein spezieller Pfad mit identischem Anfangs- und Endpunkt ist, wird das Produkt zweier Schleifen auf exakt die gleiche Weise definiert. Auf den ersten Blick würde man meinen, die konstante Abbildung c_x sei das neutrale Element dieses Produkts. Dies ist sie jedoch nicht: $\alpha * \alpha^{-1}$ ist nicht der gleiche Pfad wie c_x ! Wir benötigen das Konzept der Homotopie, um eine Gruppenoperation im Raum der Schleifen korrekt definieren zu können.

4.1.3 Homotopie

Die zuvor eingeführte algebraische Struktur der Schleifen hilft uns, so wie sie ist, nicht viel weiter. Beispielsweise ist der konstante Pfad nicht wirklich das neutrale Element. Was wir haben möchten, ist eine Äquivalenzrelation, mit der sich Pfade und Schleifen so klassifizieren lassen, dass die Äquivalenzklassen eine sinnvolle Gruppenstruktur erhalten. Es zeigt sich, dass dies dann der Fall ist, wenn wir Pfade oder Schleifen miteinander identifizieren, die sich stetig ineinander deformieren lassen. Da wir primär an Schleifen interessiert sind, werden wir die meisten Definitionen und Sätze für Schleifen formulieren. Behalten Sie jedoch im Hinterkopf, dass die meisten Aussagen sich auch auf Pfade übertragen lassen (gegebenenfalls mit geeigneten kleineren Modifikationen).

² Der inverse Pfad α^{-1} entspricht also dem Durchlaufen des Bildes von α in umgekehrter Richtung, also von x_1 nach x_0 .

Definition 4.4. Es seien $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ Schleifen bei x_0 . Wir nennen diese beiden Schleifen **homotop**, $\alpha \sim \beta$, wenn eine stetige Abbildung $F : I \times I \rightarrow X$ existiert, sodass gilt:

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \alpha(s), & F(s, 1) &= \beta(s) \quad (\forall s \in I); \\ F(0, t) &= F(1, t) = x_0 & (\forall t \in I). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Abbildung F wird als **Homotopie** zwischen α und β bezeichnet.

Es ist hilfreich, eine Homotopie so wie in Abb. 4.3(a) darzustellen. Die vertikalen Seiten des Quadrats $I \times I$ werden auf x_0 abgebildet. Die untere Seite ist $\alpha(s)$, die obere Seite $\beta(s)$. Im Raum X wird das Bild stetig deformiert, wie in Abb. 4.3(b) angedeutet.

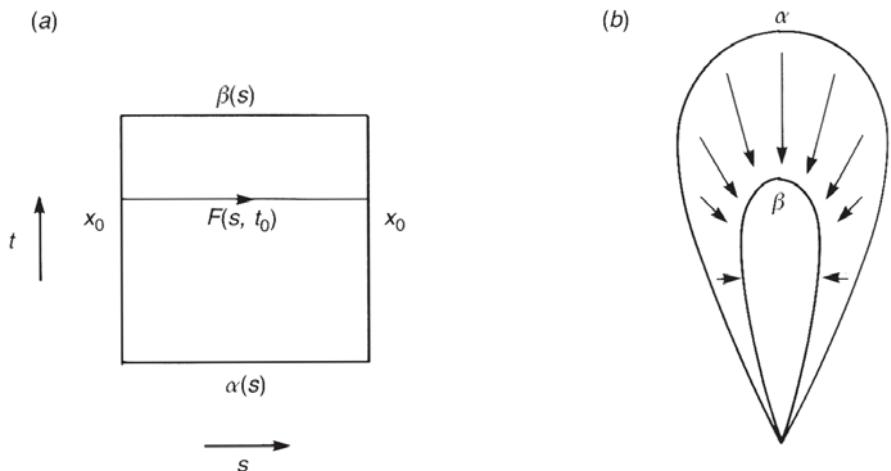


Abb. 4.3. (a) Die Schleife $F(s, t_0)$ liegt zwischen $\alpha(s)$ und $\beta(s)$. (b) Indem t von 0 bis 1 läuft, wird im realen Raum X das Bild von α stetig in das Bild von β deformiert.

Behauptung 4.1. Die Relation $\alpha \sim \beta$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis

Reflektivität: $\alpha \sim \alpha$. Die Homotopie ist z. B. durch $F(s, t) = \alpha(s)$ für alle $t \in I$ gegeben.

Symmetrie: Sei $\alpha \sim \beta$ mit der Homotopie $F(s, t)$, sodass $F(s, 0) = \alpha(s)$, $F(s, 1) = \beta(s)$ ist. Dann ist $\beta \sim \alpha$ mit der Homotopie $F(s, 1-t)$.

Transitivität: Seien $\alpha \sim \beta$ und $\beta \sim \gamma$. Dann ist $\alpha \sim \gamma$: Wenn $F(s, t)$ eine Homotopie zwischen α und β ist und $G(s, t)$ eine Homotopie zwischen β und γ , dann ist z. B. eine Homotopie zwischen α und γ gegeben durch (Abb. 4.4)

$$H(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

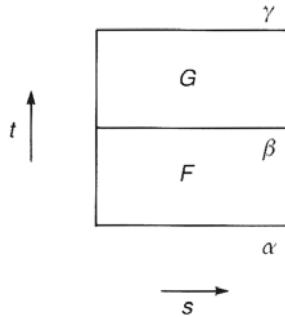


Abb. 4.4. Eine Homotopie H zwischen α und γ via β .

4.1.4 Fundamentalgruppen

Die Schleifen-Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit $[\alpha]$ und nennen sie **Homotopieklass**e von α . Das Produkt zwischen zwei Schleifen definiert auf natürliche Weise das Produkt in der Menge der Schleifen-Homotopieklassen.

Definition 4.5. Sei X ein topologischer Raum. Die Menge der Homotopieklassen von Schleifen bei $x_0 \in X$ wird als $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet und heißt **Fundamentalgruppe** (oder **erste Homotopiegruppe**) von X bei x_0 . Das Produkt zweier Homotopieklassen $[\alpha]$ und $[\beta]$ wird definiert als

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]. \quad (4.4)$$

Lemma 4.1. Das Produkt von Homotopieklassen ist unabhängig von den Repräsentanten, d. h., wenn $\alpha \sim \alpha'$ und $\beta \sim \beta'$ ist, dann ist $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$.

Beweis

Seien $F(s, t)$ eine Homotopie zwischen α und α' und $G(s, t)$ eine Homotopie zwischen β und β' . Dann ist

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $\alpha * \beta$ und $\alpha' * \beta'$, und daher $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$, also ist $[\alpha] * [\beta]$ wohldefiniert. \square

Satz 4.1. Die Fundamentalgruppe ist eine Gruppe. Das heißt, wenn α, β, \dots Schleifen bei $x \in X$ sind, dann gelten die folgenden Gruppeneigenschaften:

- (1) $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$ (Assoziativität)
- (2) $[\alpha] * [c_x] = [\alpha]$ und $[c_x] * [\alpha] = [\alpha]$ (neutrales Element)
- (3) $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_x]$, also $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ (inverses Element).

Beweis

(1) Es sei $F(s, t)$ eine Homotopie zwischen $(\alpha * \beta) * \gamma$ und $\alpha * (\beta * \gamma)$. Diese kann z. B. durch

$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{4s}{1+t} \right) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{4} \\ \beta(4s - t - 1) & \text{für } \frac{1+t}{4} \leq s \leq \frac{2+t}{4} \\ \gamma \left(\frac{4s-t-2}{2-t} \right) & \text{für } \frac{2+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

gegeben sein, siehe Abb. 4.5(a). Somit können wir einfach $[\alpha * \beta * \gamma]$ schreiben anstelle von $[(\alpha * \beta) * \gamma]$ oder $[\alpha * (\beta * \gamma)]$.

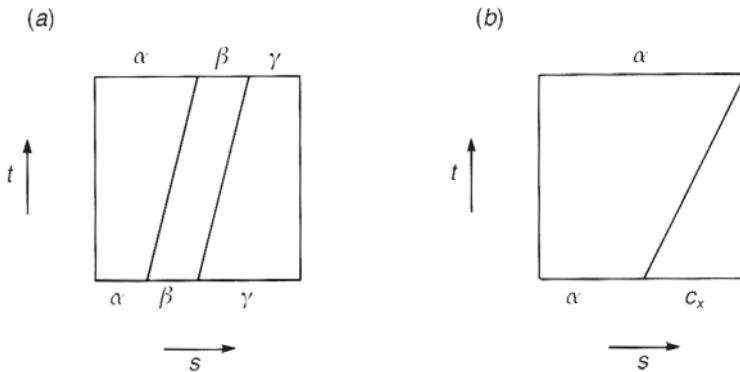


Abb. 4.5. (a) Eine Homotopie zwischen $(\alpha * \beta) * \gamma$ und $\alpha * (\beta * \gamma)$; (b) eine Homotopie zwischen $\alpha * c_x$ und α .

(2) Wie in Abb. 4.5(b) gezeigt, definieren wir eine Homotopie $F(s, t)$ durch

$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{2s}{1+t} \right) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2} \\ x & \text{für } \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dies ist sicherlich eine Homotopie zwischen $\alpha * c_x$ und α . Auf ähnliche Weise ist eine Homotopie zwischen $c_x * \alpha$ und α gegeben durch

$$F(s, t) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \alpha \left(\frac{2s-1+t}{1+t} \right) & \text{für } \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dies zeigt, dass $[\alpha] * [c_x] = [\alpha] = [c_x] * [\alpha]$ ist.

(3) Wir definieren eine Abbildung $F : I \times I \rightarrow X$ durch

$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha(2s(1-t)) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-s)(1-t)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Offensichtlich sind $F(s, 0) = \alpha * \alpha^{-1}$ und $F(s, 1) = c_x$ und darum

$$[\alpha * \alpha^{-1}] = [\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_x].$$

Damit ist gezeigt: $[\alpha^{-1}] = [\alpha]^{-1}$. □

Zusammenfassend halten wir fest: $\pi_1(X, x)$ ist eine Gruppe und hat als neutrales Element die Homotopieklassse der konstanten Schleife c_x . Das Produkt $[\alpha] * [\beta]$ ist wohldefiniert und erfüllt die Gruppenaxiome. Die Inverse von $[\alpha]$ ist $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$. Im nächsten Abschnitt werden wir die allgemeinen Eigenschaften von Fundamentalgruppen untersuchen, welche die konkret auszuführenden Berechnungen vereinfachen.

4.2 Allgemeine Eigenschaften von Fundamentalgruppen

4.2.1 Bogenweiser Zusammenhang und Fundamentalgruppen

In Abschnitt 2.3 haben wir bogenweise zusammenhängende topologische Räume definiert. Ein Raum X hat diese Eigenschaft, wenn für beliebige $x_0, x_1 \in X$ ein Pfad α existiert, sodass $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x_1$ ist.

Satz 4.2. Sei X ein bogenweise zusammenhängender topologischer Raum mit $x_0, x_1 \in X$. Dann ist $\pi_1(X, x_0)$ isomorph zu $\pi_1(X, x_1)$.

Beweis

Sei $\eta : I \rightarrow X$ ein Pfad, sodass $\eta(0) = x_0$ und $\eta(1) = x_1$. Wenn α eine Schleife bei x_0 ist, dann ist $\eta^{-1} * \alpha * \eta$ eine Schleife bei x_1 (Abb. 4.6). Für ein gegebenes Element $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ induziert diese Korrespondenz ein eindeutiges Element $[\alpha'] = [\eta^{-1} * \alpha * \eta] \in \pi_1(X, x_1)$. Wir bezeichnen diese Abbildung mit $P_\eta : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, sodass $[\alpha'] = P_\eta([\alpha])$.

Wir zeigen, dass P_η ein Isomorphismus ist. Zunächst ist P_η ein *Homomorphismus*, denn für $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned} P_\eta([\alpha] * [\beta]) &= [\eta^{-1}] * [\alpha] * [\beta] * [\eta] \\ &= [\eta^{-1}] * [\alpha] * [\eta] * [\eta^{-1}] * [\beta] * [\eta] \\ &= P_\eta([\alpha]) * P_\eta([\beta]). \end{aligned}$$

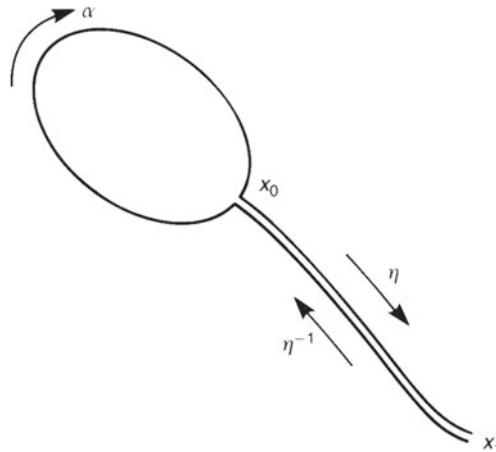


Abb. 4.6. Aus einer Schleife α bei x_0 wird eine Schleife $\eta^{-1} * \alpha * \eta$ bei x_1 konstruiert.

Um zu zeigen, dass P_η bijektiv ist, führen wir die Inverse von P_η ein. Diese definieren wir als eine Abbildung $P_\eta^{-1} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Angewandt auf $[\alpha']$ ergibt sie $P_\eta^{-1}([\alpha']) = [\eta * \alpha * \eta^{-1}]$. Offensichtlich ist P_η^{-1} die Inverse von P_η , wegen

$$P_\eta^{-1} \circ P_\eta([\alpha]) = P_\eta^{-1}([\eta^{-1} * \alpha * \eta]) = [\eta * \eta^{-1} * \alpha * \eta * \eta^{-1}] = [\alpha].$$

Somit ist $P_\eta^{-1} \circ P_\eta = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$. Aus der Symmetrie folgt $P_\eta \circ P_\eta^{-1} = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}$. Mit Übung 2.3 erkennen wir, dass P_η injektiv und surjektiv ist. \square

Demzufolge brauchen wir, wenn X bogenweise zusammenhängt, keinen speziellen Basispunkt anzugeben, denn $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ für beliebige $x_0, x_1 \in X$. Also können wir einfach $\pi_1(X)$ schreiben.

Übung 4.1 (1) Seien η und ζ Pfade von x_0 nach x_1 , sodass $\eta \sim \zeta$. Zeigen Sie, dass $P_\eta = P_\zeta$.

(2) Es seien η und ζ Pfade, sodass $\eta(1) = \zeta(0)$. Zeigen Sie, dass $P_{\eta * \zeta} = P_\zeta \circ P_\eta$.

4.2.2 Homotope Invarianz von Fundamentalgruppen

Die homotope Äquivalenz von Pfaden und Schleifen kann leicht auf beliebige Abbildungen verallgemeinert werden. Es seien $f, g : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen. Wenn es eine Abbildung $F : X \times I \rightarrow Y$ gibt, sodass $F(x, 0) = f(x)$ und $F(x, 1) = g(x)$ ist, dann sagt man, dass f **homotop** zu g ist, und schreibt $f \sim g$. Die Abbildung F nennt man **Homotopie** zwischen f und g .

Definition 4.6. Seien X und Y topologische Räume. X und Y sind vom selben **Homotopietyp**, geschrieben $X \simeq Y$, wenn es stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und

$g : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $f \circ g \sim \text{id}_Y$ und $g \circ f \sim \text{id}_X$. Die Abbildung f heißt **Homotopieäquivalenz** und g **Homotopieinverse**.³

Behauptung 4.2. „Sind vom selben Homotopietyp“ ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der topologischen Räume.

Beweis

Reflektivität: $X \simeq X$ mit id_X als Homotopieäquivalenz.

Symmetrie: Sei $X \simeq Y$ mit der Homotopieäquivalenz $f : X \rightarrow Y$. Dann ist $Y \simeq X$, wobei die Homotopieäquivalenz die Homotopieinverse von f ist.

Transitivität: Seien $X \simeq Y$ und $Y \simeq Z$. Es seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Homotopieäquivalenzen sowie $f' : Y \rightarrow X$, $g' : Z \rightarrow Y$ die zugehörigen Homotopieinversen. Dann gilt

$$(g \circ f)(f' \circ g') = g(f \circ f')g' \sim g \circ \text{id}_Y \circ g' = g \circ g' \sim \text{id}_Z,$$

$$(f' \circ g')(g \circ f) = f'(g' \circ g)f \sim f' \circ \text{id}_Y \circ f = f' \circ f \sim \text{id}_X,$$

woraus $X \simeq Z$ folgt. □

Eine der bemerkenswertesten Eigenschaften von Fundamentalgruppen ist, dass zwei topologische Räume vom selben Homotopietyp dieselbe Fundamentalgruppe haben.

Satz 4.3. Seien X und Y topologische Räume vom selben Homotopietyp. Wenn $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, dann ist $\pi_1(X, x_0)$ isomorph zu $\pi_1(Y, f(x_0))$.

Das folgende Korollar ergibt sich direkt aus Satz 4.3:

Korollar 4.1. Eine Fundamentalgruppe ist invariant unter Homöomorphismen und folglich eine topologische Invariante.

In diesem Sinne klassifizieren Fundamentalgruppen topologische Räume weniger streng, als Homöomorphismen dies tun. Wir verlangen hier höchstens, dass, wenn die topologischen Räume X und Y verschiedene Fundamentalgruppen haben, X nicht homöomorph zu Y sein kann. Beachten Sie jedoch, dass die Homotopiegruppen einschließlich der Fundamentalgruppen eine Vielzahl von physikalischen Anwendungen haben, wie wir zu gegebener Zeit sehen werden. Es sollte betont werden, dass der Hauptnutzen von Homotopiegruppen für die Physik nicht im Klassifizieren von Räumen besteht, sondern darin, Abbildungen oder Feldkonfigurationen zu klassifizieren.

³ Wenn X homöomorph zu Y ist, sind X und Y vom selben Homotopietyp, der Umkehrschluss ist aber nicht notwendigerweise wahr. Beispielsweise sind ein Punkt $\{p\}$ und die reelle Achse \mathbb{R} vom selben Homotopietyp, $\{p\}$ ist aber nicht homöomorph zu \mathbb{R} .

Es ist eher schwierig zu erkennen, was es für zwei beliebige Räume X und Y bedeutet, dass sie „vom selben Homotopietyp“ sind. In der Praxis geschieht es aber oft, dass Y ein Unterraum von X ist. In diesem Fall verlangen wir $X \simeq Y$, wenn Y durch eine stetige Deformation aus X hervorgeht.

Definition 4.7. Sei $R (\neq \emptyset)$ ein Unterraum von X . Wenn eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow R$ existiert, sodass $f|_R = \text{id}_R$ ist, wird R ein **Retrakt** von X genannt und f eine **Retraktion**.

Beachten Sie, dass ganz X surjektiv auf R abgebildet wird, wobei Punkte in R erhalten bleiben (Fixpunkte sind). Abb. 4.7 ist ein Beispiel für einen Retrakt und die zugehörige Retraktion.

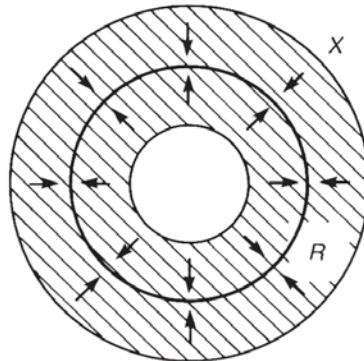


Abb. 4.7. Der Kreis R ist ein Retrakt des Kreisrings X . Die Pfeile deuten die Wirkung der entsprechenden Retraktion an.

Definition 4.8. Sei R ein Unterraum von X . Wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow X$ gibt, sodass gilt:

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) \in R \quad (\text{für beliebige } x \in X); \quad (4.5)$$

$$H(x, t) = x \quad (\text{für beliebige } x \in R \text{ und } t \in I), \quad (4.6)$$

dann nennt man den Raum R **Deformationsretrakt** von X . Beachten Sie, dass H eine Homotopie zwischen id_X und einer Retraktion $f : X \rightarrow R$ ist, was alle Punkte in R unter der Deformation fix lässt.

Ein Retrakt ist nicht notwendigerweise ein Deformationsretrakt. In Abb. 4.8 ist der Kreis R ein Retrakt von X , aber kein Deformationsretrakt, denn das Loch in X verhindert die stetige Deformation von id_X zu dieser Retraktion. Da X und R vom selben Homotopietyp sind, gilt:

$$\pi_1(X, a) \cong \pi_1(R, a) \quad (a \in R). \quad (4.7)$$

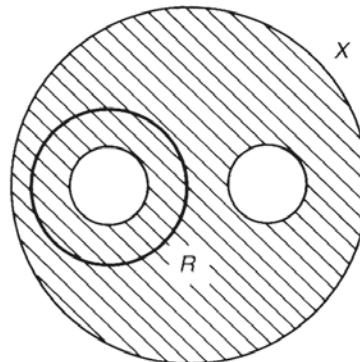


Abb. 4.8. Der Kreis \$R\$ ist kein Deformationsretrakt von \$X\$.

Beispiel 4.1. Seien \$X\$ der Einheitskreis und \$Y\$ ein Kreisring, also

$$X = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad (4.8)$$

$$Y = \{re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi, \frac{1}{2} \leq r \leq 1\}, \quad (4.9)$$

siehe Abb. 4.7. Wir definieren \$f : X \hookrightarrow Y\$ durch \$f(e^{i\theta}) = e^{i\theta}\$ und \$g : Y \rightarrow X\$ durch \$g(re^{i\theta}) = e^{i\theta}\$. Dann sind \$f \circ g : re^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}\$ und \$g \circ f : e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}\$. Wir erhalten \$f \circ g \sim \text{id}_Y\$ und \$g \circ f = \text{id}_X\$. Es existiert eine Homotopie

$$H(re^{i\theta}, t) = \{1 + (r-1)(1-t)\}e^{i\theta},$$

die zwischen \$\text{id}_Y\$ und \$f \circ g\$ interpoliert und Punkte auf \$X\$ unverändert lässt. Darum ist \$X\$ ein Deformationsretrakt von \$Y\$. Wie bei den Fundamentalgruppen gilt \$\pi_1(X, a) \cong \pi_1(Y, a)\$ mit einem \$a \in X\$. \$\diamond\$

Definition 4.9. Wenn ein Punkt \$a \in X\$ ein Deformationsretrakt von \$X\$ ist, sagt man, dass \$X\$ **zusammenziehbar** ist.

Sei \$c_a : X \rightarrow \{a\}\$ eine konstante Abbildung. Wenn \$X\$ zusammenziehbar ist, existiert eine Homotopie \$H : X \times I \rightarrow X\$, sodass \$H(x, 0) = c_a(x) = a\$ und \$H(x, 1) = \text{id}_X(x) = x\$ für beliebige \$x \in X\$ sind; darüber hinaus ist \$H(a, t) = a\$ für beliebige \$t \in I\$. Die Homotopie \$H\$ nennt man **Kontraktion**.

Beispiel 4.2. \$X = \mathbb{R}^n\$ ist zusammenziehbar auf den Ursprung 0. In der Tat erhalten wir, wenn wir \$H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n\$ durch \$H(x, t) = tx\$ definieren: (i) \$H(x, 0) = 0\$ und \$H(x, 1) = x\$ für beliebige \$x \in \mathbb{R}^n\$ und (ii) \$H(0, t) = 0\$ für beliebige \$t \in I\$. Damit ist auch klar, dass jede konvexe Teilmenge von \$\mathbb{R}^n\$ zusammenziehbar ist. \$\diamond\$

Übung 4.2 Sei $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Zeigen Sie, dass der Einheitskreis ein Deformationsretrakt von $D^2 \setminus \{0\}$ ist. Zeigen Sie außerdem, dass die Einheitssphäre S^n ein Deformationsretrakt von $D^{n+1} \setminus \{0\}$ ist, mit $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | |x| \leq 1\}$.

Satz 4.4. Die Fundamentalgruppe eines zusammenziehbaren Raums X ist trivial: $\pi_1(X, x_0) \cong \{e\}$. Insbesondere ist die Fundamentalgruppe des \mathbb{R}^n trivial: $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \cong \{e\}$.

Beweis

Ein zusammenziehbarer Raum hat dieselbe Fundamentalgruppe wie ein Punkt $\{p\}$, und ein Punkt hat die triviale Fundamentalgruppe. \square

Wenn ein bogenweise zusammenhängender Raum X eine triviale Fundamentalgruppe hat, nennt man X **einfach zusammenhängend**, siehe Abschnitt 2.3.

4.3 Beispiele für Fundamentalgruppen

Es gibt kein allgemeines Routineverfahren, um Fundamentalgruppen zu bestimmen. In manchen Fällen erhält man sie jedoch mit relativ einfachen Überlegungen. Wir schauen uns hier zunächst die Fundamentalgruppen des Kreises S^1 und verwandter Räume an.

Lassen Sie uns den S^1 als $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ ausdrücken. Wir definieren eine Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ durch $p : x \mapsto \exp(ix)$. Unter p wird der Punkt $0 \in \mathbb{R}$ auf $1 \in S^1$ abgebildet, den wir als Basispunkt wählen. Wir können uns vorstellen, dass \mathbb{R} sich unter p im S^1 um den Ursprung „wickelt“, siehe Abb. 4.9. Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x - y = 2\pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$) erfüllen, werden sie auf denselben Punkt in S^1 abgebildet. In diesem Fall schreiben wir $x \sim y$. Dies ist eine Äquivalenzrelation, und die Äquivalenzklasse $[x] = \{y | x - y = 2\pi m \text{ für irgendein } m \in \mathbb{Z}\}$ kann mit einem Punkt $\exp(ix) \in S^1$ identifiziert werden. Es folgt dann $S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Sei $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, sodass $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(x + 2\pi) \sim \tilde{f}(x)$ ist. Man sieht sofort, dass $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2n\pi$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$ ist, mit einer vorgegebenen ganzen Zahl n . Wenn $x \sim y$ ($x - y = 2\pi m$) ist, ergibt sich

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y + 2\pi m) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y) + 2\pi mn - \tilde{f}(y) = 2\pi mn$$

und daraus $\tilde{f}(x) \sim \tilde{f}(y)$. Dementsprechend definiert $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf eindeutige Weise eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ durch $f([x]) = p \circ \tilde{f}(x)$, siehe Abb. 4.9. Beachten Sie, dass f den Basispunkt $1 \in S^1$ fix lässt. Umgekehrt können wir für eine gegebene Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$, die $1 \in S^1$ unverändert lässt, eine Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren, sodass $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$ ist.

Zusammengefasst gibt es eine injektive Entsprechung zwischen der Menge der Abbildungen von S^1 nach S^1 mit $f(1) = 1$ und der Menge der Abbildungen von \mathbb{R}

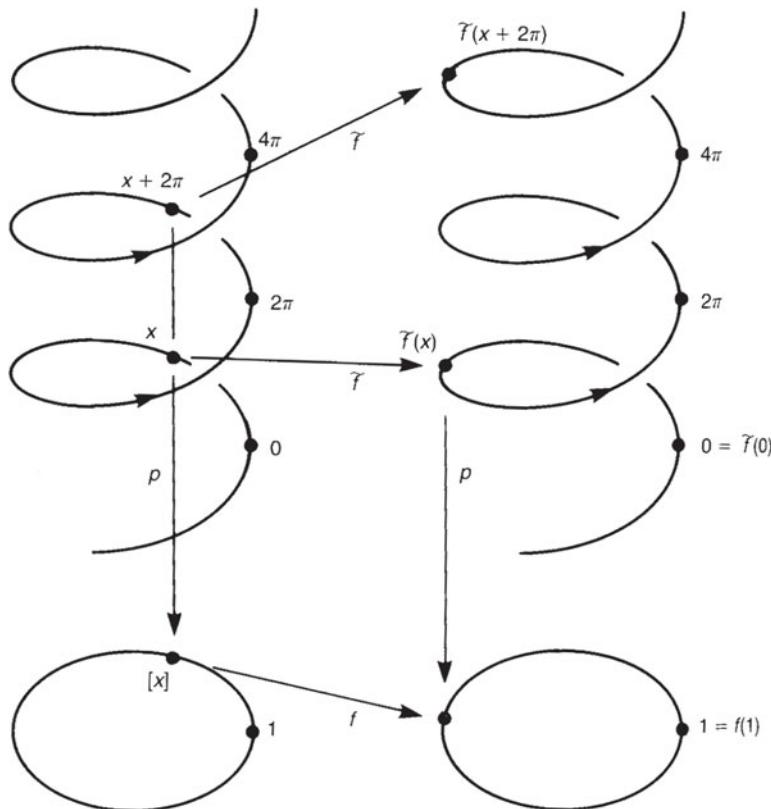


Abb. 4.9. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $x \mapsto \exp(ix)$ projiziert alle $x + 2m\pi$ auf denselben Punkt im S^1 , während $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(x+2\pi) = \tilde{f}(x) + 2n\pi$ für festes n , eine Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ definiert. Die ganze Zahl n gibt die Homotopieklassse an, der f angehört.

nach \mathbb{R} mit $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(x+2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$. Die ganze Zahl n heißt **Grad** von f , geschrieben als $d(f)$ (vom engl. „degree“). Während x einmal den Kreis S^1 umläuft, läuft $f(x)$ n -mal um S^1 .

Lemma 4.2. (1) Seien $f, g : S^1 \rightarrow S^1$, sodass $f(1) = g(1) = 1$ ist. Dann ist $d(f) = d(g)$ dann und nur dann, wenn f homotop zu g ist.

(2) Für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ existiert eine Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$, sodass $d(f) = n$ ist.

Beweis

(1) Sei $d(f) = d(g)$ und seien $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die zugehörigen Abbildungen. Dann ist $\tilde{F}(x, t) \equiv t\tilde{f}(x) + (1-t)\tilde{g}(x)$ eine Homotopie zwischen $\tilde{f}(x)$ und $\tilde{g}(x)$. Man überzeugt sich leicht, dass $F \equiv p \circ \tilde{F}$ eine Homotopie zwischen f und g ist. Umgekehrt gilt es, wenn $f \sim g : S^1 \rightarrow S^1$ ist, eine Homotopie $F : S^1 \times I \rightarrow S^1$, sodass $F(1, t) = 1$ für

beliebige $t \in I$ ist. Die zugehörige Homotopie $\tilde{F} : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ zwischen \tilde{f} und \tilde{g} erfüllt $\tilde{F}(x + 2\pi, t) = \tilde{F}(x, t) + 2n\pi$ für irgendein $n \in \mathbb{Z}$. Damit ist $d(f) = d(g)$.

(2) $\tilde{f} : x \mapsto nx$ induziert eine Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $d(f) = n$. \square

Lemma 4.2 sagt uns, dass wir durch das Zuweisen einer ganzen Zahl $d(f)$ zu einer Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $f(1) = 1$ eine Bijektion zwischen $\pi_1(S^1, 1)$ und \mathbb{Z} erhalten und diese sogar ein Isomorphismus ist. Tatsächlich genügt für $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ das Schleifen-Produkt $f * g$ der Beziehung $d(f * g) = d(f) + d(g)$.⁴ Damit haben wir schließlich den folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.5. Die Fundamentalgruppe von S^1 ist isomorph zu \mathbb{Z} :

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}. \quad (4.10)$$

(Da S^1 bogenweise zusammenhängend ist, können wir den Basispunkt weglassen.)

Obwohl der Beweis dieses Satzes nicht gerade offensichtlich ist, ist sein Inhalt leicht nachzuvollziehen: Nehmen wir an, wirwickeln ein elastisches Band um einen Zylinder. Wenn es den Zylinder n -mal umschlingt, kann die Konfiguration nicht stetig in eine Konfiguration mit m ($\neq n$) Umläufen deformiert werden. Wenn es zunächst n -mal und dann noch einmal m -mal um den Zylinder gelegt wird, ergibt das insgesamt $n + m$ Umläufe.

4.3.1 Fundamentalgruppe des Torus

Satz 4.6. Seien X und Y bogenweise zusammenhängende topologische Räume. Dann ist $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ isomorph zu $\pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$.

Beweis

Wir definieren die Projektionen $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ und $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$. Wenn α eine Schleife in $X \times Y$ bei (x_0, y_0) ist, dann ist $\alpha_1 \equiv p_1(\alpha)$ eine Schleife in X bei x_0 , und $\alpha_2 \equiv p_2(\alpha)$ ist eine Schleife in Y bei y_0 . Umgekehrt legt jedes Paar von Schleifen α_1 in X bei x_0 und α_2 in Y bei y_0 eindeutig eine Schleife $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ in $X \times Y$ bei (x_0, y_0) fest. Wir definieren einen Homomorphismus $\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$ durch

$$\varphi([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2]).$$

Durch Konstruktion hat φ eine Inverse, daher ist es der benötigte Isomorphismus, und es ist $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$. \square

⁴ Seien $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$ und $\tilde{g}(x + 2\pi) = \tilde{g}(x) + 2\pi m$. Dann ist $f * g(x + 2\pi) = f * g(x) + 2\pi(m + n)$. Beachten Sie, dass $*$ nicht eine Verkettung von Abbildungen, sondern ein Produkt von Pfaden ist.

Beispiel 4.3. (1) Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ ein Torus. Dann ist

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \quad (4.11)$$

Für den n -dimensionalen Torus

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_n$$

ergibt sich entsprechend

$$\pi_1(T^n) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_n. \quad (4.12)$$

(2) Sei $X = S^1 \times \mathbb{R}$ ein Zylinder. Wegen $\pi_1(\mathbb{R}) \cong \{e\}$ erhalten wir

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \{e\} \cong \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

◇

4.4 Fundamentalgruppen von Polyedern

Die Berechnung von Fundamentalgruppen im vorigen Abschnitt erfolgte in gewisser Weise ad hoc – ein etwas systematischerer Weg zur Bestimmung von Fundamentalgruppen wäre sicherlich zu wünschen. Glücklicherweise können wir bei einem triangulierbaren Raum X die Fundamentalgruppe des Polyeders K und daraus dann die von X mit einem Routineverfahren bestimmen. Beginnen wir mit ein bisschen Gruppentheorie.

4.4.1 Freie Gruppen und Relationen

Die freien Gruppen, die wir hier definieren, sind nicht notwendigerweise Abel'sch, wir verwenden darum eine multiplikative Schreibweise für die Gruppenoperation. Eine Teilmenge $X = \{x_j\}$ von einer Gruppe G heißt eine **freie Menge von Erzeugern** von G , wenn jedes Element $g \in G \setminus \{e\}$ sich *eindeutig* als

$$g = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \quad (4.14)$$

schreiben lässt, mit endlichem n und $i_k \in \mathbb{Z}$. Wir nehmen an, dass benachbarte x_j nicht gleich sind: $x_j \neq x_{j+1}$. Wenn $i_j = 1$ ist, dann ist x_j^1 einfach x_j . Wenn $i_j = 0$ ist, dann fällt der Term x_j^0 in g weg. Beispielsweise ist $g = a^3 b^{-2} c b^3$ in Ordnung, aber $h = a^3 a^{-2} c b^0$ dagegen. Wenn jedes Element eine eindeutige Darstellung haben sollen, müssen wir h zu $h = ac$ zusammenfassen. Wenn G eine freie Menge von Erzeugern hat, nennen wir es eine **freie Gruppe**.

Umgekehrt können wir zu einer gegebenen Menge X eine freie Gruppe G konstruieren, deren freie Menge von Erzeugern X ist. Nennen wir die Elemente von X **Buchstaben**. Das Produkt

$$w = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \quad (4.15)$$

wird dann **Wort** genannt, wobei $x_j \in X$ und $i_j \in \mathbb{Z}$ ist. Wenn alle $i_j \neq 0$ und alle $x_j \neq x_{j+1}$ sind, nennt man das Wort **reduziertes Wort**. Es ist immer möglich, ein Wort in einer endlichen Zahl von Schritten zu reduzieren. Beispielsweise ist

$$a^{-2}b^{-3}b^3a^4b^3c^{-2}c^4 = a^{-2}b^0a^4b^3c^2 = a^2b^3c^2.$$

Ein Wort ohne Buchstaben wird **leeres Wort** genannt und mit 1 bezeichnet. Man erhält es z. B. durch Reduzieren von $w = a^0$.

Das Produkt zweier Wörter ist einfach als die Aneinanderreihung der beiden Wörter definiert. Beachten Sie, dass eine Aneinanderreihung von reduzierten Wörtern nicht notwendigerweise reduziert ist, sie aber immer reduziert werden kann. Wenn z. B. $v = a^2c^{-3}b^2$ und $w = b^{-2}c^2b^3$ sind, wird das Produkt vw gemäß

$$vw = a^2c^{-3}b^2b^{-2}c^2b^3 = a^2c^{-3}c^2b^3 = a^2c^{-1}b^3$$

reduziert. Somit bildet die Menge aller reduzierten Wörter eine wohldefinierte freie Gruppe, die man die von X erzeugte freie Gruppe $F[X]$ nennt. Die Multiplikation ist die Aneinanderreihung von zwei Wörtern mit anschließender Reduktion, das neutrale Element ist das leere Wort, und das Inverse von

$$w = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

ist

$$w^{-1} = x_n^{-i_n} \cdots x_2^{-i_2} x_1^{-i_1}.$$

Übung 4.3 Sei $X = \{a\}$. Zeigen Sie, dass die durch X erzeugte freie Gruppe isomorph zu \mathbb{Z} ist.

Im Allgemeinen wird eine beliebige Gruppe G durch ihre Erzeuger sowie gewisse Zwangsbedingungen, welche diese erfüllen müssen, charakterisiert. Wenn $\{x_k\}$ die Menge der Erzeuger ist, werden die Zwangsbedingungen gewöhnlich in der Form

$$r = x_{k_1}^{i_1} x_{k_2}^{i_2} \cdots x_{k_n}^{i_n} = 1 \quad (4.16)$$

geschrieben und **Relationen** genannt. Beispielsweise erfüllt die zyklische Gruppe n -ter Ordnung, die von x erzeugt wird (in multiplikativer Schreibweise) eine Relation $x^n = 1$.

Etwas formaler sei G eine durch $X = \{x_k\}$ erzeugte Gruppe. Jedes Element $g \in G$ lässt sich als $g = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ schreiben, wobei wir nicht fordern, dass dieser Ausdruck eindeutig sein muss (also G nicht notwendigerweise frei ist). Beispielsweise ist $x^i = x^{n+1}$ in \mathbb{Z} . Sei $F[X]$ die von X erzeugte freie Gruppe. Dann gibt es einen natürlichen surjektiven Homomorphismus φ von $F[X]$ nach G , der durch

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \xrightarrow{\varphi} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \in G \quad (4.17)$$

definiert ist. Beachten Sie, dass dies kein Isomorphismus ist, da die linke Seite der Gleichung nicht eindeutig ist. φ ist surjektiv, da X sowohl $F[X]$ als auch G erzeugt. Obwohl $F[X]$ nicht isomorph zu G ist, ist dies für $F[X]/\ker \varphi$ der Fall (siehe Satz 3.1):

$$F[X]/\ker \varphi \cong G. \quad (4.18)$$

In diesem Sinne legen die Menge X der Erzeuger und $\ker \varphi$ die Gruppe G eindeutig fest.⁵

Auf diese Weise wird eine von X erzeugte Gruppe G durch die Relationen festgelegt. Die Aneinanderreihung von Erzeugern und Relationen

$$(x_1, \dots, x_p; r_1, \dots, r_q) \quad (4.19)$$

wird eine **Präsentation** von G genannt, z. B. $\mathbb{Z}_n = (x; x^n)$ und $\mathbb{Z} = (x; \emptyset)$.

Beispiel 4.4. Sei $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{x^n y^m | n, m \in \mathbb{Z}\}$ eine freie Abel'sche Gruppe, die durch $X = \{x, y\}$ erzeugt wird. Dann ist $xy = yx$. Wegen $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ liegt eine Relation $r = xyx^{-1}y^{-1}$ vor. Die Präsentation von $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist $(x, y : xyx^{-1}y^{-1})$. \diamond

4.4.2 Bestimmung der Fundamentalgruppen von Polyedern

Wir werden an dieser Stelle etwas skizzenhaft bleiben, um nicht zu tief in die technischen Details einzusteigen. Dabei folgen wir Armstrong (1983); wenn Sie sich näher dafür interessieren, sollten Sie dort weiterlesen oder auch in jedem anderen Lehrbuch über Algebraische Topologie. Wie im vorigen Kapitel beschrieben, ist ein Polyeder $|K|$ eine geschickte Approximation eines gegebenen topologischen Raums X im Rahmen eines Homöomorphismus. Da Fundamentalgruppen topologische Invarianten sind, gilt $\pi_1(X) = \pi_1(|K|)$. Wir nehmen an, dass X ein bogenweise zusammenhängender Raum ist, und lassen den Basispunkt weg. Dementsprechend können wir, wenn wir einen systematischen Weg für die Berechnung $\pi_1(|K|)$ gefunden haben, ebenso $\pi_1(X)$ erhalten.

Als erstes definieren wir die Kantengruppe eines Simplizialkomplexes, welche mit der Fundamentalgruppe eines topologischen Raums korrespondiert, dann stellen wir einen bequemen Weg für ihre Berechnung vor. Sei $f : |K| \rightarrow X$ eine Triangulation eines topologischen Raums X . Wenn wir beachten, dass ein Element der Fundamentalgruppe von X durch Schleifen in X repräsentiert werden kann, sollten wir erwarten, dass in $|K|$ ähnliche Schleifen existieren. Da jede Schleife in $|K|$ aus 1-Simplexen besteht, sehen wir uns die Menge der 1-Simplexe in $|K|$ an, die mit einer Gruppenstruktur versehen werden kann und dann die Kantengruppe von K heißt.

⁵ $\ker \varphi$ ist ein Normalteiler. Lemma 3.1 besagt, dass $\ker \varphi$ eine Untergruppe von $F[X]$ ist. Sei $r \in \ker \varphi$, also ist $r \in F[X]$ und $\varphi(r) = 1$. Für jedes Element $x \in F[X]$ erhalten wir $\varphi(x^{-1}rx) = \varphi(x^{-1})\varphi(r)\varphi(x) = \varphi(x)^{-1}\varphi(r)\varphi(x) = 1$, und daher ist $x^{-1}rx \in \ker \varphi$.

Ein **Kantenpfad** in einem Simplizialkomplex K ist eine Folge $v_0v_1 \dots v_k$ von Ecken in $|K|$, in welcher das benachbarte Paar $v_i v_{i+1}$ ein 0- oder 1-Simplex von $|K|$ ist.⁶ Ist $v_0 = v_k (= v)$, dann ist der Kantenpfad eine **Kantenschleife** bei v . Wir klassifizieren diese Schleifen in Äquivalenzklassen gemäß einer geeigneten Äquivalenzrelation. Zwei Kantenschleifen α und β sollen äquivalent sein, wenn wir die eine aus der anderen durch wiederholtes Anwenden der folgenden Operationen in einer endlichen Zahl von Schritten erhalten:

(1) Wenn die Ecken u, v und w einen 2-Simplex in K aufspannen, kann der Kantenpfad uvw durch uw ersetzt werden und umgekehrt, siehe Abb. 4.10(a).

(2) Für den Fall, dass in (1) $u = w$ ist, entspricht der Kantenpfad uvw dem Weg von u nach v (also uv) und dann auf gleichem Wege wieder von v zurück nach $w = u$. Dieser Kantenpfad uvu kann durch einen 0-Simplex u ersetzt werden und umgekehrt, siehe Abb. 4.10(b).

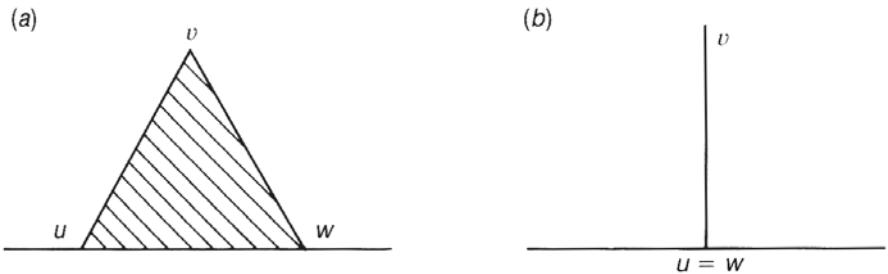


Abb. 4.10. Mögliche Deformationen der Kantenschleifen: In (a) wird uvw durch uw ersetzt, in (b) uvu durch u .

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse der Kantenschleifen bei v , zu der $vv_1 \dots v_{k-1}v$ gehört, mit $\{vv_1 \dots v_{k-1}v\}$. Die Menge dieser Äquivalenzklassen bildet eine Gruppe unter der durch

$$\{vu_1 \dots u_{k-1}v\} * \{vv_1 \dots v_{i-1}v\} = \{vu_1 \dots u_{k-1}vv_1 \dots v_{i-1}v\} \quad (4.20)$$

definierten Produktoperation. Das neutrale Element ist eine Äquivalenzklasse $\{v\}$, während die Inverse von $\{vv_1 \dots v_{k-1}v\}$ das Element $\{vv_{k-1} \dots v_1v\}$ ist. Diese Gruppe ist die **Kantengruppe** von K bei v , man schreibt $E(K; v)$ (E von engl. „edge“).

Satz 4.7. $E(K; v)$ ist isomorph zu $\pi_1(|K|; v)$.

Den Beweis hierfür finden Sie z. B. in Armstrong (1983). Dieser Isomorphismus $\varphi : E(K; v) \rightarrow \pi_1(|K|; v)$ ist gegeben durch die Identifikation einer Kantenschleife in

⁶ Aus technischen Gründen erlauben wir die Möglichkeit $v_i = v_{i+1}$, für die das relevante Simplex ein 0-Simplex ist.

K mit einer Schleife in $|K|$. Um $E(K; v)$ zu erhalten, müssen wir die Erzeuger und die Relationen ablesen. Sei L ein Untersimplizialkomplex von K , sodass

- (a) L alle Ecken (0-Simplexe) von K enthält und
- (b) das Polyeder $|L|$ bogenweise und einfach zusammenhängend ist.

Zu einem gegebenen bogenweise zusammenhängenden Simplizialkomplex K existiert immer ein Unterkomplex L , der diese Bedingungen erfüllt. Ein eindimensionaler Simplizialkomplex, der bogenweise und einfach zusammenhängt, wird ein **Baum** genannt. Ein Baum T_{\max} heißt **maximaler Baum** von K , wenn er keine echte Teilmenge eines anderen Baums ist.

Lemma 4.3. Ein maximaler Baum T_{\max} enthält alle Ecken (Knoten) von K und erfüllt damit die obigen Bedingungen (a) und (b).

Beweis

Nehmen wir an, T_{\max} würde eine Ecke w nicht enthalten. Da K bogenweise zusammenhängt, gibt es ein 1-Simplex vw in K , sodass $v \in T_{\max}$ und $w \notin T_{\max}$ ist. Dann ist $T_{\max} \cup \{vw\} \cup \{w\}$ ein eindimensionaler Unterkomplex von K , der bogenweise und einfach zusammenhängt und dabei T_{\max} enthält, in Widerspruch zur Annahme. \square

Angenommen, wir haben irgendwie den Unterkomplex L erhalten. Da $|L|$ einfach zusammenhängend ist, tragen die Kantenschleifen in $|L|$ nicht zu $E(K; v)$ bei. Daher können wir die Simplexe in L in unseren Berechnungen effektiv ignorieren. Seien $v_0 (=v), v_1, \dots, v_n$ die Ecken von K . Wir weisen jedem geordneten Paar von Ecken v_i, v_j ein „Objekt“ g_{ij} zu, wenn $\langle v_i v_j \rangle$ ein 1-Simplex von K ist. Sei $G(K; L)$ eine Gruppe, die von allen g_{ij} erzeugt wird. Wie sieht es mit den Relationen aus? Wir gehen von Folgendem aus:

- (1) Da wir die Simplexe in L ignorieren, setzen wir $g_{ij} = 1$, wenn $\langle v_i v_j \rangle \in L$.
- (2) Wenn $\langle v_i v_j v_k \rangle$ ein 2-Simplex von K ist, gibt es keine nichtrivialen Schleifen um $v_i v_j v_k$, und wir haben die Relation $g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1$.

Die Erzeuger $\{g_{ij}\}$ und die Menge der Relationen bestimmen die Gruppe $G(K; L)$ vollständig.

Satz 4.8. $G(K; L)$ ist isomorph zu $E(K; v) \simeq \pi_1(|K|; v)$.

Tatsächlich können wir noch effizienter vorgehen, als es zunächst den Anschein hat. g_{ii} sollte z. B. gleich 1 gesetzt werden, denn g_{ii} entspricht der Ecke v_i , die ein Element von L ist. Darüber hinaus folgt aus $g_{ij} g_{ji} = g_{ii} = 1$, dass $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ ist. Darum brauchen wir für jedes Paar von Ecken v_i, v_j nur diejenigen Erzeuger g_{ij} zu betrachten, für die $\langle v_i v_j \rangle \in K \setminus L$ und $i < j$ gilt. Da es keine Erzeuger g_{ij} mit $\langle v_i v_j \rangle \in L$ gibt, können wir den ersten Typ von Relationen ignorieren. Wenn $\langle v_i v_j v_k \rangle$ ein 2-Simplex von $K \setminus L$ mit $i < j < k$ ist, ist die entsprechende Relation eindeutig durch $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ gegeben, denn wir interessieren uns nur für Simplexe $\langle v_i v_j \rangle$ mit $i < j$.

Insgesamt sehen die Spielregeln mithin wie folgt aus:

- (1) Wir ermitteln zuerst eine Triangulation $f : |K| \rightarrow X$.
- (2) Wir ermitteln den bogenweise und einfach zusammenhängenden Unterkomplex L , der alle Ecken von K enthält.
- (3) Wir weisen jedem 1-Simplex $\langle v_i v_j \rangle$ aus $K \setminus L$ ($i < j$) einen Generator g_{ij} zu.
- (4) Wir stellen eine Relation $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ auf, wenn ein 2-Simplex $\langle v_i v_j v_k \rangle$ existiert, sodass $i < j < k$ ist. Wenn von den drei Ecken v_i, v_j und v_k zwei ein 1-Simplex von L bilden, muss der entsprechende Erzeuger auf 1 gesetzt werden.
- (5) Jetzt ist $\pi_1(X)$ isomorph zu $G(K; L)$; diese Menge ist eine Gruppe, die zusammen mit den Relationen in (4) durch die $\{g_{ij}\}$ erzeugt wird.

Lassen Sie uns einige Beispiele durchrechnen.

Beispiel 4.5. Aus unserem Konstruktionsschema sollte klar sein, dass $E(K; v)$ und $G(K; L)$ nur die 0-, 1- und 2-Simplexe von K betreffen. Dementsprechend gilt für ein **2-Gerüst** $K^{(2)}$ von K , das als die Menge aller 0-, 1- und 2-Simplexe von K definiert ist:

$$\pi_1(|K|) \cong \pi_1(|K^{(2)}|). \quad (4.21)$$

Dies ist recht nützlich, wenn man die Rechnungen tatsächlich ausführt. Ein 3-Simplex und sein Rand haben z. B. dasselbe 2-Gerüst. Ein 3-Simplex ist ein Polyeder $|K|$ zur gefüllten Kugel D^3 , während sein Rand $|L|$ ein Polyeder zur Sphäre S^2 ist. Da D^3 zusammenziehbar ist, gilt $\pi_1(|K|) \cong \{e\}$. Mit (4.21) erhalten wir $\pi_1(S^2) \cong \pi_1(|K|) \cong \{e\}$. Im Allgemeinen, also für $n \geq 2$, haben das $(n+1)$ -Simplex σ_{n+1} und der Rand von σ_{n+1} dasselbe 2-Gerüst. Wenn wir beachten, dass σ_{n+1} zusammenziehbar und der Rand von σ_{n+1} ein Polyeder von S^n ist, ergibt sich die Formel

$$\pi_1(S^n) \cong \{e\} \quad (n \geq 2). \quad (4.22)$$

◊

Beispiel 4.6. Sei $K \equiv \{v_1, v_2, v_3, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_1 v_3 \rangle, \langle v_2 v_3 \rangle\}$ ein Simplizialkomplex des Kreises S^1 ; als Basispunkt nehmen wir v_1 an. Ein maximaler Baum ist z. B. $L = \{v_1, v_2, v_3, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_1 v_3 \rangle\}$. Es gibt nur den einen Erzeuger g_{23} . Da es keine 2-Simplexe in K gibt, ist die Relation leer. Darum ist

$$\pi_1(S^1) \cong G(K; L) = (g_{23}; \emptyset) \cong \mathbb{Z}, \quad (4.23)$$

in Übereinstimmung mit Satz 4.5.

◊

Beispiel 4.7. Ein **n -Bouquet** (auch n -Wedge-Produkt oder n -Rose) ist definiert als die Ein-Punkt-Vereinigung von n Kreisen. Beispielsweise zeigt Abb. 4.11 eine Triangulation eines 3-Bouquets. Betrachten wir den gemeinsamen Punkt v als Basispunkt.

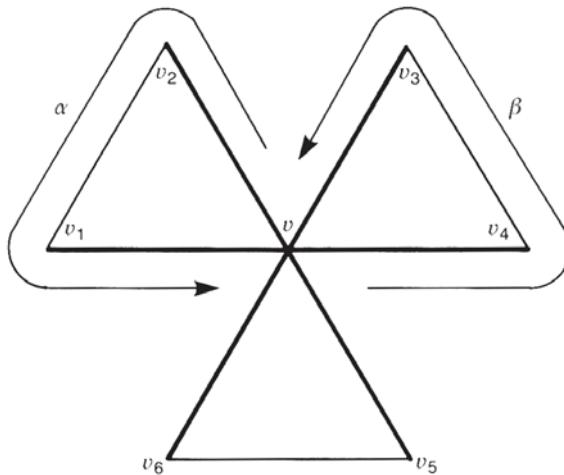


Abb. 4.11. Eine Triangulation eines 3-Bouquets. Die dickeren Linien stellen den maximalen Baum L dar.

Die dickeren Linien stellen den maximalen Baum L dar. Die Erzeuger von $G(K; L)$ sind g_{12}, g_{34} und g_{56} . Es gibt keine Relationen, und wir erhalten

$$\pi_1(3\text{-Bouquet}) = G(K; L) = (x, y, z; \emptyset). \quad (4.24)$$

Beachten Sie, dass dies eine freie, aber keine freie *Abel'sche* Gruppe ist. Die Nicht-kommutativität lässt sich wie folgt zeigen: Betrachten Sie zwei Schleifen α und β bei v , die um verschiedene Löcher laufen sollen. Offensichtlich kann das Produkt $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$ nicht stetig in β deformiert werden, daher ist $[\alpha] * [\beta] * [\alpha]^{-1} \neq [\beta]$ oder

$$[\alpha] * [\beta] \neq [\beta] * [\alpha]. \quad (4.25)$$

Im Allgemeinen hat ein n -Bouquet die n Erzeuger $g_{12}, \dots, g_{(2n-1)(2n)}$, und die Fundamentalgruppe ist isomorph zur freien Gruppe mit n Erzeugern und keinen Relationen. \diamond

Beispiel 4.8. Sei D^2 eine zweidimensionale Scheibe. Eine Triangulation K von D^2 ist durch ein Dreieck samt Innerem gegeben. Natürlich kann K selbst L sein, dann ist $K \setminus L$ leer. Somit erhalten wir $\pi_1(K) \cong \{e\}$. \diamond

Beispiel 4.9. In Abb. 4.12 sehen Sie eine Triangulation des Torus T^2 . Die schraffierte Fläche soll der Unterkomplex L sein. (Überprüfen Sie, dass es alle Ecken enthält und sowohl bogenweise als auch einfach zusammenhängend ist.) Es gibt elf Erzeuger mit zehn Relationen. Wir setzen $x = g_{02}$ und $y = g_{04}$ und schreiben die Relationen explizit aus:

$$(a) \quad \begin{matrix} g_{02} & g_{27} \\ x & 1 \end{matrix} = g_{07} \rightarrow g_{07} = x \quad (b) \quad \begin{matrix} g_{03} & g_{37} \\ 1 & x \end{matrix} = g_{07} \rightarrow g_{37} = x$$

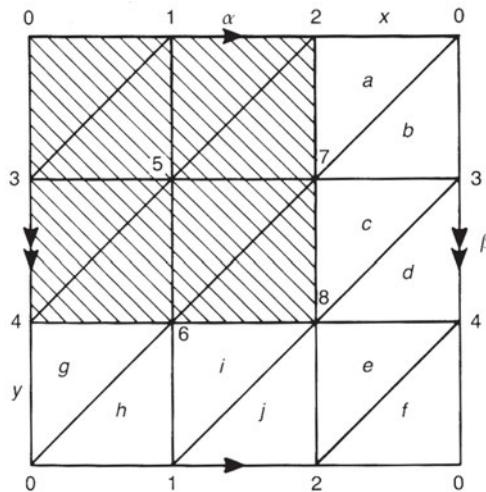


Abb. 4.12. Eine Triangulation des Torus.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(c)} & g_{37} \quad g_{78} = g_{38} \rightarrow g_{38} = x \\
 & x \quad 1 \\
 \text{(d)} & g_{34} \quad g_{48} = g_{38} \rightarrow g_{48} = x \\
 & 1 \quad x \\
 \text{(e)} & g_{24} \quad g_{48} = g_{28} \rightarrow g_{24}x = g_{28} \\
 & x \quad x \\
 \text{(f)} & g_{02} \quad g_{24} = g_{04} \rightarrow xg_{24} = y \\
 & x \quad y \\
 \text{(g)} & g_{04} \quad g_{46} = g_{06} \rightarrow g_{06} = y \\
 & y \quad 1 \\
 \text{(h)} & g_{01} \quad g_{16} = g_{06} \rightarrow g_{16} = y \\
 & 1 \quad y \\
 \text{(i)} & g_{16} \quad g_{68} = g_{18} \rightarrow g_{18} = y \\
 & y \quad 1 \\
 \text{(j)} & g_{12} \quad g_{28} = g_{18} \rightarrow g_{28} = y.
 & 1 \quad y
 \end{array}$$

Aus (e) und (f) folgt $x^{-1}yx = g_{28}$ und schließlich

$$g_{02} = g_{07} = g_{37} = g_{38} = g_{48} = x,$$

$$g_{04} = g_{06} = g_{16} = g_{18} = g_{28} = y,$$

$$g_{24} = x^{-1}y,$$

mit einer Relation $x^{-1}yx = y$, oder

$$xyx^{-1}y^{-1} = 1. \quad (4.26)$$

Dies zeigt, dass $G(K; L)$ von zwei kommutativen Erzeugern erzeugt wird – beachten Sie $xy = yx$. Daher ist in Einklang mit (4.11), vgl. auch Beispiel 4.4:

$$G(K; L) = (x, y; xyx^{-1}y^{-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \quad (4.27)$$

Wir können uns das folgende intuitive Bild vorstellen: Wir betrachten die Schleifen $\alpha = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ und $\beta = 0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$. Die Schleife α identifizieren wir

mit $x = g_{02}$, wegen $g_{12} = g_{01} = 1$ und die Schleife β mit $y = g_{04}$. Diese erzeugen die Gruppe $\pi_1(T^2)$, da α und β unabhängige nichttriviale Schleifen sind. Mit diesen können wir die Relation als

$$\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1} \sim c_v \quad (4.28)$$

schreiben, wobei c_v eine konstante Schleife bei v ist, siehe Abb. 4.13.

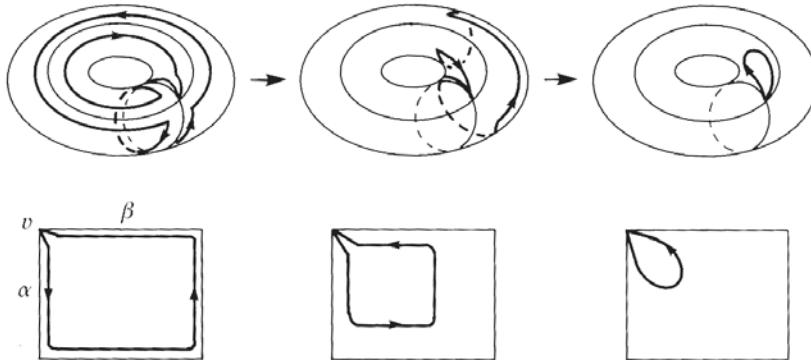


Abb. 4.13. Die Schleifen α und β erfüllen die Relation $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1} \sim c_v$.

Sei allgemeiner Σ_g der Torus mit Geschlecht g . Wie wir in Übung 2.1 gezeigt haben, lässt sich Σ_g als eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 ausdrücken, wenn wir die Ränder geeignet identifizieren. Die Fundamentalgruppe von Σ_g wird durch die $2g$ Schleifen α_i, β_i ($1 \leq i \leq g$) erzeugt. Ähnlich wie bei (4.28) können wir bestätigen, dass gilt:

$$\prod_{i=1}^g (\alpha_i * \beta_i * \alpha_i^{-1} * \beta_i^{-1}) \sim c_v. \quad (4.29)$$

Wenn wir die mit α_i korrespondierenden Erzeuger als x_i bezeichnen und die zu β_i gehörenden als y_i , besteht zwischen diesen nur eine Relation:

$$\prod_{i=1}^g (x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}) = 1. \quad (4.30)$$

◊

Übung 4.4 Abb. 4.14 ist eine Triangulation der Klein'schen Flasche. Die schraffierte Fläche ist der Unterkomplex L . Es gibt (wie beim Torus) elf Erzeuger und zehn Relationen. Setzen Sie $x = g_{02}$ und $y = g_{04}$ und schreiben Sie die Relationen für die 2-Simplexe auf, um zu zeigen, dass gilt:

$$\pi_1(\text{Klein'sche Flasche}) \cong (x, y; xyx^{-1}). \quad (4.31)$$

Beispiel 4.10. Abb. 4.15 zeigt eine Triangulation der projektiven Ebene \mathbb{RP}^2 . Auch hier sei die schraffierte Fläche der Unterkomplex L . Diesmal haben wir sieben Er-

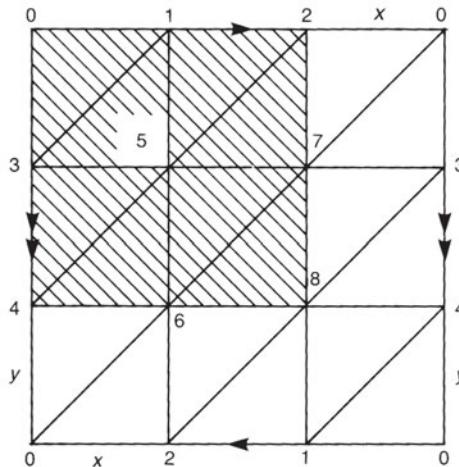


Abb. 4.14. Eine Triangulation der Klein'schen Flasche.

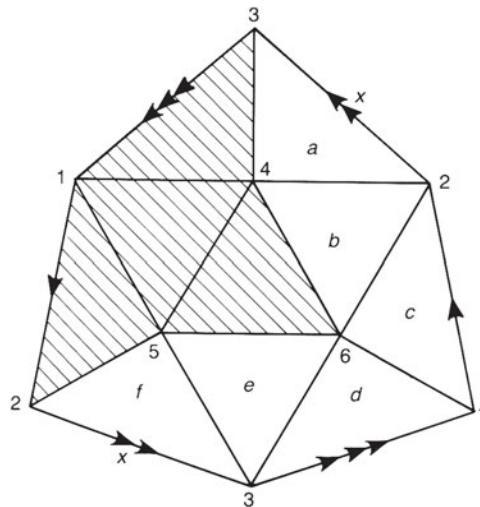


Abb. 4.15. Eine Triangulation der projektiven Ebene.

zeuger und sechs Relationen. Mit $x = g_{23}$ schreiben wir die Relationen

- | | |
|--|--|
| (a) $\begin{matrix} g_{23} & g_{34} \\ x & 1 \end{matrix} = g_{24} \rightarrow g_{24} = x$ | (b) $\begin{matrix} g_{24} & g_{46} \\ x & 1 \end{matrix} = g_{26} \rightarrow g_{26} = x$ |
| (c) $\begin{matrix} g_{12} & g_{26} \\ 1 & x \end{matrix} = g_{16} \rightarrow g_{16} = x$ | (d) $\begin{matrix} g_{13} & g_{36} \\ 1 & x \end{matrix} = g_{16} \rightarrow g_{36} = x$ |
| (e) $\begin{matrix} g_{35} & g_{56} \\ 1 & x \end{matrix} = g_{36} \rightarrow g_{35} = x$ | (f) $\begin{matrix} g_{23} & g_{35} \\ x & x \end{matrix} = g_{25} \rightarrow x^2 = 1.$ |

Daraus erhalten wir

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong (x; x^2) \cong \mathbb{Z}_2. \quad (4.32)$$

◊

Intuitiv lässt sich das Auftreten einer zyklischen Gruppe folgendermaßen verstehen: Abb. 4.16(a) ist eine schematische Skizze der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$. Wir betrachten die beiden Schleifen α und β . Man sieht leicht, dass sich α stetig zu einem Punkt deformieren lässt und darum ein triviales Element von $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ ist. Da einander diametral gegenüberliegende Punkte in der $\mathbb{R}P^2$ identifiziert werden, ist β in Wirklichkeit eine geschlossene Schleife. Da sie nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, ist sie ein nichttriviales Element von $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. Was ist mit dem Produkt? $\beta * \beta$ ist eine Schleife, die zweimal von P nach Q ~ P läuft. Aus Abb. 4.16(b) können wir ersehen, dass sich $\beta * \beta$ stetig zu einem Punkt zusammenzieht und darum zur trivialen Klasse gehört. Dies zeigt, dass der Erzeuger x , der mit der Homotopieklassie von Schleife β korrespondiert, die Relation $x^2 = 1$ erfüllt, was unser Resultat bestätigt.

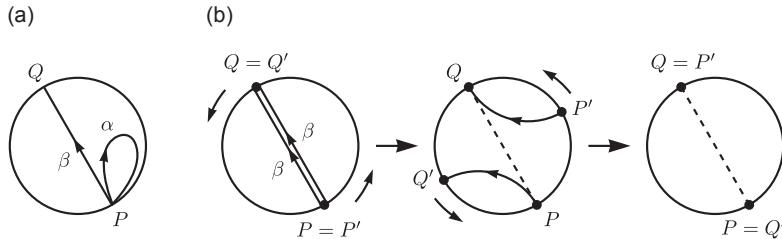


Abb. 4.16. (a) α ist eine triviale Schleife, während die Schleife β nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden kann. (b) $\beta * \beta$ lässt sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen.

Mit denselben Argumenten kann man zeigen:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}_2, \quad (4.33)$$

wobei der projektive Raum $\mathbb{R}P^3$ mit einer (Hyper-)Sphäre S^3 identifiziert wird, bei welcher diametral gegenüberliegende Punkte identifiziert werden: $\mathbb{R}P^3 = S^3/(x \sim -x)$. Wenn wir eine Hemisphäre von S^3 als Repräsentanten wählen, können wir den $\mathbb{R}P^3$ als eine gefüllte Kugel D^3 darstellen, bei der auf der Oberfläche diametral entgegengesetzte Punkte miteinander identifiziert werden. Wenn wir die Scheiben D^2 in Abb. 4.16 als D^3 -Vollkugeln interpretieren, führt die gleiche Argumentation auf die Beziehung (4.33).

Übung 4.5 In Abb. 3.8 hatten wir eine Triangulation des Möbius-Bands gezeigt. Ermitteln Sie den maximalen Baum und zeigen Sie,⁷ dass gilt:

$$\pi_1(\text{Möbius-Band}) \cong \mathbb{Z}. \quad (4.34)$$

⁷ Natürlich ist das Möbius-Band vom selben Homotopietyp wie der S^1 , weswegen (4.34) trivial ist. Es geht darum, dass Sie diesen Sachverhalt mithilfe der hier vorgestellten Routineprozedur bestätigen.

4.4.3 Relationen zwischen $H_1(K)$ und $\pi_1(|K|)$

Möglicherweise ist Ihnen eine gewisse Ähnlichkeit aufgefallen zwischen der ersten Homologiegruppe $H_1(K)$ und der Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|)$. So sind die Fundamentalgruppen von vielen Räumen (Kreis, Scheibe, n -Sphäre, Torus und viele andere) identisch mit der korrespondierenden ersten Homologiegruppe. In manchen Fällen jedoch unterscheiden sie sich, so ist $H_1(2\text{-Bouquet}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, aber $\pi_1(2\text{-Bouquet}) = (x, y : \emptyset)$. Beachten Sie, dass $H_1(2\text{-Bouquet})$ eine freie *Abel'sche* Gruppe ist, während $\pi_1(2\text{-Bouquet})$ eine freie Gruppe ist. Der folgende Satz setzt $\pi_1(|K|)$ in Beziehung zu $H_1(K)$.

Satz 4.9. Sei K ein zusammenhängender Simplizialkomplex. Dann ist $H_1(K)$ isomorph zu $\pi_1(|K|)/F$, mit der Kommutatorgruppe F von $\pi_1(|K|)$ (siehe später).

Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $(x_i; r_m)$. Die **Kommatorgruppe** F von G ist eine Gruppe, die von den Elementen der Form $x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}$ erzeugt wird. Damit ist G/F eine von $\{x_i\}$ erzeugte Gruppe mit der Menge der Relationen $\{r_m\}$ und $\{x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}\}$. Der Satz besagt dann: Ist $\pi_1(|K|) = (x_i : r_m)$, dann ist $H_1(K) \cong (x_i : r_m, x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1})$. So erhalten wir aus $\pi_1(2\text{-Bouquet}) = (x, y : \emptyset)$:

$$\pi_1(2\text{-Bouquet})/F \cong (x, y; xyx^{-1}y^{-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

was isomorph zu $H_1(2\text{-Bouquet})$ ist.

Den Beweis von Satz 4.9 können Sie bei Greenberg und Harper (1981) finden, und bei Croom (1978) ist er ebenfalls skizziert.

Beispiel 4.11. Aus $\pi_1(\text{Klein'sche Flasche}) \cong (x, y; xyxy^{-1})$ ergibt sich

$$\pi_1(\text{Klein'sche Flasche})/F \cong (x, y; xyxy^{-1}, xyx^{-1}y^{-1}).$$

Wir ersetzen zwei Relationen durch $x^2 = 1$ und $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \pi_1(\text{Klein'sche Flasche})/F &\cong (x, y; xyx^{-1}y^{-1}, x^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \\ &\cong H_1(\text{Klein'sche Flasche}), \end{aligned}$$

wobei der Faktor \mathbb{Z} durch y erzeugt wird und \mathbb{Z}_2 durch x . \diamond

Korollar 4.2. Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum. Dann ist $\pi_1(X)$ isomorph zu $H_1(X)$ dann und nur dann, wenn $\pi_1(X)$ kommutativ ist. Insbesondere ist, wenn $\pi_1(X)$ durch nur einen Erzeuger erzeugt wird, $\pi_1(X)$ immer isomorph zu $H_1(X)$. (Wenden Sie Satz 4.9 an.)

Korollar 4.3. Wenn X und Y vom selben Homotopietyp sind, sind ihre ersten Homologiegruppen identisch: $H_1(X) = H_1(Y)$. (Nutzen Sie hier die Sätze 4.9 und 4.3.)

4.5 Höhere Homotopiegruppen

Die Fundamentalgruppe klassifiziert die Homotopieklassen von Schleifen in einem topologischen Raum X . Es gibt viele Möglichkeiten, dem Raum X weitere Gruppen zuzuordnen. Beispielsweise können wir die Homotopieklassen der Sphären in X oder die der Tori in X klassifizieren. Es stellt sich heraus, dass die Homotopieklassen der Sphäre S^n ($n \geq 2$) eine Gruppe bilden, welche der Fundamentalgruppe ähnelt.

4.5.1 Definitionen

Sei I^n ($n \geq 1$) der n -Einheitswürfel $I \times \cdots \times I$:

$$I^n = \{(s_1, \dots, s_n) | 0 \leq s_i \leq 1 (1 \leq i \leq n)\}. \quad (4.35)$$

Der Rand ∂I^n ist der geometrische Rand von I^n :

$$\partial I^n = \{(s_1, \dots, s_n) \in I^n | \text{irgendein } s_i = 0 \text{ oder } 1\}. \quad (4.36)$$

Wir erinnern uns, dass in der Fundamentalgruppe der Rand ∂I von $I = [0, 1]$ auf den Basispunkt x_0 abgebildet wird. In ähnlicher Weise nehmen wir an, dass wir es jetzt mit stetigen Abbildungen $\alpha : I^n \rightarrow X$ zu tun haben werden, die den Rand ∂I^n auf einen Punkt $x_0 \in X$ abbilden. Da der Rand auf einen einzigen Punkt x_0 abgebildet wird, haben wir im Ergebnis die Sphäre S^n aus I^n erhalten; vgl. Abb. 2.7. Wenn $I^n/\partial I^n$ für den Würfel I^n steht, dessen Rand ∂I^n auf einen Punkt zusammengezogen worden ist, erhalten wir $I^n/\partial I^n \cong S^n$. Die Abbildung α wird **n -Schleife** bei x_0 genannt. Eine direkte Verallgemeinerung von Definition 4.4 ist die folgende Definition:

Definition 4.10. Sei X ein topologischer Raum und seien $\alpha, \beta : I^n \rightarrow X$ die n -Schleifen bei $x_0 \in X$. Die Abbildung α ist **homotop** zu β , geschrieben $\alpha \sim \beta$, wenn eine stetige Abbildung $F : I^n \times I \rightarrow X$ existiert, sodass gilt:

$$F(s_1, \dots, s_n, 0) = \alpha(s_1, \dots, s_n), \quad (4.37a)$$

$$F(s_1, \dots, s_n, 1) = \beta(s_1, \dots, s_n), \quad (4.37b)$$

$$F(s_1, \dots, s_n, t) = x_0 \quad \text{für} \quad (s_1, \dots, s_n) \in \partial I^n, t \in I. \quad (4.37c)$$

F wird eine **Homotopie** zwischen α und β genannt.

Übung 4.6 Zeigen Sie, dass \sim ein Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse von α heißt **Homotopiekategorie** von α , geschrieben $[\alpha]$.

Definieren wir die Gruppenoperationen. Das Produkt $\alpha * \beta$ von zwei n -Schleifen α und β ist definiert durch

$$\alpha * \beta(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \alpha(2s_1, \dots, s_n) & \text{für } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s_1 - 1, \dots, s_n) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1. \end{cases} \quad (4.38)$$

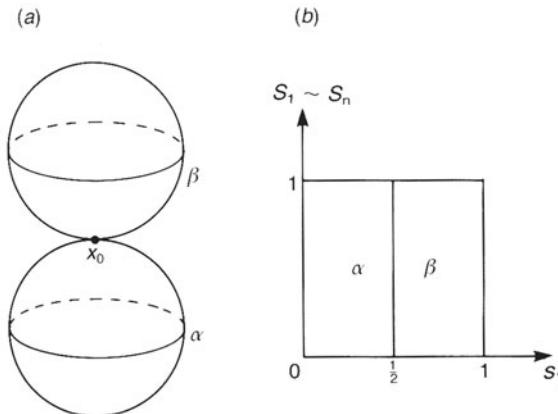


Abb. 4.17. Das Produkt $\alpha * \beta$ von zwei n -Schleifen α und β .

Das Produkt $\alpha * \beta$ sieht in X wie Abb. 4.17(a) aus. Es ist hilfreich, es wie in Abb. 4.17(b) auszudrücken. Wenn wir α^{-1} gemäß

$$\alpha^{-1}(s_1, \dots, s_n) \equiv \alpha(1 - s_1, \dots, s_n) \quad (4.39)$$

definieren, erfüllt es die Beziehung

$$\alpha^{-1} * \alpha(s_1, \dots, s_n) \sim \alpha * \alpha^{-1}(s_1, \dots, s_n) \sim c_{x_0}(s_1, \dots, s_n), \quad (4.40)$$

mit einer konstanten n -Schleife c_{x_0} bei $x_0 \in X$, $c_{x_0} : (s_1, \dots, s_n) \mapsto x_0$. Überzeugen Sie sich davon, dass sowohl $\alpha * \beta$ als auch α^{-1} n -Schleifen bei x_0 sind.

Definition 4.11. Sei X ein topologischer Raum. Die Menge der Homotopieklassen von n -Schleifen ($n \geq 1$) bei $x_0 \in X$ wird als $\pi_n(X, x_0)$ geschrieben und heißt **n -te Homotopiegruppe** bei x_0 . $\pi_n(X, x_0)$ wird auch *höhere* Homotopiegruppe genannt, sofern $n \geq 2$ ist.

Das soeben definierte Produkt $\alpha * \beta$ induziert natürlich ein Produkt von Homotopieklassen gemäß

$$[\alpha] * [\beta] \equiv [\alpha * \beta], \quad (4.41)$$

wobei α und β n -Schleifen bei x_0 sind. Die folgenden Übungen illustrieren, dass dieses Produkt wohldefiniert ist und die Gruppenaxiome erfüllt.

Übung 4.7 Zeigen Sie, dass das durch (4.41) definierte Produkt von n -Schleifen unabhängig von den Repräsentanten ist (vgl. Lemma 4.1).

Übung 4.8 Zeigen Sie, dass die n -te Homotopiegruppe eine Gruppe ist. Hierzu sollten Sie die folgenden Tatsachen nachprüfen (vgl. Satz 4.1):

- (1) $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$,
- (2) $[\alpha] * [c_x] = [c_x] * [\alpha] = [\alpha]$,
- (3) $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_x]$, was die Inverse $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ definiert.

Wir haben bisher $\pi_0(X, x_0)$ außen vor gelassen. Lassen Sie uns Abbildungen von I^0 nach X klassifizieren. Wir bemerken, dass $I^0 = \{0\}$ und $\partial I^0 = \emptyset$ ist. Seien $\alpha, \beta : \{0\} \rightarrow X$, sodass $\alpha(0) = x$ und $\beta(0) = y$ ist. Wir definieren $\alpha \sim \beta$, wenn es eine stetige Abbildung $F : \{0\} \times I \rightarrow X$ gibt, sodass $F(0, 0) = x$ und $F(0, 1) = y$ ist. Dies zeigt, dass $\alpha \sim \beta$ dann und nur dann gilt, wenn x und y durch eine Kurve in X verbunden sind, d. h., wenn sie sich in derselben (bogenweise) Zusammenhangskomponente befinden. Natürlich ist diese Äquivalenzrelation unabhängig von x_0 , und wir schreiben für die nullte Homotopiegruppe einfach $\pi_0(X)$. Beachten Sie jedoch, dass $\pi_0(X)$ keine Gruppe ist und die Anzahl der (bogenweisen) Zusammenhangskomponenten von X angibt.

4.6 Allgemeine Eigenschaften von höheren Homotopiegruppen

4.6.1 Die Abel'sche Natur höherer Homotopiegruppen

Höhere Homotopiegruppen sind immer Abel'sch; mit beliebigen n -Schleifen α und β bei $x_0 \in X$ gilt für $[\alpha]$ und $[\beta]$ die Gleichung

$$[\alpha] * [\beta] = [\beta] * [\alpha]. \quad (4.42)$$

Um diese Behauptung zu überprüfen, sehen wir uns Abb. 4.18 an. Offenkundig ist die Deformation in jedem Schritt der Folge homotop. Dies zeigt, dass $\alpha * \beta \sim \beta * \alpha$, also $[\alpha] * [\beta] = [\beta] * [\alpha]$ ist.

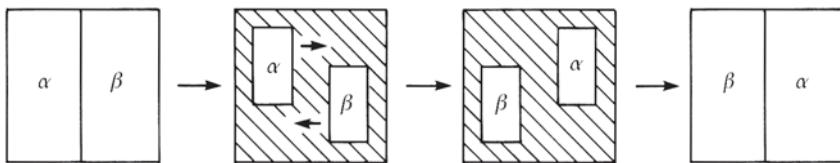


Abb. 4.18. Höhere Homotopiegruppen sind immer kommutativ: $\alpha * \beta \sim \beta * \alpha$.

4.6.2 Bogenweiser Zusammenhang und höhere Homotopiegruppen

Wenn ein topologischer Raum X bogenweise zusammenhängend ist, dann ist $\pi_n(X, x_0)$ isomorph zu $\pi_n(X, x_1)$ für ein beliebiges Paar $x_0, x_1 \in X$. Die Beweis läuft ganz genauso wie der von Satz 4.2. Demzufolge brauchen wir, wenn X bogenweise zusammenhängt, den Basispunkt nicht anzugeben.

4.6.3 Homotopieinvarianz von höheren Homotopiegruppen

Seien X und Y topologische Räume vom selben Homotopietyp; siehe Definition 4.6. Wenn die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, dann ist die Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ isomorph zu $\pi_n(Y, f(x_0))$; vgl. Satz 4.3. Die topologische Invarianz von höheren Homotopiegruppen ist eine direkte Konsequenz dieser Tatsache. Insbesondere ist X zusammenziehbar, und die Homotopiegruppen sind trivial: $\pi_n(X, x_0) = \{e\}$ ($n > 1$).

4.6.4 Höhere Homotopiegruppen eines Produktraums

Seien X und Y bogenweise zusammenhängende topologische Räume. Dann ist (vgl. Satz 4.6)

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y). \quad (4.43)$$

4.6.5 Universelle Überlagerungsräume und höhere Homotopiegruppen

Es gibt einige Fälle, in denen die Homotopiegruppen eines Raums durch die bekannten Homotopiegruppen eines anderen Raums gegeben sind. Es besteht eine bemerkenswerte Beziehung zwischen den höheren Homotopiegruppen eines topologischen Raums und seinem *universellen Überlagerungsraum*.

Definition 4.12. Seien X und \tilde{X} zusammenhängende topologische Räume. Das Paar (\tilde{X}, p) , oder einfach \tilde{X} , heißt **Überlagerungsraum** von X , wenn eine stetige Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ existiert, sodass

- (1) p surjektiv ist und
- (2) für jedes $x \in X$ eine zusammenhängende offene Menge $x \in U \subset X$ existiert, sodass $p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen in \tilde{X} ist, von denen jede homöomorph durch p auf U abgebildet wird.

Insbesondere heißt (\tilde{X}, p) , wenn \tilde{X} *einfach* zusammenhängend ist, **universeller Überlagerungsraum** von X .⁸

Beispielsweise ist \mathbb{R} der universelle Überlagerungsraum des S^1 , siehe Abschnitt 4.3. Da S^1 mit $U(1)$ identifiziert werden kann, ist \mathbb{R} eine universelle Überlagerungsgruppe von $U(1)$, wenn man \mathbb{R} als eine additive Gruppe auffasst. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow U(1)$ könnte etwa $p : x \rightarrow e^{i2\pi x}$ sein. Offenkundig ist p surjektiv

⁸ Von gewissen Gruppen weiß man, dass sie topologische Räume sind. Diese werden topologische Gruppen genannt. Beispielsweise sind $SO(n)$ und $SU(n)$ topologische Gruppen. Wenn X und \tilde{X} in Definition 4.12 topologische Gruppen sein sollten und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ein Gruppenhomomorphismus, dann wird der (universelle) Überlagerungsraum (**universelle**) **Überlagerungsgruppe** genannt.

und, wenn $U = \{e^{i2\pi x} | x \in (x_0 - 0, 1, x_0 + 0, 1)\}$ gilt, dann ist

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (x_0 - 0, 1 + n, x_0 + 0, 1 + n),$$

also eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen aus \mathbb{R} . Es ist leicht zu zeigen, dass p auch ein Homomorphismus bezüglich der Addition in \mathbb{R} und der Multiplikation in $U(1)$ ist. Damit ist (\mathbb{R}, p) die universelle Überlagerungsgruppe von $U(1) = S^1$.

Satz 4.10. Sei (\widetilde{X}, p) der universelle Überlagerungsraum von einem zusammenhängenden topologischen Raum X . Wenn $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ Basispunkte sind, sodass $p(\tilde{x}_0) = x_0$ ist, dann ist der induzierte Homomorphismus

$$p_* : \pi_n(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \quad (4.44)$$

ein Isomorphismus für $n \geq 2$. (Achtung: Dieser Satz kann für $n = 1$ nicht angewendet werden: $\pi_1(\mathbb{R}) = \{e\}$, wohl aber $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.)

Den Beweis finden Sie in Croom (1978). Es gilt beispielsweise $\pi_n(\mathbb{R}) = \{e\}$, da \mathbb{R} zusammenziehbar ist. Dann erhalten wir

$$\pi_n(S^1) \cong \pi_n(U(1)) = \{e\} \quad (n \geq 2). \quad (4.45)$$

Beispiel 4.12. Sei $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | |x|^2 = 1\}$. Man erhält den reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ aus der Sphäre S^n durch Identifikation von einander gegenüberliegenden Punkten $(x, -x)$. Es ist leicht zusehen, dass für $n \geq 2$ die S^n ein Überlagerungsraum von $\mathbb{R}P^n$ ist. Wegen $\pi_1(S^n) = \{e\}$ für $n \geq 2$ ist S^n der universelle Überlagerungsraum von $\mathbb{R}P^n$, und es ergibt sich

$$\pi_n(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_n(S^n). \quad (4.46)$$

Interessanterweise kann $\mathbb{R}P^3$ mit $SO(3)$ identifiziert werden. Um dies zu sehen, geben wir ein Element der $SO(3)$ durch eine Rotation um eine Achse n um einen Winkel θ (mit $0 < \theta < \pi$) an und weisen diesem Element einen „Vektor“ $\Omega \equiv \theta n$ zu. Ω nimmt seine Werte in der Kugel D^3 vom Radius π an. Weiterhin stehen πn und $-\pi n$ für dieselbe Rotation und sollten identifiziert werden. Darum ist der Raum, dem Ω angehört, eine Kugel D^3 , bei der auf ihrer Oberfläche S^2 einander gegenüberliegende Punkte miteinander identifiziert werden. Beachten Sie auch, dass wir den $\mathbb{R}P^3$ als die Nordhemisphäre D^3 von S^3 darstellen können, deren „Antipodenpunkte“ auf dem Rand S^2 identifiziert werden. Dies zeigt, dass wir den $\mathbb{R}P^3$ mit der $SO(3)$ identifizieren können.

Ebenso interessant ist, dass die Hypersphäre S^3 mit der Gruppe $SU(2)$ identifiziert werden kann. Zuerst bemerken wir, dass jedes Element $g \in SU(2)$ sich als

$$g = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (4.47)$$

schreiben lässt. Mit $a = u + iv$ und $b = x + iy$ wird daraus die S^3 :

$$u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1.$$

Fassen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir

$$\pi_n(\mathrm{SO}(3)) = \pi_n(\mathbb{R}P^3) = \pi_n(S^3) = \pi_n(\mathrm{SU}(2)) \quad (n \geq 2). \quad (4.48)$$

Noch allgemeiner wird die universelle Überlagerung $\mathrm{Spin}(n)$ der Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ **Spingruppe** genannt. Für kleine n sind dies die Gruppen

$$\mathrm{Spin}(3) = \mathrm{SU}(2), \quad (4.49)$$

$$\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2), \quad (4.50)$$

$$\mathrm{Spin}(5) = \mathrm{USp}(4), \quad (4.51)$$

$$\mathrm{Spin}(6) = \mathrm{SU}(4). \quad (4.52)$$

◊

Hierbei steht $\mathrm{USp}(2N)$ für die kompakte Gruppe von $(2N \times 2N)$ -Matrizen A , für die $A^TJA = J$ gilt, mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}.$$

4.7 Beispiele für höhere Homotopiegruppen

Im Allgemeinen gibt es keine Algorithmen für die Berechnung höherer Homotopiegruppen $\pi_n(X)$. Man muss für jeden topologischen Raum mit $n \geq 2$ einen eigenen Ad-hoc-Methode finden. Wir wollen hier einige Beispiele untersuchen, bei denen sich höhere Homotopiegruppen durch eine intuitive Argumentation ermitteln lassen. In Tab. 4.1 sind noch einige weitere nützliche Resultate aufgelistet.

Beispiel 4.13. Wir sehen, dass $\pi_n(X, x_0)$ die Menge der Homotopieklassen von n -Schleifen S^n in X ist, und erhalten dann sofort

$$\pi_n(S^n, x_0) \cong \mathbb{Z} \quad (n \geq 1). \quad (4.53)$$

Wenn α die S^n auf einen Punkt $x_0 \in S^n$ abbildet, ist $[\alpha]$ das neutrale Element $0 \in \mathbb{Z}$. Da sowohl $I^n/\partial I^n$ als auch S^n orientierbar sind, können wir ihnen Orientierungen zuweisen. Wenn α die Menge $I^n/\partial I^n$ homöomorph zu S^n in derselben Orientierung abbildet, dann weisen wir $[\alpha]$ ein Element $1 \in \mathbb{Z}$ zu. Wenn ein Homöomorphismus α die Menge $I^n/\partial I^n$ auf S^n in der entgegengesetzten Orientierung abbildet, entspricht $[\alpha]$ einem Element -1 . Sei z. B. $n = 2$. Wegen $I^2/\partial I^2 \cong S^2$ kann der Punkt in I^2 durch die Polarkoordinaten (θ, ϕ) ausgedrückt werden, siehe Abb. 4.19. Ähnlich kann $X = S^2$

Tab. 4.1. Nützliche Homotopiegruppen

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
SO(3)	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
SO(4)	\mathbb{Z}_2	0	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12} + \mathbb{Z}_{12}$
SO(5)	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0
SO(6)	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0
SO(n)	$n > 6$	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	0
U(1)	\mathbb{Z}	0	0	0	0	0
SU(2)	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
SU(3)	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_6
SU(n)	$n > 3$	0	0	\mathbb{Z}	0	0
S^2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
S^3	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
S^4	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
G_2	0	0	\mathbb{Z}	0	0	\mathbb{Z}_3
F_4	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0
E_6	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0
E_7	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0
E_8	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0

durch die Polarkoordinaten (θ', ϕ') ausgedrückt werden. Sei nun $\alpha : (\theta, \phi) \mapsto (\theta', \phi')$ eine 2-Schleife in X . Wenn $\theta' = \theta$ und $\phi' = \phi$ ist, dann fegt der Punkt (θ', ϕ') einmal über die S^2 , während der Punkt (θ, ϕ) den I^2 einmal in derselben Orientierung abgrast. Diese 2-Schleife gehört zur Klasse $+1 \in \pi_2(S^2, x_0)$. Wenn $\alpha : (\theta, \phi) \mapsto (\theta', \phi')$ durch $\theta' = \theta$ und $\phi' = 2\phi$ gegeben ist, so fegt der Punkt (θ', ϕ') zweimal über S^2 , während (θ, ϕ) einmal den I^2 abgrast. Diese 2-Schleife gehört zu der Klasse $2 \in \pi_2(S^2, x_0)$. Im Allgemeinen korrespondiert die Abbildung $(\theta, \phi) \mapsto (\theta, k\phi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit der Klasse k von $\pi_2(S^2, x_0)$. Ein ähnliches Argument bestätigt Gleichung (4.53) für beliebige $n > 2$. \diamond

Beispiel 4.14. Wenn wir beachten, dass die S^n für $n > 2$ ein universeller Überlagerungsraum des $\mathbb{R}P^n$ ist, erhalten wir

$$\pi_n(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \quad (n \geq 2). \quad (4.54)$$

(Natürlich ist dies auch für $n = 1$ der Fall, wegen $\mathbb{R}P^1 = S^1$.) Es gilt beispielsweise $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Da die $SU(2) = S^3$ die universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3) = \mathbb{R}P^3$ ist, folgt aus Satz 4.10:

$$\pi_3(SO(3)) \cong \pi_3(SU(2)) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}, \quad (4.55)$$

siehe auch Gleichung (4.48). **Shankar-Monopole** in suprafluidem ${}^3\text{He}$ -A korrespondieren mit nichttrivialen Elementen dieser Homotopieklassen, siehe Abschnitt 4.10. $\pi_3(SU(2))$ taucht auch bei der Klassifikation von Instantonen in Beispiel 9.8 auf. \diamond

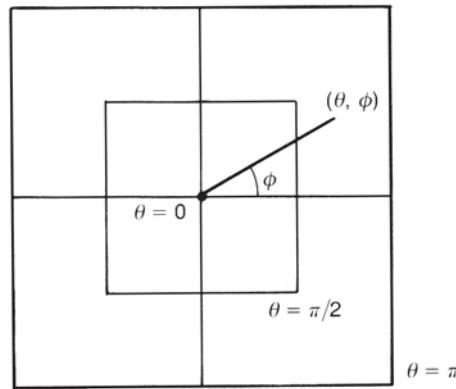


Abb. 4.19. Ein Punkt im I^2 kann durch die Polarkoordinaten (θ, ϕ) ausgedrückt werden.

Wie bereits gesagt, gibt Tab. 4.1 eine Liste von nützlichen Homotopiegruppen. Wir wollen dazu hier noch kurz auf ein paar interessante Aspekte hinweisen:

- (a) Da $\text{Spin}(4) = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ die universelle Überlagerungsgruppe von $\text{SO}(4)$ ist, gilt für $n > 2$ also $\pi_n(\text{SO}(4)) = \pi_n(\text{SU}(2)) \oplus \pi_n(\text{SU}(2))$.
- (b) Es existiert eine Abbildung $J : \pi_k(\text{SO}(n)) \rightarrow \pi_{k+n}(S^n)$, genannt **J-Homomorphismus**, siehe Whitehead (1978). Insbesondere weiß man, dass für $k = 1$ der Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Wir erhalten dann $\pi_1(\text{SO}(n)) = \pi_{n+1}(S^n)$ und daher z. B.

$$\begin{aligned}\pi_1(\text{SO}(2)) &\cong \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z} \\ \pi_1(\text{SO}(3)) &\cong \pi_4(S^3) \cong \pi_4(\text{SU}(2)) \cong \pi_4(\text{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

- (c) Der **Bott'sche Periodizitätssatz** besagt für $n \geq (k+1)/2$:

$$\pi_k(\text{U}(n)) \cong \pi_k(\text{SU}(n)) \cong \begin{cases} \{e\} & (k \text{ gerade}) \\ \mathbb{Z} & (k \text{ ungerade}) \end{cases} \quad (4.56)$$

Ähnlich gilt

$$\pi_k(\text{O}(n)) \cong \pi_k(\text{SO}(n)) \cong \begin{cases} \{e\}, & \text{wenn } k \equiv 2, 4, 5, 6 \pmod{8} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{wenn } k \equiv 0, 1 \pmod{8} \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } k \equiv 3, 7 \pmod{8} \end{cases} \quad (4.50)$$

für $n \geq k+2$. Eine ähnliche Periodizität gilt für symplektische Gruppen, worauf wir hier aber nicht näher eingehen werden.

Wesentlich mehr hierzu finden Sie in Anhang A, Tabelle 6 von Ito (1987).

4.8 Ordnung in kondensierter Materie

In letzter Zeit spielen topologische Methoden eine immer größere Rolle in der Physik kondensierter Materie. Beispielsweise wurde die Homotopietheorie eingesetzt, um mögliche Formen ausgedehnter Objekte in kondensierten Systemen zu klassifizieren, etwa Solitonen, Wirbel, Monopole usw. Mit diesen Klassifizierungen werden wir uns in den verbleibenden Abschnitten 4.8 bis 4.10 dieses Kapitels beschäftigen. Zuvor werfen wir noch einen kurzen Blick auf den Ordnungsparameter von kondensierten Systemen, die einen Phasenübergang durchlaufen.

4.8.1 Ordnungsparameter

Sei H ein Hamilton-Operator, der ein System kondensierter Materie beschreibt. Wir nehmen an, dass H invariant unter einer gewissen Symmetrieroberation ist. Der Grundzustand des Systems muss allerdings nicht notwendigerweise die Symmetrie von H erhalten. Wenn dies der Fall ist, sagen wir, dass die Symmetrie des Systems **spontan gebrochen** ist.

Zur Veranschaulichung dieses Phänomens betrachten wir den Hamilton-Operator des **Heisenberg-Modells**,

$$H = -J \sum_{(i,j)} S_i \cdot S_j + h \cdot \sum_i S_i, \quad (4.57)$$

der N ferromagnetische Heisenberg-Spins $\{S_i\}$ beschreibt. Der Parameter J ist eine positive Konstante, die Summation wird über Paare (i,j) von nächsten Nachbarn ausgeführt und h ist das homogene äußere magnetische Feld (kleingeschrieben, um es vom Hamilton-Operator zu unterscheiden). Die Zustandssumme ist $Z = \text{sp } e^{-\beta H}$, mit der inversen Temperatur $\beta = 1/T$. Die freie Energie F wird durch $\exp(-\beta F) = Z$ definiert. Die mittlere Magnetisierung pro Spin ist

$$m \equiv \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial F}{\partial h}, \quad (4.58)$$

mit $\langle \dots \rangle \equiv \text{sp} (\dots e^{-\beta H})/Z$. Sehen wir uns den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ an. Obwohl H in diesem Limes invariant unter $\text{SO}(3)$ -Rotationen von allen S_i ist, wissen wir natürlich, dass m nicht verschwindet, solange β groß genug (bzw. die Temperatur niedrig genug) ist, in diesem Fall hat das System keine $\text{SO}(3)$ -Symmetrie. Man sagt dann, das System zeigt eine **spontane Magnetisierung**. Die maximale Temperatur, bei der noch $m \neq 0$ ist, nennt man **kritische Temperatur**. Der Vektor m ist der **Ordnungsparameter**, welcher den Phasenübergang zwischen dem geordneten Zustand mit $m \neq 0$ und dem ungeordneten Zustand mit $m = 0$ beschreibt. Im geordneten Zustand ist das System übrigens immer noch symmetrisch unter $\text{SO}(2)$ -Rotationen um die Achse der Magnetisierung m .

Welcher Mechanismus liegt dem Phasenübergang zugrunde? Die freie Energie ist $F = \langle H \rangle - TS$, mit der Entropie S . Bei niedrigen Temperaturen ist der Term TS in F

vernachlässigbar, und das Minimum von F wird durch Minimieren von $\langle H \rangle$ erreicht, also wenn alle S_i in dieselbe Richtung zeigen. Bei höheren Temperaturen dagegen dominiert der Entropieterm F , und das Minimum von F wird durch Maximieren von S erreicht, was der Fall ist, wenn die Spinrichtungen S_i vollkommen zufällig verteilt sind.

Wenn das System eine einheitliche Temperatur aufweist, ist der Betrag $|m|$ unabhängig vom Ort, und der Vektor m wird allein durch seine Richtung charakterisiert. Im Grundzustand erwarten wir, dass m selbst unabhängig von der Position ist. Für die Angabe der Richtung von m bieten sich die Polarkoordinaten (θ, ϕ) an. Es gibt eine injektive Beziehung zwischen m und einem Punkt auf der Sphäre S^2 . Nehmen wir an, m sei eine Funktion des Ortsvektors: $m = m(x)$. Jedem Punkt x des (Orts-)Raums wird ein Punkt (θ, ϕ) in der S^2 zugeordnet, wir haben also eine Abbildung $(\theta(x), \phi(x))$ aus dem Raum nach S^2 . Mit Ausnahme des Grundzustands – und angeregter Zustände, die sich als kleine Oszillationen (Spinwellen) um den Grundzustand beschreiben lassen – kann das System verschiedenste angeregte Zustände annehmen, die sich nicht durch kleine Störungen aus dem Grundzustand ergeben. Welcher Art die möglichen Anregungen sind, hängt von der Raumdimension und dem Ordnungsparameter ab. In einem zweidimensionalen Raum kann der Heisenberg-Ferromagnet z. B. eine Anregung namens **Belavin-Polyakov-Monopol** annehmen, vgl. Abb. 4.20 sowie Belavin und Polyakov (1975). Beachten Sie, dass m sich einem konstanten Vektor annähert (in diesem Fall \hat{z}), sodass die Energie nicht divergiert. Diese Bedingung garantiert die Stabilität dieser Anregung; es ist unmöglich, diese Konfiguration in den homogenen Zustand zu deformieren, wenn m weit entfernt vom Ursprung konstant gehalten wird. Anregungen, deren Stabilität wie hier von topologischen Argumenten abhängt, werden **topologische Anregungen** genannt. Beachten Sie, dass das Feld $m(x)$ eine Abbildung $m : S^2 \rightarrow S^2$ definiert und daher durch die Homotopiegruppe $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ klassifiziert wird.

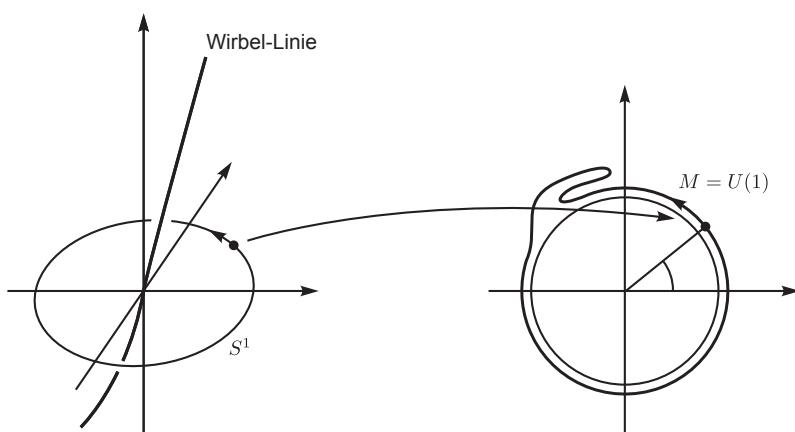


Abb. 4.20. Skizze eines Belavin-Polyakov-Monopols. Der Vektor m nähert sich \hat{z} an, wenn $|x| \rightarrow \infty$ ist.

4.8.2 Suprafluides ^4He und Supraleiter

In der Bogoliubov-Theorie ist der Ordnungsparameter von suprafluidem ^4He der Erwartungswert

$$\langle \phi(x) \rangle = \Psi(r) = \Delta_0(x) e^{i\alpha(x)}, \quad (4.59)$$

dabei ist $\phi(x)$ der Feldoperator. Im Operatorformalismus ist

$$\phi(x) \sim (\text{Erzeugungsoperator}) + (\text{Vernichtungsoperator}).$$

Daraus folgt, dass die Anzahl der Teilchen nicht erhalten bleibt, wenn $\Psi(x) \neq 0$. Dies hängt mit der spontanen Brechung der globalen Eichsymmetrie zusammen. Der Hamilton-Operator von ^4He ist

$$\begin{aligned} H = & \int dx \phi^\dagger(x) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \phi(x) \\ & + \frac{1}{2} \int dx dy \phi^\dagger(y) \phi(y) V(|x-y|) \phi^\dagger(x) \phi(x). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Offenkundig ist H invariant unter der globalen Eichtransformation

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\chi} \phi(x). \quad (4.61)$$

Der Ordnungsparameter transformiert sich jedoch wie

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\chi} \Phi(x) \quad (4.62)$$

und zeigt darum nicht die Symmetrie des Hamilton-Operators. Die phänomenologische freie Energie, welche das ^4He beschreibt, enthält zwei Beiträge. Der Hauptbeitrag ist die **Kondensationsenergie**

$$\mathcal{F}_0 \equiv \frac{\alpha}{2!} |\Psi(x)|^2 + \frac{\beta}{4!} |\Psi(x)|^4, \quad (4.63a)$$

wobei das Vorzeichen von $\alpha \sim \alpha_0(T - T_c)$ bei der kritischen Temperatur $T \sim 4$ K wechselt. Abb. 4.21 skizziert \mathcal{F}_0 für die Fälle $T > T_c$ und $T < T_c$. Wenn $T > T_c$ ist, wird das Minimum von \mathcal{F}_0 bei $\Psi(x) = 0$ erreicht, für $T < T_c$ dagegen bei $|\Psi| = \Delta_0 \equiv [-(6\alpha/\beta)]^{1/2}$. Wenn $\Psi(x)$ von x abhängt, gibt es einen zusätzlichen Beitrag, die sog. **Gradientenenergie**

$$\mathcal{F}_{\text{grad}} \equiv \frac{1}{2} K \overline{\nabla \Psi(x)} \cdot \nabla \Psi(x). \quad (4.63b)$$

K ist dabei eine positive Konstante. Wenn die räumliche Variation von $\Psi(x)$ schwach genug ist, können wir Δ_0 als konstant annehmen (sog. London-Limit).

In der BCS-Theorie der Supraleitung ist der Ordnungsparameter gegeben durch

$$\Psi_{\alpha\beta} \equiv \langle \psi_\alpha(x) \psi_\beta(x) \rangle \quad (4.64)$$

(Tsuneto 1982). Hier ist $\psi_\alpha(x)$ der (nichtrelativistische) Elektronen-Feldoperator mit dem Spin $\alpha = (\uparrow, \downarrow)$. Es sei allerdings angemerkt, dass (4.64) keine irreduzible Darstellung der Spinalgebra ist. Um dies zu sehen, untersuchen wir das Verhalten von

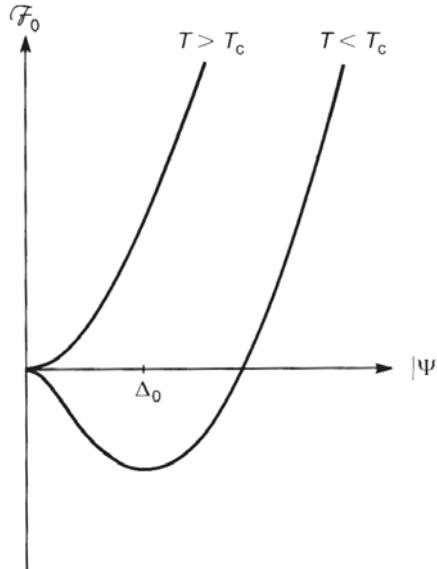


Abb. 4.21. Für $T > T_c$ liegt das Minimum der freien Energie bei $|\Psi| = 0$, für $T < T_c$ liegt es bei $|\Psi| = \Delta_0$.

$\Psi_{\alpha\beta}$ unter einer Spinrotation. Wir betrachten eine infinitesimale Spinrotation um eine Achse n um einen Winkel θ , deren Matrixdarstellung

$$R = I_2 + i \frac{\theta}{2} n^\mu \sigma_\mu$$

ist; die σ_μ sind die Pauli-Matrizen. Da sich ψ_α sich gemäß $\psi_\alpha \rightarrow R_\alpha^\beta \psi_\beta$ transformiert, ergibt sich

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta} &\rightarrow R_\alpha^{\alpha'} \Psi_{\alpha'\beta'} R_\beta^{\beta'} = (R \cdot \Psi \cdot R^T)_{\alpha\beta} \\ &= \left[\Psi + i \frac{\delta}{2} n(\sigma \Psi \sigma_2 - \Psi \sigma_2 \sigma) \right]_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

wobei wir anmerken, dass $\sigma_\mu^T = -\sigma_2 \sigma_\mu \sigma_2$ ist. Nehmen wir an, es sei $\Psi_{\alpha\beta} \propto i(\sigma_2)_{\alpha\beta}$. Dann ändert sich Ψ unter dieser Rotation nicht und stellt daher die Spin-Singulett-Paarung dar. Wir schreiben

$$\Psi_{\alpha\beta}(x) = \Delta(x)(i\sigma_2)_{\alpha\beta} = \Delta_0(x)e^{i\varphi(x)}(i\sigma_2)_{\alpha\beta}. \quad (4.65a)$$

Wenn wir jedoch

$$\Psi_{\alpha\beta}(x) = \Delta^\mu(x)i(\sigma_\mu \cdot \sigma_2)_{\alpha\beta} \quad (4.65b)$$

wählen, folgt:

$$\Psi_{\alpha\beta} \rightarrow [\Delta^\mu + \delta \epsilon^{\mu\nu\lambda} n_\nu \Delta_\lambda](i\sigma_\mu \cdot \sigma_2)_{\alpha\beta}.$$

Dies zeigt, dass Δ^μ ein Vektor im Spinraum ist, also stellt (4.65b) die Spin-Triplett-Paarung dar.

Der Ordnungsparameter eines konventionellen Supraleiters ist von der Form (4.65a), und wir beschränken die Analyse für den Moment auf diesen Fall. In (4.65a) nimmt $\Delta(x)$ dieselbe Form an wie das $\Psi(x)$ beim suprafluidem ^4He , und die freie Energie ist wieder durch (4.63) gegeben. Diese Ähnlichkeit röhrt von den Cooper-Paaren her: Im suprafluiden Zustand nimmt eine makroskopische Anzahl von ^4He -Atomen den Grundzustand ein (Bose-Einstein-Kondensation), welche sich dann aufgrund der Quantenkohärenz wie ein einziges riesiges Molekül verhalten. In diesem Zustand erfordert das Erzeugen elementarer Anregungen einen endlichen Energiebetrag, und der Fluss kann nicht zerfallen, wenn diese kritische Energie nicht zur Verfügung steht. Da Elektronen Fermionen sind, gibt es für sie zunächst einmal keine Bose-Einstein-Kondensation. Der Schlüssel zum Verständnis sind hier die Cooper-Paare. Durch den Austausch von Phononen spürt ein Paar von Elektronen eine anziehende Kraft, die gerade eben die Coulomb-Abstoßung überwinden kann. Diese winzige Anziehungskraft macht es für Elektronen möglich, (im Impulsraum) Paare zu bilden, welche der Bose-Statistik gehorchen. Diese Paare kondensieren dann und bilden einen suprafluiden Zustand von Cooper-Paar-Objekten mit der elektrischen Ladung $2e$.

Ein elektromagnetisches Feld koppelt an das System über die minimale Kopplung

$$\mathcal{F}_{\text{grad}} = \frac{1}{2} K |(\partial_\mu - i2eA_\mu)\Delta(x)|^2. \quad (4.66)$$

(Der Term $2e$ spiegelt wider, dass ein Cooper-Paar die Ladung $2e$ trägt.) Supraleiter lassen sich anhand ihres Verhaltens in äußeren Magnetfeldern grob in zwei Typen einteilen: Typ-I-Supraleiter bilden einen Zwischenzustand, in welchem bei starken Magnetfeldern normal- und supraleitende Gebiete koexistieren. Typ-II-Supraleiter bilden ein Wirbelgitter (**Abrikosov-Gitter**) aus, in welchem die Magnetfelder im Inneren der Wirbel eingeschlossen sind, während die übrigen Gebiete im supraleitenden Zustand bleiben. Ein ähnliches Wirbelgitter wurde bei suprafluidem ^4He beobachtet, das in einem Zylinder rotiert.

4.8.3 Allgemeine Überlegungen

In den nächsten zwei Abschnitten untersuchen wir Anwendungen von Homotopiegruppen auf die Klassifikation von Defekten in geordneten Medien. Wir richten uns dabei nach Toulouse und Kléman (1976), Mermin (1979) und Mineev (1980).

Wie wir in den vorangegangenen Unterabschnitten gesehen haben, wird die Symmetrie eines Systems aus kondensierter Materie bei einem Phasenübergang reduziert, diese Reduktion wird durch den Ordnungsparameter beschrieben. Betrachten wir konkret das dreidimensionale Medium eines Supraleiters, worin der Ordnungsparameter die Form $\psi(x) = \Delta_0(x)e^{i\varphi(x)}$ annimmt. Wir wollen ein homogenes System gleichförmiger äußerer Bedingungen annehmen (Temperatur, Druck etc.). Die Amplitude Δ_0 wird durch Minimieren der freien Kondensationsenergie eindeutig festgelegt. Beachten Sie, dass immer noch eine große Zahl von Freiheitsgraden übrig bleibt. ψ kann auf dem Kreis $S^1 \cong \text{U}(1)$ jeden Wert annehmen, abhängig von der Phase $e^{i\varphi}$. Auf diese Weise nimmt ein gleichförmiges System einen Wert innerhalb

eines Gebiets M ein, das **Ordnungsparameter-Raum** genannt wird. Für einen Supraleiter ist $M = U(1)$, für das System aus Heisenberg-Spins ist $M = S^2$. Der nematiche Flüssigkristall hat $M = \mathbb{RP}^2$, während für suprafluides ${}^3\text{He-A}$ $M = S^2 \times \text{SO}(3)$ ist, siehe die Abschnitte 4.9 bis 4.10.

Wenn das System sich in einem inhomogenen Zustand befindet, kann die freie Gradientenenergie nicht mehr vernachlässigt werden, und ψ liegt möglicherweise nicht in M . Wenn jedoch die charakteristische Größe der Variation des Ordnungsparameters viel größer ist als die Kohärenzlänge, können wir immer noch annehmen, dass der Ordnungsparameter einen Wert innerhalb von M annimmt, wobei dieser Wert dann eine Funktion des Orts ist. Wenn dies der Fall ist, können Punkte, Linien oder Flächen im Medium auftreten, an denen der Ordnungsparameter nicht eindeutig definiert ist. Diese werden **Defekte** genannt. Es treten dementsprechend je nach Dimensionalität **Punktdefekte (Monopole)**, **Liniendefekte (Wirbel)** und **Flächendefekte (Domänengrenzen)** auf. Diese Defekte werden durch die Homotopiegruppen klassifiziert.

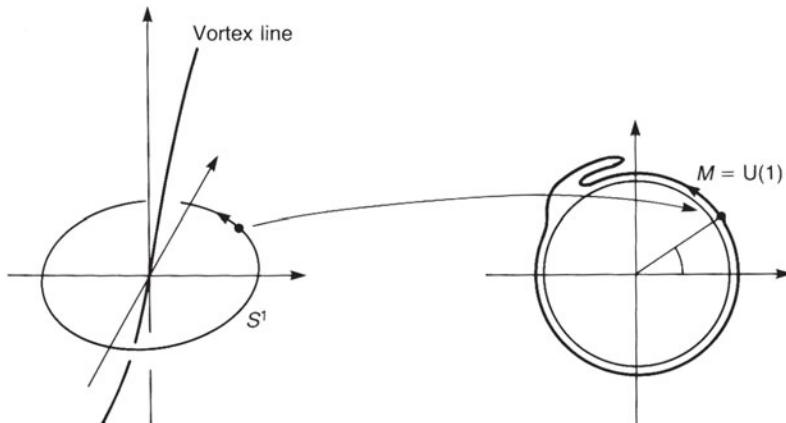


Abb. 4.22. Ein Kreis S^1 , der einen Liniendefekt (Wirbel) umgibt, wird auf $U(1) = S^1$ abgebildet. Diese Abbildung wird durch die Fundamentalgruppe $\pi_1(U(1))$ klassifiziert.

Um es etwas mathematischer auszudrücken, sei X ein Raum, der von dem betrachteten Medium ausgefüllt sein möge. Der Ordnungsparameter ist ein klassisches Feld $\psi(x)$, das wir ebenso als eine *Abbildung* $\psi : X \rightarrow M$ ansehen können. Nehmen wir an, es gebe einen Defekt in dem Medium, genauer gesagt, einen Liniendefekt in einem dreidimensionalen supraleitenden Medium. Wir stellen uns einen Kreis S^1 vor, der den Liniendefekt umschließt. Wenn jeder Teil von S^1 weit genug vom Liniendefekt entfernt ist (viel weiter als die Kohärenzlänge ξ), können wir annehmen, dass der Ordnungsparameter entlang S^1 Werte annimmt, die im Ordnungsparameter-Raum $M = U(1)$ liegen, siehe Abb. 4.22. So kommt die Fundamentalgruppe ins Spiel: Wir reden von Schleifen in einem topologischen Raum $U(1)$. Die Abbildung $S^1 \rightarrow$

$U(1)$ wird durch die Homotopieklassen klassifiziert. Wir betrachten einen Punkt $r_0 \in S^1$ und verlangen, dass r_0 auf $x_0 \in M$ abgebildet wird. Indem wir bemerken, dass $\pi_1(U(1), x_0) = \mathbb{Z}$ ist, können wir dem Liniendefekt eine ganze Zahl zuordnen. Diese Zahl wird **Windungszahl** genannt, da sie abzählt, wie oft sich das Bild von S^1 um den Raum $U(1)$ „windet“. Wenn zwei Liniendefekte die gleiche Windungszahl haben, können sie stetig ineinander deformiert werden. Wenn zwei Liniendefekte A und B miteinander vereinigt werden, gehört der neue Liniendefekt zur Homotopiekasse des Produkts der Homotopieklassen, zu denen A und B vorher gehört hatten. Da die Gruppenoperation in \mathbb{Z} eine Addition ist, ist die neue Windungszahl die Summe der beiden alten Windungszahlen. Eine gleichförmige Verteilung des Ordnungsparameters korrespondiert mit der konstanten Abbildung $\psi(x) = x_0 \in M$, welche zum neutralen Element $0 \in \mathbb{Z}$ gehört. Wenn zwei Liniendefekte mit entgegengesetzten gleichen Windungszahlen vereinigt werden, kann der neue Liniendefekt stetig in eine defektfreie Konfiguration deformiert werden.

Wie sieht es mit den anderen Homotopiegruppen aus? Wir betrachten zuerst die Dimensionalität des Defekts und der ihn *umgebenden* Sphäre S^n . Betrachten wir z. B. einen Punktdefekt in einem dreidimensionalen Medium. Er kann von der Sphäre S^2 umschlossen werden und wird durch $\pi_2(M, x_0)$ klassifiziert. Wenn M viele Komponenten hat, ist $\pi_0(M)$ nichttrivial. Betrachten wir ein dreidimensionales Ising-Modell, für das $M = \{\downarrow\} \cup \{\uparrow\}$ ist. Dort gibt es eine Domäengrenze, auf welcher der Ordnungsparameter nicht definiert ist. Wenn beispielsweise $S = \uparrow$ für $x < 0$ und $S = \downarrow$ für $x > 0$ ist, dann liegt diese Grenze in der yz -Ebene, also bei $x = 0$. Im Allgemeinen wird ein m -dimensionaler Defekt in einem d -dimensionalen Medium durch die Homotopiegruppe $\pi_n(M, x_0)$ klassifiziert, wobei gilt:

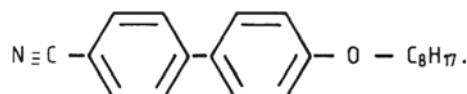
$$n = d - m - 1. \quad (4.67)$$

Im Fall des Ising-Modells ist $d = 3$, $m = 2$ und daher $n = 0$.

4.9 Defekte in nematischen Flüssigkristallen

4.9.1 Ordnungsparameter von nematischen Flüssigkristallen

Bestimmte organische Kristalle zeigen in ihren fluiden Phasen ausgesprochen interessante optische Eigenschaften. Sie werden Flüssigkristalle genannt und lassen sich durch die Art ihrer optischen Anisotropie charakterisieren. An dieser Stelle interessieren wir uns für die sog. nematischen Flüssigkristalle. Ein Beispiel für diese Stoffklasse ist *Octyloxy-cyanobiphenyl* mit der Molekülstruktur



Dieses nematische Flüssigkristallmolekül ähnelt stark einem kleinen Stab, und der Ordnungsparameter, genannt **Direktor**, ist gegeben durch die mittlere Richtung der Molekülstäbchen. Obwohl man beim dem Molekül im Prinzip „Kopf“ und „Schwanz“ unterscheiden kann, hat der Direktor eine Inversionssymmetrie; es hat keinen Sinn, einen Unterschied zwischen den Direktoren $n = \rightarrow$ und $-n = \leftarrow$ zu machen. Man ist leicht versucht, einen Punkt auf der S^2 zur Angabe des Direktors zu verwenden. Dies funktioniert auch überall, mit Ausnahme eines Punkts. Zwei einander gegenüberliegende Punkte $n = (\theta, \phi)$ und $-n = (\pi - \theta, \pi + \phi)$ repräsentieren denselben Zustand, siehe Abb. 4.23. Dementsprechend ist der Ordnungsparameter des nematischen Flüssigkristalls die **projektive Ebene** \mathbb{RP}^2 . Im Allgemeinen hängt das Direktorfeld vom Ort r ab. Dann können wir eine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ definieren. Diese Abbildung heißt **Textur**. Die tatsächliche Ordnungsparameter-Konfiguration im \mathbb{R}^3 wird ebenfalls Textur genannt.

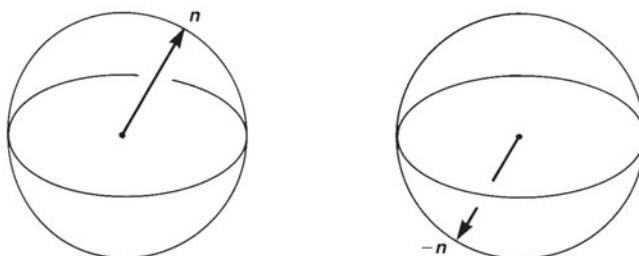


Abb. 4.23. Da der Direktor n weder Kopf noch Schwanz hat, lassen sich n und $-n$ nicht unterscheiden. Daher entsprechen diese beiden Bilder derselben Ordnungsparameter-Konfiguration.

4.9.2 Liniendefekte in nematischen Flüssigkristallen

Dem Beispiel 4.10 entnehmen wir $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Es gibt damit zwei Arten von Liniendefekten in nematischen Flüssigkristallen: eine, die stetig in eine gleichförmige Konfiguration deformiert werden kann, und eine, bei der dies nicht möglich ist. Die letztere stellt einen stabilen Wirbel dar, dessen Textur in Abb. 4.24 skizziert ist. Beachten Sie, wie die Schleife α durch diese Textur auf die \mathbb{RP}^2 abgebildet wird.

Übung 4.9 Zeigen Sie, dass der Linien-„Defekt“ in Abb. 4.25 fiktiv ist, d. h., dass die Singularität im Zentrum durch eine stetige Deformation von Direktoren eliminiert werden kann, wobei die Direktoren am Rand fixiert bleiben. Dies entspricht der Operation $1 + 1 = 0$.

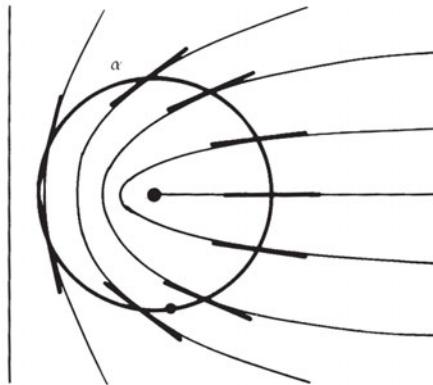


Abb. 4.24. Ein Wirbel in einer nematischen Flüssigkristall, welcher mit dem nichttrivialen Element von $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ korrespondiert.

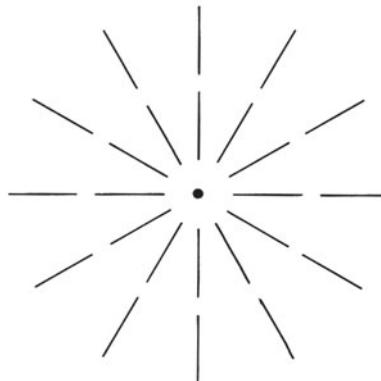


Abb. 4.25. Ein Liniendefekt, der stetig in eine gleichförmige Konfiguration deformiert werden kann.

4.9.3 Punktdefekte in nematischen Flüssigkristallen

Dem Beispiel 4.14 entnehmen wir $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$. Dementsprechend gibt es stabile Punktdefekte in dem nematischen Flüssigkristall. Abb. 4.26 zeigt die Textur der Punktdefekte, welche der Klasse $1 \in \mathbb{Z}$ angehören.

Es lohnt sich, darauf hinzuweisen, dass ein Liniendefekt und ein Punktdefekt zu einem sog. **Ringdefekt** kombiniert werden können, welcher sowohl durch $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ als auch durch $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$ spezifiziert wird, siehe Mineev (1980). Wenn der Ringdefekt von weit weg betrachtet wird, sieht er wie ein Punktdefekt aus, während seine lokale Struktur entlang des Rings durch die $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ angegeben wird. In Abb. 4.27 sehen Sie ein Beispiel für solch einen Ringdefekt. Die Schleife α klassifiziert $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$, und die Sphäre (2-Schleife) β klassifiziert $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$.

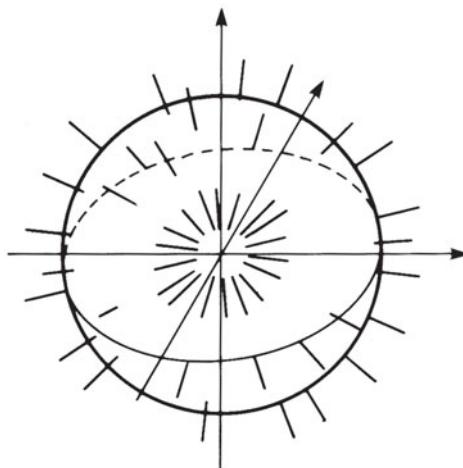


Abb. 4.26. Die Textur eines Punktdefekts in einem nematischen Flüssigkristall.

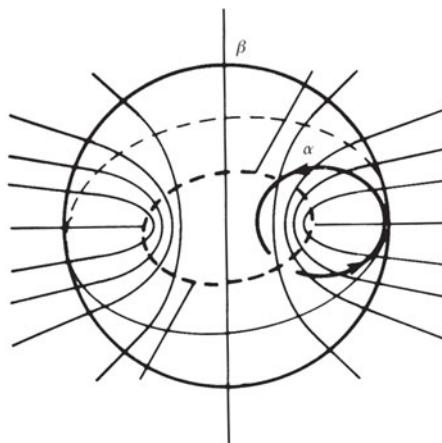


Abb. 4.27. Die Textur eines Ringdefekts in einem nematischen Flüssigkristall. Die Schleife α klassifiziert $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$, während die Sphäre (2-Schleife) β die Gruppe $\pi_2(\mathbb{RP}^2)$ klassifiziert.

4.9.4 Höherdimensionale Textur

Die dritte Homotopiegruppe $\pi_3(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}$ führt auf eine interessante singularitätsfreie Textur in einem dreidimensionalen nematischen Flüssigkristallmedium. Nehmen wir an, das Direktorfeld nähert sich für $|r| \rightarrow \infty$ einer asymptotischen Konfiguration an, etwa $n = (1, 0, 0)^T$. Dann wird das Medium gewissermaßen in der dreidimensionalen (Hyper-)Sphäre S^3 kompaktifiziert, und die topologische Struktur der Textur wird durch $\pi_3(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}$ klassifiziert. Welche Textur korrespondiert mit dem nichttrivialen Element der Homotopiegruppe?

Eine beliebige Rotation in \mathbb{R}^3 wird durch einen Einheitsvektor e beschrieben, um welchen die Rotation ausgeführt wird, und durch den Rotationswinkel α . Man kann dieser Rotation daher einen „Vektor“ $\Omega = \alpha e$ zuordnen. Dies ist nicht wirklich ein Vektor, da $\Omega = \pi e$ und $-\Omega = -\pi e$ derselben Rotation entsprechen und daher identifiziert werden sollten. Darum gehört Ω dem reellen projektiven Raum \mathbb{RP}^3 an. Nehmen wir den Vektor $n_0 = (1, 0, 0)^T$ als einen Standarddirektor an. Dann wird eine beliebige Direktor-Konfiguration spezifiziert, indem n_0 um eine Achse e mit dem Drehwinkel α gedreht wird: $n = R(e, \alpha)n_0$, wobei $R(e, \alpha)$ die zugehörige Rotationsmatrix in der $SO(3)$ ist. Sei weiter ein Texturfeld gegeben durch Anwenden der Rotation

$$\alpha e(r) = f(r)\hat{r} \quad (4.68)$$

auf n_0 , wobei \hat{r} der Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors r ist und gilt:

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r = 0 \\ \pi & \text{für } r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Abb. 4.28 zeigt das Direktorfeld dieser Textur. Beachten Sie, dass, obwohl die Textur keine Singularität enthält, es unmöglich ist, sie in eine gleichförmige Konfiguration „aufzudröseln“.

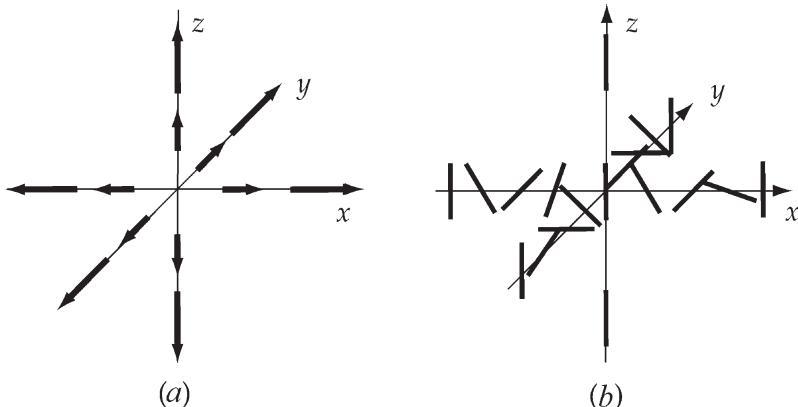


Abb. 4.28. Die Textur des nichttrivialen Elements von $\pi_3(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}$: (a) zeigt den Rotations-„Vektor“ αe . Dessen Länge α geht für $|r| \rightarrow \infty$ gegen π . (b) zeigt das korrespondierende Direktorfeld.

4.10 Texturen in suprafluidem $^3\text{He-A}$

4.10.1 Suprafluides $^3\text{He-A}$

Nun kommt das letzte und interessanteste Beispiel. Vor 1972 war die einzige bekannte BCS-Supraflüssigkeit der konventionelle Supraleiter (abgesehen von indirekten Beobachtungen supraflüssiger Neutronen in Neutronensternen). Abb. 4.29 ist das Phasendiagramm von suprafluidem ^3He ohne äußeres magnetisches Feld, wobei wir insbesondere an der sog. A-Phase interessiert sind. NMR- und andere Messungen haben ergeben, dass sich die Supraflüssigkeit im Spin-Triplett-p-Wellenzustand befindet. Anstelle der Feldoperatoren, vgl. Gleichung (4.65b), definieren wir den Ordnungsparameter in Abhängigkeit vom Erzeugungs- und vom Vernichtungsoperator. Die allgemeinste Form des suprafluiden Triplett-Ordnungsparameters ist

$$\langle c_{\alpha,k} c_{\beta,-k} \rangle \propto \sum_{\mu=1}^3 (\text{i}\sigma_2 \sigma_{\mu})_{\alpha\beta} d_{\mu}(k), \quad (4.69\text{a})$$

wobei α und β Spin-Indizes sind. Da sich das Cooper-Paar im p-Wellenzustand bildet, ist $d_{\mu}(k)$ proportional zu $Y_{1m} \sim k_i$:

$$d_{\mu}(k) = \sum_{i=1}^3 \Delta_0 A_{\mu i} k_i. \quad (4.69\text{b})$$

Die Volumenenergie hat mehrere Minima. Das absolute Minimum hängt vom Druck und der Temperatur ab.

Der Ordnungsparameter für die A-Phase nimmt die Form

$$A_{\mu i} = d_{\mu}(\Delta_1 + \text{i}\Delta_2)_i \quad (4.70)$$

an, wobei d ein Einheitsvektor ist, in dessen Richtung die Spinprojektion des Cooper-Paares verschwindet. (Δ_1, Δ_2) ist ein Paar von orthonormalen Einheitsvektoren. Der Vektor d nimmt seinen Wert in S^2 an. Wenn wir $l \equiv \Delta_1 \times \Delta_2$ definieren, bildet die Triade (Δ_1, Δ_2, l) an jedem Punkt im Medium ein orthonormales Bezugssystem. Da man jedes orthonormale Bezugssystem aus einem Standard-Orthonormalsystem (e_1, e_2, e_3) erhalten kann, wenn man darauf eine dreidimensionale Rotationsmatrix anwendet, können wir schließen, dass der Ordnungsparameter von $^3\text{He-A}$ $S^2 \times \text{SO}(3)$ ist. Der hier eingeführte Vektor l ist die Achse des Drehimpulses des Cooper-Paares.

Der Einfachheit halber vernachlässigen wir die Variation des Vektors \hat{d} .⁹ Der Ordnungsparameter erhält dann die Form

$$A_i = \Delta_0(\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2)_i. \quad (4.71)$$

⁹ Tatsächlich ist \hat{d} aufgrund der Dipolkraft auf die Richtung von \hat{l} festgelegt.

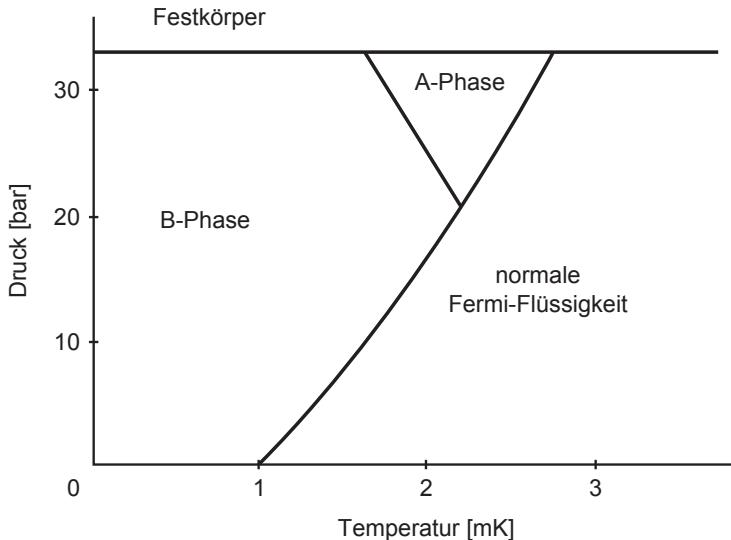


Abb. 4.29. Phasendiagramm von suprafluidem ^3He .

Dabei bilden $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ und $\hat{l} \equiv \hat{\Delta}_1 \times \hat{\Delta}_2$ an jedem Punkt im Medium ein Orthonormalsystem. Wählen wir nun ein Standard-Orthonormalsystem (e_1, e_2, e_3) . Das System $(\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \hat{l})$ erhalten wir daraus durch Anwenden eines Elements $g \in \text{SO}(3)$ auf das Standardsystem:

$$g : (e_1, e_2, e_3) \mapsto (\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \hat{l}). \quad (4.72)$$

Da g von der Koordinate x abhängt, definiert die Konfiguration $(\hat{\Delta}_1(x), \hat{\Delta}_2(x), \hat{l}(x))$ eine Abbildung $\psi : X \rightarrow \text{SO}(3)$ mit $x \mapsto g(x)$. Die Abbildung ψ wird **Textur** von suprafluidem ^3He genannt.¹⁰ Die relevanten Homotopiegruppen für die Klassifikation von Defekten in suprafluidem ^3He -A sind die $\pi_n(\text{SO}(3))$.

Wenn ein Behälter mit ^3He -A gefüllt wird, stellt dessen Rand gewisse Bedingungen an die Textur. Der Vektor \hat{l} lässt sich als die Richtung des Drehimpulses des Cooper-Paars verstehen. Das Paar sollte in der Ebene parallel zur Behälterwand rotieren, daher sollte \hat{l} senkrecht auf der Wand stehen.¹¹ Es gibt verschiedene Formen von freier Energie, und die Textur wird durch Lösen der Euler-Lagrange-Gleichung bestimmt, welche sich aus der totalen freien Energie unter den gegebenen Randbedingungen ergibt.

Informationen über suprafluides ^3He finden Sie bei Anderson und Brinkman (1975), Leggett (1975) und Mermin (1978).

¹⁰ Der Name „Textur“ wurde hier in der Tat von der Ordnungsparameter-Konfiguration in Flüssigkristallen entlehnt, siehe Abschnitt 4.9.

¹¹ Wenn die Wand *diffus* ist, wird die Drehbewegung der Cooper-Paare gestört, und es gibt eine Senke in der Amplitude des Ordnungsparameters in der Nähe der Wand. Der Einfachheit halber gehen wir von einer *spiegelglatten* Wand aus, sodass die Cooper-Paare ihre Bewegung ungestört ausführen können.

4.10.2 Liniendefekte und nichtsinguläre Wirbel in ${}^3\text{He-A}$

Die Fundamentalgruppe von $\text{SO}(3) \cong \mathbb{RP}^3$ ist $\pi_1(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \{0, 1\}$. Texturen, die zur Klasse 0 gehören, können stetig in die gleichförmige Konfiguration deformiert werden. Konfigurationen in Klasse 1 heißen **Disgyrationen** und wurden von Maki und Tsuneto (1977) sowie Buchholtz und Fetter (1977) untersucht. Abb. 4.30 beschreibt diese Disgyrationen in ihren Zuständen niedrigster freier Energie.

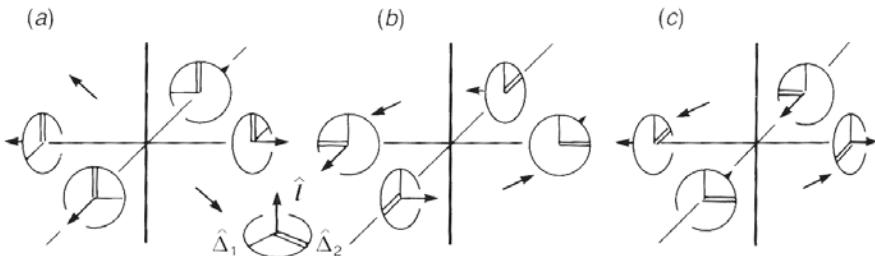


Abb. 4.30. Disgyrationen in ${}^3\text{He-A}$.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft von \mathbb{Z}_2 ist die Addition $1 + 1 = 0$; die Verschmelzung zweier Disgyrationen erzeugt eine triviale Textur. Durch die Vereinigung von zwei Disgyrationen können wir eine Textur konstruieren, die wie ein Wirbel mit doppelter Wirbelstärke (Vorticity) aussieht (Homotopieklass „2“), ohne dass er einen singulären Kern enthält, siehe Abb. 4.31(a). Man prüft leicht nach, dass das Bild der Schleife α zweimal durch \mathbb{RP}^3 läuft, während das Bild der kleineren Schleife β auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Diese Textur wird **Anderson-Toulouse-Vortex** genannt (Anderson und Toulouse, 1977). Mermin und Ho (1976) wiesen darauf hin, dass bei einem Medium in einem Zylinder die Randbedingung $\hat{l} \perp$ (Rand) gilt und der Wirbel an der Oberfläche abgeschnitten ist, siehe Abb. 4.31(b) (**Mermin-Ho-Vortex**).

Wegen $\pi_2(\mathbb{RP}^3) \cong \{e\}$ gibt es keine Punktdefekte in ${}^3\text{He-A}$. Aber $\pi_3(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}$ führt mit dem Shankar-Monopol einen weiteren Typ von punktartigen Strukturen ein, den wir als nächsten (und letzten) untersuchen wollen.

4.10.3 Shankar-Monopole in ${}^3\text{He-A}$

Shankar (1977) wies auf die Existenz eines punktartigen, singularitätsfreien Objekts in ${}^3\text{He-A}$ hin. Wir stellen uns ein unendlich ausgedehntes Medium von ${}^3\text{He-A}$ vor und nehmen an, dass das Medium asymptotisch gleichförmig ist, d. h., $(\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \hat{l})$ nähert sich einem Standard-Orthonormalsystem (e_1, e_2, e_3) an, wenn $|x| \rightarrow \infty$ geht. Da alle weit vom Ursprung entfernten Punkte auf denselben Punkt abgebildet werden, haben wir den \mathbb{R}^3 auf S^3 kompaktifiziert. Dann wird die Textur gemäß $\pi_3(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}$ klassifiziert. Wir spezifizieren ein Element aus $\text{SO}(3)$ durch einen „Vek-

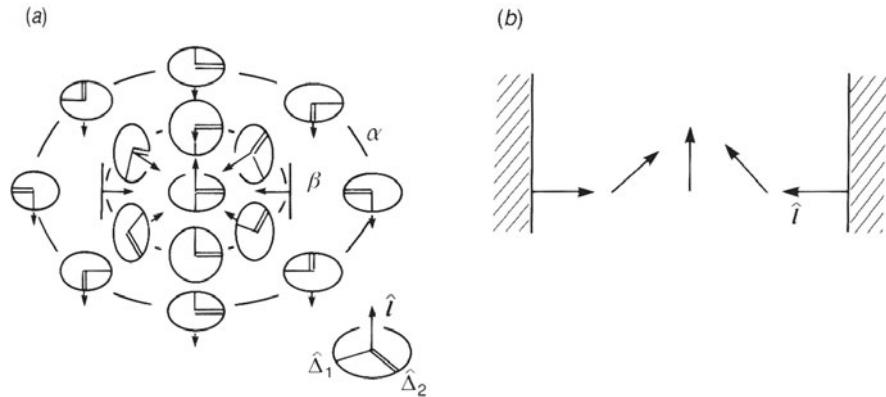


Abb. 4.31. Anderson-Toulouse- (a) und Mermin-Ho-Vortex (b). In (b) müssen die Randkräfte \hat{l} senkrecht auf der Wand stehen.

tor“ $\Omega = \theta n$ in $\mathbb{R}P^3$, wie gehabt (Beispiel 4.12). Shankar (1977) hat nun eine Textur

$$\Omega(r) = \frac{r}{r} \cdot f(r) \quad (4.73)$$

vorgeschlagen, mit einer monoton abnehmenden Funktion $f(r)$, sodass gilt:

$$f(r) = \begin{cases} 2\pi & \text{für } r = 0 \\ 0 & \text{für } r = \infty. \end{cases} \quad (4.74)$$

Wir erweitern formal den Radius von $\mathbb{R}P^3$ auf 2π und definieren den Rotationswinkel modulo 2π . Diese Textur wird **Shankar-Monopol** genannt, siehe Abb. 4.32(a). Auf den ersten Blick sieht es so aus, als gäbe es eine Singularität am Ursprung. Beachten Sie jedoch, dass die Länge von Ω dort 2π ist und äquivalent zum neutralen Element von $\text{SO}(3)$ ist. Abb. 4.32(b) beschreibt das Triadenfeld. Da für $r \rightarrow \infty$ unabhängig von der Richtung $\Omega(r) = 0$ gilt, wird der Raum \mathbb{R}^3 zur S^3 kompaktifiziert. Wenn wir den gesamten Raum durchlaufen, läuft $\Omega(r)$ zweimal durch $\text{SO}(3)$. Diese Textur korrespondiert mit der Klasse 1 von $\pi_3(\text{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}$.

Übung 4.10 Skizzieren Sie den Shankar-Monopol. der zur Klasse -1 von $\pi_3(\mathbb{R}P^3)$ gehört. (Sie können hierzu *nicht* einfach die Richtung der Pfeile in Abb. 4.32 umkehren.)

Übung 4.11 Betrachten Sie die klassischen Heisenberg-Spins im \mathbb{R}^2 in Abschnitt 4.8.1. Nehmen Sie an, dass die Spins den asymptotischen Wert

$$n(x) \rightarrow e_z \quad (|x| \geq L) \quad (4.75)$$

annehmen, damit die totale Energie endlich bleibt, siehe Abb. 4.20. Zeigen Sie, dass die ausgedehnten Objekte in diesem System durch $\pi_2(S^2)$ klassifiziert werden. Skizzieren Sie Beispiele von Spinkonfigurationen für die Klassen -1 und $+2$.

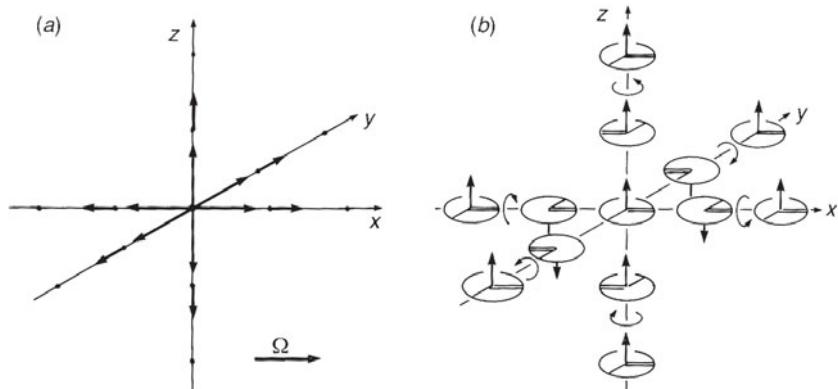


Abb. 4.32. Der Shankar-Monopol: (a) zeigt die „Vektoren“ $\Omega(r)$ und (b) die Triade $(\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \hat{l})$. Beachten Sie, dass die Triade für $|r| \rightarrow \infty$ sich jeweils derselben Konfiguration annähert.

Aufgaben

4.1 Zeigen Sie, dass die n -Sphäre S^n ein Deformationsretrakt des punktierten euklidischen Raums $R^{n+1} \setminus \{0\}$ ist. Ermitteln Sie eine Retraktion.

4.2 Sei D^2 die zweidimensionale abgeschlossene Scheibe und $S^1 = \partial D^2$ ihr Rand. Sei $f : D^2 \rightarrow D^2$ eine glatte Abbildung. Nehmen Sie an, dass f keine Fixpunkte hat, also $f(p) \neq p$ für beliebige $p \in D^2$ ist. Betrachten Sie eine Halbgerade, die bei p startet und durch $f(p)$ läuft (diese Halbgerade ist immer wohldefiniert, wenn $p \neq f(p)$ ist). Diese Linie möge den Rand in einem Punkt $q \in S^1$ kreuzen. Definieren Sie dann $\tilde{f} : D^2 \rightarrow S^1$ durch $\tilde{f}(p) = q$. Verwenden Sie $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ und $\pi_1(D^2) = \{0\}$, um zu zeigen, dass eine solche Abbildung \tilde{f} nicht existiert und daher f Fixpunkte haben muss. (Tipp: Zeigen Sie, dass, wenn solch eine Abbildung \tilde{f} existieren würde, D^2 und S^1 vom selben Homotopietyp wären.) Dies ist die zweidimensionale Version des **Brouwer'schen Fixpunktsatzes**.

4.3 Konstruieren Sie eine Abbildung $f : S^3 \rightarrow S^2$, welche zu den Elementen 0 und 1 von $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ gehört; siehe auch Beispiel 9.9.

5

Mannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeiten verallgemeinern unsere vertrauten Vorstellungen von Kurven und Flächen auf Objekte von beliebiger Dimension. Eine Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raum wird durch eine einzelne Zahl t lokal als $(x(t), y(t), z(t))$ parametrisiert, während die zwei Zahlen u und v eine Fläche gemäß $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ parametrisieren. Kurven und Flächen lassen sich als lokal homöomorph zu den Räumen \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^2 ansehen. Eine Mannigfaltigkeit ist, ganz allgemein gesprochen, ein topologischer Raum, der *lokal* homöomorph zum \mathbb{R}^m ist; er kann sich *global* durchaus vom \mathbb{R}^m unterscheiden. Der lokale Homöomorphismus erlaubt es uns, jedem Punkt in einer Mannigfaltigkeit eine Menge von m Zahlen zuzuordnen, welche wir die (lokale) Koordinate des Punkts nennen. Wenn eine Mannigfaltigkeit nicht global homöomorph zum \mathbb{R}^m ist, müssen wir mehrere lokale Koordinaten einführen. Es ist dann möglich, dass ein und derselbe Punkt zwei oder mehr Koordinaten hat. Wir verlangen, dass der Übergang von einer Koordinate zur anderen *glatt* sein soll. Wie wir später sehen werden, erlaubt uns dies, in der üblichen Weise Analysis auf einer Mannigfaltigkeit zu betreiben. Man kann sagen, dass so wie die Topologie auf der Stetigkeit basiert, die Theorie der Mannigfaltigkeiten auf der Idee der *Glattheit* beruht.

Nützliche Standardwerke zu diesem Thema sind Crampin und Pirani (1986), Matsumura (1972), Schutz (1980) und Warner (1983). Kapitel 2 und die Anhänge B und C von Wald (1984) sind ebenfalls zu empfehlen. Flanders (1963) ist eine wunderbare Einführung in die Differentialformen. Sattinger und Weaver (1986) behandelt Lie-Gruppen und Lie-Algebren und enthält dazu viele Anwendungen auf physikalische Fragestellungen.

5.1 Mannigfaltigkeiten

5.1.1 Heuristische Einführung

Zur Verdeutlichung unseres Vorgehens betrachten wir die S^2 , d. h. die gewöhnliche Sphäre mit Einheitsradius im \mathbb{R}^3 . Wir parametrisieren die Fläche der S^2 durch zwei Koordinatensysteme – Polarkoordinaten und stereografische Koordinaten (es gibt natürlich auch noch viele andere Möglichkeiten). Die Polarkoordinaten θ und ϕ

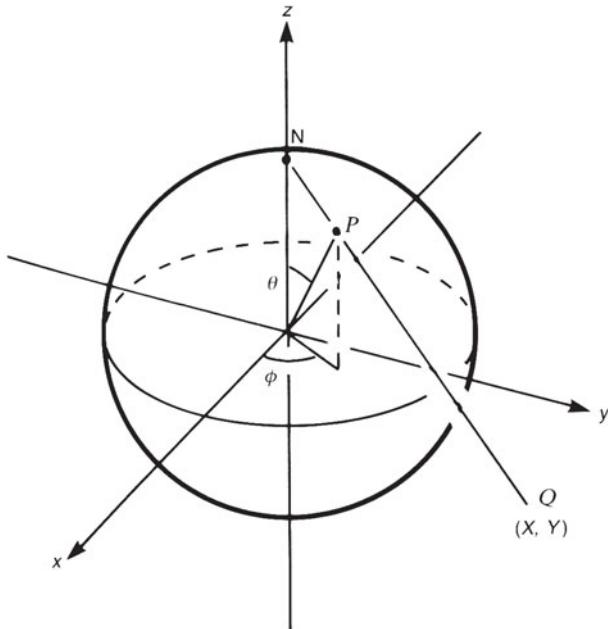


Abb. 5.1. Polarkoordinaten (θ, ϕ) und stereografische Koordinaten (X, Y) eines Punkts P auf S^2 .

werden üblicherweise wie in Abb. 5.1 definiert:

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta, \quad (5.1)$$

dabei läuft ϕ von 0 bis 2π , θ läuft von 0 bis π . Diese Gleichungen können auf der Sphäre invertiert werden:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \quad (5.2)$$

Stereografische Koordinaten werden dagegen durch die Projektion vom Nordpol auf die Äquatorialebene definiert, vgl. Abb. 5.1: Zuerst zieht man eine Linie vom Nordpol $(0, 0, 1)$ zu dem Punkt $P(x, y, z)$ auf der Sphäre und verlängert diese Linie dann geradlinig bis zur Äquatorialebene ($z = 0$), welche im Punkt $Q(X, Y, 0)$ geschnitten wird. X und Y sind dann die stereografischen Koordinaten von P . Wir erhalten

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z}. \quad (5.3)$$

Zwischen den zwei Koordinatensystemen bestehen die Beziehungen

$$X = \cot \frac{1}{2}\theta \cos \phi, \quad Y = \cot \frac{1}{2}\theta \sin \phi. \quad (5.4)$$

Natürlich könnten wir auch andere Systeme verwenden, etwa Polarkoordinaten mit anderen polaren Achsen oder Projektionen von einem anderen Punkt auf der S^2 aus. Die Koordinaten auf der Sphäre können beliebig gewählt werden, solange keine spe-

zifische Berechnung auszuführen ist. (Der geografische Längengrad wird aus historischen Gründen von Greenwich aus gemessen, aber es gibt sonst keinen Grund, warum man nicht stattdessen New York oder Kyoto als Bezugspunkt wählen könnte.) Die Beliebigkeit der Koordinatenwahl liegt der Theorie der Mannigfaltigkeiten zugrunde: *Alle Koordinatensysteme sind gleich gut*. Dies steht in Einklang mit dem „Grundgesetz“ der Physik: *Ein physikalisches System verhält sich gleich, egal mit welchen Koordinaten wir es gerade beschreiben*.

Ein weiterer Punkt, den wir aus diesem Beispiel ersehen können, ist der, dass *ein Koordinatensystem möglicherweise nicht überall gleichzeitig verwendet werden kann*. Schauen wir uns die Polarkoordinaten auf der S^2 an, der Deutlichkeit halber am Äquator ($\theta = \pi/2$). Wenn wir ϕ von 0 bis 2π laufen lassen, ändert es sich beim Lauf um den Äquator stetig, bis wir schließlich bei $\phi = 2\pi$ anlangen. Dort hat die ϕ -Koordinate eine Unstetigkeit und springt von 2π auf 0, wodurch benachbarte Punkte ganz unterschiedliche ϕ -Werte haben. Alternativ könnten wir ϕ über 2π hinaus weiterzählen. Dies führt dann aber auf eine andere Schwierigkeit: Es gibt dann an jedem Punkt unendlich viele ϕ -Werte, die sich voneinander durch ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden. Ein weiteres Problem tritt an den Polen auf, wo ϕ überhaupt nicht bestimmt werden kann – ein Polarforscher befindet sich in einem Zustand der „Zeitlosigkeit“, da wir auf der Erde die Zeitzonen über die geografische Länge definieren. Stereografische Koordinaten machen ebenfalls Schwierigkeiten am Nordpol bzw. an dem Punkt, von dem aus projiziert wird. Dieser wird nicht auf einen Punkt in der Äquatorialebene abgebildet, und nahe benachbarte Punkte haben sehr unterschiedliche stereografische Koordinaten.

Somit können wir die Gesamtheit der Punkte auf der Sphäre nicht mit einem einheitlichen Koordinatensystem kennzeichnen und dabei die beiden folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

- (i) Benachbarte Punkte haben immer ähnliche Koordinaten.
- (ii) Jeder Punkt hat eindeutige Koordinaten.

Beachten Sie jedoch, dass es unendlich viele Wege gibt, Koordinaten einzuführen, welche diese Forderungen auf einem *Teil* der S^2 erfüllen. Wir nutzen diese Tatsache aus, um Koordinaten auf der S^2 zu definieren: Führe zwei oder mehr sich überlappende Koordinatensysteme ein, von denen jedes einen Teil der Sphäre abdeckt, und kennzeichne die Punkte so, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i') Benachbarte Punkte haben in mindestens einem Koordinatensystem ähnliche Koordinaten.
 - (ii') Jeder Punkt hat eindeutige Koordinaten in jedem System, das ihn enthält.
- Wir können z. B. zwei stereografische Koordinaten auf der S^2 einführen: eine Projektion vom Nordpol und eine vom Südpol. Reichen die beiden Bedingungen (i') und (ii') aus, um eine vernünftige Theorie der Mannigfaltigkeiten zu entwickeln? Tatsächlich benötigen wir noch eine weitere Bedingung für die Koordinatensysteme:
- (iii) Wenn sich zwei Koordinatensysteme überlappen, muss die Beziehung zwischen ihnen hinreichend glatt sein.

Ohne diese Bedingung könnte eine in dem einen Koordinatensystem differenzierbare Funktion im anderen System nicht differenzierbar sein.

5.1.2 Definitionen

Definition 5.1. M ist eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

- (i) M ist ein topologischer Raum;
- (ii) M ist mit einer Familie von Paaren $\{(U_i, \varphi_i)\}$ versehen;
- (iii) $\{U_i\}$ ist eine Familie von offenen Mengen, die M überdecken: $\cup_i U_i = M$. Die Abbildung φ_i ist ein Homöomorphismus von U_i in eine offene Teilmenge U'_i von \mathbb{R}^m (Abb. 5.2);
- (iv) für gegebene U_i und U_j mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist die Abbildung $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ von $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ nach $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ unendlich oft differenzierbar.

Das Paar (U_i, φ_i) wird **Karte** genannt und die ganze Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}$ – aus naheliegenden Gründen – **Atlas**. Die Teilmenge U_i heißt **Koordinatenumgebung**, und φ_i ist die **Koordinatenfunktion** oder schlicht die **Koordinate**. Der Homöomorphismus φ_i wird durch m Funktionen $\{x^1(p), \dots, x^m(p)\}$ dargestellt. Die Menge $\{x^\mu(p)\}$

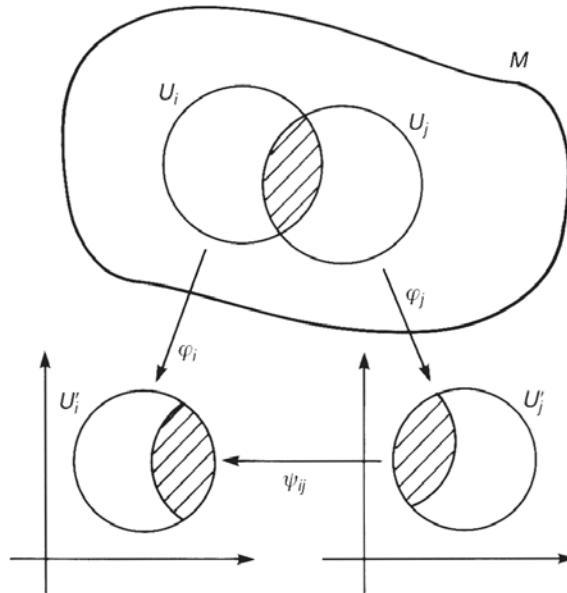


Abb. 5.2. Ein Homöomorphismus φ_i bildet U_i auf eine offene Teilmenge $U'_i \subset \mathbb{R}^m$ ab und gibt damit einem Punkt $p \in U_i$ Koordinaten. Wenn $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist, ist der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen glatt.

wird ebenfalls als **Koordinate** bezeichnet. Ein Punkt $p \in M$ existiert unabhängig von seiner Koordinate, und es liegt ganz an uns, wie wir einem Punkt Koordinaten zuschreiben. Wir verwenden manchmal die etwas saloppe Notation „ x “, um einen Punkt zu bezeichnen, dessen Koordinate $\{x^1, \dots, x^m\}$ ist, sofern nicht mehrere Koordinatensysteme gleichzeitig in Verwendung sind. Aus (ii) und (iii) folgt, dass M lokal euklidisch ist. In jeder Koordinatenumgebung U_i sieht M wie eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^m aus, deren Element $\{x^1, \dots, x^m\}$ ist. Beachten Sie, dass wir nicht verlangen, dass M *global* der \mathbb{R}^m sein soll. Wir leben auf der Erde, deren Oberfläche (ziemlich weitgehend) die S^2 ist, welche global ganz anders als der \mathbb{R}^2 aussieht. Ein Blick aus dem Fenster zeigt aber, dass sie *lokal* sehr wohl wie eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 aussieht. Wer könnte sagen, dass wir auf einer Sphäre leben, wenn er auf den Stadtplan von Berlin schaut, welcher natürlich wie ein perfekter Teilraum des \mathbb{R}^2 aussieht?¹

Wenn sich U_i und U_j überlappen, werden einem Punkt innerhalb von $U_i \cap U_j$ zwei Koordinatensysteme zugewiesen. Axiom (iv) gewährleistet, dass der Übergang von einem Koordinatensystem zum anderen *glatt* (C^∞) ist. Die Abbildung φ_i ordnet einem Punkt $p \in U_i \cap U_j$ die m Koordinatenwerte x^μ ($1 \leq \mu \leq m$) zu, während φ_j diesem Punkt die Koordinate y^ν ($1 \leq \nu \leq m$) zuordnet. Der Übergang von y nach x , $x^\mu = x^\mu(y)$, ist durch m Funktionen von m Variablen gegeben. Die Koordinatentransformationsfunktionen $x^\mu = x^\mu(y)$ sind die explizite Form der Abbildung $\psi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Auf diese Weise ist die Differenzierbarkeit im üblichen Sinne der Analysis definiert: Die Koordinatentransformation ist differenzierbar, wenn jede Funktion $x^\mu(y)$ nach jedem y^ν differenzierbar ist. Wir könnten uns auch auf maximal k -fache Differenzierbarkeit (C^k) beschränken. Dies bringt jedoch keine interessanten Erkenntnisse; stattdessen verlangen wir einfach, dass die Koordinatentransformationen unendlich oft differenzierbar, d. h. von der Klasse C^∞ sein sollen. Nun haben wir die Mannigfaltigkeit M derart mit Koordinaten versehen, dass, egal wie wir uns durch bzw. über M bewegen, die Koordinaten immer auf glatte Weise variieren.

Wenn die Vereinigung von zwei Atlanten $\{(U_i, \varphi_i)\}$ und $\{(V_j, \psi_j)\}$ ebenfalls ein Atlas ist, nennt man die beiden Atlanten **kompatibel**. Die Kompatibilität ist eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklasse den Namen **differenzierbare Struktur** trägt. Man sagt auch, dass wechselseitig kompatible Atlanten dieselbe differenzierbare Struktur auf M definieren.

Bevor wir Beispiele vorstellen, noch eine kurze Bemerkung zu Mannigfaltigkeiten *mit Rändern*. Bisher haben wir angenommen, dass die Koordinatenumgebung U_i homöomorph zu einer offenen Menge aus \mathbb{R}^m ist. Für manche Anwendungen ist dies jedoch zu restriktiv, und wir müssen die Bedingung etwas aufweichen. Wenn ein topologischer Raum M von einer Familie von offenen Mengen $\{U_i\}$ überdeckt wird, von welchen jede homöomorph zu einer offenen Menge aus $H^m \equiv \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m | x^m \geq 0\}$ ist, nennt man M eine **Mannigfaltigkeit mit Rand**, siehe Abb. 5.3. Die

¹ Streng genommen ist der Abstand zwischen zwei Längengraden am Nordrand der Stadt etwas kürzer als am Flughafen Schönefeld, und man könnte den Verdacht hegen, sich in Wirklichkeit auf einer gekrümmten Fläche zu befinden. Natürlich ist auf dem Stadtplan von Kapstadt der Südrand etwas kürzer als der Nordrand.

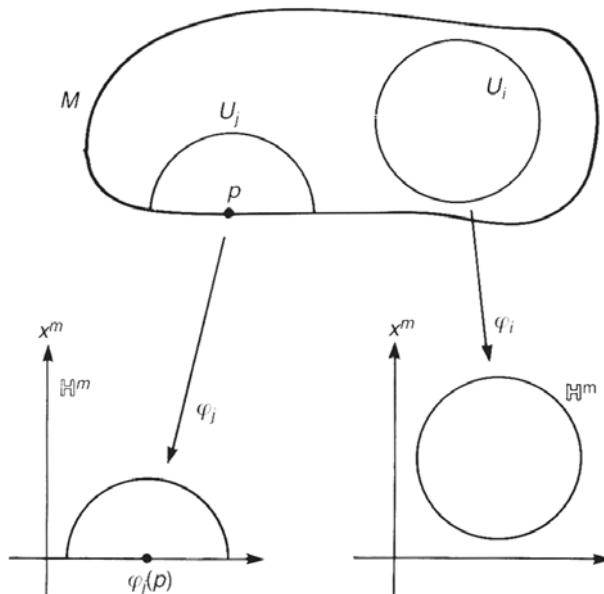


Abb. 5.3. Eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Punkt p befindet sich auf dem Rand.

Menge der Punkte, die auf die Punkte mit $x^m = 0$ abgebildet werden, heißt **Rand** von M , geschrieben als ∂M . Die Koordinate von ∂M lässt sich durch m Zahlen $(x^1, \dots, x^{m-1}, 0)$ angegeben. Nun müssen wir vorsichtig sein, wenn wir die Glattheit definieren wollen. Die Abbildung $\psi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ ist im Allgemeinen auf einer offenen Menge von H^m definiert, und ψ_{ij} wird glatt genannt, wenn es C^∞ ist in einer offenen Menge von \mathbb{R}^m , die $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ enthält. Fühlen Sie sich ermutigt, ihrem Vorstellungsvermögen zu trauen, denn unsere Definition steht in Einklang mit unseren intuitiven Vorstellungen von Rändern. So ist der Rand der festen gefüllten Kugel D^3 die Sphäre S^2 , und der Rand der Sphäre ist die leere Menge.

5.1.3 Beispiele

Nun werden wir unsere Ideen über Mannigfaltigkeiten anhand einiger Beispiele entwickeln, die von großer Bedeutung für die Physik sind.

Beispiel 5.1. Das trivialste Beispiel ist der euklidische Raum \mathbb{R}^m , in welchem eine einzige Karte den gesamten Raum überdeckt, und als φ können wir z. B. die identische Abbildung wählen. ◇

Beispiel 5.2. Es seien $m = 1$ und M zusammenhängend. Dann sind nur zwei Mannigfaltigkeiten möglich: die reelle Gerade \mathbb{R} und der Kreis S^1 . Lassen Sie uns einen Atlas von S^1 zusammenstellen. Um es etwas konkreter zu machen, betrachten wir

den Kreis $x^2 + y^2 = 1$ in der xy -Ebene. Wir brauchen mindestens zwei Karten, die wir z. B. wie in Abb. 5.4 wählen können. Wir definieren $\varphi_1^{-1} : (0, 2\pi) \rightarrow S^1$ durch

$$\varphi_1^{-1} : \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta). \quad (5.5a)$$

Das Bild dieser Abbildung ist $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$. Wir definieren entsprechend eine zweite Abbildung $\varphi_2^{-1} : (-\pi, \pi) \rightarrow S^1$ durch

$$\varphi_2^{-1} : \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta), \quad (5.5b)$$

deren Bild $S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ ist. Offensichtlich sind φ_1^{-1} und φ_2^{-1} invertierbar und alle Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^{-1}$ und φ_2^{-1} stetig. Somit sind φ_1 und φ_2 Homöomorphismen. Überzeugen Sie sich davon, dass die Abbildungen $\psi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ und $\psi_{21} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ glatt sind. \diamond

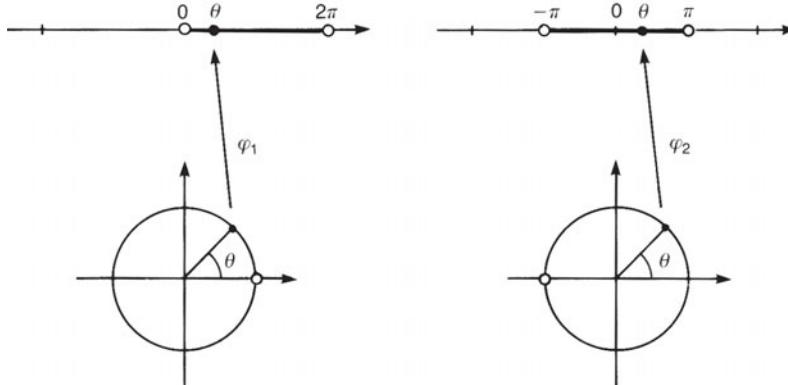


Abb. 5.4. Zwei Karten des Kreises S^1 .

Beispiel 5.3. Die n -dimensionale Sphäre S^n ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Im \mathbb{R}^{n+1} hat sie die Form

$$\sum_{i=0}^n (x^i)^2 = 1. \quad (5.6)$$

Führen wir die Koordinatenumgebungen

$$U_{i+} \equiv \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \in S^n | x^i > 0\}, \quad (5.7a)$$

$$U_{i-} \equiv \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \in S^n | x^i < 0\} \quad (5.7b)$$

ein und definieren wir die Koordinatenabbildungen $\varphi_{i+} : U_{i+} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi_{i+}(x^0, \dots, x^n) = (x^0, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \quad (5.8a)$$

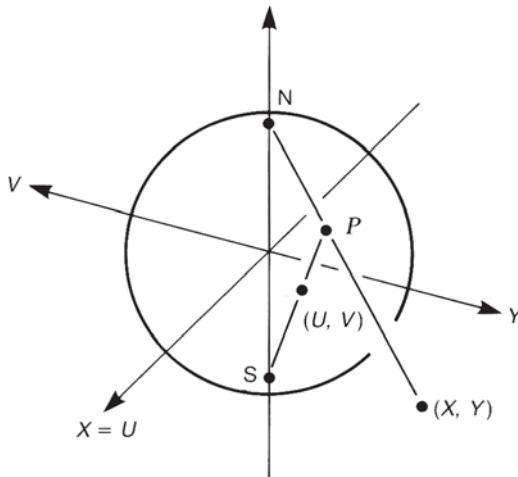


Abb. 5.5. Zwei stereografische Koordinatensysteme auf der S^2 . Wird der Punkt P vom Nordpol N aus projiziert, ergibt sich die Koordinate (X, Y) , vom Südpol S aus erhält man (U, V) .

und $\varphi_{i-} : U_{i-} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi_{i-}(x^0, \dots, x^n) = (x^0, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n). \quad (5.8b)$$

Beachten Sie, dass die Bereiche φ_{i+} und φ_{i-} verschieden sind. Die $\varphi_{i\pm}$ sind die Projektionen der Hemisphären $U_{i\pm}$ auf die Ebene $x^i = 0$. Die Übergangsfunktionen erhält man leicht aus (5.8). Nehmen wir die S^2 als Beispiel. Die Koordinatenumgebungen sind $U_{x\pm}, U_{y\pm}$ und $U_{z\pm}$. Die Übergangsfunktion $\psi_{y-x+} \equiv \varphi_{y-} \circ \varphi_{x+}^{-1}$ ist gegeben durch

$$\psi_{y-x+} : (y, z) \mapsto \left(\sqrt{1 - y^2 - z^2}, z \right) \quad (5.9)$$

und auf $U_{x+} \cap U_{y-}$ unendlich oft differenzierbar. \diamond

Übung 5.1 Zu Beginn dieses Kapitels haben wir die stereografischen Koordinaten auf S^2 eingeführt. Wir können dabei die Projektion genauso gut von einem anderen Punkt als vom Nordpol aus durchführen. Beispielsweise zeigt Abb. 5.5 die stereografischen Koordinaten (U, V) eines Punkts in $S^2 \setminus \{\text{Südpol}\}$, die vom Südpol aus projiziert werden, und (X, Y) die eines Punkts in $S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\}$, projiziert vom Nordpol aus. Zeigen Sie, dass die Übergangsfunktionen zwischen (U, V) und (X, Y) C^∞ sind und dass sie eine differenzierbare Struktur auf M definieren; siehe auch Beispiel 8.1.

Beispiel 5.4. Der reelle projektive Raum \mathbb{RP}^n ist die Menge der Ursprungsgeraden im \mathbb{R}^{n+1} . Wenn $x = (x^0, \dots, x^n) \neq 0$ ist, definiert x eine Gerade durch den Ursprung. Beachten Sie, dass $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ dieselbe Gerade definiert wie x , wenn eine reelle Zahl $a \neq 0$ existiert, sodass $y = ax$ ist. Wir führen eine Äquivalenzrelation \sim ein, mit $x \sim y$,

wenn ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, sodass $y = ax$ ist. Dann ist $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$. Die $n+1$ Zahlen x^0, x^1, \dots, x^n werden **homogene Koordinaten** genannt. Die homogenen Koordinaten können kein gutes Koordinatensystem sein, da der $\mathbb{R}P^n$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist (ein $(n+1)$ -dimensionaler Raum, in dem ein eindimensionaler Freiheitsgrad vernichtet wurde). Die Karten werden wie folgt definiert: Zunächst nehmen wir die Koordinatenumgebung U_i als die Menge der Geraden mit $x^i \neq 0$ an; dann führen wir die **inhomogenen Koordinaten** auf U_i ein, durch

$$\xi_{(i)}^j = x^j/x^i. \quad (5.10)$$

Die inhomogenen Koordinaten

$$\xi_{(i)} = (\xi_{(i)}^0, \xi_{(i)}^1, \dots, \xi_{(i)}^{i-1}, \xi_{(i)}^{i+1}, \dots, \xi_{(i)}^n),$$

bei denen $\xi_{(i)}^i = 1$ ausgelassen ist, sind wohldefiniert auf U_i wegen $x^i \neq 0$, und darüber hinaus sind sie unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklasse, wegen $x^j/x^i = y^j/y^i$, wenn $y = ax$ ist. Die inhomogene Koordinate $\xi_{(i)}$ ergibt die Koordinatenabbildung $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, also

$$\varphi_i : (x^0, \dots, x^n) \mapsto (x^0/x^i, \dots, x^{i-1}/x^i, x^{i+1}/x^i, \dots, x^n/x^i),$$

wobei $x^i/x^i = 1$ weggelassen ist. Für $x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in U_i \cap U_j$ verwenden wir zwei inhomogene Koordinaten, $\xi_{(i)}^k = x^k/x^i$ und $\xi_{(j)}^k = x^k/x^j$. Die Koordinatentransformation $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ist

$$\psi_{ij} : \xi_{(j)}^k \mapsto \xi_{(i)}^k = (x^j/x^i)\xi_{(j)}^k. \quad (5.11)$$

Dies ist eine Multiplikation mit x^j/x^i .

In Beispiel 4.12 haben wir $\mathbb{R}P^n$ als die Sphäre S^n definiert, bei welcher einander gegenüberliegende Punkte (Antipodenpunkte) identifiziert werden. Dieses Bild geht konform mit der hier angegebenen Definition. Als Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[x]$ können wir Punkte mit $|x| = 1$ auf einer Geraden durch den Ursprung annehmen. Diese Punkte liegen auf der Einheitssphäre. Da eine Gerade die S^n immer in zwei Punkten schneidet, müssen wir in konsistenter Weise jeweils einen Punkt auswählen, d. h., benachbarte Geraden müssen durch benachbarte Punkte in der S^n repräsentiert werden. Dies läuft darauf hinaus, die Hemisphäre zu verwenden. Beachten Sie jedoch, dass die auf dem Rand der Hemisphäre (also dem Äquator der S^n) einander gegenüberliegenden Punkte per definitionem identifiziert werden: $(x^0, \dots, x^n) \sim -(x^0, \dots, x^n)$. Diese „Hyper-Hemisphäre“ ist homöomorph zu der (gefüllten) (Hyper-)Kugel D^n , auf deren Rand S^{n-1} liegende Antipodenpunkte miteinander identifiziert werden. ◇

Beispiel 5.5. Eine naheliegende Verallgemeinerung des $\mathbb{R}P^n$ ist die **Graßmann-Mannigfaltigkeit**. Ein Element des $\mathbb{R}P^n$ ist ein eindimensionaler Unterraum im \mathbb{R}^{n+1} . Die Graßmann-Mannigfaltigkeit $G_{k,n}(\mathbb{R})$ ist die Menge der k -dimensionalen Ebenen im \mathbb{R}^n . Beachten Sie, dass $G_{1,n+1}(\mathbb{R})$ nichts anderes als der $\mathbb{R}P^n$ ist. Die

Mannigfaltigkeitsstruktur der $G_{k,n}(\mathbb{R})$ wird auf ähnliche Weise definiert wie beim $\mathbb{R}P^n$.

Sei $M_{k,n}(\mathbb{R})$ die Menge der $(k \times n)$ -Matrizen mit $\text{rang } k$ ($k \leq n$). Wir setzen $A = (a_{ij}) \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ und definieren k (Spalten-)Vektoren a_i ($1 \leq i \leq k$) in \mathbb{R}^n durch $a_i = (a_{ij})$. Wegen $\text{rang } A = k$ sind die k Vektoren a_i linear unabhängig und spannen eine k -dimensionale Ebene in \mathbb{R}^n auf. Beachten Sie jedoch, dass es unendlich viele Matrizen in $M_{k,n}(\mathbb{R})$ gibt, welche auf dieselbe k -Ebene führen. Wir nehmen g aus der allgemeinen linearen Gruppe $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ (von engl. „general linear“) und betrachten eine Matrix $\tilde{A} = gA \in M_{k,n}(\mathbb{R})$. Hier definiert \tilde{A} dieselbe k -Ebene wie A , da g lediglich die Basis in der k -Ebene rotiert. Darum führen wir eine Äquivalenzrelation \sim ein, mit $\tilde{A} \sim A$, wenn $g \in \text{GL}(k, \mathbb{R})$ existiert, sodass $\tilde{A} = gA$ ist. Wir identifizieren $G_{k,n}(\mathbb{R})$ mit dem Nebenklassenraum $M_{k,n}(\mathbb{R})/\text{GL}(k, \mathbb{R})$.

Lassen Sie uns die Karten von $G_{k,n}(\mathbb{R})$ bestimmen. Dazu verwenden wir $A \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ und lassen $\{A_1, \dots, A_l\}$ mit $l = \binom{n}{k}$ die Kollektion aller $(k \times k)$ -Untermatrizen von A sein. Wegen $\text{rang } A = k$ existiert ein A_α ($1 \leq \alpha \leq l$), sodass $\det A_\alpha \neq 0$ ist. Habe z. B. die aus den ersten k Spalten gebildete Untermatrix A_1 eine nichtverschwindende Determinante:

$$A = (A_1, \widetilde{A}_1), \quad (5.12)$$

wobei \widetilde{A}_1 eine $(k \times (n-k))$ -Matrix ist. Wählen wir als Repräsentanten der Klasse, zu der A gehört, die Matrix

$$A_1^{-1} \cdot A = (I_k, A_1^{-1} \cdot \widetilde{A}_1), \quad (5.13)$$

mit der $(k \times k)$ -Einheitsmatrix I_k . Beachten Sie, dass A_1^{-1} immer existiert, wegen $\det A_1 \neq 0$. Darum sind die reellen Freiheitsgrade durch die Einträge der $(k \times (n-k))$ -Matrix $A_1^{-1} \cdot \widetilde{A}_1$ gegeben. Wir bezeichnen diese Teilmenge von $G_{k,n}(\mathbb{R})$ als U_1 . Diese ist eine Koordinatenumgebung, deren Koordinaten durch die $k(n-k)$ Einträge von $A_1^{-1} \cdot \widetilde{A}_1$ gegeben sind. Da U_1 homöomorph zu $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ ist, erhalten wir

$$\dim G_{k,n}(\mathbb{R}) = k(n-k). \quad (5.14)$$

Im Fall, dass $\det A_\alpha \neq 0$ und A_α aus den Spalten (i_1, i_2, \dots, i_k) besteht, multiplizieren wir mit A_α^{-1} , um den Repräsentanten

$$A_\alpha^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} & i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

zu erhalten, wobei die nicht explizit aufgeführt Einträge eine $(k \times (n-k))$ -Matrix bilden. Wir bezeichnen diese Teilmenge von $M_{k,n}(\mathbb{R})$, in der $\det A_\alpha \neq 0$ ist, als U_α . Die Einträge der $(k \times (n-k))$ -Matrix sind die Koordinaten von U_α .

Die Beziehung zwischen dem projektiven Raum und der Graßmann-Mannigfaltigkeit ist evident: Ein Element von $M_{1,n+1}(\mathbb{R})$ ist ein Vektor $A = (x^0, x^1, \dots, x^n)$. Da

die α -te Untermatrix A_α von A eine Zahl x^α ist, wird die Bedingung $\det A_\alpha \neq 0$ nun zu $x^\alpha \neq 0$. Der Repräsentant (5.15) ist einfach die inhomogene Koordinate

$$(x^\alpha)^{-1}(x^0, x^1, \dots, x^\alpha, \dots, x^n) = (x^0/x^\alpha, x^1/x^\alpha, \dots, x^\alpha/x^\alpha = 1, \dots, x^n/x^\alpha).$$

◇

Es seien M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ und N eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $\{(V_j, \psi_j)\}$. Eine **Produktmannigfaltigkeit** $M \times N$ ist eine $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $\{(U_i \times V_j, (\varphi_i, \psi_j))\}$. Ein Punkt in $M \times N$ schreibt sich als (p, q) mit $p \in M, q \in N$, und die Koordinatenfunktion (φ_i, ψ_j) ergibt auf (p, q) angewandt $(\varphi_i(p), \psi_j(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$. Sie sollten überprüfen, dass eine Produktmannigfaltigkeit in der Tat die Axiome in Definition 5.1 erfüllt.

Beispiel 5.6. Der Torus T^2 ist eine Produktmannigfaltigkeit von zwei Kreisen: $T^2 = S^1 \times S^1$. Wenn wir den jeweiligen Polarwinkel der beiden Kreise mit $\theta_i \bmod 2\pi$ ($i = 1, 2$) bezeichnen, hat T^2 die Koordinaten (θ_1, θ_2) . Da jeder S^1 in \mathbb{R}^2 eingebettet ist, kann T^2 in \mathbb{R}^4 eingebettet werden. Wir stellen uns den T^2 oft als die Oberfläche eines Doughnuts im \mathbb{R}^3 vor, in diesem Fall müssen wir jedoch unausweichlich die Krümmung der Fläche einführen. Dies ist eine extrinsische Eigenschaft, die von der „Einbettung“ herröhrt. Wenn wir also sagen, dass „ein Torus eine flache Mannigfaltigkeit ist“, beziehen wir uns auf die flache, im \mathbb{R}^4 eingebettete Mannigfaltigkeit. Siehe Definition 5.3 für weitere Einzelheiten.

Wir können auch ein direktes Produkt von n Kreisen betrachten:

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_n.$$

Offensichtlich ist T^n eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Koordinate $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \bmod 2\pi$. Diese lässt sich als ein n -Würfel interpretieren, bei dem gegenüberliegende Seiten identifiziert werden, siehe Abb. 2.4 für den Fall $n = 2$. ◇

5.2 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Die große Bedeutung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten beruht auf der Tatsache, dass wir die gewöhnliche Analysis im \mathbb{R}^n auf sie übertragen können. Glättetheit der Koordinatentransformationen gewährleistet dabei, dass die Ergebnisse unabhängig von den gewählten Koordinaten sind.

5.2.1 Differenzierbare Abbildungen

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung aus einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M in eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit N . Ein Punkt $p \in M$ wird auf einen Punkt $f(p) \in N$

abgebildet: $f : p \mapsto f(p)$, siehe Abb. 5.6. Wir betrachten eine Karte (U, φ) auf M und eine Karte (V, ψ) auf N , wobei $p \in U$ und $f(p) \in V$ ist. Dann hat f die folgende Koordinatendarstellung:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (5.16)$$

Wenn wir $\varphi(p) = \{x^\mu\}$ und $\psi(f(p)) = \{y^\alpha\}$ schreiben, ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ nur die übliche vektorwertige Funktion $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ von m Variablen. Manchmal gebrauchen (eigentlich missbrauchen!) wir die Notation $y = f(x)$ oder $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$, wenn wir wissen, welche Koordinatensysteme auf M und N verwendet werden. Wenn $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ – oder einfach $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$ – in Bezug auf jedes $x^\mu C^\infty$ ist, sagt man, dass f **differenzierbar** an der Stelle p bzw. bei $x = \varphi(p)$ ist. Differenzierbare Abbildungen nennt man auch **glatt**. Beachten Sie, dass wir unendliche (C^∞) Differenzierbarkeit fordern, in Einklang mit der Glattheit der Übergangsfunktionen ψ_{ij} .

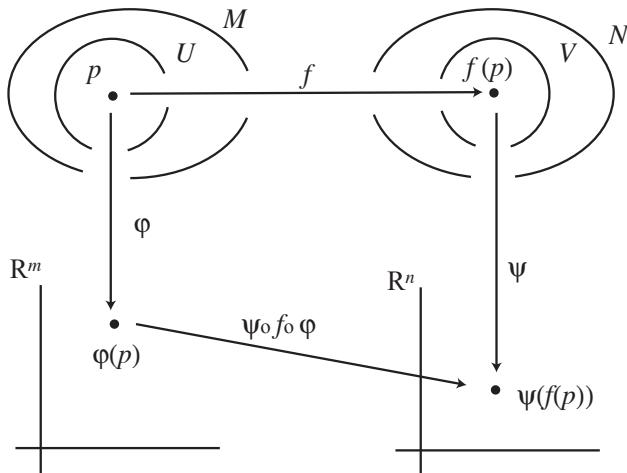


Abb. 5.6. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ hat eine Koordinatendarstellung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Die Differenzierbarkeit von f ist unabhängig vom Koordinatensystem. Wir betrachten zwei sich überlappende Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) und einen Punkt $p \in U_1 \cap U_2$, der mit φ_1 die Koordinate $\{x_1^\mu\}$ und mit φ_2 die Koordinate $\{x_2^\nu\}$ hat. In Abhängigkeit von $\{x_1^\mu\}$ nimmt f die Form $\psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ an, in $\{x_2^\nu\}$ entsprechend $\psi \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$. Definitionsgemäß ist $\psi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} C^\infty$. In den einfacheren Ausdrücken korrespondieren sie mit $y = f(x_1)$ und $y = f(x_1(x_2))$. Es ist klar, dass, wenn $f(x_1) C^\infty$ bezüglich x_1^μ ist und $x_1(x_2) C^\infty$ ist in Bezug auf x_2^ν ist, ebenso $y = f(x_1(x_2)) C^\infty$ in Bezug auf x_2^ν ist.

Übung 5.2 Zeigen Sie, dass die Differenzierbarkeit von f auch unabhängig von der Karte in N ist.

Definition 5.2. Seien $f : M \rightarrow N$ ein Homöomorphismus und ψ und φ Koordinatenfunktionen wie oben definiert. Wenn $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ invertierbar ist (d. h., wenn eine Abbildung $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ existiert) und sowohl $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ als auch $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$ C^∞ sind, wird f ein **Diffeomorphismus** genannt, und man sagt, dass M und N zueinander **diffeomorph** sind, geschrieben $M \equiv N$.

Offensichtlich ist $\dim M = \dim N$, wenn $M \equiv N$ ist. In Kapitel 2 haben wir angemerkt, dass Homöomorphismen Räume klassifizieren – je nachdem, ob es möglich ist, einen Raum *stetig* in einen anderen zu deformieren. Diffeomorphismen klassifizieren Räume in Äquivalenzklassen gemäß der Möglichkeit, Räume *glatt* ineinander zu verformen. Zwei diffeomorphe Räume werden als dieselbe Mannigfaltigkeit angesehen. Natürlich ist ein Diffeomorphismus auch ein Homöomorphismus. Wie sieht es mit der umgekehrten Richtung aus – ist ein Homöomorphismus ein Diffeomorphismus? Im vorigen Abschnitt haben wir die differenzierbare Struktur als eine Äquivalenzklasse von Atlanten definiert. Kann derselbe topologische Raum verschiedene differenzierbare Strukturen haben? Es ist ziemlich schwierig, Beispiele anzugeben für „diffeomorph, aber nicht homöomorph“, da man weiß, dass dies nur in höherdimensionalen Räumen auftreten kann ($\dim M \geq 4$). Bis 1956 glaubte man, dass ein topologischer Raum nur eine einzige differenzierbare Struktur zulässt. Dann wies jedoch Milnor (1956) darauf hin, dass die S^7 28 differenzierbare Strukturen erlaubt. Später kam die verblüffende Entdeckung, dass bereits der \mathbb{R}^4 eine unendliche Anzahl von differenzierbaren Strukturen gestattet. Wenn Sie sich hierfür näher interessieren, konsultieren Sie Donaldson (1983) oder Freed und Uhlenbeck (1984). An dieser Stelle werden wir der Einfachheit halber annehmen, dass eine Mannigfaltigkeit nur eine einzige differenzierbare Struktur hat.

Die Menge der Diffeomorphismen $f : M \rightarrow M$ ist eine Gruppe mit dem Namen $\text{Diff}(M)$. Wir betrachten einen Punkt p in einer Karte (U, φ) , sodass $\varphi(p) = x^\mu(p)$ ist. Unter $f \in \text{Diff}(M)$ wird p auf $f(p)$ abgebildet, das die Koordinaten $\varphi(f(p)) = y^\mu(f(p))$ hat (wir haben angenommen, dass $f(p) \in U$ ist). Sicherlich ist y eine differenzierbare Funktion von x ; dies ist eine *aktive* Sichtweise der Koordinatentransformation. Wenn hingegen (U, φ) und (V, ψ) sich überlappende Karten sind, gibt es zwei Koordinatenwerte $x^\mu = \varphi(p)$ und $y^\mu = \psi(p)$ für einen Punkt $p \in U \cap V$. Die Abbildung $x \mapsto y$ ist differenzierbar aufgrund der angenommenen Glattheit der Mannigfaltigkeit; diese Reparametrisierung ist eine *passive* Sichtweise der Koordinatentransformation. Wir bezeichnen die Gruppe der Reparametrisierungen ebenfalls mit $\text{Diff}(M)$.

Nun wollen wir uns spezielle Klassen von Abbildungen vornehmen, nämlich **Kurven** und **Funktionen**. Eine offene Kurve in einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung $c : (a, b) \rightarrow M$, bei der (a, b) ein offenes Intervall ist, sodass $a < 0 < b$ ist. Wir nehmen an, dass die Kurve sich nicht selbst schneidet (Abb. 5.7). Die Zahl $a(b)$ kann auch $-\infty (+\infty)$ sein, und wir haben die 0 in das Intervall eingeschlossen, was sich später als hilfreich erweisen wird. Wenn eine Kurve abgeschlossen ist, kann man sie als eine Abbildung $c : S^1 \rightarrow M$ ansehen. In beiden Fällen ist c lokal eine Abbildung aus einem offenen Intervall nach M . Auf einer Karte (U, φ) hat eine Kurve $c(t)$ die Koordinatendarstellung $x = \varphi \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

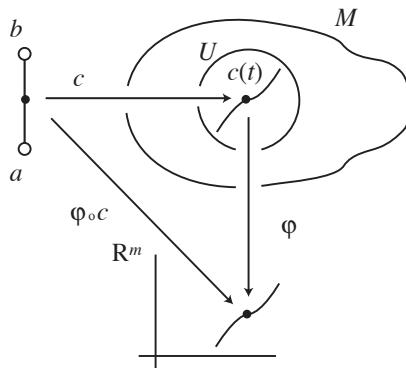


Abb. 5.7. Eine Kurve c in M und ihre Koordinatendarstellung $\varphi \circ c$.

Eine Funktion f auf M ist eine glatte Abbildung von M nach \mathbb{R} , siehe Abb. 5.8. Auf einer Karte (U, φ) ist die Koordinatendarstellung von f durch $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, was eine reellwertige Funktion von m Variablen ist. Wir bezeichnen die Menge der glatten Funktionen auf M als $\mathcal{F}(M)$.

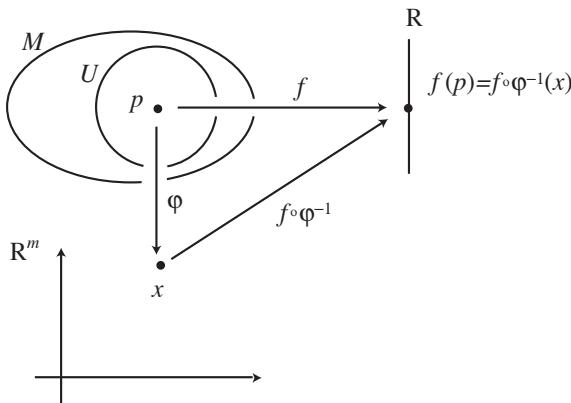


Abb. 5.8. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und ihre Koordinatendarstellung $f \circ \varphi^{-1}$.

5.2.2 Vektoren

Nachdem wir jetzt Abbildungen auf einer Mannigfaltigkeit definiert haben, sind wir so weit, dass wir andere geometrische Objekte definieren können: Vektoren, duale Vektoren und Tensoren. Im Allgemeinen funktioniert die elementare Vorstellung von einem Vektor als Pfeil vom Ursprung zu einem Punkt in Mannigfaltigkeiten nicht. – Wo ist der Ursprung? Was ist ein gerader Pfeil? Wie definieren wir einen

geraden Pfeil, der auf der *Oberfläche* der Erde Hamburg und Shanghai verbindet? – Auf einer Mannigfaltigkeit wird ein Vektor als ein **Tangentialvektor** an eine Kurve in M definiert.

Zunächst einmal sehen wir uns eine Tangente, d. h. eine zu einer Kurve in der xy -Ebene tangentiale Gerade an. Wenn die Kurve differenzierbar ist, können wir sie in der Nähe von x_0 durch

$$y - y(x_0) = a(x - x_0) \quad (5.17)$$

approximieren, mit $a = dy/dx|_{x=x_0}$. Die Tangentialvektoren auf einer Mannigfaltigkeit M verallgemeinern den Begriff der Tangente. Um einen Tangentialvektor zu definieren, brauchen wir eine Kurve $c : (a, b) \rightarrow M$ und eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei (a, b) ein offenes Intervall ist, welches $t = 0$ enthält, siehe Abb. 5.9. Wir definieren den Tangentialvektor an der Stelle $c(0)$ als eine Richtungsableitung einer Funktion $f(c(t))$ entlang der Kurve $c(t)$ an der Stelle $t = 0$. Die Steigung von $f(c(t))$ an der Stelle $t = 0$ auf der Kurve ist

$$\frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (5.18)$$

In Abhängigkeit von der lokalen Koordinate wird daraus²

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (5.19)$$

Mit anderen Worten: Wir erhalten $df(c(t))/dt$ an der Stelle $t = 0$ durch Anwenden des Differentialoperators X auf f , wobei gilt:

$$X = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right), \quad \left(X^\mu = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} \right), \quad (5.20)$$

also

$$\frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} = X^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \equiv X[f]. \quad (5.21)$$

Hierbei definiert die letzte Gleichung $X[f]$. Wir definieren jetzt $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$ als den Tangentialvektor an M an der Stelle $p = c(0)$ entlang der durch die Kurve $c(t)$ vorgegebenen Richtung.

Beispiel 5.7. Wenn X auf die Koordinatenfunktionen $\varphi(c(t)) = x^\mu(t)$ angewendet wird, gilt

$$X[x^\mu] = \left(\frac{dx^\nu}{dt} \right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \frac{dx^\mu(t)}{dt} \Big|_{t=0},$$

was wir als μ -te Komponente des Geschwindigkeitsvektors interpretieren können, wenn t als Zeit aufgefasst wird. \diamond

² Beachten Sie die nicht ganz korrekte Notation: Der Ausdruck $\partial f / \partial x^\mu$ bedeutet in Wirklichkeit $\partial(f \circ \varphi^{-1}(x)) / \partial x^\mu$.

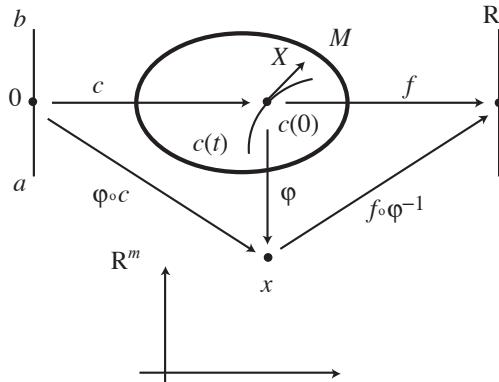


Abb. 5.9. Eine Kurve c und eine Funktion f definieren mithilfe der Richtungsableitung einen Tangentialvektor entlang der Kurve.

Um uns etwas mathematischer auszudrücken, führen wir eine Äquivalenzklasse von Kurven in M ein. Wenn zwei Kurven $c_1(t)$ und $c_2(t)$ die Bedingungen

$$(i) \quad c_1(0) = c_2(0) = p \quad \text{und}$$

$$(ii) \quad \left. \frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(c_2(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

erfüllen, ergeben $c_1(t)$ und $c_2(t)$ denselben Differentialoperator X an der Stelle p , in welchem Fall wir definieren, dass $c_1(t) \sim c_2(t)$ ist. Offenkundig ist \sim eine Äquivalenzrelation und definiert die Äquivalenzklassen. Wir identifizieren den *Tangentialvektor* X mit der *Äquivalenzklasse von Kurven*

$$[c(t)] = \left\{ \tilde{c}(t) \mid \tilde{c}(0) = c(0) \text{ und } \left. \frac{dx^\mu(\tilde{c}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \right\} \quad (5.22)$$

und nicht mit einer Kurve selbst.

Alle Äquivalenzklassen von Kurven an der Stelle $p \in M$, d. h. alle Tangentialvektoren bei p , bilden einen Vektorraum, den man den **Tangentialraum** von M bei p nennt, geschrieben $T_p M$. Um $T_p M$ zu untersuchen, können wir auf die Theorie der Vektorräume zurückgreifen, die wir in Abschnitt 2.2 entwickelt haben. Offensichtlich sind die $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ($1 \leq \mu \leq m$) die Basisvektoren von $T_p M$, siehe (5.20), und es ist $\dim T_p M = \dim M$. Die Basis $\{e_\mu\}$ heißt **Koordinatenbasis**. Wenn ein Vektor $V \in T_p M$ sich als $V = V^\mu e_\mu$ schreiben lässt, werden die Zahlen V^μ die Komponenten von V bezüglich e_μ genannt. Durch die Konstruktion ist klar, dass ein Vektor X existiert, ohne dass seine Koordinate spezifiziert werden müsste, siehe (5.21). Das Zuweisen der Koordinate dient nur unserer Bequemlichkeit. Diese Koordinatenunabhängigkeit eines Vektors erlaubt es uns, das Transformationsverhalten der *Komponenten* eines Vektors zu bestimmen. Seien $p \in U_i \cap U_j$ und $x = \varphi_i(p), y = \varphi_j(p)$.

Wir haben nun zwei Ausdrücke für $X \in T_p M$:

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{X}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}.$$

Dies zeigt, dass X^μ und \tilde{X}^μ miteinander über

$$\tilde{X}^\mu = X^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \quad (5.23)$$

zusammenhängen. Beachten Sie auch hier, dass die Komponenten des Vektors sich so transformieren, dass der Vektor selbst invariant bleibt.

Die Basis von $T_p M$ muss nicht $\{e_\mu\}$ sein, wir können auch jede beliebige Linear-kombination $\hat{e}_i \equiv A_i^\mu e_\mu$ mit $A = (A_i^\mu) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ wählen. Die Basis $\{\hat{e}_i\}$ nennt man eine **Nichtkoordinatenbasis**.

5.2.3 1-Formen

Da $T_p M$ ein Vektorraum ist, gibt es einen zu $T_p M$ dualen Vektorraum, dessen Elemente lineare Funktion von $T_p M$ nach \mathbb{R} sind, siehe Abschnitt 2.2. Der Dualraum wird manchmal auch **Kotangentialraum** bei p genannt und mit $T_p^* M$ bezeichnet. Ein Element $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ von $T_p^* M$ heißt **dualer Vektor, Kovektor, Kotangentialvektor** oder, im Zusammenhang mit Differentialformen, auch **1-Form**. Das einfachste Beispiel einer 1-Form ist das Differential df einer Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$. Die Wirkung eines Vektors V auf f ist $V[f] = V^\mu \partial f / \partial x^\mu \in \mathbb{R}$; die Wirkung $df \in T_p^* M$ auf $V \in T_p M$ wird dann definiert als

$$\langle df, V \rangle \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}. \quad (5.24)$$

Dabei ist $\langle df, V \rangle$ natürlich \mathbb{R} -linear sowohl in V als auch in f .

Wenn wir beachten, dass df sich mit der Koordinate $x = \varphi(p)$ als $df = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$ ausdrücken lässt, ist es nur natürlich, die $\{dx^\mu\}$ als Basis von $T_p^* M$ anzusehen. Darüber hinaus ist dies auch eine duale Basis, denn es gilt

$$\left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu. \quad (5.25)$$

Eine beliebige 1-Form ω schreibt sich als

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu, \quad (5.26)$$

mit den ω_μ als Komponenten von ω . Wir betrachten einen Vektor $V = V^\mu \partial / \partial x^\mu$ und eine 1-Form $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. Das **innere Produkt** $\langle , \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\mu V^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu V^\mu \quad (5.27)$$

definiert. Beachten Sie, dass das innere Produkt zwischen einem Vektor und einem dualen Vektor und nicht zwischen zwei Vektoren oder zwei dualen Vektoren definiert ist!

Da ω ohne Bezug auf irgendein Koordinatensystem definiert wird, gilt für einen Punkt $p \in U_i \cap U_j$:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\nu dy^\nu,$$

mit $x = \varphi_i(p)$ und $y = \varphi_j(p)$. Aus $dy^\nu = (\partial y^\nu / \partial x^\mu) dx^\mu$ erhalten wir

$$\tilde{\omega}_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \quad (5.28)$$

5.2.4 Tensoren

Ein **Tensor** vom Typ (q, r) ist ein multilinear Objekt, das q Elemente von T_p^*M und r Elemente von T_pM auf eine reelle Zahl abbildet. $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ bezeichnet die Menge der Tensoren vom Typ (q, r) an der Stelle $p \in M$. Ein Element von $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ schreibt sich in den oben beschriebenen Basen als

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_r}. \quad (5.29)$$

Logischerweise ist dies eine lineare Funktion von

$$\bigotimes^q T_p^*M \otimes^r T_pM$$

nach \mathbb{R} . Seien $V_i = V_i^\mu \partial / \partial x^\mu$ ($1 \leq i \leq r$) und $\omega_i = \omega_{i\mu} dx^\mu$ ($1 \leq i \leq q$). Das Anwenden von T auf die V_i und die ω_i ergibt eine Zahl

$$T(\omega_1, \dots, \omega_q; V_1, \dots, V_r) = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \omega_{1\mu_1} \dots \omega_{q\mu_q} V_1^{\nu_1} \dots V_r^{\nu_r}.$$

In der hier gewählten Notation hat das innere Produkt die Form $\langle \omega, X \rangle = \omega(X)$.

5.2.5 Tensorfelder

Wenn jedem Punkt von M ein Vektor *glatt* zugewiesen wird, spricht man von einem **Vektorfeld** über M . In anderen Worten: V ist ein Vektorfeld, wenn $V[f] \in \mathcal{F}(M)$ für alle $f \in \mathcal{F}(M)$ ist. Natürlich ist jede Komponente eines Vektorfelds eine glatte Funktion von M nach \mathbb{R} . Die Menge der Vektorfelder auf M wird als $\mathcal{X}(M)$ bezeichnet. Ein Vektorfeld X an der Stelle $p \in M$ bezeichnen wir als $X|_p$, es ist ein Element von T_pM . Ähnlich definieren wir ein **Tensorfeld** vom Typ (q, r) durch die glatte Zuweisung eines Elements von $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ zu jedem Punkt $p \in M$. Die Menge der Tensorfelder vom Typ (q, r) auf M wird als $\mathcal{T}_r^q(M)$ bezeichnet. Beispielsweise ist $\mathcal{T}_1^0(M)$ die Menge der dualen Vektorfelder, welche im Kontext der Differentialformen auch als $\Omega^1(M)$ bezeichnet wird, siehe Abschnitt 5.4. Entsprechend schreibt man für $\mathcal{T}_0^0(M) = \mathcal{F}(M)$ im selben Zusammenhang auch $\Omega^0(M)$.

5.2.6 Induzierte Abbildungen

Eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ induziert auf natürliche Weise eine Abbildung f_* , genannt **Differentialabbildung** (Abb. 5.10):

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N. \quad (5.30)$$

Die explizite Form von f_* erhält man aus der Definition des Tangentialvektors als Richtungsableitung entlang einer Kurve. Wenn $g \in \mathcal{F}(N)$ ist, dann ist $g \circ f \in \mathcal{F}(M)$. Ein Vektor $V \in T_p M$ wirkt auf $g \circ f$, indem er eine Zahl $V[g \circ f]$ ergibt. Jetzt definieren wir $f_* V \in T_{f(p)} N$ durch

$$(f_* V)[g] \equiv V[g \circ f] \quad (5.31)$$

oder, mit den Karten (U, φ) auf M und (V, ψ) auf N , durch

$$(f_* V)[g \circ \psi^{-1}(y)] \equiv V[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)], \quad (5.32)$$

mit $x = \varphi(p)$ und $y = \psi(f(p))$. Seien $V = V^\mu \partial/\partial x^\mu$ und $f_* V = W^\alpha \partial/\partial y^\alpha$. Dann ergibt (5.32)

$$W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [g \circ \psi^{-1}(y)] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)].$$

Wenn wir $g = y^\alpha$ setzen, erhalten wir die Relation zwischen W^α und V^μ :

$$W^\alpha = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y^\alpha(x). \quad (5.33)$$

Beachten Sie, dass die Matrix $(\partial y^\alpha / \partial x^\mu)$ nichts anderes ist als die Jacobi-Matrix der Abbildung $f : M \rightarrow N$. Die Differentialabbildung f_* lässt auf natürliche Weise auf Tensoren vom Typ $(q, 0)$ erweitern, nämlich gemäß $f_* : \mathcal{T}_{0,p}^q(M) \rightarrow \mathcal{T}_{0,f(p)}^q(N)$.

Beispiel 5.8. Es seien (x^1, x^2) und (y^1, y^2, y^3) Koordinaten in M bzw. N sowie $V = a\partial/\partial x^1 + b\partial/\partial x^2$ ein Tangentialvektor bei (x^1, x^2) . Sei dazu $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung

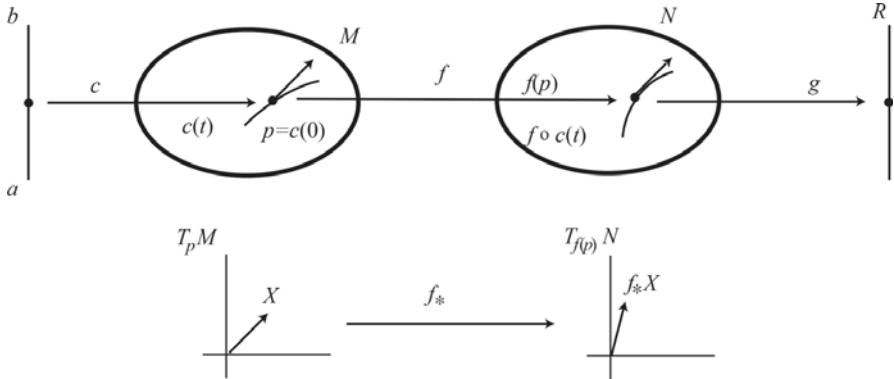


Abb. 5.10. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ induziert die Differentialabbildung $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$.

mit der Koordinatendarstellung $y = (x^1, x^2, \sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2})$. Dann ist

$$f_* V = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = a \frac{\partial}{\partial y^1} + b \frac{\partial}{\partial y^2} - \left(a \frac{y^1}{y^3} + b \frac{y^2}{y^3} \right) \frac{\partial}{\partial y^3}.$$

◊

Übung 5.3 Es seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$. Zeigen Sie: Die Differentialabbildung der verketteten Abbildung $g \circ f : M \rightarrow P$ ist

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*. \quad (5.34)$$

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ induziert auch eine Abbildung

$$f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M. \quad (5.35)$$

Beachten Sie, dass f_* in dieselbe Richtung geht wie f , während f^* zurückgeht, daher der Name **Rücktransport** (engl. pullback), siehe Abschnitt 2.2. Wenn wir $V \in T_p M$ und $\omega \in T_{f(p)}^* N$ nehmen, ist der Rücktransport von ω durch f^* als

$$\langle f^* \omega, V \rangle = \langle \omega, f_* V \rangle. \quad (5.36)$$

definiert. Der Rücktransport f^* wird auf natürliche Weise auf Tensoren vom Typ $(0, r)$ erweitert: $f^* : \mathcal{T}_{r, f(p)}^0(N) \rightarrow \mathcal{T}_{r, p}^0(M)$. Die Komponentenform von f^* ist durch die Jacobi-Matrix $(\partial y^\alpha / \partial x^\mu)$ gegeben, siehe Übung 5.4.

Übung 5.4 Es sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie: Für $\omega = \omega_\alpha dy^\alpha \in T_{f(p)}^* N$ hat die induzierte 1-Form $f^* \omega = \xi_\mu dx^\mu \in T_p^* M$ die Komponenten

$$\xi_\mu = \omega_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (5.37)$$

Übung 5.5 Seien f und g gegeben wie in Übung 5.3. Zeigen Sie: Der Rücktransport der verketteten Abbildung $g \circ f$ ist

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*. \quad (5.38)$$

Es gibt keine natürliche Erweiterung der induzierten Abbildung für einen Tensor von gemischem Typ. Diese Erweiterung ist nur möglich, wenn $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist, da dann die Jacobi-Matrix von f^{-1} ebenfalls definiert ist.

Übung 5.6 Es seien

$$T^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dx^\nu$$

ein Tensorfeld vom Typ $(1, 1)$ auf M und $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass der induzierte Tensor auf N

$$f_* \left(T^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dx^\nu \right) = T^\mu{}_\nu \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \otimes dy^\beta$$

ist, wobei x^μ und y^α lokale Koordinaten in M bzw. N sind.

5.2.7 Untermannigfaltigkeiten

Bevor wir diesen Abschnitt abschließen, definieren wir noch die Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit. Dabei machen wir auch den Begriff der Einbettung noch etwas klarer.

Definition 5.3. (Immersion, Untermannigfaltigkeit, Einbettung) Es seien $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $\dim M \leq \dim N$.

- (a) Die Abbildung f heißt **Immersion** von M in N , wenn $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ injektiv ist, also gilt: $\text{rang } f_* = \dim M$.
- (b) Die Abbildung f heißt **Einbettung**, wenn f injektiv und eine Immersion ist. Das Bild $f(M)$ heißt **Untermannigfaltigkeit** von N . (In der Praxis ist das so definierte $f(M)$ diffeomorph zu M .)

Wenn f eine Immersion ist, bildet $f^* T_p M$ isomorph auf einen m -dimensionalen Untervektorraum von $T_{f(p)} N$ ab, wegen $\text{rang } f_* = \dim M$. Aus Satz 2.1 finden wir auch, dass $\ker f_* = \{0\}$ ist. Wenn f eine Einbettung ist, ist M diffeomorph zu $f(M)$. Beispiele mögen diese ziemlich technischen Punkte erhellen. Wir betrachten die Abbildung $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in Abb. 5.11(a). Dies ist eine Immersion, da ein eindimensionaler Tangentialraum von S^1 durch f_* auf einen Unterraum von $T_{f(p)} \mathbb{R}^2$ abgebildet wird. Das Bild $f(S^1)$ ist keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 , da f keine Injektion ist. Die Abbildung $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in Abb. 5.11(b) ist eine Einbettung und $g(S^1)$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 . Offensichtlich ist eine Einbettung eine Immersion, während die Umkehrung dieser Aussage nicht immer wahr sein muss. Im vorigen Abschnitt haben wir gelegentlich die Einbettung der S^n in den \mathbb{R}^{n+1} erwähnt. Nun wird klarer, was damit gemeint war: Wenn S^n durch $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet wird, ist die S^n diffeomorph zu $f(S^n)$.

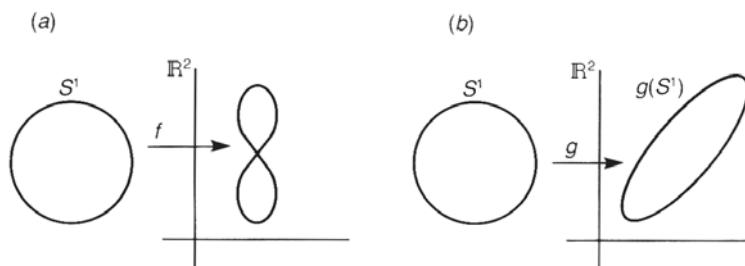


Abb. 5.11. (a) Eine Immersion f , die keine Einbettung ist. (b) Eine Einbettung g und die Untermannigfaltigkeit $g(S^1)$.

5.3 Flüsse und Lie-Ableitungen

Sei X ein Vektorfeld in M . Eine Integralkurve $x(t)$ von X ist eine Kurve in M , deren Tangentialvektor an $x(t)$ gleich $X|_x$ ist. Für eine gegebene Karte (U, φ) bedeutet dies

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu(x(t)), \quad (5.39)$$

dabei sind $x^\mu(t)$ die μ -te Komponente von $\varphi(x(t))$ und $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$. Beachten Sie die nicht ganz eindeutige Notation: x bezeichnet sowohl einen Punkt in M als auch dessen Koordinate. (Für spätere Zwecke nehmen wir an, dass der Punkt $x(0)$ sich in U befindet.) Anders ausgedrückt ist das Auffinden der Integralkurve eines Vektorfelds X äquivalent zum Lösen des autonomen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGL) in Gleichung (5.39). Die Anfangsbedingung $x_0^\mu = x^\mu(0)$ entspricht der Koordinate einer Integralkurve bei $t = 0$. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf garantiert, dass es für die Anfangsbedingung x_0^μ zumindest lokal eine eindeutige Lösung von (5.39) gibt. Es kann vorkommen, dass die Integralkurve nur auf einer Teilmenge von \mathbb{R} definiert ist; in diesem Fall müssen wir darauf achten, dass der Parameter t nicht das vorgegebene Intervall verlässt. Im Folgenden nehmen wir an, dass t maximal ausgedehnt ist. Es ist bekannt, dass die Integralkurve für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert, wenn M eine kompakte Mannigfaltigkeit ist.

Sei jetzt $\sigma(t, x_0)$ eine Integralkurve von X , die einen Punkt x_0 bei $t = 0$ passiert, und wir bezeichnen die Koordinate mit $\sigma^\mu(t, x_0)$. Gleichung (5.39) wird dann zu

$$\frac{d}{dt} \sigma^\mu(t, x_0) = X^\mu(\sigma(t, x_0)) \quad (5.40a)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu. \quad (5.40b)$$

Die Abbildung $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ nennt man den von $X \in \mathfrak{X}(M)$ erzeugten **Fluss**. Ein Fluss gehorcht für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ der Regel

$$\sigma(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = \sigma(t + s, x_0), \quad (5.41)$$

sodass beide Seiten von (5.41) sinnvoll sind. Dies sieht man aus der Eindeutigkeit gewöhnlicher DGL. In der Tat bemerken wir

$$\frac{d}{dt} \sigma^\mu(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = X^\mu(\sigma(t, \sigma^\mu(s, x_0))), \quad \sigma(0, \sigma(s, x_0)) = \sigma(s, x_0)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma^\mu(t + s, x_0) &= \frac{d}{d(t+s)} \sigma^\mu(t + s, x_0) = X^\mu(\sigma(t + s, x_0)), \\ \sigma(0 + s, x_0) &= \sigma(s, x_0). \end{aligned}$$

Damit erfüllen beide Seiten von (5.41) dieselbe gewöhnliche DGL mit derselben Anfangsbedingung. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung sollten sie also gleich sein. Wir haben damit den folgenden Satz erhalten:

Satz 5.1. Für jeden Punkt $x \in M$ existiert eine differenzierbare Abbildung $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, sodass gilt:³

- (i) $\sigma(0, x) = x$,
- (ii) $t \mapsto \sigma(t, x)$ ist eine Lösung von (5.40a) und (5.40b),
- (iii) $\sigma(t, \sigma^\mu(s, x)) = \sigma(t + s, x)$.

Wir können uns einen Fluss als eine (stationäre) Strömung vorstellen. Wenn ein Teilchen bei $t = 0$ am Punkt x beobachtet wird, wird es zu einer späteren Zeit t an der Stelle $\sigma(t, x)$ gefunden werden.

Beispiel 5.9. Seien $M = \mathbb{R}^2$ und $X((x, y)) = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ ein Vektorfeld in M . Man sieht leicht, dass

$$\sigma(t, (x, y)) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$$

ein von X erzeugter Fluss ist. Der Fluss durch (x, y) ist ein Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung. Natürlich ist $\sigma(t, (x, y)) = (x, y)$, wenn $t = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) ist. Für $(x, y) = (0, 0)$ bleibt der Fluss bei $(0, 0)$. \diamond

Übung 5.7 Es seien $M = \mathbb{R}^2$ und $X = y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ ein Vektorfeld in M . Ermitteln Sie den von X erzeugten Fluss.

5.3.1 Einparametrische Transformationsgruppe

Für festes $t \in \mathbb{R}$ ist ein Fluss $\sigma(t, x)$ ein Diffeomorphismus von M nach M , wir schreiben $\sigma_t : M \rightarrow M$. Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass man σ_t mit den folgenden Regeln zu einer *kommutativen Gruppe* machen kann:

- (i) $\sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x)$, d. h., $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s}$,
- (ii) σ_0 = identische Abbildung (neutrales Element),
- (iii) $\sigma_{-t} = (\sigma_t)^{-1}$.

Diese Gruppe wird **einparametrische Transformationsgruppe** genannt. Die Gruppe sieht lokal wie die additive Gruppe \mathbb{R} aus, obwohl sie nicht global isomorph zu \mathbb{R} sein muss. In der Tat war in Beispiel 5.9 $\sigma_{2\pi n+t}$ dieselbe Abbildung wie σ_t , und wir stellen fest, dass die einparametrische Gruppe isomorph zu $\text{SO}(2)$ ist, der multiplika-

³ Beachten Sie: Wir nennen den Anfangspunkt x und nicht x_0 , um zu betonen, dass σ eine Abbildung $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ist.

tiven Gruppe von reellen (2×2) -Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

oder zur multiplikativen Gruppe $U(1)$ der komplexen Zahlen $e^{i\theta}$ mit Betrag eins.

Bei Anwendung von σ_ε , mit infinitesimalem ε , ermitteln wir aus (5.40a) und (5.40b), dass ein Punkt x mit der Koordinate x^μ auf

$$\sigma_\varepsilon^\mu(x) = \sigma^\mu(\varepsilon, x) = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x) \quad (5.42)$$

abgebildet wird. Das Vektorfeld X heißt in diesem Kontext **infinitesimaler Erzeuger** der Transformation σ_t .

Zu einem gegebenen Vektorfeld X kann man den korrespondierenden Fluss σ als eine „**Exponentialisierung**“ von X auffassen. Man schreibt

$$\sigma^\mu(t, x) = \exp(tX)x^\mu. \quad (5.43)$$

Die Formulierung „Exponentialisierung“ rechtfertigt sich durch die folgende Überlegung: Betrachten wir einen Parameter t und bestimmen wir die Koordinate eines Punkts, der vom Ausgangspunkt $x = \sigma(0, x)$ durch den Parameterabstand t entlang des Flusses σ getrennt ist. Die dem Punkt $\sigma(t, x)$ entsprechende Koordinate ist

$$\begin{aligned} \sigma^\mu(t, x) &= x^\mu + t \frac{d}{ds} \sigma^\mu(s, x) \Big|_{s=0} + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 \sigma^\mu(s, x) \Big|_{s=0} + \dots \\ &= \left[1 + t \frac{d}{ds} + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 + \dots \right] \sigma^\mu(s, x) \Big|_{s=0} \\ &\equiv \exp \left(t \frac{d}{ds} \right) \sigma^\mu(s, x) \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Der letzte Ausdruck lässt sich auch als $\sigma^\mu(t, x) = \exp(tX)x^\mu$ schreiben, wie in Gleichung (5.43). Der Fluss σ hat die folgenden Eigenschaften einer Exponentialfunktion:

$$(i) \quad \sigma(0, x) = x = \exp(0X)x \quad (5.45a)$$

$$(ii) \quad \frac{d\sigma(t, x)}{dt} = X \exp(tX)x = \frac{d}{dt} [\exp(tX)x] \quad (5.45b)$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad \sigma(t, \sigma(s, x)) &= \sigma(t, \exp(sX)x) = \exp(tX)\exp(sX)x \\ &= \exp((t+s)X)x = \sigma(t+s, x). \end{aligned} \quad (5.45c)$$

5.3.2 Lie-Ableitungen

Seien $\sigma(t, x)$ und $\tau(t, x)$ zwei Flüsse, die von den Vektorfeldern X und Y erzeugt werden:

$$\frac{d\sigma^\mu(s, x)}{ds} = X^\mu(\sigma(s, x)), \quad (5.46a)$$

$$\frac{d\tau^\mu(t, x)}{dt} = Y^\mu(\tau(t, x)). \quad (5.46b)$$

Untersuchen wir, wie sich das Vektorfeld Y entlang $\sigma(s, x)$ verändert. Hierfür müssen wir den Vektor Y am Punkt x mit einem Vektor an einem benachbarten Punkt $x' = \sigma_\varepsilon(x)$ vergleichen, siehe Abb. 5.12. Wir können jedoch nicht einfach die Differenz zwischen den Komponenten von Y an den beiden Punkten bilden, da sie zu unterschiedlichen Tangentialräumen $T_p M$ und $T_{\sigma_\varepsilon(x)} M$ gehören; die naive Differenz zwischen Vektoren an verschiedenen Punkten ist nicht wohldefiniert. Um auf eine sinnvolle Weise eine Ableitung definieren zu können, bilden wir zuerst $Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}$ auf $T_x M$ ab, mittels $(\sigma_{-\varepsilon})_* : T_{\sigma_\varepsilon(x)} M \rightarrow T_x M$. Danach bilden wir die Differenz der beiden Vektoren $(\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}$ und $Y|_x$, welche beide Elemente von $T_x M$ sind. Die **Lie-Ableitung** eines Vektorfeldes Y entlang des Flusses σ von X wird dann definiert durch

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} - Y|_x]. \quad (5.47)$$

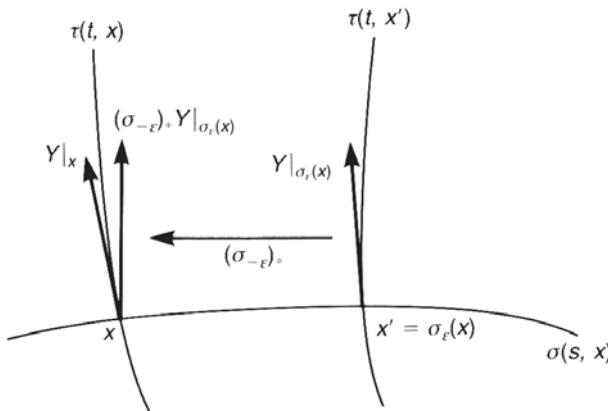


Abb. 5.12. Um einen Vektor $Y|_x$ mit $Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}$ zu vergleichen, muss der letztere über die Differentialabbildung $(\sigma_{-\varepsilon})_*$ nach x zurücktransportiert werden.

Übung 5.8 Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_X Y$ sich auch als

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [Y|_x - (\sigma_\varepsilon)_* Y|_{\sigma_{-\varepsilon}(x)}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} - (\sigma_\varepsilon)_* Y|_x]$$

schreiben lässt.

Sei (U, φ) eine Karte mit der Koordinate x und seien $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$ und $Y = Y^\mu \partial/\partial x^\mu$ auf U definierte Vektorfelder. Dann hat $\sigma_\varepsilon(x)$ die Koordinaten $x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$ und

$$Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} = Y^\mu(x^\nu + \varepsilon X^\nu(x))e_\mu|_{x+\varepsilon X} \simeq [Y^\mu(x) + \varepsilon X^\mu(x)\partial_\nu Y^\mu(x)]e_\mu|_{x+\varepsilon X},$$

wobei $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ die Koordinatenbasis ist und $\partial_\nu \equiv \partial/\partial x^\nu$ gilt. Wenn wir diesen bei $\sigma_\varepsilon(x)$ definierten Vektor auf x abbilden, mittels $(\sigma_{-\varepsilon})_*$, erhalten wir

$$\begin{aligned} & [Y^\mu(x) + \varepsilon X^\lambda(x)\partial_\lambda Y^\mu(x)]\partial_\mu[x^\nu - \varepsilon X^\nu(x)]e_\nu|_x \\ &= [Y^\mu(x) + \varepsilon X^\lambda(x)\partial_\lambda Y^\mu(x)][\delta_\mu^\nu - \varepsilon \partial_\mu X^\nu(x)]e_\nu|_x \\ &= Y^\mu(x)e_\mu|_x + \varepsilon[X^\mu(x)\partial_\mu Y^\nu(x) - Y^\mu(x)\partial_\mu X^\nu(x)]e_\nu|_x + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Aus (5.47) und (5.48) ergibt sich

$$\mathcal{L}_X Y = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu)e_\nu. \quad (5.49a)$$

Übung 5.9 Seien $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$ und $Y = Y^\mu \partial/\partial x^\mu$ Vektorfelder in M . Definieren Sie die **Lie-Klammer** $[X, Y]$ durch

$$[X, Y]f = X[Y[f]] - Y[X[f]], \quad (5.50)$$

mit $f \in \mathcal{F}(M)$. Zeigen Sie, dass $[X, Y]$ ein Vektorfeld ist, gegeben durch

$$(X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu)e_\nu.$$

Diese Übung zeigt, dass die Lie-Ableitung von Y entlang X durch

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (5.49b)$$

gegeben ist.⁴

Übung 5.10 Zeigen Sie, dass die Lie-Klammer die folgenden Eigenschaften hat:

(a) Bilinearität:

$$[X, c_1 Y_1 + c_2 Y_2] = c_1 [X, Y_1] + c_2 [X, Y_2], \quad [c_1 X_1 + c_2 X_2, Y] = c_1 [X_1, Y] + c_2 [X_2, Y]$$

für beliebige konstante c_1 und c_2 ,

(b) Schiefsymmetrie:

$$[X, Y] = -[YX],$$

(c) Jacobi-Identität:

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

⁴ Beachten Sie, dass weder XY noch YX Vektorfelder sind, da es sich bei ihnen um zweite Ableitungen handelt. Die Kombination $[X, Y]$ ist hingegen eine erste Ableitung und in der Tat ein Vektorfeld.

Übung 5.11 (a) Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in \mathcal{F}(M)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathcal{L}_{fX}Y = f[X, Y] - Y[f]X, \quad (5.51\text{a})$$

$$\mathcal{L}_X(fY) = f[X, Y] + X[f]Y. \quad (5.51\text{b})$$

(b) Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $f : M \rightarrow N$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]. \quad (5.52)$$

Geometrisch zeigt die Lie-Klammer die Nichtkommutativität von zwei Flüssen. Dies erkennt man leicht mithilfe der folgenden Überlegung: Seien wie zuvor $\sigma(s, x)$ und $\tau(t, x)$ zwei Flüsse, die von den Vektorfeldern X und Y erzeugt werden, siehe Abb. 5.13. Wenn wir uns zuerst entlang dem Fluss σ um eine kleine Parameterdistanz ε bewegen und dann um δ entlang τ , werden wir an den Punkt mit der Koordinate

$$\begin{aligned} \tau^\mu(\delta, \sigma(\varepsilon, x)) &\simeq \tau^\mu(\delta, x^\nu + \varepsilon X^\nu(x)) \\ &\simeq x^\mu + \varepsilon X^\mu(x) + \delta Y^\mu(x^\nu + \varepsilon X^\nu(x)) \\ &\simeq x^\mu + \varepsilon X^\mu(x) + \delta Y^\mu(x) + \varepsilon \delta X^\nu(x) \partial_\nu Y^\mu(x) \end{aligned}$$

gelangen. Bewegen wir uns dagegen zuerst um δ entlang τ und dann um ε entlang σ , kommen wir zu dem Punkt

$$\begin{aligned} \sigma^\mu(\varepsilon, \tau(\delta, x)) &\simeq \sigma^\mu(\varepsilon, x^\nu + \delta Y^\nu(x)) \\ &\simeq x^\mu + \delta Y^\mu(x) + \varepsilon X^\mu(x^\nu + \delta Y^\nu(x)) \\ &\simeq x^\mu + \delta Y^\mu(x) + \varepsilon X^\mu(x) + \varepsilon \delta Y^\nu(x) \partial_\nu X^\mu(x). \end{aligned}$$

Die Differenz zwischen den Koordinaten dieser beiden Punkte ist proportional zur Lie-Klammer

$$\tau^\mu(\delta, \sigma(\varepsilon, x)) - \sigma^\mu(\varepsilon, \tau(\delta, x)) = \varepsilon \delta [X, Y]^\mu.$$

Die Lie-Klammer von X und Y misst sozusagen, wie weit wir danebenliegen, wenn wir das Parallelogramm in Abb. 5.13 zu schließen versuchen. Man sieht leicht, dass $\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = 0$ dann und nur dann gilt, wenn

$$\sigma(s, \tau(t, x)) = \tau(t, \sigma(s, x)) \quad (5.53)$$

ist. Wir können auch die Lie-Ableitung einer 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ entlang $X \in \mathcal{X}(M)$ durch

$$\mathcal{L}_X \omega \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_\varepsilon)^* \omega|_{\sigma_\varepsilon(x)} - \omega|_x] \quad (5.54)$$

definieren. $\omega|_x \in T_x^*M$ ist dabei ω an der Stelle x . Wir setzen $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. Indem wir die vorherige Überlegung in ähnlicher Weise wiederholen, erhalten wir

$$(\sigma_\varepsilon)^* \omega|_{\sigma_\varepsilon(x)} = \omega_\mu(x) dx^\mu + \varepsilon [X^\nu(x) \partial_\nu \omega_\mu(x) + \partial_\mu X^\nu(x) \omega_\nu(x)] dx^\mu,$$

was auf

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \partial_\mu X^\nu \omega_\nu) dx^\mu \quad (5.55)$$

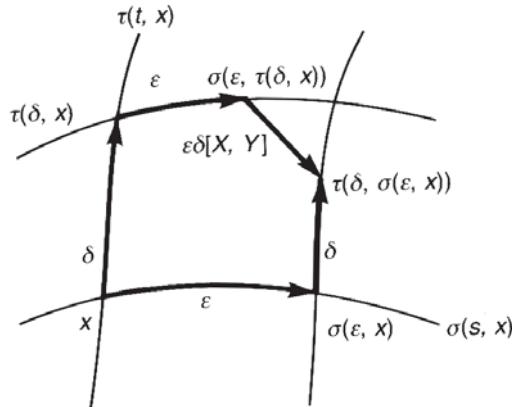


Abb. 5.13. Eine Lie-Klammer $[X, Y]$ misst, wie weit es misslingt, das Parallelogramm zu schließen.

führt. Offensichtlich ist $\mathcal{L}_X \omega \in T_x^*(M)$, da es eine Differenz zweier 1-Formen am selben Punkt x ist.

Die Lie-Ableitung von $f \in \mathcal{F}(M)$ entlang eines vom Vektorfeld X erzeugten Flusses σ_s ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X f &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(\sigma_\varepsilon(x)) - f(x)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)) - f(x^\mu)] \\ &= X^\mu(x) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X[f]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Dies ist die gewöhnliche Richtungsableitung von f entlang X .

Die Lie-Ableitung eines allgemeinen Tensors erhalten wir mit der folgenden Behauptung:

Behauptung 5.1. Die Lie-Ableitung erfüllt die Bedingungen

$$\mathcal{L}_X(t_1 + t_2) = \mathcal{L}_X t_1 + \mathcal{L}_X t_2, \quad (5.57a)$$

wobei t_1 und t_2 Tensorfelder vom selben Typ sind, und

$$\mathcal{L}_X(t_1 \otimes t_2) = (\mathcal{L}_X t_1) \otimes t_2 + t_1 \otimes (\mathcal{L}_X t_2) \quad (5.57b)$$

für zwei Tensorfelder t_1 und t_2 von beliebigem Typ.

Beweis

Gleichung (a) ist offensichtlich. Anstelle des allgemeinen Beweises von Gleichung (b), der voller Indizes steckt, geben wir lieber ein Beispiel, das sich mit Leichtigkeit auf allgemeinere Fälle übertragen lässt. Wir setzen $Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^1(M)$ und

konstruieren das Tensorprodukt $Y \otimes \omega$. Dann wird $(Y \otimes \omega)|_{\sigma_\varepsilon(x)}$ durch $(\sigma_{-\varepsilon})_* \otimes (\sigma_\varepsilon)^*$ auf einen Tensor an der Stelle x abgebildet:

$$[(\sigma_{-\varepsilon})_* \otimes (\sigma_\varepsilon)^*](Y \otimes \omega)|_{\sigma_\varepsilon(x)} = [(\sigma_{-\varepsilon})_* Y \otimes (\sigma_\varepsilon)^* \omega]|_x.$$

Daraus folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(Y \otimes \omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_{-\varepsilon})_* Y \otimes (\sigma_\varepsilon)^* \omega]|_x - (Y \otimes \omega)|_x \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_{-\varepsilon})_* Y \otimes \{(\sigma_\varepsilon)^* \omega - \omega\} + \{(\sigma_{-\varepsilon})_* Y - Y\} \otimes \omega] \\ &= Y \otimes (\mathcal{L}_X \omega) + (\mathcal{L}_X Y) \otimes \omega. \end{aligned}$$

Die Erweiterung auf allgemeinere Fälle liegt auf der Hand. \square

Diese Behauptung erlaubt es uns, die Lie-Ableitung eines allgemeinen Tensorfelds zu berechnen. Sei z. B. $t = t_\mu^\nu dx^\mu \otimes e_\nu \in \mathcal{T}_1^1(M)$. Behauptung 5.1 ergibt

$$\mathcal{L}_X t = X[t_\mu^\nu] dx^\mu \otimes e_\nu + t_\mu^\nu (\mathcal{L}_X dx^\mu) \otimes e_\nu + t_\mu^\nu dx^\mu \otimes (\mathcal{L}_X e_\nu).$$

Übung 5.12 Sei t ein Tensorfeld. Zeigen Sie:

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} t = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y t - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X t. \quad (5.58)$$

5.4 Differentialformen

Bevor wir Differentialformen definieren, untersuchen wir die Symmetrieeigenschaften von Tensoren. Die Symmetrioperation auf einem Tensor $\omega \in \mathcal{T}_{r,p}^0(M)$ ist definiert durch

$$P\omega(V_1, \dots, V_r) \equiv \omega(V_{P(1)}, \dots, V_{P(r)}), \quad (5.59)$$

dabei ist $V_i \in T_p M$ und P ist ein Element von S_r , der **symmetrischen Gruppe** vom Grad r . Wir betrachten die Koordinatenbasis $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$. Die Komponente von ω in dieser Basis ist

$$\omega(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_r}) = \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}.$$

Die Komponente von $P\omega$ erhält man aus (5.59) als

$$P\omega(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_r}) = \omega_{\mu_{P(1)} \mu_{P(2)} \dots \mu_{P(r)}}.$$

Für einen allgemeinen Tensor vom Typ (q, r) werden die Symmetrioperationen für die Indizes q und r separat definiert.

Für $\omega \in \mathcal{T}_{r,p}^0(M)$ wird der **Symmetrisierer** \mathcal{S} definiert durch

$$\mathcal{S}\omega = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} P\omega \quad (5.60)$$

und der **Antisymmetrisierer** \mathcal{A} durch

$$\mathcal{A}\omega = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) P\omega. \quad (5.61)$$

Hier ist für gerade Permutationen $\text{sgn}(P) = +1$ und für ungerade Permutationen $\text{sgn}(P) = -1$. $S\omega$ ist *total symmetrisch*, d. h., $P S\omega = S\omega$ für alle $P \in S_r$, und $\mathcal{A}\omega$ ist *total antisymmetrisch*, d. h., $P\mathcal{A}\omega = \text{sgn}(P)\mathcal{A}\omega$.

5.4.1 Definitionen

Definition 5.4. Eine **Differentialform** vom Grad r bzw. eine **r -Form** ist ein total antisymmetrischer Tensor vom Typ $(0, r)$.

Definieren wir nun das **äußere Produkt** (engl. auch wedge product) \wedge von r 1-Formen durch das total antisymmetrische Tensorprodukt

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge dx^{\mu_{P(2)}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{P(r)}}. \quad (5.62)$$

Beispielsweise sind

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\nu &= dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \\ dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu &= dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu + dx^\nu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\mu \\ &\quad + dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\lambda - dx^\lambda \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu \\ &\quad - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\lambda - dx^\mu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\nu. \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass das äußere Produkt den folgenden Bedingungen genügt:

- (i) $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0$, wenn irgendein Index μ mindestens zweimal auftritt.
- (ii) $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{P(r)}}$.
- (iii) $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ ist in jedem dx^μ linear.

Wenn wir den Vektorraum der r -Formen bei $p \in M$ als $\Omega_p^r(M)$ bezeichnen, bildet die Menge der r -Formen aus (5.62) eine Basis von $\Omega_p^r(M)$, und man kann ein Element $\omega \in \Omega_p^r(M)$ gemäß

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (5.63)$$

entwickeln. Dabei werden die $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}$ *total antisymmetrisch* gewählt, was die Antisymmetrie der Basis widerspiegelt. So werden die Komponenten $\omega_{\mu\nu}$ irgendeines Tensors zweiter Stufe in einen symmetrischen Anteil $\sigma_{\mu\nu}$ und einen antisymmetrischen Anteil $\alpha_{\mu\nu}$ zerlegt:

$$\sigma_{\mu\nu} = \omega_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2} (\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}), \quad (5.64a)$$

$$\alpha_{\mu\nu} = \omega_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2} (\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}). \quad (5.64b)$$

Beachten Sie, dass gilt $\sigma_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$, aber $\alpha_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

Da es in (5.62) $\binom{m}{r}$ Möglichkeiten gibt, die Menge $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ aus $(1, 2, \dots, m)$ auszuwählen, ist die Dimension des Vektorraums $\Omega_p^r(M)$

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}.$$

Für spätere Zwecke definieren wir $\Omega_p^0(M) = \mathbb{R}$. Sicherlich ist $\Omega_p^1(M) = T_p^*M$. Wenn r in (5.62) größer wird als m , verschwindet es identisch, da dann irgendein Index mindestens zweimal in der antisymmetrisierten Summation auftauchen muss. Die Gleichung $\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r}$ impliziert, dass $\dim \Omega_p^r(M) = \dim \Omega_p^{m-r}(M)$ ist. Da $\Omega_p^r(M)$ ein Vektorraum ist, ist $\Omega_p^r(M)$ isomorph zu $\Omega_p^{m-r}(M)$ (siehe Abschnitt 2.2).

Das **äußere Produkt** einer q -Form und einer r -Form, $\wedge : \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{q+r}(M)$, wird durch eine triviale Erweiterung definiert. Seien z. B. $\omega \in \Omega_p^q(M)$ und $\xi \in \Omega_p^r(M)$. Die Wirkung der $(q+r)$ -Form $\omega \wedge \xi$ auf $q+r$ Vektoren ist definiert als

$$(\omega \wedge \xi)(V_1, \dots, V_{q+r}) = \frac{1}{q!r!} \sum_{P \in S_{q+r}} \text{sgn}(P) \omega(V_{P(1)}, \dots, V_{P(q)}) \xi(V_{P(q+1)}, \dots, V_{P(q+r)}), \quad (5.65)$$

mit $V_i \in T_p M$. Wenn $q+r > m$ ist, verschwindet $\omega \wedge \xi$ identisch. Mit diesem Produkt definieren wir eine Algebra

$$\Omega_p^*(M) \equiv \Omega_p^0(M) \oplus \Omega_p^1(M) \oplus \dots \oplus \Omega_p^m(M). \quad (5.66)$$

$\Omega_p^*(M)$ ist der Raum aller Differentialformen bei p und abgeschlossen unter dem äußeren Produkt.

Übung 5.13 Verwenden Sie die kartesischen Koordinaten (x, y) im \mathbb{R}^2 . Die 2-Form $dx \wedge dy$ ist das orientierte Flächenelement (das Vektor- oder Kreuzprodukt in der elementaren Vektoralgebra). Zeigen Sie, dass dies in Polarkoordinaten die Form $r dr \wedge d\theta$ annimmt.

Übung 5.14 Es seien $\xi \in \Omega_p^q(M)$, $\eta \in \Omega_p^r(M)$ und $\omega \in \Omega_p^s(M)$. Zeigen Sie:

$$\xi \wedge \xi = 0 \quad (q \text{ ungerade}), \quad (5.67a)$$

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \xi, \quad (5.67b)$$

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \omega = \xi \wedge (\eta \wedge \omega). \quad (5.67c)$$

Wir können jedem Punkt auf einer Mannigfaltigkeit M glatt eine r -Form zuweisen. Den Raum der glatten r -Formen auf M nennen wir $\Omega^r(M)$. Wir definieren ebenso $\Omega^0(M)$ als die Algebra $\mathcal{F}(M)$ der glatten Funktionen. In Tab. 5.1 fassen wir diese Ergebnisse zusammen.

Tab. 5.1. Basis und Dimension von r -Formen

r -Formen	Basis	Dimension
$\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$	{1}	1
$\Omega^1(M) = T^*M$	$\{dx^\mu\}$	m
$\Omega^2(M)$	$\{dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2}\}$	$m(m-1)/2$
$\Omega^3(M)$	$\{dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3}\}$	$m(m-1)(m-2)/6$
\vdots	\vdots	\vdots
$\Omega^m(M)$	$\{dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m\}$	1

5.4.2 Äußere Ableitungen

Definition 5.5. Die äußere Ableitung d_r ist eine Abbildung $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$, deren Wirkung auf eine r -Form

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

durch

$$d_r \omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (5.68)$$

definiert ist. Es ist üblich, den Index „ r “ wegzulassen und einfach d zu schreiben. Das äußere Produkt antisymmetrisiert den Koeffizienten automatisch.

Beispiel 5.10. Die r -Formen im dreidimensionalen Raum sind

- (i) $\omega_0 = f(x, y, z)$,
- (ii) $\omega_1 = \omega_x(x, y, z) dx + \omega_y(x, y, z) dy + \omega_z(x, y, z) dz$,
- (iii) $\omega_2 = \omega_{xy}(x, y, z) dx \wedge dy + \omega_{yz}(x, y, z) dy \wedge dz + \omega_{zx}(x, y, z) dz \wedge dx$,
- (iv) $\omega_3 = \omega_{xyz}(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$.

Wenn wir einen *axialen Vektor* a^μ durch $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \omega_{\nu\lambda}$ definieren, kann man eine 2-Form als einen „Vektor“ ansehen. Das **Levi-Civita-Symbol** $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ ist durch $\varepsilon^{P(1)P(2)P(3)} = \text{sgn}(P)$ definiert und liefert einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{X}(M)$ und $\Omega^2(M)$ (achten Sie, dass beide Objekte drei Dimensionen haben).

Die Wirkung der äußeren Ableitung d ist

- (i) $d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$,
- (ii) $d\omega_1 = \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx$,
- (iii) $d\omega_2 = \left(\frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$,
- (iv) $d\omega_3 = 0$.

Somit können wir die Wirkung von d auf ω_0 mit dem Gradienten „grad“, die auf ω_1 mit der Rotation „rot“ und die auf ω_2 mit der Divergenz „div“ identifizieren, wie sie uns aus der gewöhnlichen Vektoranalysis vertraut sind. \diamond

Übung 5.15 Es seien $\xi \in \Omega^q(M)$ und $\omega \in \Omega^r(M)$. Zeigen Sie:

$$d(\xi \wedge \omega) = d\xi \wedge \omega + (-1)^q \xi \wedge d\omega. \quad (5.69)$$

Die folgende Überlegung liefert uns einen nützlichen Ausdruck für die äußere Ableitung: Wir betrachten $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu, Y = Y^\nu \partial/\partial x^\nu \in \mathcal{X}(M)$ und $\omega = \omega_\mu dx^\mu \in \Omega^1(M)$. Es ist leicht einzusehen, dass die Kombination

$$X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]) = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} (X^\nu Y^\mu - X^\mu Y^\nu)$$

mit $d\omega(X, Y)$ übereinstimmt. Daraus erhalten wir den koordinatenfreien Ausdruck

$$d\omega(X, Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]). \quad (5.70)$$

Für eine r -Form $\omega \in \Omega^r(M)$ wird daraus

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}), \end{aligned} \quad (5.71)$$

wobei der Eintrag unter dem „ $\hat{\cdot}$ “ weggelassen wurde. Überprüfen Sie als Übung explizit die Gleichung (5.71) für $r = 2$.

Nun beweisen wir eine wichtige Formel:

$$d^2 = 0 \quad (\text{or } d_{r+1} d_r = 0). \quad (5.72)$$

Wir betrachten

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M).$$

Die Wirkung von d^2 auf ω ist

$$d^2 \omega = \frac{1}{r!} \frac{\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.$$

Dies verschwindet identisch, weil $\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} / \partial x^\lambda \partial x^\nu$ symmetrisch bezüglich λ und ν ist, während $dx^\lambda \wedge dx^\nu$ antisymmetrisch ist.

Beispiel 5.11. Bekanntlich ist das elektromagnetische Potenzial $A = (\phi, A)$ eine 1-Form: $A = A_\mu dx^\mu$ (siehe Kapitel 10). Der elektromagnetische Tensor ist definiert

durch $F = dA$ und hat die Komponenten

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.73)$$

mit

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial x^0}\mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

wie üblich. Zwei Maxwell-Gleichungen, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\partial\mathbf{B}/\partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ folgen aus der **Bianchi-Identität**, während die anderen Gleichungen die aus der Lagrange-Funktion (1.245) abgeleitete Bewegungsgleichung darstellen. \diamond

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ induziert den Rücktransport $f^* : T_{f(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$, und f^* wird auf natürliche Weise auf Tensoren vom Typ $(0, r)$ erweitert; siehe Abschnitt 5.2. Da eine r -Form ein Tensor vom Typ $(0, r)$ ist, können wir dies hier genauso machen. Seien $\omega \in \Omega^r(N)$ und f eine Abbildung $M \rightarrow N$. An jedem Punkt $f(p) \in N$ induziert f den Rücktransport $f^* : \Omega_{f(p)}^r N \rightarrow \Omega_p^r M$ gemäß

$$(f^*\omega)(X_1, \dots, X_r) \equiv \omega(f_*X_1, \dots, f_*X_r), \quad (5.74)$$

mit $X_i \in T_p M$ und f_* als der Differentialabbildung $T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$.

Übung 5.16 Es seien $\xi, \omega \in \Omega^r(N)$ und $f : M \rightarrow N$. Zeigen Sie:

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega), \quad (5.75)$$

$$f^*(\xi \wedge \omega) = (f^*\xi) \wedge (f^*\omega). \quad (5.76)$$

Die äußere Ableitung d_r induziert die Folge

$$0 \xrightarrow{i} \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{m-2}} \Omega^{m-1}(M) \xrightarrow{d_{m-1}} \Omega^m(M) \xrightarrow{d_m} 0, \quad (5.77)$$

wobei i die Inklusionsabbildung (Einbettung) $0 \hookrightarrow \Omega^0(M)$ ist. Diese Folge wird **De-Rham-Komplex** genannt. Wegen $d^2 = 0$ gilt im $d_r \subset \ker d_{r+1}$.⁵ Ein Element von $\ker d_r$ heißt **geschlossene r -Form**, während ein Element von $\imath d_{r-1}$ als **exakte r -Form** bezeichnet wird. Es ist also $\omega \in \Omega^r(M)$ geschlossen, wenn $d\omega = 0$ ist, und exakt, wenn eine $(r-1)$ -Form ψ existiert, sodass $\omega = d\psi$ ist. Der Quotientenraum $\ker d_r / \imath d_{r-1}$ ist die r -te **De-Rham-Kohomologiegruppe**, welche in den dualen Raum der Homologiegruppe etabliert wird; siehe Kapitel 6.

⁵ Wir betrachten $\omega \in \Omega^r(M)$. Dann implizieren $d_r\omega \in \imath d_r$ und $d_{r+1}(d_r\omega) = 0$, dass $d_r\omega \in \ker d_{r+1}$.

5.4.3 Inneres Produkt und Lie-Ableitung von Formen

Eine weitere wichtige Verknüpfung ist das **innere Produkt** $i_X : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$, mit $X \in \mathcal{X}(M)$. Wir definieren für $\omega \in \Omega^r(M)$

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_{r-1}) \equiv \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1}). \quad (5.78)$$

Für $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$ und $\omega = (1/r!) \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} i_X \omega &= \frac{1}{(r-1)!} X^\nu \omega_{\nu \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{s=1}^r X^{\mu_s} \omega_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_r} (-1)^{s-1} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{\mu_s}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

dabei wurde der Eintrag unter dem „ $\widehat{}$ “ ausgelassen. Seien z. B. (x, y, z) die Koordinaten des \mathbb{R}^3 . Dann sind

$$i_{e_x}(dx \wedge dy) = dy, \quad i_{e_x}(dy \wedge dz) = 0, \quad i_{e_x}(dz \wedge dx) = -dz.$$

Die Lie-Ableitung einer Form kann man am elegantesten mit dem inneren Produkt schreiben. Sei $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ eine 1-Form. Wir betrachten die Kombination

$$\begin{aligned} (d i_X + i_X d)\omega &= d(X^\mu \omega_\mu) + i_X [\frac{1}{2}(\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu] \\ &= (\omega_\mu \partial_\nu X^\mu + X^\mu \partial_\nu \omega_\mu) dx^\nu + X^\mu (\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) dx^\nu \\ &= (\omega_\mu \partial_\nu X^\mu + X^\mu \partial_\mu \omega_\nu) dx^\nu. \end{aligned}$$

Wenn wir dies mit (5.55) vergleichen, erhalten wir

$$\mathcal{L}_X \omega = (d i_X + i_X d)\omega. \quad (5.80)$$

Für eine allgemeine r -Form $\omega = (1/r!) \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} ((\sigma_\varepsilon)^* \omega|_{\sigma_\varepsilon(x)} - \omega|_x) \\ &= X^\nu \frac{1}{r!} \partial_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ &\quad + \sum_{s=1}^r \partial_{\mu_s} X^\nu \frac{1}{r!} \stackrel{s}{\downarrow} \omega_{\mu_1 \dots \overset{\nu}{\dots} \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned}
 & (\mathrm{d}i_X + i_X \mathrm{d})\omega \\
 &= \frac{1}{r!} \sum_{s=1}^r [\partial_\nu X^{\mu_s} \omega_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_r} + X^{\mu_s} \partial_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_r}] \cdot (-1)^{s-1} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{\mu_s}} \wedge dx^{\mu_r} \\
 &\quad + \frac{1}{r!} [X^\nu \partial_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\
 &\quad + \sum_{s=1}^r X^{\mu_s} \omega_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_r} (-1)^s dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{\mu_s}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}] \\
 &= \frac{1}{r!} \sum_{s=1}^r [\partial_\nu X^{\mu_s} \omega_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_r} (-1)^{s-1} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{\mu_s}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\
 &\quad + \frac{1}{r!} X^\nu \partial_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}].
 \end{aligned}$$

Wenn wir im ersten Term des letzten Ausdrucks μ_s und ν vertauschen und dies dann mit (5.81) vergleichen, bestätigen wir, dass für jede r -Form ω gilt:

$$(\mathrm{d}i_X + i_X \mathrm{d})\omega = \mathcal{L}_X \omega. \quad (5.82)$$

Übung 5.17 Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^r(M)$. Zeigen Sie:

$$i_{[X,Y]} \omega = [\mathcal{L}_X, i_Y] \omega. \quad (5.83)$$

Zeigen Sie außerdem, dass i_X eine Antiderivation,

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X \omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge i_X \eta, \quad (5.84)$$

und nilpotent,

$$i_X^2 = 0, \quad (5.85)$$

ist. Verwenden Sie die Nilpotenz, um zu beweisen, dass gilt:

$$\mathcal{L}_X i_X \omega = i_X \mathcal{L}_X \omega. \quad (5.86)$$

Übung 5.18 Sei $t \in \mathcal{T}_m^n(M)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(\mathcal{L}_X t)^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = X^\lambda \partial_\lambda t^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} + \sum_{s=1}^n \partial_{\nu_s} X^\lambda t^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \lambda \dots \nu_m} - \sum_{s=1}^n \partial_\lambda X^{\mu_s} t^{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}. \quad (5.87)$$

Beispiel 5.12. Nun wollen wir die Hamilton'sche Mechanik in Abschnitt 1.1 mithilfe von Differentialformen neu formulieren. Seien H eine Hamilton-Funktion und (q^μ, p_μ) ihr Phasenraum. Wir definieren eine **sympaktische 2-Form** als

$$\omega = dp_\mu \wedge dq^\mu. \quad (5.88)$$

Wenn wir eine 1-Form

$$\theta = q^\mu dp_\mu \quad (5.89)$$

einführen, erhält die symplektische 2-Form die Form

$$\omega = d\theta. \quad (5.90)$$

Zu einer gegebenen Funktion $f(q, p)$ im Phasenraum können wir das **Hamilton'sche Vektorfeld**

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \quad (5.91)$$

definieren. Sie können leicht überprüfen, dass gilt:

$$i_{X_f} \omega = -\frac{\partial f}{\partial p_\mu} dp^\mu - \frac{\partial f}{\partial q^\mu} dq^\mu = -df.$$

Wir betrachten ein Vektorfeld, dass von der Hamilton-Funktion

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial H}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \quad (5.92)$$

erzeugt wird. Für die Lösung (q^μ, p_μ) der Hamilton'schen Bewegungsgleichung

$$\frac{dq^\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu} \quad (5.93)$$

erhalten wir außerdem

$$X_H = \frac{dp_\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{dq^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial q^\mu} = \frac{d}{dt}. \quad (5.94)$$

Die symplektische 2-Form ω bleibt invariant entlang des von X_H erzeugten Flusses:

$$\mathcal{L}_{X_H} \omega = d(i_{X_H} \omega) + i_{X_H} (d\omega) = d(i_{X_H} \omega) = -d^2 H = 0, \quad (5.95)$$

wobei wir Gleichung (5.82) verwendet haben. Umgekehrt existiert, wenn X die Bedingung $\mathcal{L}_X \omega = 0$ erfüllt, eine Hamilton-Funktion H , sodass die Hamilton'sche Bewegungsgleichung entlang des von X erzeugten Flusses erfüllt ist. Dies folgt aus der obigen Beobachtung, dass $\mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega) = 0$ ist, weswegen mit dem Poincaré-Lemma eine Funktion $H(q, p)$ existiert, sodass folgt:

$$i_X \omega = -dH.$$

Die Poisson-Klammer wird hier mithilfe der Hamilton'schen Vektorfelder zu einer von den speziellen Koordinaten unabhängigen Form; es gilt

$$i_{X_f} (i_{X_g} \omega) = -i_{X_f} (dg) = \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} = [f, g]_{PK}. \quad (5.96)$$

◇

5.5 Integration von Differentialformen

5.5.1 Orientierung

Die Integration einer Differentialform über eine Mannigfaltigkeit M ist nur dann definiert, wenn M „orientierbar“ ist. Also müssen wir erst einmal die **Orientierung** einer Mannigfaltigkeit definieren. Sei M eine zusammenhängende m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. An einem Punkt $p \in M$ wird der Tangentialraum $T_p M$ durch die Basis $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ aufgespannt, wobei x^μ die lokale Koordinate auf der Karte U_i ist, zu welcher p gehört. Sei U_j eine andere Karte, sodass $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist, mit der lokalen Koordinate y^α . Wenn $p \in U_i \cap U_j$ ist, wird $T_p M$ entweder von $\{e_\mu\}$ oder von $\{\tilde{e}_\alpha\} = \{\partial/\partial y^\alpha\}$ aufgespannt. Die Basis ändert sich wie

$$\tilde{e}_\alpha = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \right) e_\mu. \quad (5.97)$$

Wenn $J = \det(\partial x^\mu / \partial y^\alpha) > 0$ auf $U_i \cap U_j$ ist, sagt man, dass $\{e_\mu\}$ und $\{\tilde{e}_\alpha\}$ dieselbe *Orientierung* auf $U_i \cap U_j$ definieren, und bei $J < 0$ definieren sie die *entgegengesetzte Orientierung*.

Definition 5.6. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, die von $\{U_i\}$ überdeckt wird. Die Mannigfaltigkeit M ist **orientierbar**, wenn für beliebige überlappende Karten U_i und U_j lokale Koordinaten $\{x^\mu\}$ für U_i und $\{y^\alpha\}$ für U_j existieren, sodass $J = \det(\partial x^\mu / \partial y^\alpha) > 0$ ist.

Wenn M nichtorientierbar ist, kann J nicht in allen Schnittmengen von Karten positiv sein. Das Möbius-Band in Abb. 5.14(a) ist z. B. nichtorientierbar, denn wir müssen J an der Schnittlinie B negativ wählen.

Wenn eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit M orientierbar ist, existiert eine m -Form ω , die nirgendwo verschwindet. Diese m -Form ω wird **Volumenelement** genannt. Es spielt die Rolle eines Maßes, wenn wir eine Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ über M integrieren wollen. Zwei Volumenelemente ω und ω' werden *äquivalent* genannt, wenn eine streng positive Funktion $h \in \mathcal{F}(M)$ existiert, sodass $\omega = h\omega'$ ist. Eine negativ definite Funktion $h' \in \mathcal{F}(M)$ verleiht M eine inäquivalente Orientierung. Somit kann jede orientierbare Mannigfaltigkeit *zwei* zueinander inäquivalente Orientierungen haben, von denen eine **rechtshändig** und die andere **linkshändig** genannt wird. Wir betrachten eine m -Form

$$\omega = h(p) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \quad (5.98)$$

mit einem positiv definiten $h(p)$ auf einer Karte (U, φ) mit der Koordinate $x = \varphi(p)$. Wenn M orientierbar ist, können wir ω auf ganz M erweitern, sodass die Komponente h auf jeder Karte U_i positiv definit ist. Wenn M orientierbar ist, ist dieses ω ein Volumenelement. Beachten Sie, dass die Positivität von h unabhängig von der

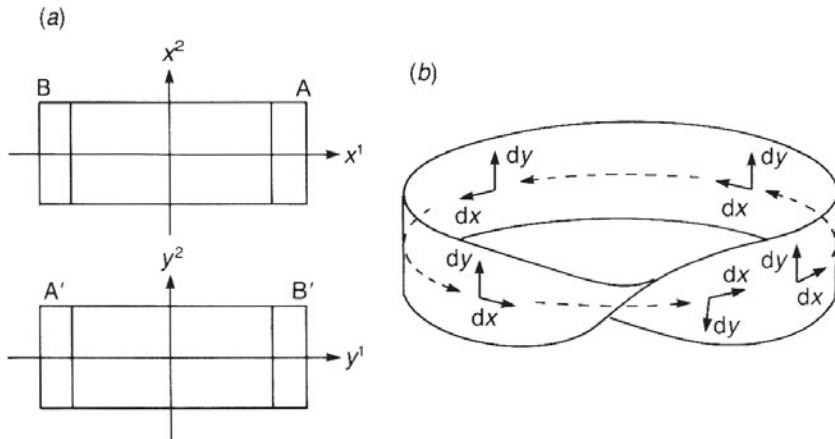


Abb. 5.14. (a) Das Möbius-Band entsteht durch Verdrehen von Teil B' im zweiten Streifen um π , bevor A mit A' und B mit B' verklebt werden. Der Koordinatenwechsel auf B ist $y^1 = x^1, y^2 = -x^2$, und die Jacobi-Determinante ist -1 . (b) Basis-Zweibeine auf dem Möbius-Band.

Koordinatenwahl ist. Seien nämlich $p \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ und x^μ und y^α Koordinaten von U_i bzw. U_j . Dann wird (5.98) zu

$$\omega = h(p) \frac{\partial x^1}{\partial y^{\mu_1}} dy^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^m}{\partial y^{\mu_m}} dy^{\mu_m} = h(p) \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m. \quad (5.99)$$

Die Determinante in (5.99) ist die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation und muss wegen der angenommenen Orientierbarkeit positiv sein. Wenn M nichtorientierbar ist, kann ω nicht mit einer positiv definiten Komponente auf M definiert werden. Sehen wir uns noch einmal Abb. 5.14 an. Wenn wir das Band entlang der eingezeichneten gestrichelten Linie umrunden, wechselt $\omega = dx \wedge dy$ das Vorzeichen ($dx \wedge dy \rightarrow -dx \wedge dy$), wenn wir zurück zum Ausgangspunkt gelangen. Daher kann ω auf M nicht eindeutig definiert werden.

5.5.2 Integration von Formen

Jetzt sind wir so weit, dass wir die Integration einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ über eine orientierbare Mannigfaltigkeit M definieren können. Wir betrachten ein Volumenelement ω . In einer Koordinatenumgebung U_i mit der Koordinate x definieren wir die Integration einer m -Form $f\omega$ durch

$$\int_{U_i} f\omega = \int_{\varphi(U_i)} f(\varphi_i^{-1}(x))h(\varphi_i^{-1}(x))dx^1 \dots dx^m. \quad (5.100)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist ein gewöhnliches mehrfaches Integral einer Funktion von m Variablen. Ist das Integral von f über U_i erst einmal definiert, so ist das

Integral von f über ganz M mithilfe der „Zerlegung der Eins“ gegeben, die wir als nächstes definieren wollen.

Definition 5.7. Sei eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von M gegeben, sodass jeder Punkt von M von einer endlichen Zahl von U_i überdeckt wird.⁶ Wenn eine Familie von differenzierbaren Funktionen $\varepsilon_i(p)$ die Bedingungen

- (i) $0 \leq \varepsilon_i(p) \leq 1$,
- (ii) $\varepsilon_i(p) = 0$, wenn $p \notin U_i$, und
- (iii) $\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p) + \dots = 1$ für jeden Punkt $p \in M$

erfüllt, heißt die Familie $\{\varepsilon(p)\}$ eine **Zerlegung der Eins** bezüglich der Überdeckung $\{U_i\}$.

Aus Bedingung (iii) folgt

$$f(p) = \sum_i f(p)\varepsilon_i(p) = \sum_i f_i(p), \quad (5.101)$$

wobei $f_i(p) \equiv f(p)\varepsilon_i(p)$ außerhalb von U_i wegen (ii) verschwindet. Darum garantiert für einen gegebenen Punkt $p \in M$ die angenommene Parakompaktheit, dass in der Summation über i in (5.101) nur endliche Terme auftreten. Für jedes $f_i(p)$ können wir das Integral über U_i entsprechend Gleichung (5.100) definieren. Schließlich ist das Integral von f über M durch

$$\int_M f \omega \equiv \sum_i \int_{U_i} f_i \omega. \quad (5.102)$$

gegeben. Obwohl ein anderer, unterschiedlicher Atlas $\{(V_i, \psi_i)\}$ andere Koordinaten und eine andere Zerlegung der Eins ergibt, bleibt das durch (5.102) definierte Integral dasselbe.

Beispiel 5.13. Betrachten wir den in Beispiel 5.2 definierten Atlas von S^1 . Es seien $U_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$, $U_2 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$, $\varepsilon_1(\theta) = \sin^2(\theta/2)$ und $\varepsilon_2(\theta) = \cos^2(\theta/2)$. Überprüfen Sie, dass $\{\varepsilon_i(\theta)\}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich $\{U_i\}$ ist. Lassen Sie uns als Beispiel die Funktion $f = \cos^2 \theta$ integrieren – natürlich wissen wir, dass gilt:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta = \pi,$$

⁶ Wenn dies immer möglich ist, wird M **parakompakt** genannt, wovon wir in diesem Fall ausgehen wollen.

aber wir wollen hier das Integral mit der Zerlegung der Eins ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{S^1} d\theta \cos^2 \theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \theta + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \theta \\ &= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi. \end{aligned}$$

◊

Bisher hatten wir h ganz beliebig gewählt, sofern es nur streng positiv bleibt. Sie möchten vielleicht ausprobieren, was geschieht, wenn Sie h gleich eins setzen. Wir haben jedoch in (5.99) gefunden, dass h unter einem Koordinatenwechsel mit der Jacobi-Determinante multipliziert wird. Daher gibt es keinen kanonischen Weg, um die Komponente h herauszugreifen; der Wert eins in einer Koordinate könnte in einer anderen Koordinate ein anderer sein. Diese Situation ändert sich erst, wenn man die Mannigfaltigkeit mit einer Metrik versieht, wie wir in Kapitel 7 sehen werden.

5.6 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Eine Lie-Gruppe ist eine Mannigfaltigkeit, auf welcher die Gruppenoperationen *Produkt* und *Invertierung* definiert sind. Lie-Gruppen spielen eine extrem wichtige Rolle in der Theorie der Faserbündel und haben außerdem die vielfältigsten Anwendungen in der Physik. An dieser Stelle werden wir die geometrischen Aspekte von Lie-Gruppen und Lie-Algebren herausarbeiten.

5.6.1 Lie-Gruppen

Definition 5.8. Eine Lie-Gruppe G ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur, sodass die Gruppenoperationen

- (i) $\cdot : G \times G \rightarrow G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$,
- (ii) $^{-1} : G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$

differenzierbar sind.⁷

Das neutrale Element einer Lie-Gruppe schreibt man e . Die Dimension einer Lie-Gruppe G ist definiert als die Dimension von G als Mannigfaltigkeit. Das Produkt-Symbol kann entfallen, man schreibt also normalerweise statt „ $g_1 \cdot g_2$ “ kürzer „ $g_1 g_2$ “. Sei beispielsweise $\mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten drei Elemente $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, sodass

⁷ Man kann zeigen, dass G eine eindeutige analytische Struktur hat, mit welcher das Produkt und die Invertierung als konvergente Potenzreihen geschrieben werden können.

$xy = z$ ist. Offensichtlich erhalten wir, wenn wir eine Zahl nahe bei x mit einer Zahl nahe bei y multiplizieren, eine Zahl in der Nähe von z . Ähnlich liegt die Inverse einer Zahl nahe bei x in der Nähe von $1/x$. Wir können diese Abbildungen in der Tat nach den relevanten Argumenten differenzieren und \mathbb{R}^* zu einer Lie-Gruppe mit diesen Gruppenoperationen machen. Wenn das Produkt kommutativ ist, also $g_1g_2 = g_2g_1$ ist, verwenden wir oft das additive Symbol „+“ anstelle der Schreibweise als Produkt.

Übung 5.19 Zeigen Sie:

- (a) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ ist eine Lie-Gruppe bezüglich der Multiplikation.
- (b) \mathbb{R} ist eine Lie-Gruppe bezüglich der Addition.
- (c) \mathbb{R}^2 ist eine Lie-Gruppe bezüglich der durch $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ definierten Addition.

Beispiel 5.14. Sei S^1 der Einheitskreis in der komplexen Ebene:

$$S^1 = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R} \pmod{2\pi}\}.$$

Die durch $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ und $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ definierten Gruppenoperationen sind differenzierbar und machen den S^1 zu einer Lie-Gruppe, die wir $U(1)$ nennen. Man sieht leicht, dass die Gruppenoperationen dieselben sind wie in Übung 5.19(b), modulo 2π . \diamond

Von ganz besonderem Interesse für die physikalischen Anwendungen sind diejenigen Matrixgruppen, die Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppen $GL(n, \mathbb{R})$ oder $GL(n, \mathbb{C})$ sind. Das Produkt zweier Elemente ist einfach die Matrixmultiplikation, und die Inverse erhält man durch die Matrixinversion. Die Koordinaten von $GL(n, \mathbb{R})$ sind durch die n^2 Einträge von $M = \{x_{ij}\}$ gegeben. $GL(n, \mathbb{R})$ ist eine nicht-kompakte Mannigfaltigkeit der reellen Dimension n^2 .

Interessante Untergruppen von $GL(n, \mathbb{R})$ sind die **orthogonale Gruppe** $O(n)$, die **spezielle lineare Gruppe** $SL(n, \mathbb{R})$ und die **spezielle orthogonale Gruppe** $SO(n)$:

$$O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | M^T M = M^T M = I_n\}, \quad (5.103)$$

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | \det M = 1\}, \quad (5.104)$$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}), \quad (5.105)$$

wobei „ T “ für die Transponierte einer Matrix steht. Aus der speziellen Relativitätstheorie ist uns die **Lorentz-Gruppe**

$$O(1, 3) = \{M \in GL(4, \mathbb{R}) | M \eta M^t = \eta\}$$

vertraut, wobei η die Minkowski-Metrik $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ bezeichnet. Die Erweiterung auf eine höherdimensionale Raumzeit ist trivial.

Übung 5.20 Zeigen Sie, dass die Gruppe $O(1, 3)$ nichtkompakt ist und vier Zusammenhangskomponenten hat, je nach Vorzeichen der Determinante und des $(0, 0)$ -Eintrags. Die Komponente, welche die Einheitsmatrix enthält, wird als $O_+^\uparrow(1, 3)$ bezeichnet.

Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ist die Menge der nichtsingulären linearen Transformationen in \mathbb{C}^n , welche durch nichtsinguläre $(n \times n)$ -Matrizen mit komplexen Einträgen dargestellt wird. Die **unitäre Gruppe** $\mathrm{U}(n)$, die **spezielle lineare Gruppe** $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ und die **spezielle unitäre Gruppe** $\mathrm{SU}(n)$ werden definiert gemäß

$$\mathrm{U}(n) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | MM^\dagger = M^\dagger M = \mathbf{1}\}, \quad (5.106)$$

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | \det M = 1\}, \quad (5.107)$$

$$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), \quad (5.108)$$

wobei „ † “ die (Hermite’sch) adjugierte Matrix kennzeichnet.

Bisher haben wir nur erwähnt, dass diese Matrixgruppen Untergruppen einer Lie-Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (oder $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) sind. Der folgende Satz garantiert uns, dass sie auch Lie-Untergruppen sind, d. h., dass diese Untergruppen selbst Lie-Gruppen sind. Wir akzeptieren diesen wichtigen (und schwer zu beweisenden) Satz ohne Beweis.

Satz 5.2. Jede abgeschlossene Untergruppe H einer Lie-Gruppe G ist eine Lie-Untergruppe.

Es sind beispielsweise $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{SO}(n)$ Lie-Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Um zu sehen, warum $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene Untergruppe ist, betrachten wir $f : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $A \mapsto \det A$. Offensichtlich ist die Abbildung f stetig und $f^{-1}(1) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Ein Punkt $\{1\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} , daher ist $f^{-1}(1)$ abgeschlossen in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Dann besagt Satz 5.2, dass $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ eine Lie-Untergruppe ist. Sie sollten sich davon überzeugen, dass $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ ebenfalls Lie-Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sind.

Seien G eine Lie-Gruppe und H eine Lie-Untergruppe von G . Wir definieren eine Äquivalenzrelation \sim durch $g \sim g'$, wenn ein Element $h \in H$ existiert, sodass $g' = gh$ ist. Eine Äquivalenzklasse $[g]$ ist dann eine Menge $\{gh | h \in H\}$. Der Nebenklassenraum G/H ist eine Mannigfaltigkeit (nicht unbedingt eine Lie-Gruppe) mit $\dim G/H = \dim G - \dim H$. Dann ist G/H eine Lie-Gruppe, wenn H ein Normalteiler von G ist, d. h., wenn $ghg^{-1} \in H$ für alle $g \in G$ und $h \in H$ ist. Wir betrachten die Äquivalenzklassen $[g], [g'] \in G/H$ und bilden das Produkt $[g][g']$. Wenn die Gruppenstruktur in G/H wohldefiniert ist, muss das Produkt unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sein. Seien gh und $g'h'$ die Repräsentanten von $[g]$ bzw. $[g']$. Dann ist $ghg'h' = gg'h'h' \in [gg']$, wobei die Gleichheit folgt, weil ein $h'' \in H$ existiert, sodass $hg' = g'h''$ ist. Es ist eine gute Übung für Sie, zu zeigen, dass $[g]^{-1}$ ebenso wohldefiniert ist und dass gilt: $[g]^{-1} = [g^{-1}]$.

5.6.2 Lie-Algebren

Definition 5.9. Seien a und g Elemente einer Lie-Gruppe G . Die **Rechtstranslation** $R_a : G \rightarrow G$ und die **Linkstranslation** $L_a : G \rightarrow G$ von g durch a sind definiert

durch

$$R_a g = g a, \quad (5.109a)$$

$$L_a g = a g. \quad (5.109b)$$

Definitionsgemäß sind R_a und L_a Diffeomorphismen von G nach G . Daher induzieren die Abbildungen $L_a : G \rightarrow G$ und $R_a : G \rightarrow G$ die Abbildungen $L_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ag} G$ und $R_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ga} G$; siehe Abschnitt 5.2. Da diese Translationen äquivalente Theorien ergeben, beschäftigen wir uns im Folgenden vorwiegend mit der Links-translation. Die entsprechende Diskussion für Rechtstranslationen lässt sich ganz ähnlich führen.

Für eine gegebene Lie-Gruppe G existiert eine spezielle Klasse von Vektorfeldern, die durch Invarianz unter der Gruppenwirkung charakterisiert sind. (Bei gewöhnlichen Mannigfaltigkeiten gibt es keinen kanonischen Weg, um bestimmte Vektorfelder vor anderen auszuzeichnen.)

Definition 5.10. Sei X ein Vektorfeld auf einer Lie-Gruppe G . X heißt **linksinvariante Vektorfeld**, wenn $L_{a*}X|_g = X|_{ag}$ ist.

Übung 5.21 Bestätigen Sie, dass ein linksinvariantes Vektorfeld X die Gleichung

$$L_{a*}X|_g = X^\mu(g) \frac{\partial x^\nu(ag)}{\partial x^\mu(g)} \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_{ag} = X^\nu(ag) \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_{ag} \quad (5.110)$$

erfüllt, wobei $x^\mu(g)$ und $x^\mu(ag)$ Koordinaten von g bzw. ag sind.

Ein Vektor $V \in T_e G$ definiert ein eindeutiges linksinvariantes Vektorfeld X_V in ganz G durch

$$X_V|_g = L_{g*}V \quad (g \in G). \quad (5.111)$$

Tatsächlich bestätigen wir mit (5.34), dass $X_V|_{ag} = L_{ag*}V = (L_a L_g)_*V = L_a(L_g)_*V = L_{a*}X_V|_g$ ist. Umgekehrt definiert ein linksinvariantes Vektorfeld X einen eindeutigen Vektor $V = X|_e \in T_e G$. Wir wollen die Menge der linksinvarianten Vektorfelder auf G mit \mathfrak{g} bezeichnen. Die Abbildung $T_e G \rightarrow \mathfrak{g}$ mit $V \mapsto X_V$ ist ein Isomorphismus, und es folgt, dass die Menge der linksinvarianten Vektorfelder ein zu $T_e G$ isomorpher Vektorraum ist. Insbesondere ist $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

Da \mathfrak{g} eine Menge von Vektorfeldern ist, ist sie eine Teilmenge von $\mathcal{X}(G)$, und die in Abschnitt 5.3 definierte Lie-Klammer ist auch auf \mathfrak{g} definiert. Wir zeigen jetzt, dass \mathfrak{g} abgeschlossen unter der Lie-Klammer ist. Wir betrachten zwei Punkte g und $ag = L_a g$ in G . Wenn wir L_{a*} auf die Lie-Klammer $[X, Y]$ von $X, Y \in \mathfrak{g}$ anwenden, erhalten wir

$$L_{a*}[X, Y]|_g = [L_{a*}X|_g, L_{a*}Y|_g] = [X, Y]|_{ag}, \quad (5.112)$$

unter Ausnutzen der Linksinvarianz von X und Y sowie von Gleichung (5.52). Somit ist $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, d. h., \mathfrak{g} ist abgeschlossen unter der Lie-Klammer.

Es ist instruktiv, das linksinvariante Vektorfeld von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ auszuarbeiten. Die Koordinaten von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sind durch die n^2 Einträge x^{ij} der Matrix gegeben. Das

neutrale Element ist $e = I_n = (\delta^{ij})$. Seien $g = \{x^{ij}(g)\}$ und $a = \{x^{ij}(a)\}$ Elemente von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Die Linkstranslation ist

$$L_a g = ag = \sum x^{ik}(a)x^{kj}(g).$$

Wir betrachten nun einen Vektor $V = \sum V^{ij} \partial/\partial x^{ij}|_e \in T_e G$, wobei die V^{ij} die Einträge von V sind. Die von V erzeugte Linksinvariante ist

$$\begin{aligned} X_V|_g &= L_{g^*}V = \sum_{ijklm} V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_e x^{kl}(g) x^{lm}(e) \frac{\partial}{\partial x^{km}} \Big|_g \\ &= \sum V^{ij} x^{kl}(g) \delta_i^l \delta_j^m \frac{\partial}{\partial x^{km}} \Big|_g \\ &= \sum x^{ki}(g) V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{kj}} \Big|_g = \sum (gV)^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{kj}} \Big|_g. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Dabei ist gV die gewöhnliche Matrixmultiplikation von g und V . Der Vektor $X_V|_g$ wird oft als gV abgekürzt, da dies die Komponenten des Vektors ergibt.

Die von $V = V^{ij} \partial/\partial x^{ij}|_e$ und $W = W^{ij} \partial/\partial x^{ij}|_e$ erzeugte Lie-Klammer von X_V und X_W ist

$$\begin{aligned} [X_V, X_W]|_g &= \sum x^{ki}(g) V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{kj}} \Big|_g x^{ca}(g) W^{ab} \frac{\partial}{\partial x^{cb}} \Big|_g - (V \leftrightarrow W) \\ &= \sum x^{ij}(g) [V^{jk} W^{kl} - W^{jk} V^{kl}] \frac{\partial}{\partial x^{il}} \Big|_g \\ &= \sum (g[V, W])^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_g. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Offensichtlich bleiben (5.113) und (5.114) für jede Matrixgruppe gültig, und wir erhalten

$$L_{g^*}V = gV, \quad (5.115)$$

$$[X_V, X_W]|_g = L_{g^*}[V, W] = g[V, W]. \quad (5.116)$$

Jetzt definieren wir eine Lie-Algebra als die Menge der linksinvarianten Vektorfelder \mathfrak{g} mit der Lie-Klammer.

Definition 5.11. Die Menge von linksinvarianten Vektorfeldern \mathfrak{g} mit der Lie-Klammer $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ wird die **Lie-Algebra** einer Lie-Gruppe G genannt.

Wir bezeichnen die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe mit den zugehörigen kleinen Frakturbuchstaben. Beispielsweise steht $\mathfrak{so}(n)$ für die Lie-Algebra der $\mathrm{SO}(n)$.

Beispiel 5.15.

- (a) Wir betrachten $G = \mathbb{R}$ wie in Übung 5.19(b). Wenn wir die Linkstranslation L_a durch $x \mapsto x + a$ definieren, ist das linksinvariante Vektorfeld durch $X = \partial/\partial x$ gegeben. Tatsächlich ist

$$L_{a*}X\Big|_x = \frac{\partial(a+x)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial(a+x)} = \frac{\partial}{\partial(x+a)} = X\Big|_{x+a}.$$

Offenkundig ist dies das einzige linksinvariante Vektorfeld auf \mathbb{R} . Wir finden auch, dass $X = \partial/\partial\theta$ das einzige linksinvariante Vektorfeld auf $G = \text{SO}(2) = \{e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ist. Somit teilen sich die Lie-Gruppen \mathbb{R} und $\text{SO}(2)$ die gleiche Lie-Algebra.

- (b) Seien $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ die Lie-Algebra der $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ eine Kurve mit $c(0) = I_n$. Die Kurve wird in der Nähe von $s = 0$ durch $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$ approximiert, dabei ist A eine reelle $(n \times n)$ -Matrix. Beachten Sie, dass für hinreichend kleine s $\det c(s)$ nicht verschwinden kann und $c(s)$ in der Tat in $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ liegt. Der Tangentialvektor von $c(s)$ an der Stelle I_n ist $c'(s)|_{s=0} = A$. Dies zeigt, dass $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ die Menge der $(n \times n)$ -Matrizen ist. Natürlich ist $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = n^2 = \dim \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Die Untergruppen von $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ sind interessanter.
- (c) Lassen Sie uns die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ von $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ ermitteln. Mit dem beschriebenen Vorgehen approximieren wir eine Kurve durch I_n durch $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$. Der Tangentialvektor von $c(s)$ bei I_n ist $c'(s)|_{s=0} = A$. Nun muss, damit die Kurve $c(s)$ in $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ liegt, $c(s)$ die Bedingung $\det c(s) = 1 + s\text{sp}A = 1$ erfüllen, also $\text{sp}A = 0$. Somit ist $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ die Menge der spurfreien $(n \times n)$ -Matrizen und $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$.
- (d) Sei $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$ eine Kurve in $\text{SO}(n)$ durch I_n . Da $c(s)$ eine Kurve in $\text{SO}(n)$ ist, genügt sie $c(s)^T c(s) = I_n$. Differenzieren dieser Identität gibt $c'(s)^T c(s) + c(s)^T c'(s) = 0$. Bei $s = 0$ wird daraus $A^T + A = 0$. Daher ist $\mathfrak{so}(n)$ die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen. Da wir uns nur für die Nachbarschaft des neutralen Elements interessieren, ist die Lie-Algebra von $\text{O}(n)$ dieselbe wie die von $\text{SO}(n)$: $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$. Man sieht leicht, dass $\dim \mathfrak{o}(n) = \dim \mathfrak{so}(n) = n(n-1)/2$ ist.
- (e) Ein ähnlicher Gedankengang ergibt für die Matrixgruppen der $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, dass $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ die Menge der komplexen $(n \times n)$ -Matrizen ist, mit $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$ (die Dimension ist in diesem Fall eine reelle Dimension). Weiterhin ist $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ die Menge der spurfreien Matrizen mit reeller Dimension $2(n^2 - 1)$. Um $\mathfrak{u}(n)$ zu ermitteln, betrachten wir eine Kurve $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$ in $\text{U}(n)$. Wegen $c(s)^\dagger c(s) = I_n$ gilt $c'(s)^\dagger c(s) + c(s)^\dagger c'(s) = 0$ und bei $s = 0$ ist $A^\dagger + A = 0$. Also ist $\mathfrak{u}(n)$ die Menge der schiefer-Hermite'schen Matrizen mit $\dim \mathfrak{u}(n) = n^2$. Schließlich ist $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n)$ die Menge der spurfreien schiefer-Hermite'schen Matrizen mit $\dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1$.

◇

Übung 5.22 Sei

$$c(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Kurve in $\text{SO}(3)$. Ermitteln Sie den Tangentialvektor dieser Kurve bei I_3 .

5.6.3 Die einparametrische Untergruppe

Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ erzeugt einen Fluss in M (Abschnitt 5.3). Hier interessieren wir uns für den Fluss, der von einem linksinvarianten Vektorfeld erzeugt wird.

Definition 5.12. Eine Kurve $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ heißt **einparametrische Untergruppe** von G , wenn sie die Bedingung

$$\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s) \quad (5.117)$$

erfüllt.

Es ist leicht einzusehen, dass $\phi(0) = e$ und $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$ ist. Beachten Sie, dass die so definierte Kurve ϕ ein Homomorphismus von \mathbb{R} nach G ist. Obwohl G selbst möglicherweise nicht-Abel'sch ist, ist eine einparametrische Untergruppe von ihr eine Abel'sche Untergruppe: $\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s) = \phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$.

Zu einer gegebenen einparametrischen Untergruppe $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ existiert ein Vektorfeld X , sodass gilt:

$$\frac{d\phi^\mu(t)}{dt} = X^\mu(\phi(t)). \quad (5.118)$$

Wir zeigen nun, dass das Vektorfeld X linksinvariant ist. Als erstes bemerken wir, dass das Vektorfeld d/dt linksinvariant auf \mathbb{R} ist, siehe Beispiel 5.15(a). Somit folgt

$$(L_t)_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = \frac{d}{dt} \Big|_t. \quad (5.119)$$

Als nächstes wenden wir die induzierte Abbildung $\phi_* : T_t \mathbb{R} \rightarrow T_{\phi(t)} G$ auf die Vektoren $d/dt|_0$ und $d/dt|_t$ an:

$$\phi_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = \frac{d\phi^\mu(t)}{dt} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial g^\mu} \Big|_e = X|_e, \quad (5.120a)$$

$$\phi_* \frac{d}{dt} \Big|_t = \frac{d\phi^\mu(t)}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial g^\mu} \Big|_g = X|_g; \quad (5.120b)$$

dabei haben wir $\phi(t) = g$ gesetzt. Aus (5.119) und (5.120b) ergibt sich

$$(\phi L_t)_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = \phi_* L_t \frac{d}{dt} \Big|_0 = X|_g. \quad (5.121a)$$

Aus der Kommutativität $\phi L_t = L_g \phi$ folgt $\phi_* L_t = L_g \phi_*$. Dann wird (5.121a) zu

$$\phi_* L_t \frac{d}{dt} \Big|_0 = L_g \phi_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = L_g X|_e. \quad (5.121b)$$

Aus (5.121) können wir schließen:

$$L_{g*}X|_e = X|_g. \quad (5.122)$$

Damit existiert zu einem gegebenen Fluss $\phi(t)$ ein assoziiertes linksinvariantes Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$.

Umgekehrt definiert ein linksinvariantes Vektorfeld X eine einparametrische Gruppe von Transformationen $\sigma(t, g)$, sodass $d\sigma(t, g)/dt = X$ und $\sigma(0, g) = g$ ist. Wenn wir $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ durch $\phi(t) \equiv \sigma(t, e)$ definieren, wird die Kurve $\phi(t)$ eine einparametrische Untergruppe von G . Um dies zu beweisen, müssen wir zeigen, dass $\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$ ist. Per definitionem erfüllt σ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\sigma(t, \sigma(s, e)) = X(\sigma(t, \sigma(s, e))). \quad (5.123)$$

(Um es übersichtlicher zu machen, haben wir hier die Koordinatenindizes weggelassen. Wenn Sie sich damit unwohl fühlen, können Sie die Indizes entsprechend Gleichung (5.118) nachtragen.) Wenn der Parameter s festgehalten wird, ist $\bar{\sigma}(t, \phi(s)) \equiv \phi(s)\phi(t)$ eine Kurve $\mathbb{R} \rightarrow G$ an der Stelle $\phi(s)\phi(0) = \phi(s)$. Natürlich gilt für σ und $\bar{\sigma}$ dieselbe Anfangsbedingung

$$\sigma(0, \sigma(s, e)) = \bar{\sigma}(0, \phi(s)) = \phi(s). \quad (5.124)$$

$\bar{\sigma}$ löst auch dieselbe Differentialgleichung wie σ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\sigma}(t, \phi(t)) &= \frac{d}{dt}\phi(s)\phi(t) = (L_{\phi(s)})_* \frac{d}{dt}\phi(t) = (L_{\phi(s)})_* X(\phi(t)) \\ &= X(\phi(s)\phi(t)) \quad (\text{Linksinvarianz}) \\ &= X(\bar{\sigma}(t, \phi(s))). \end{aligned} \quad (5.125)$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen schließen wir:

$$\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t). \quad (5.126)$$

Es gibt eine Eins-zu-eins-Entsprechung (Bijektion) zwischen einer einparametrischen Untergruppe von G und einem linksinvarianten Vektorfeld. Diese Entsprechung wird manifest, wenn wir die Exponentialabbildung wie folgt definieren:

Definition 5.13. Seien G eine Lie-Gruppe und $V \in T_e G$. Die Exponentialabbildung $\exp : T_e G \rightarrow G$ wird durch

$$\exp V \equiv \phi_V(1) \quad (5.127)$$

definiert, wobei ϕ_V eine einparametrische Untergruppe von G ist, die durch das linksinvariante Vektorfeld $X_V|_g = L_{g*}V$ erzeugt wird.

Behauptung 5.2. Seien $V \in T_e G$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\exp(tV) = \phi_V(t), \quad (5.128)$$

dabei ist $\phi_V(t)$ eine einparametrische Untergruppe, die durch $X_V|_g = L_{g*}V$ erzeugt wird.

Beweis

Sei $a \neq 0$ eine Konstante. Dann erfüllt $\phi_V(at)$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \phi_V(at) \Big|_{t=0} = a \frac{d}{dt} \phi_V(t) \Big|_{t=0} = aV,$$

was zeigt, dass $\phi_V(at)$ eine von $L_{g^*}aV$ erzeugte einparametrische Untergruppe ist. Das linksinvariante Vektorfeld $L_{g^*}aV$ erzeugt ebenso $\phi_{aV}(t)$, und wir ermitteln aus der Eindeutigkeit der Lösung, dass $\phi_V(at) = \phi_{aV}(t)$ ist. Aus Definition 5.13 ergibt sich

$$\exp(aV) = \phi_{aV}(1) = \phi_V(a).$$

Der Beweis wird vervollständigt, wenn man a durch t ersetzt. \square

Für eine Matrixgruppe ist die Exponentialabbildung durch die Exponentialfunktion einer Matrix gegeben. Wir betrachten $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ und definieren eine einparametrische Untergruppe $\phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ durch

$$\phi_A(t) = \exp(tA) = I_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots \quad (5.129)$$

Tatsächlich ist $\phi_A(t) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, da $[\phi_A(t)]^{-1} = \phi_A(-t)$ existiert. Außerdem erkennt man leicht, dass $\phi_A(t)\phi_A(s) = \phi(t+s)$ ist. Nun ist die Exponentialabbildung durch

$$\phi_A(1) = \exp(A) = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots \quad (5.130)$$

gegeben. Die Kurve $g \exp(tA)$ ist ein Fluss durch $g \in G$. Wir erhalten

$$\frac{d}{dt} g \exp(tA) \Big|_{t=0} = L_{g^*}A = X_A|_g,$$

wobei X_A ein von A erzeugtes linksinvariantes Vektorfeld ist. Aus (5.115) ergibt sich, dass für eine Matrixgruppe G gilt:

$$L_{g^*}A = X_A|_g = gA. \quad (5.131)$$

Die Kurve $g \exp(tA)$ definiert eine Abbildung $\sigma_t : G \rightarrow G$ gemäß $\sigma_t(g) \equiv g \exp(tA)$, was sich ebenso als Rechtstranslation ausdrücken lässt:

$$\sigma_t = R_{\exp(tA)}. \quad (5.132)$$

5.6.4 Maurer-Cartan-Gleichung

Es sei die Menge der n Vektoren $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ eine Basis von T_eG mit $n = \dim G$. (Wir gehen in diesem Buch durchgängig davon aus, dass n endlich ist.) Die Basis definiert an jedem Punkt g in G eine Menge von n linear unabhängigen linksinvarianten Vektorfeldern, $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, durch $X_\mu|_g = L_{g^*}V_\mu$. Beachten Sie, dass die Menge $\{X_\mu\}$ ein Bezugssystem einer in ganz G definierten Basis ist. Da $[X_\mu, X_\nu]|_g$

selbst wieder ein Element von \mathfrak{g} an der Stelle g ist, kann es nach den $\{X_\mu\}$ entwickelt werden:

$$[X_\mu, X_\nu] = c_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda. \quad (5.133)$$

Die $c_{\mu\nu}^\lambda$ nennt man **Strukturkonstanten** der Lie-Gruppe G . Wenn G eine Matrixgruppe ist, ist die linke Seite von Gleichung (5.133) bei $g = e$ gerade der Kommutator der Matrizen V_μ und V_ν ; siehe (5.116). Wir wollen jetzt zeigen, dass die $c_{\mu\nu}^\lambda$ in der Tat von g unabhängige Konstanten sind. Seien $c_{\mu\nu}^\lambda(e)$ die Strukturkonstanten beim neutralen Element. Wenn L_{g*} auf die Lie-Klammer angewendet wird, folgt

$$[X_\mu, X_\nu]|_g = c_{\mu\nu}^\lambda(e) X_\lambda|_g,$$

was die g -Unabhängigkeit der Strukturkonstanten zeigt. In gewisser Weise bestimmen die Strukturkonstanten eine Lie-Gruppe vollständig (Lie'scher Satz).

Übung 5.23 Zeigen Sie, dass für die Strukturkonstanten die folgenden Bedingungen gelten:

(a) *Schiefsymmetrie:*

$$c_{\mu\nu}^\lambda = -c_{\nu\mu}^\lambda, \quad (5.134)$$

(b) *Jacobi-Identität:*

$$c_{\mu\nu}^\tau c_{\tau\rho}^\lambda + c_{\rho\mu}^\tau c_{\tau\nu}^\lambda + c_{\nu\rho}^\tau c_{\tau\mu}^\lambda = 0. \quad (5.135)$$

Lassen Sie uns eine zu $\{X_\mu\}$ duale Basis $\{\theta^\mu\}$ einführen: $\langle \theta^\mu, X_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu$. $\{\theta^\mu\}$ ist eine Basis für die linksinvarianten 1-Formen. Wir wollen zeigen, dass die duale Basis der **Maurer-Cartan-Gleichung** (Strukturgleichung) genügt:

$$d\theta^\mu = -\frac{1}{2} c_{\nu\lambda}^\mu \theta^\nu \wedge \theta^\lambda. \quad (5.136)$$

Dies gelingt uns mithilfe von Gleichung (5.70):

$$\begin{aligned} d\theta^\mu(X_\nu, X_\lambda) &= X_\nu[\theta^\mu(X_\lambda)] - X_\lambda[\theta^\mu(X_\nu)] - \theta^\mu([X_\nu, X_\lambda]) \\ &= X_\nu[\delta_\lambda^\mu] - X_\lambda[\delta_\nu^\mu] - \theta^\mu(c_{\nu\lambda}^\kappa X_\kappa) = -c_{\nu\lambda}^\mu, \end{aligned}$$

was (5.136) beweist. Wir definieren nun eine Lie-Algebra-wertige 1-Form $\theta : T_g G \rightarrow T_e G$ durch

$$\theta : X \mapsto (L_{g^{-1}})_* X = (L_g)^{-1}_* X \quad (X \in T_g G). \quad (5.137)$$

θ heißt **kanonische 1-Form** oder **Maurer-Cartan-Form** auf G .

Satz 5.3.

(a) Die kanonische 1-Form θ lässt sich als

$$\theta = V_\mu \otimes \theta^\mu \quad (5.138)$$

entwickeln, wobei $\{V_\mu\}$ die Basis von $T_e G$ und $\{\theta^\mu\}$ die duale Basis von $T_e^* G$ ist.

(b) Die kanonische 1-Form θ erfüllt die Gleichung

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0, \quad (5.139)$$

mit $d\theta \equiv V_\mu \otimes d\theta^\mu$ und

$$[\theta \wedge \theta] \equiv [V_\mu, V_\nu] \otimes \theta^\mu \wedge \theta^\nu. \quad (5.140)$$

Beweis

(a) Wir betrachten einen beliebigen Vektor $Y = Y^\mu X_\mu \in T_g G$, wobei $\{X_\mu\}$ die Menge der durch $\{V_\mu\}$; $X_\mu|_g = L_{g*}V_\mu$ erzeugten Basisvektoren ist. Aus (5.137) ergibt sich

$$\theta(Y) = Y^\mu \theta(X_\mu) = Y^\mu (L_{g*})^{-1}[L_{g*}V_\mu] = Y^\mu V_\mu.$$

Andererseits ist

$$(V_\mu \otimes \theta^\mu)(Y) = Y^\nu V_\mu \theta^\mu(X_\nu) = Y^\nu V_\mu \delta_\nu^\mu = Y^\mu V_\mu.$$

Da Y beliebig ist, folgt $\theta = V_\mu \otimes \theta^\mu$.

(b) Wir verwenden die Maurer-Cartan-Gleichung (5.136):

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = -\frac{1}{2}V_\mu \otimes c_{\nu\lambda}{}^\mu \theta^\nu \wedge \theta^\lambda + \frac{1}{2}c_{\nu\lambda}{}^\mu V_\mu \otimes \theta^\nu \wedge \theta^\lambda = 0.$$

Dabei sind die $c_{\nu\lambda}{}^\mu$ die Strukturkonstanten von G . □

5.7 Die Wirkung von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten

In der Physik erscheint eine Lie-Gruppe oft als die Menge der Transformationen auf einer Mannigfaltigkeit. Beispielsweise ist die $SO(3)$ die Gruppe der Rotationen in \mathbb{R}^3 , während die Poincaré-Gruppe die Menge der Transformationen in der Minkowski-Raumzeit ist. Um auch allgemeinere Fälle untersuchen zu können, abstrahieren wir die Wirkung einer Lie-Gruppe G auf eine Mannigfaltigkeit M . Wir sind bereits einmal auf diese Wechselwirkung zwischen einer Gruppe und der Geometrie gestoßen. In Abschnitt 5.3 haben wir einen Fluss in einer Mannigfaltigkeit M definiert als eine Abbildung $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, in welcher \mathbb{R} als eine additive Gruppe wirkt. Wir abstrahieren diese Idee in der nachfolgend beschriebenen Weise.

5.7.1 Definitionen

Definition 5.14. Es seien G eine Lie-Gruppe und M eine Mannigfaltigkeit. Die **Wirkung** von G auf M ist eine differenzierbare Abbildung $\sigma : G \times M \rightarrow M$, für die

gilt:⁸

$$(i) \quad \sigma(e, p) = p \quad (\text{für alle } p \in M), \quad (5.141a)$$

$$(ii) \quad \sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 g_2, p). \quad (5.141b)$$

Beispiel 5.16. (a) Ein Fluss ist eine Wirkung von \mathbb{R} auf eine Mannigfaltigkeit M . Wenn ein Fluss periodisch mit einer Periode T ist, kann man ihn als eine Wirkung von $U(1)$ oder $SO(2)$ auf M ansehen. Zu einem gegebenen periodischen Fluss $\sigma(t, x)$ mit Periode T konstruieren wir eine neue Wirkung $\tilde{\sigma}(\exp(2\pi it/T), x) \equiv \sigma(t, x)$, deren Gruppe G die $U(1)$ ist.

(b) Seien $M \in GL(n, \mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Die Wirkung von $GL(n, \mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^n ist als die übliche Wirkung einer Matrix auf einen Vektor definiert:

$$\sigma(M, x) = M \cdot x. \quad (5.142)$$

Die Wirkung der Untergruppen von $GL(n, \mathbb{R})$ wird ähnlich definiert. Sie können auch auf einen kleineren Raum wirken. So wirkt $O(n)$ auf $S^{n-1}(r)$, eine $(n-1)$ -Sphäre mit Radius r , gemäß

$$\sigma : O(n) \times S^{n-1}(r) \rightarrow S^{n-1}(r). \quad (5.143)$$

(c) Es ist bekannt, dass $SL(2, \mathbb{C})$ auf einen vierdimensionalen Minkowski-Raum M_4 in einer speziellen Weise wirkt. Für $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in M_4$ definieren wir eine Hermite'sche Matrix

$$X(x) \equiv x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (5.144)$$

wobei $\sigma_\mu = (I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ist, mit den Pauli-Matrizen σ_i ($i = 1, 2, 3$). Umgekehrt wird zu einer gegebenen Hermite'schen Matrix X auf eindeutige Weise ein Vektor $(x^\mu) \in M_4$ definiert als

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{sp}(\sigma_\mu X), \quad (5.144b)$$

wobei die Spurbildung über die (2×2) -Matrixindizes erfolgt. Damit gibt es einen Isomorphismus zwischen M_4 und der Menge der Hermite'schen (2×2) -Matrizen. Interessanterweise ist $\det X(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = -x^T \eta x = -(Minkowski\text{-Norm})^2$. Daher gilt:

$$\det X(x) \begin{cases} > 0, & \text{wenn } x \text{ ein zeitartiger Vektor ist,} \\ = 0, & \text{wenn } x \text{ auf dem Lichtkegel liegt,} \\ < 0, & \text{wenn } x \text{ ein raumartiger Vektor ist.} \end{cases}$$

Betrachten wir $A \in SL(2, \mathbb{C})$ und definieren wir eine Wirkung von $SL(2, \mathbb{C})$ auf M_4 durch

$$\sigma(A, x) \equiv AX(x)A^\dagger. \quad (5.145)$$

⁸ Wir verwenden oft die Notation gp anstelle von $\sigma(g, p)$. Mit dieser Schreibweise lautet die zweite Bedingung $g_1(g_2p) = (g_1g_2)p$.

Überprüfen Sie, dass diese Wirkung wirklich den Axiomen aus Definition 5.14 genügt. Die Wirkung von $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ auf M_4 repräsentiert die Lorentz-Transformation $O(1, 3)$. Zunächst erkennen wir, dass die Wirkung die Minkowski-Norm erhält:

$$\det \sigma(A, x) = \det[AX(x)A^\dagger] = \det X(x),$$

weil $\det A = \det A^\dagger = 1$ ist. Außerdem gibt es einen Homomorphismus $\varphi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(1, 3)$ wegen

$$A(BXB^\dagger)A^\dagger = (AB)X(AB)^\dagger.$$

Dieser Homomorphismus kann jedoch nicht injektiv sein, da $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ und $-A$ dasselbe Element von $O(1, 3)$ ergeben; siehe (5.145). Wir bestätigen, dass die folgende Matrix eine explizite Form einer Rotation um den Einheitsvektor \hat{n} um einen Winkel θ ist (Übung 5.24):

$$A = \exp\left[-i\frac{\theta}{2}(\hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\right] = \cos \frac{\theta}{2}I_2 - i(\hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\theta}{2}. \quad (5.146a)$$

Das Auftauchen von $\theta/2$ stellt sicher, dass der Homomorphismus zwischen $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ und der $O(3)$ -Untergruppe von $O(1, 3)$ in der Tat eine „Zwei-zu-eins-Abbildung“ ist. Es sollten natürlich Rotationen um die Achse \hat{n} mit den Drehwinkeln θ und $2\pi + \theta$ dieselbe $O(3)$ -Rotation sein, aber es ist $A(2\pi + \theta) = -A(\theta)$ in $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Dies führt auf die Existenz von Spinoren; siehe Misner et al. (1973) und Wald (1984). Ein Lorentz-Boost (eine eigentliche Lorentz-Transformation) entlang der Richtung \hat{n} mit der Geschwindigkeit $v = \tanh \alpha$ ist gegeben durch

$$A = \exp\left[\frac{\alpha}{2}(\hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\right] = \cosh \frac{\alpha}{2}I_2 + (\hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sinh \frac{\alpha}{2}. \quad (5.146b)$$

Wir zeigen jetzt, dass φ die Gruppe $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ surjektiv auf die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe $O_+^1(1, 3) = \{\Lambda \in O(1, 3) | \det \Lambda = +1, \Lambda_{00} > 0\}$ abbildet. Wir wählen irgendein

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

und nehmen an, dass $x^\mu = (1, 0, 0, 0)$ auf x'^μ abgebildet wird. Wenn wir $\varphi(A) = \Lambda$ schreiben, ergibt sich

$$\begin{aligned} x'^0 &= \frac{1}{2}\text{sp}(AXA^\dagger) = \frac{1}{2}\text{sp}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) > 0 \end{aligned}$$

und daher $\Lambda_{00} > 0$. Um zu zeigen, dass $\det A = +1$ ist, bemerken wir, dass sich jedes Element von $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ als

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta e^{i\gamma} \\ -\sin \beta e^{-i\gamma} & \cos \beta \end{pmatrix} B \\ &= \begin{pmatrix} e^{ia/2} & 0 \\ 0 & e^{ia/2} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & \sin(\beta/2)e^{i\gamma} \\ -\sin(\beta/2)e^{-i\gamma} & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}^2 B \\ &\equiv M^2 N^2 B_0^2 \end{aligned}$$

schreiben lässt, wobei $B \equiv B_0^2$ eine positiv definite Matrix ist. Dies zeigt, dass $\varphi(A)$ positiv definit ist:

$$\det \varphi(A) = (\det \varphi(M))^2 (\det \varphi(N))^2 (\det \varphi(B_0))^2 > 0.$$

Jetzt haben wir festgestellt, dass $\varphi(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \subset \mathrm{O}_+^\dagger(1, 3)$ ist. Die Gleichungen (5.146a) und (5.146b) zeigen, dass für jedes Element von $\mathrm{O}_+^\dagger(1, 3)$ eine korrespondierende Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ existiert, also ist φ surjektiv. Damit haben wir nachgewiesen, dass gilt:

$$\varphi(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) = \mathrm{O}_+^\dagger(1, 3). \quad (5.147)$$

Es lässt sich zeigen, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist und dass sie die universelle Überlagerungsgruppe $\mathrm{Spin}(1, 3)$ von $\mathrm{O}_+^\dagger(1, 3)$ ist, siehe Abschnitt 4.6. \diamond

Übung 5.24 Bestätigen Sie durch explizites Ausrechnen, dass

(a)

$$A = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

eine Rotation um die z -Achse mit dem Drehwinkel θ darstellt und dass

(b)

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha/2) + \sinh(\alpha/2) & 0 \\ 0 & \cosh(\alpha/2) - \sinh(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

einen Lorentz-Boost entlang der z -Achse mit der Geschwindigkeit $v = \tanh \alpha$ darstellt.

Definition 5.15. Sei G eine Lie-Gruppe, die auf eine Mannigfaltigkeit M mittels $\sigma : G \times M \rightarrow M$ wirkt. Die Wirkung σ nennt man

(a) **transitiv**, wenn es für beliebige $p_1, p_2 \in M$ ein Element $g \in G$ gibt, sodass $\sigma(g, p_1) = p_2$ ist;

(b) **frei**, wenn jedes nichttriviale Element $g \neq e$ von G keine Fixpunkte in M hat, d. h., wenn ein Element $p \in M$ mit $\sigma(g, p) = p$ existiert, dann muss g das neutrale Element e sein; und

(c) **effektiv**, wenn das neutrale Element $e \in G$ das einzige Element ist, das die triviale Wirkung auf M definiert, d. h., wenn $\sigma(g, p) = p$ für alle $p \in M$ ist, dann muss g das neutrale Element e sein.

Übung 5.25 Zeigen Sie, dass die Rechtstranslation $R : (a, g) \mapsto R_{ag}$ und die Linkstranslation $L : (a, g) \mapsto L_{ag}$ einer Lie-Gruppe frei und transitiv sind.

5.7.2 Orbits und Isotropiegruppen

Ein gegebener Punkt $p \in M$ erreicht durch die Wirkung von G verschiedene Punkte in M . Der **Orbit** von p unter der Wirkung σ ist die durch

$$Gp = \{\sigma(g, p) | g \in G\} \quad (5.148)$$

definierte Teilmenge von M . Wenn die Wirkung von G auf M transitiv ist, ist der Orbit von jedem $p \in M$ die Mannigfaltigkeit M selbst. Logischerweise ist die Wirkung von G auf jeden Orbit Gp transitiv.

Beispiel 5.17. (a) Ein Fluss σ , der durch ein Vektorfeld $X = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ erzeugt wird, ist periodisch mit der Periode 2π , siehe Beispiel 5.9. Die Wirkung $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $(t, (x, y)) \rightarrow \sigma(t, (x, y))$, ist nicht effektiv wegen $\sigma(2\pi n, (x, y)) = (x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Aus demselben Grund ist dieser Fluss auch nicht frei. Der Orbit durch $(x, y) \neq (0, 0)$ ist der Kreis S^1 mit Mittelpunkt im Ursprung.

(b) Die Wirkung von $O(n)$ auf \mathbb{R}^n ist nicht transitiv, denn wenn $|x| \neq |x'|$ ist, bringt kein Element von $O(n)$ den Punkt x nach x' . Die Wirkung von $O(n)$ auf S^{n-1} ist dagegen offensichtlich transitiv. Der Orbit durch x ist die Sphäre S^{n-1} mit Radius $|x|$. Demzufolge teilen, für eine gegebene Wirkung $\sigma : O(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die Orbits den \mathbb{R}^n in paarweise disjunkte Sphären mit verschiedenen Radien. Wir führen für ein $g \in G$ eine Relation $x \sim y$, wenn $y = \sigma(g, x)$ ist, ein. Sie überprüfen leicht, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse $[x]$ ist ein Orbit durch x . Der Nebenklassenraum $\mathbb{R}^n/O(n)$ ist $[0, \infty)$, da jede Äquivalenzklasse durch den Radius parametrisiert wird. \diamond

Definition 5.16. Sei G eine Lie-Gruppe, die auf eine Mannigfaltigkeit M wirkt. Die **Isotropiegruppe** von $p \in M$ ist eine Untergruppe von G , definiert durch

$$H(p) = \{g \in G \mid \sigma(g, p) = p\}. \quad (5.149)$$

$H(p)$ wird auch **Stabilisator** von p (im Englischen auch „little group“) genannt.

Es ist leicht zu sehen, dass $H(p)$ tatsächlich eine Untergruppe ist. Seien $g_1, g_2 \in H(p)$, dann ist $g_1 g_2 \in H(p)$ wegen $\sigma(g_1 g_2, p) = \sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1, p) = p$ ist. Natürlich ist $e \in H(p)$, da per definitionem $\sigma(e, p) = p$ ist. Bei $g \in H(p)$ ist $g^{-1} \in H(p)$, wegen $p = \sigma(e, p) = \sigma(g^{-1} g, p) = \sigma(g^{-1}, \sigma(g, p)) = \sigma(g^{-1}, p)$.

Übung 5.26 Nehmen Sie an, eine Lie-Gruppe G wirke frei auf eine Mannigfaltigkeit M . Zeigen Sie, dass $H(p) = \{e\}$ für beliebige $p \in M$ ist.

Satz 5.4. Sei G eine Lie-Gruppe, die auf eine Mannigfaltigkeit M wirkt. Dann ist die Isotropiegruppe $H(p)$ für alle $p \in M$ eine Lie-Untergruppe.

Beweis

Für festes $p \in M$ definieren wir eine Abbildung $\varphi_p : G \rightarrow M$ durch $\varphi_p(g) \equiv gp$. Dann ist $H(p)$ das inverse Bild $\varphi_p^{-1}(p)$ von einem Punkt p und daher eine abgeschlossene Menge. Die Gruppeneigenschaften wurden bereits gezeigt. Aus Satz 5.2 folgt, dass $H(p)$ eine Lie-Untergruppe ist. \square

Seien z. B. $M = \mathbb{R}^3$ und $G = \text{SO}(3)$. Wir betrachten den Punkt $p = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Die Isotropiegruppe $H(p)$ ist die Menge der Rotationen um die z -Achse, welche isomorph zur $\text{SO}(2)$ ist.

Seien G eine Lie-Gruppe und H irgendeine Untergruppe von G . Der Nebenklassenraum G/H erlaubt eine differenzierbare Struktur, und G/H wird zu einer Mannigfaltigkeit namens **homogener Raum**. Beachten Sie, dass $\dim G/H = \dim G - \dim H$ ist. Seien G eine Lie-Gruppe, die transitiv auf einer Mannigfaltigkeit M wirkt, und $H(p)$ eine Isotropiegruppe von $p \in M$. Dabei ist $H(p)$ eine Lie-Untergruppe, und der Nebenklassenraum $G/H(p)$ ist ein homogener Raum. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass, wenn $G, H(p)$ und M gewisse technische Anforderungen erfüllen (z. B. $G/H(p)$ kompakt), $G/H(p)$ homöomorph zu M ist; siehe Beispiel 5.18.

Beispiel 5.18. (a) Seien $G = \text{SO}(3)$ eine auf den \mathbb{R}^3 wirkende Gruppe und $H = \text{SO}(2)$ die Isotropiegruppe von $x \in \mathbb{R}^3$. Die Gruppe $\text{SO}(3)$ wirkt transitiv auf die S^2 , und wir erhalten $\text{SO}(3)/\text{SO}(2) \cong S^2$. Was bedeutet dies geometrisch? Sei $g' = gh$ mit $g, g' \in G$ und $h \in H$. Da H die Menge der Rotationen in einer Ebene ist, müssen g und g' Rotationen um dieselbe Achse sein. Dann wird die Äquivalenzklasse $[g]$ durch die Polarwinkel (θ, ϕ) festgelegt. Daher ergibt sich erneut $G/H = S^2$. Da $\text{SO}(2)$ kein Normalteiler von $\text{SO}(3)$ ist, lässt die S^2 keine Gruppenstruktur zu.

Dieses Resultat lässt sich leicht auf höherdimensionale Rotationsgruppen übertragen, und wir erhalten das nützliche Ergebnis

$$\text{SO}(n+1)/\text{SO}(n) = S^n. \quad (5.150)$$

$\text{O}(n+1)$ wirkt auch transitiv auf S^n , und es folgt

$$\text{O}(n+1)/\text{O}(n) = S^n. \quad (5.151)$$

Ähnliche Beziehungen gelten für $\text{U}(n)$ und $\text{SU}(n)$:

$$\text{U}(n+1)/\text{U}(n) = \text{SU}(n+1)/\text{SU}(n) = S^{2n+1}. \quad (5.152)$$

(b) Die Gruppe $\text{O}(n+1)$ wirkt transitiv von links auf den $\mathbb{R}P^n$. Beachten Sie zunächst, dass $\text{O}(n+1)$ auf \mathbb{R}^{n+1} in der üblichen Weise wirkt und die Äquivalenzrelation erhält, mit welcher man $\mathbb{R}P^n$ definiert (siehe Beispiel 5.12). Wir betrachten nun $x, x' \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $g \in \text{O}(n+1)$. Wenn $x \sim x'$ (d. h., wenn $x' = ax$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ist, dann folgt daraus $gx \sim gx'$ ($gx' = agx$). Demzufolge induziert diese Wirkung von $\text{O}(n+1)$ auf \mathbb{R}^{n+1} die natürliche Wirkung von $\text{O}(n+1)$ auf $\mathbb{R}P^n$. Natürlich ist diese Wirkung transitiv auf $\mathbb{R}P^n$. (Schauen Sie sich zwei Repräsentanten mit gleicher Norm an.) Wenn wir einen Punkt p im $\mathbb{R}P^n$ betrachten, welcher einem Punkt $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ entspricht, ist die Isotropiegruppe

$$H(p) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \text{O}(n) & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} = \text{O}(1) \times \text{O}(n), \quad (5.153)$$

wobei $O(1)$ die Menge $\{-1, +1\} = \mathbb{Z}_2$ ist. Nun erhalten wir

$$O(n+1)/[O(1) \times O(n)] \cong S^n/\mathbb{Z}_2 \cong RP^n. \quad (5.154)$$

(c) Dieses Ergebnis können wir leicht auf Graßmann-Mannigfaltigkeiten verallgemeinern: $G_{k,n}(\mathbb{R}) = O(n)/[O(k) \times O(n-k)]$. Wir zeigen zuerst, dass $O(n)$ transitiv auf $G_{k,n}(\mathbb{R})$ wirkt. Sei A ein Element von $G_{k,n}(\mathbb{R})$, dann ist A eine k -dimensionale Ebene in \mathbb{R}^n . Wir definieren eine $(n \times n)$ -Matrix P_A , die einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ in die Ebene A projiziert. Führen wir die Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ in \mathbb{R}^n und eine weitere Orthonormalbasis $\{f_1, \dots, f_k\}$ in der Ebene A ein, wobei Orthonormalität bezüglich der euklidischen Metrik in \mathbb{R}^n definiert sein soll. In den $\{e_i\}$ entwickeln wir f_a als $f_a = \sum_i f_{ai} e_i$, und der projizierte Vektor ist

$$\begin{aligned} P_A v &= (v f_1) f_1 + \dots + (v f_k) f_k \\ &= \sum_{i,j} (v_i f_{1i} f_{1j} + \dots + v_i f_{ki} f_{kj}) e_j = \sum_{i,a,j} v_i f_{ai} f_{aj} e_j. \end{aligned}$$

Damit wird P_A durch eine Matrix

$$(P_A)_{ij} = \sum f_{ai} f_{aj} \quad (5.155)$$

dargestellt. Beachten Sie, dass $P_A^2 = P_A$, $P_A^T = P_A$ und $\text{sp } P_A = k$ ist. (Diese letzte Beziehung gilt, weil es immer möglich ist, ein Koordinatensystem zu wählen, sodass gilt:

$$P_A = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}).$$

Dies stellt sicher, dass A in der Tat eine k -dimensionale Ebene ist.) Umgekehrt legt jede Matrix P , welche diese drei Bedingungen erfüllt, eindeutig eine k -dimensionale Ebene in \mathbb{R}^n fest, welche ein eindeutiges Element von $G_{k,n}(\mathbb{R})$ ist.

Wir zeigen nun, dass $O(n)$ transitiv auf $G_{k,n}(\mathbb{R})$ wirkt. Wir setzen $A \in G_{k,n}(\mathbb{R})$ und $g \in O(n)$ und konstruieren $P_B \equiv g P_A g^{-1}$. Die Matrix P_B bestimmt ein Element $B \in G_{k,n}(\mathbb{R})$ wegen $P_B^2 = P_B$, $P_B^T = P_B$ und $\text{sp } P_B = k$. Wir wollen diese Wirkung mit $B = \sigma(g, A)$ bezeichnen. Offenkundig ist diese Wirkung transitiv, denn mit einer gegebenen k -dimensionalen Standardbasis von A , beispielsweise $\{f_1, \dots, f_k\}$, kann man jede k -dimensionale Basis $\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k\}$ durch eine Wirkung von $O(n)$ auf dieser Basis erreichen.

Betrachten wir nun eine spezielle Ebene C_0 , die von der Standardbasis $\{f_1, \dots, f_k\}$ aufgespannt wird. Dann hat ein Element der Isotropiegruppe $H(C_0)$ die Form

$$M = \begin{pmatrix} & & & & k & n-k \\ & & & & 0 & \\ g_1 & & & & & \\ 0 & & & & g_2 & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{n-k}, \quad (5.156)$$

mit $g_1 \in O(k)$. Wegen $M \in O(n)$ muss eine $((n-k) \times (n-k))$ -Matrix g_2 ein Element von $O(n-k)$ sein. Somit ist die Isotropiegruppe isomorph zu $O(k) \times O(n-k)$. Damit haben wir schließlich bestätigt, dass gilt:

$$G_{k,n}(\mathbb{R}) \cong O(n)/[O(k) \times O(n-k)]. \quad (5.157)$$

Die Dimension von $G_{k,n}(\mathbb{R})$ erhalten wir aus der allgemeinen Formel als

$$\begin{aligned}\dim G_{k,n}(\mathbb{R}) &= \dim O(n) - \dim [O(k) \times O(n-k)] \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) - [\frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)] \\ &= k(n-k),\end{aligned}\tag{5.158}$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat von Beispiel 5.5. Gleichung (5.157) zeigt außerdem auch, dass die Graßmann-Mannigfaltigkeit kompakt ist. \diamond

5.7.3 Induzierte Vektorfelder

Sei G eine Lie-Gruppe, die auf M gemäß $(g, x) \mapsto gx$ wirkt. Ein durch $V \in T_e G$ erzeugtes linksinvariantes Vektorfeld X_V induziert auf natürliche Weise ein Vektorfeld in M . Wir definieren einen Fluss in M durch

$$\sigma(t, x) = \exp(tV)x,\tag{5.159}$$

$\sigma(t, x)$ ist dabei eine einparametrische Gruppe von Transformationen. Dann können wir das sog. **induzierte Vektorfeld** V^\sharp definieren:

$$V^\sharp|_x = \left. \frac{d}{dt} \exp(tV)x \right|_{t=0}.\tag{5.160}$$

Damit haben wir eine Abbildung $\sharp : T_e G \rightarrow \mathcal{X}(M)$ erhalten, die durch $V \mapsto V^\sharp$ definiert wird.

Übung 5.27 Die Lie-Gruppe $SO(2)$ wirkt in der gewohnten Weise auf $M = \mathbb{R}^2$. Sei

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ein Element von $\mathfrak{so}(2)$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\exp(tV) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

und ermitteln Sie den induzierten Fluss durch den Punkt

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass $V^\sharp|_x = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ ist.

Beispiel 5.19. Wir betrachten $G = SO(3)$ und $M = \mathbb{R}^3$. Die Basisvektoren von $T_e G$ werden durch Rotationen um die x -, y - und z -Achse erzeugt. Wir bezeichnen sie mit X_x, X_y bzw. X_z (siehe Übung 5.22):

$$X_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indem wir eine ähnliche Argumentation wie zuvor anwenden, erhalten wir die korrespondierenden induzierten Vektoren:

$$X_x^\sharp = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_y^\sharp = -x \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_z^\sharp = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

◊

5.7.4 Die adjungierte Darstellung

Eine Lie-Gruppe G wirkt auf sich selbst in einer besonderen Weise.

Definition 5.17. Wir betrachten $a \in G$ und definieren einen Homomorphismus $\text{ad}_a : G \rightarrow G$ durch die Konjugation

$$\text{ad}_a : g \mapsto aga^{-1}. \quad (5.161)$$

Dieser Homomorphismus wird **adjungierte Darstellung** von G genannt.

Übung 5.28 Zeigen Sie, dass ad_a ein Homomorphismus ist. Definieren Sie $\sigma : G \times G \rightarrow G$ durch $\sigma(a, g) \equiv \text{ad}_a g$. Zeigen Sie, dass $\sigma(a, g)$ eine Wirkung von G auf sich selbst ist.

Wenn wir beachten, dass $\text{ad}_a e = e$ ist, können wir die induzierte Abbildung $\text{ad}_{a*} : T_g G \rightarrow T_{\text{ad}_a g} G$ auf $g = e$ beschränken:

$$\text{Ad}_a : T_e G \rightarrow T_e G, \quad (5.162)$$

mit $\text{Ad}_a \equiv \text{ad}_{a*}|_{T_e G}$. Wenn wir $T_e G$ mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} identifizieren, haben wir eine Abbildung $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ erhalten, die sog. **adjungierte Abbildung** von G . Wegen $\text{ad}_{a*} \text{ad}_{b*} = \text{ad}_{ab*}$ folgt $\text{Ad}_a \text{Ad}_b = \text{Ad}_{ab}$. Ähnlich ergibt sich $\text{Ad}_{a^{-1}} = \text{Ad}_a^{-1}$ aus $\text{ad}_{a^{-1}*} \text{ad}_{a*}|_{T_e G} = \text{id}_{T_e G}$.

Wenn G eine Matrixgruppe ist, wird die adjungierte Darstellung eine einfache Matrixoperation. Seien $g \in G$ und $X_V \in \mathfrak{g}$ sowie $\sigma_V(t) = \exp(tV)$ eine einparametrische Untergruppe, die von $V \in T_e G$ erzeugt wird. Dann ergibt die Wirkung von ad_g auf $\sigma_V(t)$, dass $g \exp(tV) g^{-1} = \exp(tgVg^{-1})$ ist. Wie für Ad_g gilt $\text{Ad}_g : V \mapsto gVg^{-1}$, wegen

$$\text{Ad}_g V = \frac{d}{dt} [\text{ad}_g \exp(tV)] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \exp(tgVg^{-1}) \Big|_{t=0} = gVg^{-1}. \quad (5.163)$$

Aufgaben

5.1 Die Stiefel-Mannigfaltigkeit $V(m, r)$ ist die Menge der orthonormalen Vektoren $\{e_i\}$ ($1 \leq i \leq r$) in \mathbb{R}^m ($r \leq m$). Wir können ein Element A von $V(m, r)$ als eine $(m \times r)$ -Matrix (e_1, \dots, e_r) ausdrücken. Zeigen Sie, dass $\text{SO}(m)$ transitiv auf $V(m, r)$ wirkt.

Sei

$$A_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ein Element von $V(m, r)$. Zeigen Sie, dass $\text{SO}(m - r)$ die Isotropiegruppe von A_0 ist. Bestätigen Sie, dass gilt: $V(m, r) = \text{SO}(m)/\text{SO}(m - r)$ und $\dim V(m, r) = [r(r - 1)]/2 + r(m - r)$.⁹

5.2 Sei M die vierdimensionale Minkowski-Raumzeit. Definieren Sie die Wirkung eines linearen Operators $* : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{4-r}(M)$ durch

$$r = 0 : \quad *1 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3; \quad (5.164)$$

$$r = 1 : \quad *dx^i = -dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0, \quad *dx^0 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3; \quad (5.165)$$

$$r = 2 : \quad *dx^i \wedge dx^j = dx^k \wedge dx^0, \quad *dx^i \wedge dx^0 = -dx^j \wedge dx^k; \quad (5.166)$$

$$r = 3 : \quad *dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^0, \quad *dx^i \wedge dx^j \wedge dx^0 = -dx^k; \quad (5.167)$$

$$r = 4 : \quad *dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 1; \quad (5.168)$$

dabei ist (i, j, k) eine gerade Permutation von $(1, 2, 3)$. Das Vektorpotenzial A und der elektromagnetische Tensor F sind definiert wie in Beispiel 5.11. $J = -\rho dx^0 + j_k dx^k$ ist die Strom-1-Form.

- (a) Schreiben Sie die Gleichung $d * F = *J$ aus und überprüfen Sie, dass sie sich auf die zwei Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot E = \rho$ und $\nabla \times B - \partial E / \partial t = j$ reduziert.
- (b) Zeigen Sie, dass die Identität $0 = d(d * F) = d * J$ sich auf die Gleichung der Ladungserhaltung,

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

reduziert.

- (c) Zeigen Sie, dass sich die Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ als $d * A = 0$ schreiben lässt.

⁹ Die Stiefel-Mannigfaltigkeit ist in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der Sphäre. Beachten Sie $V(m, 1) = S^{m-1}$.

6

De-Rham-Kohomologiegruppen

In Kapitel 3 haben wir Homologiegruppen von topologischen Räumen definiert. Ist ein topologischer Raum M eine Mannigfaltigkeit, dann können wir über die auf M definierten Differentialformen die zu einer Homologiegruppe *duale* Gruppe definieren. Diese dualen Gruppen werden De-Rham-Kohomologiegruppen genannt. Außer dass Physiker mit Differentialformen meist besser vertraut sind, haben Kohomologiegruppen auch noch eine Reihe von weiteren Vorzügen gegenüber Homologiegruppen.

Wir folgen hier eng Nash und Sen (1983) sowie Flanders (1963). Bott und Tu (1982) enthält komplexere Aspekte dieses Themas.

6.1 Der Stokes'sche Satz

Eines der wichtigsten Hilfsmittel beim Studium von De-Rham-Kohomologiegruppen ist der Stokes'sche Satz, den die meisten Physiker aus dem Elektromagnetismus bestens kennen. Der Stokes'sche und der Gauß'sche Satz werden hier auf einheitliche Weise behandelt.

6.1.1 Vorüberlegung

Lassen Sie uns eine Integration einer r -Form über ein r -Simplex in einem euklidischen Raum definieren. Hierzu müssen wir zunächst das **Standard- n -Simplex** $\bar{\sigma}_r = (p_0 p_1 \dots p_r)$ in \mathbb{R}^r definieren, wobei gilt:

$$p_0 = (0, 0, \dots, 0),$$

$$p_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

...

$$p_r = (0, 0, \dots, 1),$$

siehe Abb. 6.1. Mit einer Koordinate $\{x^\mu\}$ von \mathbb{R}^r ist $\bar{\sigma}_r$ durch

$$\bar{\sigma}_r = \left\{ (x^1, \dots, x^r) \in \mathbb{R}^r \mid x^\mu \geq 0, \sum_{\mu=1}^r x^\mu \leq 1 \right\} \quad (6.1)$$

gegeben. Eine r -Form ω (das Volumenelement) in \mathbb{R}^r schreibt sich als

$$\omega = a(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r.$$

Wir definieren die Integration von ω über $\bar{\sigma}_r$ durch

$$\int_{\bar{\sigma}_r} \omega \equiv \int_{\bar{\sigma}_r} a(x) dx^1 dx^2 \dots dx^r, \quad (6.2)$$

wobei die rechte Seite der Gleichung die gewöhnliche r -fache Integration ist. Wenn beispielsweise $r = 2$ und $\omega = dx \wedge dy$ ist, erhalten wir

$$\int_{\bar{\sigma}_2} \omega = \int_{\bar{\sigma}_2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{1}{2}.$$

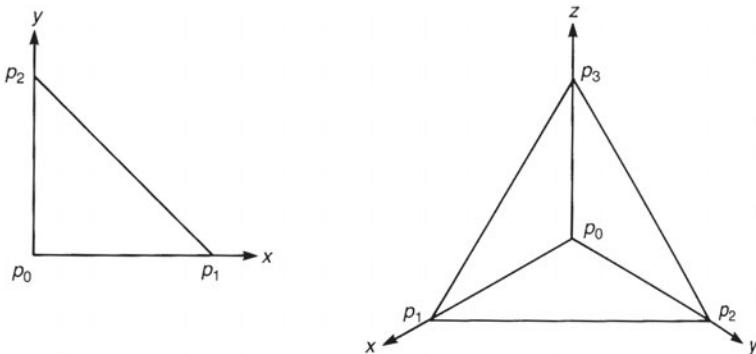


Abb. 6.1. Das Standard-2-Simplex $\bar{\sigma}_2 = (p_0 p_1 p_2)$ und das Standard-3-Simplex $\bar{\sigma}_3 = (p_0 p_1 p_2 p_3)$.

Als nächstes definieren wir eine r -Kette, einen r -Zyklus und einen r -Rand in einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Seien σ_r ein r -Simplex in \mathbb{R}^r und $f : \sigma_r \rightarrow M$ eine glatte Abbildung.¹ Wir nehmen an dieser Stelle an, dass f keine Inverse zu haben braucht. Das Bild im f könnte z. B. ein Punkt in M sein. Wir bezeichnen das Bild von σ_r in M mit s_r und nennen es ein (**singuläres**) r -**Simplex** in M . Diese Simplexe werden singulär genannt, weil sie keine Triangulation von M liefern und, darüber hinaus, eine *geometrische Unabhängigkeit* von Punkten in einer Mannigfaltigkeit keinen Sinn hat (siehe Abschnitt 3.2). Wenn $\{s_{r,i}\}$ die Menge der r -Simplexe in M ist, definieren wir eine r -**Kette** in M durch eine formale Summe über $\{s_{r,i}\}$ mit \mathbb{R} -Koeffizienten:

$$c = \sum_i a_i s_{r,i} \quad (a_i \in \mathbb{R}). \quad (6.3)$$

¹ Um die mit der Differenzierbarkeit von f am Rand von σ_r verbundenen Subtilitäten zu umgehen, kann f über einer offenen Teilmenge U des \mathbb{R}^r definiert sein, welche σ_r enthält.

Im Folgenden werden wir es nur mit \mathbb{R} -Koeffizienten zu tun haben, deshalb verzichten wir auf die explizite Erwähnung von \mathbb{R} . Die r -Ketten in M bilden die **Kettengruppe** $C_r(M)$. Unter $f : \sigma_r \rightarrow M$ wird der Rand $\partial\sigma_r$ eines Simplexes ebenfalls auf eine Teilmenge von M abgebildet. Natürlich ist $\partial s_r \equiv f(\partial\sigma_r)$ eine Menge von $(r-1)$ -Simplexen in M und wird **Rand** von s_r genannt. ∂s_r korrespondiert mit dem geometrischen Rand von s_r mit einer induzierten Orientierung, wie wir sie in Abschnitt 3.3 definiert haben. Wir haben eine Abbildung

$$\partial : C_r(M) \rightarrow C_{r-1}(M). \quad (6.4)$$

Aus den Ergebnissen von Abschnitt 3.3 ergibt sich, dass ∂ nilpotent ist: $\partial^2 = 0$.

Zyklen und Ränder werden in exakt derselben Weise definiert wie in Abschnitt 3.3; beachten Sie jedoch, dass \mathbb{Z} nun durch \mathbb{R} ersetzt wird. Wenn c_r ein **r -Zyklus** ist, erhalten wir $\partial c_r = 0$, während im Fall, dass c_r ein **r -Rand** ist, eine $(r+1)$ -Kette c_{r+1} existiert, sodass $c_r = \partial c_{r+1}$ ist. Die **Rändergruppe** $B_r(M)$ ist die Menge der r -Ränder, und die **Zylengruppe** $Z_r(M)$ ist die Menge der r -Zyklen. Es gibt unendlich viele singuläre Simplexe, welche die Gruppen $C_r(M)$, $B_r(M)$ und $Z_r(M)$ aufbauen. Aus $\partial^2 = 0$ folgt $Z_r(M) \supset B_r(M)$; vgl. Satz 3.3. Die singuläre Homologiegruppe ist durch

$$H_r(M) \equiv Z_r(M)/B_r(M) \quad (6.5)$$

definiert. Mit milden topologischen Annahmen wird die singuläre Homologiegruppe isomorph zur korrespondierenden Simplex-Homologiegruppe mit \mathbb{R} -Koeffizienten, und wir verwenden für sie dasselbe Symbol.

Damit sind wir jetzt bereit, eine Integration einer r -Form ω über eine r -Kette in M zu definieren. Wir definieren zuerst eine Integration von ω auf einem r -Simplex s_r von M durch

$$\int_{s_r} \omega = \int_{\bar{\sigma}_r} f^* \omega, \quad (6.6)$$

wobei $f : \bar{\sigma}_r \rightarrow M$ eine glatte Abbildung ist, sodass $s_r = f(\bar{\sigma}_r)$. Da $f^* \omega$ eine r -Form in \mathbb{R}^r ist, steht auf der rechten Seite der Gleichung ein gewöhnliches r -faches Integral. Für eine allgemeine r -Kette $c = \sum_i a_i s_{r,i} \in C_r(M)$ definieren wir

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{s_{r,i}} \omega. \quad (6.7)$$

6.1.2 Der Stokes'sche Satz

Satz 6.1. (Stokes'scher Satz) Seien $\omega \in \Omega^{r-1}(M)$ und $c \in C_r(M)$. Dann ist

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad (6.8)$$

Beweis

Da c eine Linearkombination von r -Simplexen ist, genügt es, (6.8) für ein r -Simplex s_r in M zu beweisen. Sei $f : \bar{\sigma}_r \rightarrow M$ eine Abbildung, sodass $f(\bar{\sigma}_r) = s_r$ ist. Dann

gilt

$$\int_{S_r} d\omega = \int_{\bar{\sigma}_r} f^*(d\omega) = \int_{\bar{\sigma}_r} d(f^*\omega),$$

wobei Gleichung (5.75) verwendet wurde. Also ist

$$\int_{\partial S_r} \omega = \int_{\partial \bar{\sigma}_r} f^* \omega.$$

Beachten Sie, dass $f^* \omega$ eine $(r-1)$ -Form in \mathbb{R}^r ist. Damit genügt es für den Beweis des Stokes'schen Satzes,

$$\int_{S_r} d\omega = \int_{\partial S_r} \omega, \quad (6.9a)$$

die alternative Formel

$$\int_{\bar{\sigma}_r} d\psi = \int_{\partial \bar{\sigma}_r} \psi \quad (6.9b)$$

für eine $(r-1)$ -Form ψ in \mathbb{R}^r zu beweisen. Die allgemeinste Form von ψ ist

$$\psi = \sum a_\mu(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{\mu-1} \wedge dx^{\mu+1} \wedge \dots \wedge dx^r.$$

Da eine Integration distributiv ist, genügt es, (6.9b) für $\psi = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1}$ zu beweisen. Wir erkennen, dass gilt:

$$d\psi = \frac{\partial a}{\partial x^r} dx^r \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1} = (-1)^{r-1} \frac{\partial a}{\partial x^r} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1} \wedge dx^r.$$

Durch direktes Ausrechnen erhalten wir mit (6.2):

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\sigma}_r} d\psi &= (-1)^{r-1} \int_{\bar{\sigma}_r} \frac{\partial a}{\partial x^r} dx^1 \dots dx^{r-1} dx^r \\ &= (-1)^{r-1} \int_{x^\mu \geq 0, \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu \leq 1} dx^1 \dots dx^{r-1} \int_0^{1 - \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu} \frac{\partial a}{\partial x^r} dx^r \\ &= (-1)^{r-1} \int dx^1 \dots dx^{r-1} \left[a(x^1, \dots, x^{r-1}, 1 - \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu) - a(x^1, \dots, x^{r-1}, 0) \right]. \end{aligned}$$

Für den Rand von $\bar{\sigma}_r$ erhalten wir

$$\partial \bar{\sigma}_r = (p_1, p_2, \dots, p_r) - (p_0, p_2, \dots, p_r) + \dots + (-1)^r (p_0, p_1, \dots, p_{r-1}).$$

Beachten Sie, dass $\psi = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1}$ verschwindet, wenn eines der x^1, \dots, x^{r-1} konstant ist. Dann folgt

$$\int_{(p_0, p_2, \dots, p_r)} \psi = 0,$$

wegen $x^1 \equiv 0$ auf (p_0, p_2, \dots, p_r) . Tatsächlich tragen die meisten Seiten von $\partial\bar{\sigma}_r$ nicht zur rechten Seite von (6.9b) bei, und es bleibt nur noch

$$\int_{\partial\bar{\sigma}_r} \psi = \int_{(p_1, p_2, \dots, p_r)} \psi + (-1)^r \int_{(p_0, p_1, \dots, p_{r-1})} \psi.$$

Da $(p_0, p_1, \dots, p_{r-1})$ das Standard- $(r-1)$ -Simplex ($x^\mu \geq 0, \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu \leq 1$) ist, auf welchem $x^r = 0$ ist, nimmt der zweite Term die Form

$$(-1)^r \int_{(p_0, p_1, \dots, p_{r-1})} \psi = (-1)^r \int_{\bar{\sigma}_{r-1}} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 0) dx^1 \dots dx^{r-1}$$

an. Der erste Term ist

$$\begin{aligned} \int_{(p_1, p_2, \dots, p_r)} \psi &= \int_{(p_1, \dots, p_{r-1}, p_0)} a\left(x^1, \dots, x^{r-1}, 1 - \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu\right) dx^1 \dots dx^{r-1} \\ &= (-1)^{r-1} \int_{\bar{\sigma}_{r-1}} a\left(x^1, \dots, x^{r-1}, 1 - \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu\right) dx^1 \dots dx^{r-1}, \end{aligned}$$

wobei der Integrationsbereich (p_1, \dots, p_r) in Richtung von x^r auf die $(p_1, \dots, p_{r-1}, p_0)$ -Ebene projiziert wurde, unter Erhalt der Orientierung. Indem wir alle diese Ergebnisse zusammenfassen, haben wir den Satz, d. h. Gleichung (6.9b), bewiesen. (Es ist ratsam, diesen Beweis für $m = 3$ mithilfe von Abb. 6.1 zu verifizieren.) \square

Übung 6.1 Seien $M = \mathbb{R}^3$ und $\omega = a dx + b dy + c dz$. Zeigen Sie, dass der Stokes'sche Satz sich dann als

$$\int_S \operatorname{rot} \omega \cdot dS = \oint_C \omega \cdot dS \quad (\text{Stokes'scher Satz}) \quad (6.10)$$

schreibt, mit $\omega = (a, b, c)$ und C als Rand einer Fläche S . Zeigen Sie in ähnlicher Weise, dass für $\psi = \frac{1}{2} \psi_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ der Gauß'sche Satz gilt:

$$\int_V \operatorname{div} \psi dV = \oint_S \psi \cdot dS \quad (\text{Gauß'scher Satz});$$

hierbei ist $\psi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \psi_{\mu\nu}$, und S ist der Rand des Volumens V .

6.2 De-Rham-Kohomologiegruppen

6.2.1 Definitionen

Definition 6.1. Sei M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Menge der geschlossenen r -Formen auf M wird die r -te **Kozykelgruppe** genannt,

geschrieben $Z^r(M)$. Die Menge der exakten r -Formen (Abschnitt 5.4.2) ist die r -te **Korandgruppe** $B^r(M)$. Diese Mengen sind Vektorräume mit \mathbb{R} -Koeffizienten. Wegen $d^2 = 0$ ist $Z^r(M) \supset B^r(M)$.

Übung 6.2 Zeigen Sie, dass gilt:

- (a) wenn $\omega \in Z^r(M)$ und $\psi \in Z^s(M)$, dann $\omega \wedge \psi \in Z^{r+s}(M)$,
- (b) wenn $\omega \in Z^r(M)$ und $\psi \in B^s(M)$, dann $\omega \wedge \psi \in B^{r+s}(M)$ und
- (c) wenn $\omega \in B^r(M)$ und $\psi \in B^s(M)$, dann $\omega \wedge \psi \in B^{r+s}(M)$.

Definition 6.2. Die r -te **De-Rham-Kohomologiegruppe** ist durch

$$H^r(M; \mathbb{R}) \equiv Z^r(M)/B^r(M) \quad (6.11)$$

definiert. Wenn $r \leq -1$ oder $r \geq m+1$, kann man $H^r(M; \mathbb{R})$ als trivial definieren. Im Folgenden verzichten wir auf die explizite Nennung der \mathbb{R} -Koeffizienten.

Sei jetzt $\omega \in Z^r(M)$. Dann ist $[\omega] \in H^r(M)$ die Äquivalenzklasse $\{\omega' \in Z^r(M) | \omega' = \omega + d\psi, \psi \in \Omega^{r-1}(M)\}$. Zwei Formen, deren Differenz eine exakte Form ist, heißen **kohomolog**. Wir werden später sehen, dass $H^r(M)$ isomorph zu $H_r(M)$ ist. Die folgenden Beispiele werden die Vorstellung von De-Rham-Kohomologiegruppen verdeutlichen.

Beispiel 6.1. $B^0(M)$, also der Fall $r = 0$, hat keine Bedeutung, da es keine (-1) -Form gibt. Wir definieren $\Omega^{-1}(M)$ als die leere Menge, also $B^0(M) = 0$. Dann ist $H^0(M) = Z^0(M) = \{f \in \Omega^0(M) = \mathcal{F}(M) | df = 0\}$. Wenn M zusammenhängend ist, wird die Bedingung $df = 0$ dann und nur dann erfüllt, wenn f über M konstant ist. Daher ist $H^0(M)$ isomorph zum Vektorraum \mathbb{R} :

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}. \quad (6.12)$$

Hat M n Zusammenhangskomponenten, so ist dann und nur dann $df = 0$, wenn f auf jeder Zusammenhangskomponente konstant ist. Daher legen n reelle Zahlen die Gruppe fest:

$$H^0(M) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_n. \quad (6.13)$$

◇

Beispiel 6.2. Sei $M = \mathbb{R}$. Aus Beispiel 6.1 wissen wir, dass $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ist. Wir wollen jetzt $H^1(\mathbb{R})$ ermitteln. Sei x eine Koordinate von \mathbb{R} . Wegen $\dim \mathbb{R} = 1$ ist jede 1-Form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$ geschlossen: $d\omega = 0$. Sei $\omega = f dx$, mit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Wir definieren eine Funktion $F(x)$ durch

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \Omega^0(\mathbb{R}).$$

Wegen $dF(x)/dx = f(x)$ ist ω eine exakte Form:

$$\omega = f dx = \frac{dF(x)}{dx} dx = dF.$$

Somit ist jede 1-Form sowohl geschlossen als auch exakt. Wir haben damit festgestellt:

$$H^1(\mathbb{R}) = \{0\}. \quad (6.14)$$

◊

Beispiel 6.3. Sei $S^1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Da S^1 zusammenhängend ist, ergibt sich $H^0(S^1) = \mathbb{R}$. Wir berechnen als nächstes $H^1(S^1)$. Sei $\omega = f(\theta) d\theta \in \Omega^1(S^1)$. Ist es möglich, $\omega = dF$ für ein $F \in \mathcal{F}(S^1)$ zu schreiben? Wiederholen wir die Argumentation aus dem vorigen Beispiel. Wenn $\omega = dF$ ist, dann muss $F \in \mathcal{F}(S^1)$ durch

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(\theta') d\theta'$$

gegeben sein. Damit F eindeutig auf S^1 definiert ist, muss F der Periodizität $F(2\pi) = F(0)$ ($= 0$) genügen. Dies bedeutet, dass F die Bedingung

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(\theta') d\theta' = 0$$

erfüllen muss. Wenn wir eine Abbildung $\lambda : \Omega^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\lambda : \omega = f d\theta \mapsto \int_0^{2\pi} f(\theta') d\theta' \quad (6.15)$$

definieren, dann lässt sich $B^1(S^1)$ mit $\ker \lambda$ identifizieren. Mit Satz (3.1) erhalten wir jetzt

$$H^1(S^1) = \Omega^1(S^1)/\ker \lambda = \text{im } \lambda = \mathbb{R}. \quad (6.16)$$

Dies lässt sich auch mit der folgenden Überlegung zeigen: Seien ω und ω' geschlossene, aber nicht exakte Formen. Obwohl $\omega - \omega'$ im Allgemeinen nicht exakt ist, können wir zeigen, dass eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\omega' - a\omega$ exakt ist. Tatsächlich ergibt sich, wenn wir

$$a = \int_0^{2\pi} \omega' \Big| \int_0^{2\pi} \omega$$

setzen:

$$\int_0^{2\pi} (\omega' - a\omega) = 0.$$

Dies zeigt, dass für eine gegebene geschlossene, aber nicht exakte Form ω jede geschlossene Form ω' kohomolog zu $a\omega$ ist, mit einem $a \in \mathbb{R}$. Somit wird jede Kohomologieklassse durch eine reelle Zahl a festgelegt, also ist $H^1(S^1) = \mathbb{R}$. \diamond

Übung 6.3 Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Definieren Sie eine 1-Form ω durch

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy. \quad (6.17)$$

- (a) Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist.
- (b) Definieren Sie eine „Funktion“ $F(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$. Zeigen Sie, dass $\omega = dF$ ist. Ist ω exakt?

6.2.2 Dualität von $H_r(M)$ und $H^r(M)$ und der Satz von de Rham

Wie der Name bereits stark vermuten lässt, ist die Kohomologiegruppe ein dualer Raum der Homologiegruppe. Die Dualität liefert uns der Stokes'sche Satz. Wir definieren zuerst das innere Produkt einer r -Form und einer r -Kette in M . Seien M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $C_r(M)$ die Kettengruppe von M . Wir betrachten ein $c \in C_r(M)$ und ein $\omega \in \Omega^r(M)$, mit $1 \leq r \leq m$. Wir definieren das innere Produkt $(\cdot, \cdot) : C_r(M) \times \Omega^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$c, \omega \mapsto (c, \omega) \equiv \int_c \omega. \quad (6.18)$$

Offenkundig ist (c, ω) linear sowohl in c als auch in ω , und (\cdot, ω) kann als lineare Abbildung auf c angesehen werden – und umgekehrt:

$$(c_1 + c_2, \omega) = \int_{c_1 + c_2} \omega = \int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega \quad \text{und} \quad (6.19a)$$

$$(c, \omega_1 + \omega_2) = \int_c (\omega_1 + \omega_2) = \int_c \omega_1 + \int_c \omega_2. \quad (6.19b)$$

Nun nimmt der Stokes'sche Satz die folgende kompakte Form an:

$$(c, d\omega) = (\partial c, \omega). \quad (6.20)$$

In diesem Sinne ist der Operator d der äußeren Ableitung die Adjungierte des Randoperators ∂ und umgekehrt.

Übung 6.4 Seien (i) $c \in B_r(M)$, $\omega \in Z^r(M)$ oder (ii) $c \in Z_r(M)$, $\omega \in B^r(M)$. Zeigen Sie, dass in beiden Fällen $(c, \omega) = 0$ ist.

Das innere Produkt (\cdot, \cdot) induziert auf natürliche Weise ein inneres Produkt λ zwischen den Elementen von $H_r(M)$ und $H^r(M)$. Wir zeigen jetzt, dass $H_r(M)$ dual

zu $H^r(M)$ ist. Mit $[c] \in H_r(M)$ und $[\omega] \in H^r(M)$ definieren wir ein inneres Produkt $\Lambda : H_r(M) \times H^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Lambda([c], [\omega]) \equiv (c, \omega) = \int_c \omega. \quad (6.21)$$

Dieses ist wohldefiniert, denn (6.21) ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Tatsächlich erhalten wir, wenn wir $c + \partial c'$, $c' \in C_{r+1}(M)$ verwenden, mit dem Stokes'schen Satz

$$(c + \partial c', \omega) = (c, \omega) + (c', d\omega) = (c, \omega),$$

wobei $d\omega = 0$ gesetzt wurde. Ähnlich ist für $\omega + d\psi$ ($\psi \in \Omega^{r-1}(M)$)

$$(c, \omega + d\psi) = (c, \omega) + (\partial c, \psi) = (c, \omega),$$

wegen $\partial c = 0$. Beachten Sie, dass $\Lambda(, [\omega])$ eine lineare Abbildung $H_r(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ist und $\Lambda([c],)$ eine lineare Abbildung $H^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Um die Dualität von $H_r(M)$ und $H^r(M)$ zu beweisen, haben wir zu zeigen, dass $\Lambda(, [\omega])$ maximalen Rang hat, also $\dim H_r(M) = \dim H^r(M)$ ist. Wir akzeptieren den folgenden Satz von de Rham ohne den hochgradig nichttrivialen Beweis.

Satz 6.2. (Satz von de Rham) Wenn M eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, sind $H_r(M)$ und $H^r(M)$ endlichdimensional. Darüber hinaus ist die Abbildung

$$\Lambda : H_r(M) \times H^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

bilinear und nichtentartet. Somit ist $H^r(M)$ der duale Vektorraum von $H_r(M)$.

Die **Periode** einer geschlossenen r -Form ω über einen Zyklus c ist definiert als $(c, \omega) = \int_c \omega$. Übung 6.4 zeigte, dass die Periode verschwindet, wenn ω exakt oder c ein Rand ist. Das folgende Korollar lässt sich einfach aus dem Satz von de Rham ableiten:

Korollar 6.1. Seien M eine kompakte Mannigfaltigkeit und k die r -te Betti-Zahl (siehe Abschnitt 3.4.3). Seien c_1, c_2, \dots, c_k geeignete gewählte Elemente von $Z_r(M)$, sodass $[c_i] \neq [c_j]$ ist.

(a) Eine geschlossene r -Form ψ ist dann und nur dann exakt, wenn gilt:

$$\int_{c_i} \psi = 0 \quad (1 \leq i \leq k). \quad (6.22)$$

(b) Für jede Menge reeller Zahlen b_1, b_2, \dots, b_k gibt es eine geschlossene r -Form ω , sodass gilt:

$$\int_{c_i} \omega = b_i \quad (1 \leq i \leq k). \quad (6.23)$$

Beweis

(a) Nach dem Satz von de Rham ist die Bilinearform $\Lambda([c], [\omega])$ nichtentartet. Also besteht, sieht man $\Lambda([c_i], \cdot)$ als eine lineare Abbildung auf $H^r(M)$ an, deren Kern aus dem trivialen Element, der Kohomologieklassse der exakten Formen. Daher ist ψ eine exakte Form.

(b) Der Satz von de Rham stellt sicher, dass wir zu der Homologiebasis $\{[c_i]\}$ die duale Basis $\{[\omega_i]\}$ von $H^r(M)$ derart wählen können, dass gilt:

$$\Lambda([c_i], [\omega_j]) = \int_{c_i} \omega_j = \delta_{ij}. \quad (6.24)$$

Wenn wir $\omega \equiv \sum_{i=1}^k b_i \omega_i$ definieren, gilt für die geschlossene r -Form ω wie gefordert

$$\int_{c_i} \omega = b_i.$$

□

Als Beispiele schauen wir uns die Dualität der folgenden Gruppen an:

(a) $H^0(M) \cong H_0(M) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_n$, wenn M n Zusammenhangskomponenten hat.

(b) $H^1(S^1) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{R}$.

Da $H^r(M)$ isomorph zu $H_r(M)$ ist, ergibt sich

$$b^r(M) \equiv \dim H^r(M) = \dim H_r(M) = b_r(M), \quad (6.25)$$

wobei $b_r(M)$ die Betti-Zahl von M ist. Die Euler-Charakteristik schreibt sich jetzt als

$$\chi(M) = \sum_{r=1}^m (-1)^r b^r(M). \quad (6.26)$$

Dies ist eine ziemlich interessante Formel: Die linke Seite ist rein *topologisch*, während die rechte Seite eine *analytische* Bedingung darstellt (beachten Sie, dass $d\omega = 0$ eine Menge von partiellen Differentialgleichungen ist). Wir werden noch häufiger auf dieses Zusammenspiel von Topologie und Analysis treffen.

Insgesamt haben wir jetzt den Kettenkomplex $C(M)$ und den De-Rham-Komplex $\Omega^*(M)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \longleftarrow C_{r-1}(M) \xleftarrow{\partial_r} C_r(M) \xleftarrow{\partial_{r+1}} C_{r+1}(M) & \longleftarrow & & & \\ & & \longrightarrow \Omega^{r-1}(M) \xrightarrow{d_{r-1}} \Omega^r(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(M) & \longrightarrow & & & \end{array} \quad (6.27)$$

Die r -te Homologiegruppe ist dabei durch

$$H_r(M) = Z_r(M)/B_r(M) = \ker \partial_r / \text{im } \partial_{r+1}$$

definiert und die r -te De-Rham-Kohomologiegruppe durch

$$H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M) = \ker d_r / \text{im } d_{r-1}.$$

6.3 Das Poincaré-Lemma

Eine exakte Form ist immer geschlossen, umgekehrt muss dies nicht immer so sein. Der folgende Satz liefert uns jedoch eine Situation, in der auch die umgekehrte Folgerung wahr ist.

Satz 6.3. (Poincaré-Lemma) Wenn eine Koordinatenumgebung U einer Mannigfaltigkeit M auf einen Punkt $p_0 \in M$ zusammengezogen werden kann, ist jede geschlossene r -Form auf U auch exakt.

Beweis

Wir nehmen an, dass U glatt auf p_0 zusammenziehbar (kontrahierbar) ist, d. h., es existiert eine glatte Abbildung $F : U \times I \rightarrow U$, sodass gilt:

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, 1) = p_0 \quad (\text{für alle } x \in U).$$

Betrachten wir eine r -Form $\eta \in \Omega^r(U \times I)$ mit

$$\eta = a_{i_1 \dots i_r}(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} + b_{j_1 \dots j_{r-1}}(x, t) dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}}, \quad (6.28)$$

mit x als der Koordinate von U und t von I . Wir definieren eine Abbildung $P : \Omega^r(U \times I) \rightarrow \Omega^{r-1}(U)$ durch

$$P\eta \equiv \left(\int_0^1 ds b_{j_1 \dots j_{r-1}}(x, s) \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}}. \quad (6.29)$$

Wir definieren als nächstes eine Abbildung $f_t : U \rightarrow U \times I$ mit $f_t(x) = (x, t)$. Der Rücktransport des ersten Terms von (6.28) via f_t^* ist ein Element von $\Omega^r(U)$:

$$f_t^* \eta = a_{i_1 \dots i_r}(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Omega^r(U). \quad (6.30)$$

Wir beweisen jetzt die folgende Identität:

$$d(P\eta) + P(d\eta) = f_1^* \eta - f_0^* \eta. \quad (6.31)$$

Die Terme auf der linken Seite berechnen sich zu

$$\begin{aligned} dP\eta &= d\left(\int_0^1 ds b_{j_1 \dots j_{r-1}}\right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}} \\ &= \int_0^1 ds \left(\frac{\partial b_{j_1 \dots j_{r-1}}}{\partial x^{j_r}} \right) dx^{j_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}}, \\ Pd\eta &= P\left[\left(\frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^{i_{r+1}}} \right) dx^{i_{r+1}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} + \left(\frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial t} \right) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial b_{j_1 \dots j_{r-1}}}{\partial x^{j_r}} \right) dx^{j_r} \wedge dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}} \right] \\ &= \left[\int_0^1 ds \left(\frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial s} \right) \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &\quad - \left[\int_0^1 ds \left(\frac{\partial b_{j_1 \dots j_{r-1}}}{\partial x^{j_r}} \right) \right] dx^{j_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r-1}}. \end{aligned}$$

Zusammenfassen der Resultate ergibt

$$\begin{aligned} d(P\eta) + P(d\eta) &= \left[\int_0^1 ds \left(\frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial s} \right) \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &= [a_{i_1 \dots i_r}(x, 1) - a_{i_1 \dots i_r}(x, 0)] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &= f_1^*\eta - f_0^*\eta. \end{aligned}$$

Das Poincaré-Lemma folgt nun direkt aus (6.31). Sei ω eine geschlossene r -Form auf einer zusammenziehbaren Karte U . Wir zeigen, dass ω sich als eine exakte Form

$$\omega = d(-PF^*\omega) \tag{6.32}$$

schreiben lässt, mit F als der glatten kontrahierenden Abbildung. Tatsächlich folgt, wenn η in (6.31) durch $F^*\omega \in \Omega^r(U \times I)$ ersetzt wird:

$$dPF^*\omega + PdF^*\omega = f_1^* \circ F^*\omega - f_0^* \circ F^*\omega = (F \circ f_1)^*\omega - (F \circ f_0)^*\omega. \tag{6.33}$$

Dabei haben wir die Beziehung $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ verwendet. Natürlich ist $F \circ f_1 : U \rightarrow U$ eine konstante Abbildung $x \mapsto p_0$, daher ist $(F \circ f_1)^* = 0$. Es ist jedoch $F \circ f_0 = \text{id}_U$, weswegen $(F \circ f_0)^* : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^r(U)$ die identische Abbildung ist. Somit ist die rechte Seite von (6.33) einfach $-\omega$. Der zweite Term auf der linken Seite verschwindet, weil ω geschlossen ist: $dF^*\omega = F^*d\omega = 0$, wobei (5.75) verwendet wurde. Schließlich wird (6.33) zu $\omega = -dPF^*\omega$, womit das Lemma bewiesen ist. \square

Jede geschlossene Form ist zumindest lokal exakt. Man könnte auch sagen, dass die De-Rham-Kohomologiegruppe die *globale* Exaktheit von geschlossenen Formen verhindert.

Beispiel 6.4. Da der \mathbb{R}^n zusammenziehbar ist, gilt:

$$H^r(\mathbb{R}^n) = 0 \quad (1 \leq r \leq n). \quad (6.34)$$

Beachten Sie jedoch, dass $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ ist. \diamond

6.4 Struktur von De-Rham-Kohomologiegruppen

De-Rham-Kohomologiegruppen offenbaren eine recht interessante Struktur, die sich nur schwer oder gar nicht bei Homologiegruppen finden lässt.

6.4.1 Poincaré-Dualität

Sei M eine orientierbare kompakte m -dimensionale Mannigfaltigkeit, und es seien $\omega \in H^r(M)$ und $\eta \in H^{m-r}(M)$. $\omega \wedge \eta$ ist ein Volumenelement. Als inneres Produkt $\langle , \rangle : H^r(M) \times H^{m-r}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$\langle \omega, \eta \rangle \equiv \int_M \omega \wedge \eta. \quad (6.35)$$

Das innere Produkt ist bilinear. Es ist sogar nichtsingulär, d. h., wenn $\omega \neq 0$ oder $\eta \neq 0$ ist, kann $\langle \omega, \eta \rangle$ nicht identisch verschwinden. Somit definiert (6.35) die Dualität von $H^r(M)$ und $H^{m-r}(M)$:

$$H^r(M) \cong H^{m-r}(M). \quad (6.36)$$

Dies ist die **Poincaré-Dualität**. Dementsprechend haben die Betti-Zahlen eine Symmetrie

$$b_r = b_{m-r}. \quad (6.37)$$

Aus (6.37) folgt, dass die Euler-Charakteristik eines Raums mit ungerader Dimension verschwindet:

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum (-1)^r b_r = \frac{1}{2} \left\{ \sum (-1)^r b_r + \sum (-1)^{m-r} b_{m-r} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum (-1)^r b_r - \sum (-1)^{-r} b_r \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

6.4.2 Kohomologieringe

Seien $[\omega] \in H^q(M)$ und $[\eta] \in H^r(M)$. Wir definieren ein Produkt von $[\omega]$ und $[\eta]$ durch

$$[\omega] \wedge [\eta] \equiv [\omega \wedge \eta]. \quad (6.39)$$

Es folgt dann aus Übung 6.2, dass $\omega \wedge \eta$ geschlossen und daher $[\omega \wedge \eta] \in H^{q+r}(M)$ ist. Darüber hinaus ist $[\omega \wedge \eta]$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten von $[\omega]$ und $[\eta]$. Wenn wir beispielsweise $\omega' = \omega + d\psi$ anstelle von ω ansetzen, ergibt sich

$$[\omega'] \wedge [\eta] \equiv [(\omega + d\psi) \wedge \eta] = [\omega \wedge \eta + d(\psi \wedge \eta)] = [\omega \wedge \eta].$$

Somit ist das Produkt $\wedge : H^q(M) \times H^r(M) \rightarrow H^{q+r}(M)$ eine wohldefinierte Abbildung.

Der **Kohomologiering** $H^*(M)$ ist über die folgende direkte Summe definiert:

$$H^*(M) \equiv \bigoplus_{r=1}^m H^r(M). \quad (6.40)$$

Das Produkt des Rings erhalten wir über das weiter oben definierte äußere Produkt

$$\wedge : H^*(M) \times H^*(M) \rightarrow H^*(M). \quad (6.41)$$

Die Ringaddition ist die formale Summe von zwei Elementen aus $H^*(M)$. Einer der Vorteile von Kohomologiegruppen gegenüber Homologiegruppen zeigt sich hier: Produkte von Ketten sind nicht wohldefiniert, und Homologiegruppen können keine Ringstruktur haben.

6.4.3 Die Künneth-Formel

Sei M ein Produkt von zwei Mannigfaltigkeiten $M = M_1 \times M_2$. Seien $\{\omega_i^p\}$ ($1 \leq i \leq b^p(M_1)$) eine Basis von $H^p(M_1)$ und $\{\eta_j^p\}$ ($1 \leq j \leq b^p(M_2)$) eine Basis von $H^p(M_2)$. Offensichtlich ist $\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p}$ ($1 \leq p \leq r$) eine geschlossene r -Form in M . Wir zeigen, dass sie nicht exakt ist. Wäre sie exakt, könnte man sie als

$$\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p} = d(\alpha^{p-1} \wedge \beta^{r-p} + \gamma^p \wedge \delta^{r-p-1}) \quad (6.42)$$

schreiben, mit $\alpha^{p-1} \in \Omega^{p-1}(M_1)$, $\beta^{r-p} \in \Omega^{r-p}(M_2)$, $\gamma^p \in \Omega^p(M_1)$ und $\delta^{r-p-1} \in \Omega^{r-p-1}(M_2)$. (Wenn $p = 0$ ist, setzen wir $\alpha^{p-1} = 0$.) Durch Ausführen der äußeren Ableitung in (6.42) ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p} &= d\alpha^{p-1} \wedge \beta^{r-p} + (-1)^{p-1} \alpha^{p-1} \wedge d\beta^{r-p} \\ &\quad + d\gamma^p \wedge \delta^{r-p-1} + (-1)^p \gamma^p \wedge d\delta^{r-p-1}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Durch Vergleichen von linker und rechter Seite der Gleichung erhalten wir $\alpha^{p-1} = \delta^{r-p-1} = 0$ und daher $\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p} = 0$, in Widerspruch zu unserer Annahme. Darum ist $\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p}$ ein nichttriviales Element von $H^r(M)$. Umgekehrt kann für $0 \leq p \leq r$ jedes Element von $H^r(M)$ in eine Summe aus Produkten von Elementen von $H^p(M_1)$ und $H^{r-p}(M_2)$ zerlegt werden.

Damit haben wir die **Künneth-Formel** erhalten:

$$H^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} [H^p(M_1) \otimes H^q(M_2)]. \quad (6.44)$$

Mit den Betti-Zahlen schreibt sich dies als

$$b^r(M) = \sum_{p+q=r} b^p(M_1)b^q(M_2). \quad (6.45)$$

Die Künneth-Formel liefert uns auch eine Beziehung zwischen den Kohomologiegringen der jeweiligen Mannigfaltigkeiten:

$$\begin{aligned} H^*(M) &= \sum_{r=1}^m H^r(M) = \sum_{r=1}^m \bigoplus_{p+q=r} H^p(M_1) \otimes H^q(M_2) \\ &= \sum_p H^p(M_1) \otimes \sum_q H^q(M_2) = H^*(M_1) \otimes H^*(M_2). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Übung 6.5 Sei $M = M_1 \times M_2$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\chi(M) = \chi(M_1) \cdot \chi(M_2). \quad (6.47)$$

Beispiel 6.5. Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ der Torus. Wegen $H^0(S^1) = \mathbb{R}$ und $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ ist

$$H^0(T^2) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}, \quad (6.48a)$$

$$H^1(T^2) = (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad (6.48b)$$

$$H^2(T^2) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}. \quad (6.48c)$$

Beachten Sie die Poincaré-Dualität $H^0(T^2) = H^2(T^2)$.² Lassen Sie uns die Koordinate von T^2 als (θ_1, θ_2) parametrisieren, mit der Koordinate θ_i von S^1 . Die Gruppen $H^r(T^2)$ werden durch die folgenden Formen erzeugt:

$$\begin{aligned} r = 0 : \quad \omega_0 &= c_0 \quad (c_0 \in \mathbb{R}), \\ r = 1 : \quad \omega_1 &= c_1 d\theta_1 + c'_1 d\theta_2 \quad (c_1, c'_1 \in \mathbb{R}), \\ r = 2 : \quad \omega_2 &= c_2 d\theta_1 \wedge d\theta_2 \quad (c_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (6.49a)$$

Obwohl die 1-Form $d\theta_i$ wie eine exakte Form aussieht, gibt es keine Funktion θ_i , welche eindeutig auf S^1 definiert wäre. Wegen $\chi(S^1) = 0$ gilt $\chi(T^2) = 0$.

Die De-Rham-Kohomologiegruppen von

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$$

erhält man ähnlich. $H^r(T^n)$ wird durch r -Formen der Form

$$d\theta^{i_1} \wedge d\theta^{i_2} \wedge \dots \wedge d\theta^{i_r} \quad (6.50)$$

² $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ ist ein Tensorprodukt und sollte nicht mit dem direkten Produkt verwechselt werden. Natürlich ist das Produkt von zwei reellen Zahlen eine reelle Zahl.

erzeugt, wobei die $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ aus $1, \dots, n$ gewählt werden. Offenkundig ist

$$b^r = \dim H^r(T^n) = \binom{n}{r}. \quad (6.51)$$

Die Euler-Charakteristik ergibt sich direkt aus (6.51) zu

$$\chi(T^n) = \sum (-1)^r \binom{n}{r} = (1 - 1)^n = 0. \quad (6.52)$$

◊

6.4.4 Rücktransport von De-Rham-Kohomologiegruppen

Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Gleichung (5.75) zeigt, dass der Rücktransport f^* geschlossene Formen auf geschlossene Formen und exakte Formen auf exakte Formen abbildet. Dementsprechend können wir für die Kohomologiegruppen einen Rücktransport $f^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$ als

$$f^*[\omega] = [f^*\omega] \quad ([\omega] \in H^r(N)) \quad (6.53)$$

definieren. Der Rücktransport f^* erhält die Ringstruktur von $H^*(N)$. Tatsächlich erhalten wir, wenn $[\omega] \in H^p(N)$ und $[\eta] \in H^q(N)$ ist:

$$f^*([\omega] \wedge [\eta]) = f^*[\omega \wedge \eta] = [f^*(\omega \wedge \eta)] = [f^*\omega \wedge f^*\eta] = [f^*\omega] \wedge [f^*\eta]. \quad (6.54)$$

6.4.5 Homotopie und $H^1(M)$

Seien $f, g : M \rightarrow N$ glatte Abbildungen. Wir nehmen an, dass f und g zueinander homotop sind, d. h. dass eine glatte Abbildung $F : M \times I \rightarrow N$ existiert, sodass gilt: $F(p, 0) = f(p)$ und $F(p, 1) = g(p)$. Wir beweisen jetzt, dass $f^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$ gleich $g^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$ ist.

Lemma 6.1. Seien f^* und g^* definiert wie zuvor. Ist $\omega \in \Omega^r(N)$ eine geschlossene Form, dann ist die Differenz der Rücktransportbilder exakt:

$$f^*\omega - g^*\omega = d\psi \quad (\psi \in \Omega^{r-1}(M)). \quad (6.55)$$

Beweis

Wir bemerken zunächst, dass gilt:

$$f = F \circ f_0, \quad g = F \circ f_1;$$

$f_t : M \rightarrow M \times I$ ($p \mapsto (p, t)$) wurde in Satz 6.3 definiert. Die linke Seite von (6.55) ist

$$(F \circ f_0)^* \omega - (F \circ f_1)^* \omega = f_0^* \circ F^* \omega - f_1^* \circ F^* \omega = -[dP(F^* \omega) + Pd(F^* \omega)] = -dPF^* \omega,$$

wobei (6.33) verwendet wurde. Dies zeigt, dass $f^*\omega - g^*\omega = d(-PF^* \omega)$ ist. □

Nun ist es leicht einzusehen, dass $f^* = g^*$ ist, da der Rücktransport $H^r(N) \rightarrow H^r(M)$ abbildet. Nun wissen wir aus dem vorigen Lemma, dass gilt:

$$[f^*\omega - g^*\omega] = [f^*\omega] - [g^*\omega] = [\mathrm{d}\psi] = 0.$$

Wir können damit den folgenden Satz formulieren:

Satz 6.4. Seien $f, g : M \rightarrow N$ zueinander homotope Abbildungen. Dann sind die Rücktransportabbildungen f^* und g^* der De-Rham-Kohomologiegruppen beide $H^r(N) \rightarrow H^r(M)$ und identisch.

Sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, d. h., $\pi_1(M) \cong \{0\}$. Aus $H_1(M) = \pi_1(M)$ modulo der Kommutatorgruppe (Satz 4.9) folgt, dass $H_1(M)$ ebenfalls trivial ist. Mit der De-Rham-Kohomologiegruppe kann man dies folgendermaßen ausdrücken:

Satz 6.5. Sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann ist ihre erste De-Rham-Kohomologiegruppe trivial.

Beweis

Sei ω eine geschlossene 1-Form auf M . Ist $\omega = \mathrm{d}f$, muss eine Funktion f die Form

$$f(p) = \int_{p_0}^p \omega \quad (6.56)$$

haben, wobei $p_0 \in M$ ein festgehaltener Punkt ist.

Wir beweisen zuerst, dass ein Integral einer geschlossenen Form entlang einer Schleife verschwindet. Seien $\alpha : I \rightarrow M$ eine Schleife bei $p \in M$ und $c_p : I \rightarrow M$ ($t \mapsto p$) eine konstante Schleife. Da M einfach zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie $F(s, t)$, sodass $F(s, 0) = \alpha(s)$ und $F(s, 1) = c_p(s)$ ist. Wir nehmen an, dass $F : I \times I \rightarrow M$ glatt ist. Nun definieren wir das Integral einer 1-Form ω über $\alpha(I)$ durch

$$\int_{\alpha(I)} \omega = \int_{S^1} \alpha^* \omega. \quad (6.57)$$

Hier haben wir den Integrationsbereich auf der rechten Seite als den S^1 gewählt, denn das Intervall $I = [0, 1]$ auf der linken Seite wird zu S^1 kompaktifiziert. Aus Lemma 6.1 erhalten wir für eine geschlossene 1-Form ω :

$$\alpha^* \omega - c_p^* \omega = \mathrm{d}g, \quad (6.58)$$

mit $g = -PF^* \omega$. Der Rücktransport $c_p \omega$ verschwindet, weil c_p eine konstante Abbildung ist. Dann verschwindet (6.57), da ∂S^1 leer ist:

$$\int_{S^1} \alpha^* \omega = \int_{S^1} \mathrm{d}g = \int_{\partial S^1} g = 0. \quad (6.59)$$

Seien β und γ zwei Pfade, die p_0 und p verbinden. Gemäß Gleichung (6.59) sind Integrale von ω entlang β und entlang γ identisch:

$$\int_{\beta(I)} \omega = \int_{\gamma(I)} \omega.$$

Dies zeigt, dass (6.56) in der Tat wohldefiniert und daher ω exakt ist. \square

Beispiel 6.6. Die n -Sphäre S^n ($n \geq 2$) ist einfach zusammenhängend, darum ist

$$H^1(S^n) = 0 \quad (n \geq 2). \quad (6.60)$$

Aus der Poincaré-Dualität erhalten wir

$$H^0(S^n) \cong H^n(S^n) = \mathbb{R}. \quad (6.61)$$

Es lässt sich zeigen, dass gilt:

$$H^r(S^n) = 0 \quad (1 \leq r \leq n-1). \quad (6.62)$$

$H^n(S^n)$ wird durch das Volumenelement Ω erzeugt. Da es keine $(n+1)$ -Formen auf der S^n gibt, ist jede n -Form geschlossen. Ω kann nicht exakt sein, denn wenn $\Omega = d\psi$ wäre, hätten wir

$$\int_{S^n} \Omega = \int_{S^n} d\psi = \int_{\partial S^n} \psi = 0.$$

Die Euler-Charakteristik ist

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & (n \text{ gerade}) \\ 2 & (n \text{ ungerade}). \end{cases} \quad (6.63)$$

\diamond

Beispiel 6.7. Nehmen Sie die S^2 als eingebettet in den \mathbb{R}^3 an und definieren Sie

$$\Omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi, \quad (6.64)$$

wobei (θ, ϕ) die gewöhnliche Polarkoordinate ist. Bestätigen Sie, dass Ω geschlossen ist. Sie können *formal* Ω als

$$\Omega = -d(\cos \theta) \wedge d\phi = -d(\cos \theta d\phi)$$

schreiben. Beachten Sie jedoch, dass Ω nicht exakt ist. \diamond

Riemann'sche Geometrie

Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal wie der \mathbb{R}^n aussieht. Aufgrund der Existenz von glatten Koordinatensystemen kann man auf einer Mannigfaltigkeit Analysis betreiben. Eine Mannigfaltigkeit kann eine weitergehende Struktur erhalten, wenn man sie mit einem metrischen Tensor versieht – einer natürlichen Verallgemeinerung des inneren Produkts zweier Vektoren im \mathbb{R}^n auf beliebige Mannigfaltigkeiten. Diese neue Struktur definiert das innere Produkt von Vektoren in einem Tangentialraum $T_p M$. Wir können mithilfe des „Zusammenhangs“ auch einen Vektor an einem Punkt $p \in M$ mit einem zweiten Vektor an einem anderen Punkt $p' \in M$ vergleichen.

Es gibt viele Bücher über Riemann'sche Geometrie. Für Physiker gut zugänglich sind Choquet-Bruhat *et al.* (1982), Dodson und Poston (1977) sowie Hicks (1965). Lightman *et al.* (1975) und Kapitel 3 von Wald (1984) sind ebenfalls zu empfehlen.

7.1 Riemann'sche und pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten

7.1.1 Metrische Tensoren

In der elementaren Geometrie wird das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren U und V durch $U \cdot V = \sum_{i=1}^m U_i V_i$ definiert, wobei U_i und V_i die Komponenten der Vektoren im \mathbb{R}^m sind. Auf einer Mannigfaltigkeit wird ein inneres Produkt an jedem Tangentialraum $T_p M$ definiert.

Definition 7.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine **Riemann'sche Metrik** g auf M ist ein Tensorfeld vom Typ $(0,2)$ auf M , welches an jedem Punkt $p \in M$ die folgenden beiden Axiome erfüllt:

- (i) $g_p(U, V) = g_p(V, U)$,
- (ii) $g_p(U, U) \geq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $U = 0$ gilt.

Hierbei sind $U, V \in T_p M$ und $g_p = g|_p$. Kurz gesagt: g_p ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.

Ein Tensorfeld g vom Typ $(0, 2)$ ist eine **pseudo-Riemann'sche Metrik**, wenn sie (i) erfüllt und dazu gilt:

(ii') Wenn $g_p(U, V) = 0$ für alle $U \in T_p M$ ist, dann ist $V = 0$.

In Kapitel 5 haben wir das innere Produkt eines Vektors $V \in T_M$ und eines dualen Vektors $\omega \in T_p^* M$ definiert als eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn eine Metrik g existiert, definieren wir ein inneres Produkt zwischen zwei Vektoren $U, V \in T_p M$ durch $g_p(U, V)$. Da g_p eine Abbildung $T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ist, können wir eine lineare Abbildung $g_p(\cdot, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V \mapsto g_p(V, \cdot)$ definieren. Dann lässt sich $g_p(\cdot, \cdot)$ mit einer 1-Form $\omega_U \in T_p^* M$ identifizieren. In ähnlicher Weise induziert $\omega \in T_p^* M$ eine Abbildung $V_\omega \in T_p M$ durch $\langle \omega, U \rangle = g(V_\omega, U)$. Auf diese Weise erzeugt die Metrik g_p einen Isomorphismus zwischen $T_p M$ und $T_p^* M$.

Seien (U, φ) eine Karte in M und $\{x^\mu\}$ die Koordinate. Da die Metrik $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ ist, lässt sie sich nach $dx^\mu \otimes dx^\nu$ entwickeln:

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (7.1a)$$

Man prüft leicht nach, dass gilt:

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\nu\mu}(p) \quad (p \in M). \quad (7.1b)$$

Wir lassen normalerweise den Index „ p “ in $g_{\mu\nu}$ weg, solange dies keine Verwirrung stiften kann. Es ist üblich, $(g_{\mu\nu})$ als eine Matrix anzusehen, deren (μ, ν) -ter Eintrag $g_{\mu\nu}$ ist. Da $(g_{\mu\nu})$ maximalen Rang hat, hat sie eine Inverse, die traditionsgemäß als $(g^{\mu\nu})$ geschrieben wird; es ist also $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = \delta_\mu^\lambda$. Für die Determinante $\det(g_{\mu\nu})$ schreibt man einfach g . Offenkundig ist $\det(g^{\mu\nu}) = g^{-1}$. Der Isomorphismus zwischen $T_p M$ und $T_p^* M$ lässt sich nun auch so ausdrücken:

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu, \quad U^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu. \quad (7.2)$$

Aus (7.1a) und (7.1b) lesen wir die „gute alte“ Definition der Metrik ab als einem infinitesimalen quadrierten Abstand. Wir betrachten eine infinitesimale Verschiebung $dx^\mu \partial/\partial x^\mu \in T_p M$ und setzen diese in g ein. Das ergibt

$$\begin{aligned} ds^2 &= g \left(dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = dx^\mu dx^\nu g \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Wir werden auch die Größe $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ eine Metrik nennen, obwohl die Metrik streng genommen ein *Tensor* $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ ist.

Da $(g^{\mu\nu})$ eine symmetrische Matrix ist, sind ihre Eigenwerte reell. Ist g Riemann'sch, dann sind alle Eigenwerte streng positiv; und wenn g pseudo-Riemann'sch ist, können auch negative Eigenwerte auftreten. Wenn es i positive und j negative Eigenwerte gibt, nennt man das Paar (i, j) den **Index** dieser Metrik. Für $j = 1$

heißt die Metrik **Lorentz-Metrik**. Ist eine Metrik erst einmal mit einer geeigneten Orthogonalmatrix diagonalisiert worden, ist es einfach, ihre Diagonalelemente zu ± 1 zu machen, indem man die Basisvektoren mit geeigneten positiven Zahlen skaliert. Wenn wir mit einer Riemann'sche Metrik starten, landen wir bei der **euklidischen Metrik** $\delta = \text{diag}(1, \dots, 1)$, und von einer Lorentz-Metrik kommen wir zur **Minkowski-Metrik** $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

Wenn (M, g) Lorentz'sch ist, teilen sich die Elemente von $T_p M$ wie folgt in drei Klassen auf:

- (i) $g(U, U) > 0 \rightarrow U$ ist **raumartig**,
 - (ii) $g(U, U) = 0 \rightarrow U$ ist **lichtartig** (oder **null**),
 - (iii) $g(U, U) < 0 \rightarrow U$ ist **zeitartig**.
- (7.4)

Übung 7.1

Diagonalisieren Sie die Metrik

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie damit, dass sie sich auf die Minkowski-Metrik reduziert. Das Bezugssystem, in welchem die Metrik diese Form annimmt, kennt man als **Lichtkegel-system**. Sei $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ die Basis des Minkowski-Bezugssystems, in welchem die Metrik $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist. Zeigen Sie, dass $\{e_+, e_-, e_2, e_3\}$ die Basisvektoren im Lichtkegelsystem sind, mit $e_{\pm} \equiv (e_1 \pm e_0)/\sqrt{2}$. Seien $V = (V^+, V^-, V^2, V^3)$ die Komponenten eines Vektors V . Ermitteln Sie die Komponenten der korrespondierenden 1-Form.

Wenn eine glatte Mannigfaltigkeit M eine Riemann'sche Metrik g zulässt, wird das Paar (M, g) eine **Riemann'sche Mannigfaltigkeit** genannt. Ist g eine pseudo-Riemann'sche Metrik, nennt man (M, g) eine **pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit**. Wenn g Lorentz'sch ist, heißt (M, g) **Lorentz-Mannigfaltigkeit**. Lorentz-Mannigfaltigkeiten sind von besonderem Interesse in der Relativitätstheorie. Beispielsweise sind ein m -dimensionaler euklidischer Raum (\mathbb{R}^m, δ) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und ein m -dimensionaler Minkowski-Raum (\mathbb{R}^m, η) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit.

7.1.2 Induzierte Metrik

Sei M eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit einer n -dimensionalen Riemann'schen Mannigfaltigkeit N mit der Metrik g_N . Sei $f : M \rightarrow N$ die Einbettung, welche die Untermannigfaltigkeitsstruktur von M induziert (siehe Abschnitt 5.2). Die Rücktransportabbildung f^* induziert dann die natürliche Metrik $g_M = f^*g_N$ auf M . Die Komponenten von g_M sind gegeben durch

$$g_{M\mu\nu}(x) = g_{N\alpha\beta}(f(x)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (7.5)$$

wobei f^α die Koordinaten von $f(x)$ bezeichnet. Wir betrachten z. B. die Metrik der in (\mathbb{R}^3, δ) eingebetteten Einheitssphäre. Seien (θ, ϕ) die Polarkoordinaten von S^2 und f , und sei definiert durch die übliche Inklusionsabbildung

$$f : (\theta, \phi) \mapsto (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

dann erhalten wir die **induzierte Metrik**

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu &= \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Übung 7.2 Sei $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Einbettung des Torus in (\mathbb{R}^3, δ) , definiert durch

$$f : (\theta, \phi) \mapsto ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta),$$

mit $R > r$. Zeigen Sie, dass

$$g = r^2 d\theta \otimes d\theta + (R + r \cos \theta)^2 d\phi \otimes d\phi \quad (7.7)$$

die induzierte Metrik auf T^2 ist.

Wenn eine Mannigfaltigkeit N pseudo-Riemann'sch ist, muss eine über $f : M \rightarrow N$ eingebettete Untermannigfaltigkeit nicht unbedingt eine Metrik $f^* g_N$ haben. Der Tensor $f^* g_N$ ist nur dann eine Metrik, wenn er einen festen Index auf M hat.

7.2 Paralleltransport, Zusammenhang und kovariante Ableitung

Ein Vektor X ist eine Richtungsableitung, die auf $f \in \mathcal{F}(M)$ gemäß $X : f \mapsto X[f]$ wirkt. Es gibt jedoch keine Richtungsableitung eines Tensorfelds vom Typ (p, q) , die sich auf natürliche Weise aus der differenzierbaren Struktur der Mannigfaltigkeit M ergeben würde. (Beachten Sie, dass die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_V X = [V, X]$ keine Richtungsableitung ist, da sie von der *Ableitung* von V abhängt.) Was wir brauchen, ist eine zusätzliche Struktur, genannt **Zusammenhang**, welche angibt, wie Tensoren entlang einer Kurve zu transportieren sind.

7.2.1 Heuristische Einführung

Wir geben zunächst einen heuristischen Zugang zu Paralleltransport und kovarianter Ableitung. Wie wir bereits mehrfach erwähnt haben, kann man zwei an verschiedenen Punkten definierte Vektoren nicht einfach so miteinander vergleichen. Sehen wir

uns an, wie die Ableitung eines Vektorfelds in einem euklidischen Raum \mathbb{R}^m definiert wird. Die Ableitung des Vektorfelds $V = V^\mu e_\mu$ nach x^ν hat als μ -te Komponente den Ausdruck

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots) - V^\mu(\dots, x^\nu, \dots)}{\Delta x^\nu}.$$

Der erste Term im Zähler auf der rechten Seite der Gleichung ist bei $x + \Delta x = (x^1, \dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots, x^m)$ definiert, während der zweite Term bei $x = (x^\mu)$ definiert ist. Um $V^\mu(x)$ von $V^\mu(x + \Delta x)$ zu subtrahieren, müssen wir $V^\mu(x)$ unverändert nach $x + \Delta x$ transportieren und dann dort die Differenz bilden. Diese Art Transport eines Vektors nennt man **Paralleltransport**. Wir haben implizit angenommen, dass $V|_x$, wenn es nach $x + \Delta x$ paralleltransportiert wird, dieselbe Komponente $V^\mu(x)$ hat. Es gibt allerdings keinen natürlichen Weg, um einen Vektor in einer Mannigfaltigkeit parallelzutransportieren. Wir müssen also angeben, *wie* ein Vektor von einem Punkt zum anderen paralleltransportiert wird. Es bezeichne $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ einen Vektor $V|_x$, der nach $x + \Delta x$ paralleltransportiert wurde. Wir verlangen, dass für die Komponenten

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \propto \Delta x, \quad (7.8a)$$

$$(\widetilde{V^\mu + W^\mu})(x + \Delta x) = \tilde{V}^\mu(x + \Delta x) + \tilde{W}^\mu(x + \Delta x) \quad (7.8b)$$

gelten soll.

Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn wir

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x)\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x)\Delta x^\nu \quad (7.9)$$

wählen. Die kovariante Ableitung von V nach x^ν ist definiert durch

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (7.10)$$

Diese Größe ist ein Vektor bei $x + \Delta x$, denn sie ist die Differenz von zwei Vektoren $V|_{x+\Delta x}$ und $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$, die am *selben* Punkt $x + \Delta x$ definiert sind. Es sind viele verschiedene Regeln für den Paralleltransport möglich, eine für jede Wahl von Γ . Wenn die Mannigfaltigkeit mit einer Metrik versehen ist, existiert eine bevorzugte Wahl von Γ , die man den Levi-Civita-Zusammenhang nennt, siehe Beispiel 7.1 und Abschnitt 7.4.

Beispiel 7.1. Lassen Sie uns ein einfaches Beispiel durchrechnen: den zweidimensionalen euklidischen Raum (\mathbb{R}^2, δ) . Wir definieren den Paralleltransport so, wie wir es aus der elementaren Geometrie gewohnt sind. Im kartesischen Koordinatensystem (x, y) verschwinden alle Komponenten von Γ wegen $\tilde{V}^\mu(x + \Delta x, y + \Delta y) = V^\mu(x, y)$ für beliebige Δx und Δy . Als nächstes betrachten wir die Polarkoordinaten (r, ϕ) . Wenn wir $(r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi)$ als eine Einbettung ansehen, erhalten wird die induzierte Metrik

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi. \quad (7.11)$$

Sei $V = V^r \partial/\partial r + V^\phi \partial/\partial \phi$ ein bei (r, ϕ) definierter Vektor. Paralleltransport dieses Vektors nach $(r + \Delta r, \phi)$ ergibt den neuen Vektor $\tilde{V} = \tilde{V}^r \partial/\partial r|_{(r+\Delta r, \phi)} + \tilde{V}^\phi \partial/\partial \phi|_{(r+\Delta r, \phi)}$ (Abb. 7.1(a)). Beachten Sie, dass $V^r = V \cos \theta$ und $V^\phi = V(\sin \theta/r)$ ist, mit $V = \sqrt{g(V, V)}$; dabei ist θ der Winkel zwischen V und $\partial/\partial r$. Dann ergibt sich $\tilde{V}^r = V^r$ und

$$\tilde{V}^\phi = \frac{r}{r + \Delta r} V^\phi \simeq V^\phi - \frac{\Delta r}{r} V^\phi.$$

◊

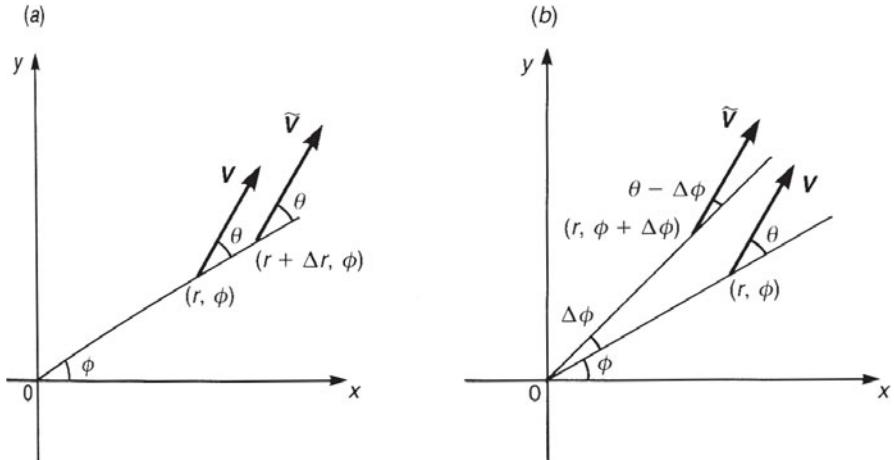


Abb. 7.1. \tilde{V} ist ein Vektor V , der (a) nach $(r + \Delta r, \phi)$ bzw. (b) nach $(r, \phi + \Delta\phi)$ paralleltrans- portiert.

Wenn wir diese Komponenten mit (7.9) vergleichen, erhalten wir sofort:

$$\Gamma^r_{rr} = 0, \quad \Gamma^r_{r\phi} = 0, \quad \Gamma^\phi_{rr} = 0, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}. \quad (7.12a)$$

Ähnlich wird V bei einem Paralleltransport nach $(r, \phi + \Delta\phi)$ zu

$$\tilde{V} = \tilde{V}^r \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r, \phi + \Delta\phi)} + \tilde{V}^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_{(r, \phi + \Delta\phi)},$$

wobei gilt (siehe Abb. 7.1(b)):

$$\tilde{V}^r = V \cos(\theta - \Delta\phi) \simeq V \cos \theta + V \sin \theta \Delta\phi = V^r + V^\phi r \Delta\phi$$

und

$$\tilde{V}^\phi = V \frac{\sin(\theta - \Delta\phi)}{r} \simeq V \frac{\sin \theta}{r} - V \cos \theta \frac{\Delta\phi}{r} = V^\phi - V^r \frac{\Delta\phi}{r}.$$

Daraus ergibt sich

$$\Gamma^r_{\phi r} = 0, \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r, \quad \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0. \quad (7.12b)$$

Beachten Sie, dass die Γ der Symmetrie $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ genügen. Es wird also implizit angenommen, dass die Norm eines Vektors invariant unter Paralleltransport ist. Ein Paralleltransport, der diesen zwei Bedingungen genügt, wird **Levi-Civita-Zusammenhang** genannt, siehe Abschnitt 7.4. Unser intuitiver Zugang führt uns damit direkt zur formalen Definition des affinen Zusammenhangs.

7.2.2 Affine Zusammenhänge

Definition 7.2. Ein affiner Zusammenhang ∇ ist eine Abbildung $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ mit $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad (7.13a)$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad (7.13b)$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y, \quad (7.13c)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y. \quad (7.13d)$$

Dabei sind $f \in \mathcal{F}(M)$ und $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Wir betrachten eine Karte (U, φ) mit der Koordinate $x = \varphi(p)$ auf M und definieren m^3 Funktionen $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, genannt **Zusammenhangskoeffizienten**, durch

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (7.14)$$

mit der Koordinatenbasis $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ in $T_p M$. Die Zusammenhangskoeffizienten legen fest, wie sich die Basisvektoren von Punkt zu Punkt ändern. Ist die Wirkung von ∇ auf die Basisvektoren erst einmal definiert, können wir die Wirkung von ∇ auf beliebige Vektoren berechnen. Es seien $V = V^\mu e_\mu$ und $W = W^\nu e_\nu$ Elemente von $T_p(M)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu [W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) e_\lambda. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Beachten Sie, dass diese Definition der Zusammenhangskoeffizienten mit dem vorher erhaltenen heuristischen Resultat in Einklang steht (7.10). Definitionsgemäß bildet ∇ zwei Vektoren V und W auf einen neuen Vektor ab, der durch die rechte Seite von Gleichung (7.15) gegeben ist und dessen λ -te Komponente $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda$ ist. Dabei gilt

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda W^\nu. \quad (7.16)$$

Beachten Sie, dass $\nabla_\mu W^\lambda$ die λ -te Komponente eines Vektors $\nabla_\mu W = \nabla_\mu W^\lambda e_\lambda$ ist – verwechseln Sie dies nicht mit der kovarianten Ableitung einer *Komponente* W^λ ! $\nabla_V W$ ist unabhängig von der Ableitung von V , anders als die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_V W = [V, W]$. In diesem Sinn ist die kovariante Ableitung eine geeignete Verallgemeinerung der Richtungsableitung von Funktionen auf Tensoren.

7.2.3 Paralleltransport und Geodäten

Zu einer gegebenen Kurve in einer Mannigfaltigkeit M können wir den Paralleltransport eines Vektors entlang dieser Kurve definieren. Sei $c : (a, b) \rightarrow M$ eine Kurve in M . Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das Bild von einer einzigen Karte (U, φ) mit der Koordinate $x = \varphi(p)$ überdeckt wird. Sei dann X ein (mindestens) entlang $c(t)$ definiertes Vektorfeld:

$$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t))e_\mu|_{c(t)}, \quad (7.17)$$

mit $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Wenn X der Bedingung

$$\nabla_V X = 0 \quad \text{für beliebiges } t \in (a, b) \quad (7.18a)$$

genügt, sagt man, dass X entlang $c(t)$ **paralleltransportiert** wird. Dabei ist der Vektor $V = d/dt = (dx^\mu(c(t))/dt)e_\mu|_{c(t)}$ der Tangentialvektor von $c(t)$. Die Bedingung (7.18a) lautet in Komponentenschreibweise

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} X^\lambda = 0. \quad (7.18b)$$

Wenn der Tangentialvektor $V(t)$ selbst entlang $c(t)$ paralleltransportiert wird, d. h., wenn

$$\nabla_V V = 0 \quad (7.19a)$$

ist, heißt die Kurve $c(t)$ **Geodäte**. Geodäten sind, in gewisser Weise, die *geradestmöglichen Kurven* in einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit. In Komponentenform hat die Geodätengleichung (7.19a) die Form

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0, \quad (7.19b)$$

wobei die $\{x^\mu\}$ die Koordinaten von $c(t)$ sind. Wir könnten jetzt einwenden, dass (7.19a) eine zu starke Bedingung an die geradestmögliche Kurve ist, und stattdessen die schwächere Bedingung

$$\nabla_V V = fV \quad (7.20)$$

aufstellen (mit $f \in \mathcal{F}(M)$), denn „die Änderung von V ist parallel zu V “ ist ebenfalls eine Eigenschaft von geraden Linien. Unter der Reparametrisierung $t \rightarrow t'$ ändert sich jedoch die Komponente des Tangentialvektors wie

$$\frac{dx^\mu}{dt} \rightarrow \frac{dt}{dt'} \frac{dx^\mu}{dt},$$

und (7.20) reduziert sich auf (7.19a), wenn für t' gilt:

$$\frac{d^2t'}{dt^2} = f \frac{dt'}{dt}.$$

Somit kann man die Kurve immer so reparametrisieren, dass die Geodätengleichung die Form (7.19a) annimmt.

Übung 7.3 Zeigen Sie, dass (7.19b) unter der affinen Reparametrisierung $t \rightarrow at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) linksinvariant ist.

7.2.4 Die kovariante Ableitung von Tensorfeldern

Da ∇_X die Bedeutung einer Ableitung hat, ist es nur natürlich, die kovariante Ableitung einer glatten Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ über die gewöhnliche Richtungsableitung zu definieren:

$$\nabla_X f = X[f]. \quad (7.21)$$

Damit sieht (7.13d) exakt wie die Produktregel bei der elementaren Differentialrechnung aus:

$$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f(\nabla_X Y). \quad (7.13d')$$

Wir fordern, dass dies für jedes beliebige Produkt von Tensoren gelten soll:

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2), \quad (7.22)$$

mit zwei Tensorfeldern T_1 und T_2 von beliebigem Typ. Gleichung (7.22) ist auch dann erfüllt, wenn einige Indizes kontrahiert werden. Mit diesen Voraussetzungen berechnen wir die kovariante Ableitung einer 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$. Wegen $\langle \omega, Y \rangle \in \mathcal{F}(M)$ für $Y \in \mathcal{X}(M)$ sollte sich

$$X[\langle \omega, Y \rangle] = \nabla_X[\langle \omega, Y \rangle] = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle$$

ergeben. Wir schreiben beide Seiten in Komponentenform und erhalten

$$(\nabla_X \omega)_\nu = X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda. \quad (7.23)$$

Insbesondere gilt für $X = e_\mu$:

$$(\nabla_\mu \omega)_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda. \quad (7.24)$$

Für $\omega = dx^\nu$ erhalten wir, vgl. Gleichung (7.14),

$$\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma^\nu_{\mu\lambda} dx^\lambda. \quad (7.25)$$

Diese Ergebnisse lassen sich verallgemeinern:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \partial_\nu t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} + \Gamma^{\lambda_1}_{\nu\kappa} t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\kappa \lambda_2 \dots \lambda_p} + \dots \\ &\quad + \Gamma^{\lambda_p}_{\nu\kappa} t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}\kappa} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu_1} t_{\kappa \mu_2 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} - \dots \\ &\quad - \Gamma^\kappa_{\nu\mu_q} t_{\mu_1 \dots \mu_{q-1}\kappa}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Übung 7.4 Sei g ein metrischer Tensor. Bestätigen Sie, dass gilt:

$$(\nabla_\nu g)_{\lambda\mu} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa}. \quad (7.27)$$

7.2.5 Transformationseigenschaften von Zusammenhangskoeffizienten

Wir führen eine weitere Karte (V, ψ) mit den Koordinaten $y = \psi(p)$ ein, sodass $U \cap V \neq \emptyset$ ist. Seien $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ und $\{f_\alpha\} = \{\partial/\partial y^\alpha\}$ die Basen der jeweiligen Koordinaten. Die Zusammenhangskoeffizienten bezüglich der y -Koordinaten bezeichnen wir als $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. Für den Basisvektor f_α gilt

$$\nabla_{f_\alpha} f_\beta = \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} f_\gamma. \quad (7.28)$$

Wenn wir $f_\alpha = (\partial x^\mu / \partial y^\alpha) e_\mu$ schreiben, wird aus der linken Seite der Gleichung

$$\begin{aligned} \nabla_{f_\alpha} f_\beta &= \nabla_{f_\alpha} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} e_\mu \right) = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} e_\mu + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \nabla_{e_\lambda} e_\mu \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \right) e_\nu. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite von Gleichung (7.28) gleich $\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} (\partial x^\nu / \partial y^\gamma) e_\nu$ ist, müssen sich die Zusammenhangskoeffizienten wie

$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} \quad (7.29)$$

transformieren. Sie sollten überprüfen, dass diese Transformationsregel tatsächlich $\nabla_X Y$ zu einem Vektor macht, dass also gilt:

$$\tilde{X}^\alpha (\tilde{\partial}_\alpha \tilde{Y}^\gamma + \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \tilde{Y}^\beta) f_\gamma = X^\lambda (\partial_\lambda Y^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} Y^\mu) e_\nu.$$

In der Literatur werden Zusammenhangskoeffizienten oft als Objekte definiert, die sich wie (7.29) transformieren. In unserer Betrachtungsweise dagegen müssen sie sich gemäß (7.29) transformieren, damit $\nabla_X Y$ unabhängig von der Koordinatenwahl wird.

Übung 7.5 Sei Γ ein beliebiger Zusammenhangskoeffizient. Zeigen Sie, dass $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ ein weiterer Zusammenhangskoeffizient ist, unter der Voraussetzung, dass $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ein Tensorfeld ist. Nehmen Sie umgekehrt an, dass $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ und $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ Zusammenhangskoeffizienten sind. Zeigen Sie, dass dann $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ eine Komponente eines Tensors vom Typ $(1,2)$ ist.

7.2.6 Der metrische Zusammenhang

Bis jetzt haben wir beliebige Γ zugelassen. Nun, da wir unsere Mannigfaltigkeit mit einer Metrik versehen haben, können wir sinnvolle Einschränkungen für die mögliche Form von Zusammenhängen finden. Wir verlangen, dass die Metrik $g_{\mu\nu}$ kovariant konstant sein soll, d. h., wenn zwei Vektoren X und Y entlang irgendeiner Kurve paralleltransportiert werden, dann soll das innere Produkt zwischen ihnen konstant unter Paralleltransport bleiben.¹ Sei V ein Tangentialvektor einer beliebigen Kurve,

¹ In Beispiel 7.1 haben wir diese vernünftige Bedingung bereits angenommen.

entlang derer die Vektoren paralleltransportiert werden. Dann erhalten wir

$$0 = \nabla_V[g(X, Y)] = V^\kappa[(\nabla_\kappa g)(X, Y) + g(\nabla_\kappa X, Y) + g(X, \nabla_\kappa Y)] = V^\kappa X^\mu Y^\nu (\nabla_\kappa g)_{\mu\nu},$$

wobei wir beachtet haben, dass $\nabla_\kappa X = \nabla_\kappa Y = 0$ ist. Da dies für beliebige Kurven und Vektoren gilt, muss

$$(\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} = 0 \quad (7.30a)$$

gelten, oder, mit Übung 7.4,

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} = 0. \quad (7.30b)$$

Wenn (7.30a) erfüllt ist, sagt man, der affine Zusammenhang ∇ sei **metrisch kompatibel** oder einfach ein **metrischer Zusammenhang**. Wir werden ausschließlich mit metrischen Zusammenhängen zu tun haben. Zyklische Permutationen von (λ, μ, ν) führen auf

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} = 0, \quad (7.30c)$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} g_{\kappa\lambda} = 0. \quad (7.30d)$$

Die Kombination $-(7.30b) + (7.30c) + (7.30d)$ ergibt

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + T^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + T^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} - 2\Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)} g_{\kappa\lambda} = 0, \quad (7.31)$$

mit $T^\kappa{}_{\lambda\mu} \equiv 2\Gamma^\kappa{}_{[\lambda\mu]} \equiv \Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}$ und $\Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu})$. Der Tensor $T^\kappa{}_{\lambda\mu}$ ist antisymmetrisch bezüglich der unteren Indizes $T^\kappa{}_{\lambda\mu} = -T^\kappa{}_{\mu\lambda}$ und wird **Torsionstensor** genannt, siehe Übung 7.6. Den Torsionstensor werden wir im Detail im nächsten Abschnitt untersuchen. Auflösen von Gleichung (7.31) nach $\Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)}$ gibt

$$\Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)} = \left\{ \begin{array}{l} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{1}{2} (T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu). \quad (7.32)$$

Die $\left\{ \begin{array}{l} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\}$ sind dabei die **Christoffel-Symbole**, definiert durch

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (7.33)$$

Schließlich ist der Zusammenhangskoeffizient Γ gegeben durch

$$\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)} + \Gamma^\kappa{}_{[\mu\nu]} = \left\{ \begin{array}{l} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{1}{2} (T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu + T^\kappa{}_{\mu\nu}). \quad (7.34)$$

Der zweite Term des letzten Ausdrucks von Gleichung (7.34) wird der **Kontorsions-tensor** $K_{\kappa\mu\mu}$ genannt:

$$K^\kappa{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (T^\kappa{}_{\mu\nu} + T_\mu{}^\kappa{}_\nu + T_\nu{}^\kappa{}_\mu). \quad (7.35)$$

Wenn der Torsionstensor auf einer Mannigfaltigkeit M verschwindet, nennt man den metrischen Zusammenhang ∇ **Levi-Civita-Zusammenhang**. Levi-Civita-Zusammenhänge sind natürliche Verallgemeinerungen des in der klassischen Geometrie definierten Zusammenhangs von Flächen, siehe Abschnitt 7.4.

Übung 7.6 Zeigen Sie, dass $T^\kappa_{\mu\nu}$ der Transformationsregel für Tensoren gehorcht; verwenden Sie dazu (7.29). Zeigen Sie auch, dass $K^\kappa_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}T^\kappa_{\mu\nu}$ und $K_{\kappa\mu\nu} = -K_{\nu\mu\kappa}$, wobei $K_{\kappa\mu\nu} = g_{\kappa\lambda}K^\lambda_{\mu\nu}$ ist.

7.3 Krümmung und Torsion

7.3.1 Definitionen

Da Γ kein Tensor ist, kann es keine intrinsische geometrische Bedeutung als Maß dafür haben, wie stark eine Mannigfaltigkeit gekrümmmt ist. So verschwinden in Beispiel 7.1 die Zusammenhangskoeffizienten in den kartesischen Koordinaten, nicht aber nicht in Polarkoordinaten. Als intrinsische Objekte definieren wir den **Torsionstensor** $T : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ und den **Riemann'schen Krümmungstensor** (oder schlicht **Riemann-Tensor**) $R : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ durch

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (7.36)$$

$$R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (7.37)$$

Es ist üblich, $R(X, Y)Z$ zu schreiben und nicht $R(X, Y, Z)$, sodass R wie ein Operator aussieht, der auf Z wirkt. Natürlich erfüllen R und T die Bedingungen

$$T(X, Y) = -T(Y, X), \quad R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z. \quad (7.38)$$

Auf den ersten Blick scheinen T und R Differentialoperatoren zu sein, und es ist nicht offensichtlich, dass es sich bei ihnen um multilinearre Objekte handelt. Wir beweisen die Tensoreigenschaft von R :

$$\begin{aligned} R(fX, gY)hZ &= f\nabla_X\{g\nabla_Y(hZ)\} - g\nabla_Y\{f\nabla_X(hZ)\} - fX[g]\nabla_Y(hZ) \\ &\quad + gY[f]\nabla_X(hZ) - fg\nabla_{[X, Y]}(hZ) \\ &= fg\nabla_X\{Y[h]Z + h\nabla_Y Z\} - gf\nabla_Y\{X[h]Z + h\nabla_X Z\} \\ &\quad - fg[X, Y][h]Z - fgh\nabla_{[X, Y]}Z \\ &= fgh\{\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z\} \\ &= fghR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Nun ist es leicht einzusehen, dass R die Gleichung

$$R(X, Y)Z = X^\lambda Y^\mu Z^\nu R(e_\lambda, e_\mu) e_\nu \quad (7.39)$$

erfüllt, womit der Tensorcharakter von R gezeigt ist. Da R drei Vektorfelder auf ein Vektorfeld abbildet, ist es ein Tensorfeld vom Typ (1, 3).

Übung 7.7 Zeigen Sie, dass T , definiert wie in (7.36), multilinear ist,

$$T(X, Y) = X^\mu Y^\nu T(e_\mu, e_\nu), \quad (7.40)$$

und daher ein Tensorfeld vom Typ (1, 2).

Weil T und R Tensoren sind, erhält man ihre Wirkungen auf beliebige Vektoren, sobald ihre Wirkungen auf die Basisvektoren bekannt sind. Bezüglich der Koordinatenbasis $\{e_\mu\}$ und der dualen Basis $\{dx^\mu\}$ sind die Tensorkomponenten durch

$$\begin{aligned} T^\lambda_{\mu\nu} &= \langle dx^\lambda, T(e_\mu, e_\nu) \rangle = \langle dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \Gamma^\eta_{\mu\nu} e_\eta - \Gamma^\eta_{\nu\mu} e_\eta \rangle = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (7.41)$$

bzw.

$$\begin{aligned} R^\kappa_{\lambda\mu\nu} &= \langle dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu) e_\lambda \rangle = \langle dx^\kappa, \nabla_\mu \nabla_\nu e_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\lambda \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, \nabla_\mu (\Gamma^\eta_{\nu\lambda} e_\eta) - \nabla_\nu (\Gamma^\eta_{\mu\lambda} e_\eta) \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, (\partial_\mu \Gamma^\eta_{\nu\lambda}) e_\eta + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\xi_{\mu\eta} e_\xi - (\partial_\nu \Gamma^\eta_{\mu\lambda}) e_\eta - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\xi_{\nu\eta} e_\xi \rangle \\ &= \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\eta} \end{aligned} \quad (7.42)$$

gegeben. Wir erhalten sofort, vgl. (7.38):

$$T^\lambda_{\mu\nu} = -T^\lambda_{\nu\mu}, \quad R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = -R^\kappa_{\lambda\nu\mu}. \quad (7.43)$$

7.3.2 Geometrische Bedeutung von Riemann- und Torsionstensor

Bevor wir weitermachen, wollen wir die geometrische Bedeutung dieser beiden Tensoren untersuchen. Wir betrachten zuerst den Riemann-Tensor. Eine entscheidende Beobachtung ist hier, dass, wenn wir einen Vektor V bei p nach q entlang zweier unterschiedlicher Kurven C und C' paralleltransportieren, die resultierenden Vektoren bei q im Allgemeinen verschieden sind (Abb. 7.2). Wenn wir hingegen einen Vektor in einem euklidischen Raum paralleltransportieren, wobei der Paralleltransport im gewöhnlichen Sinn definiert sei, hängt der resultierende Vektor nicht von dem

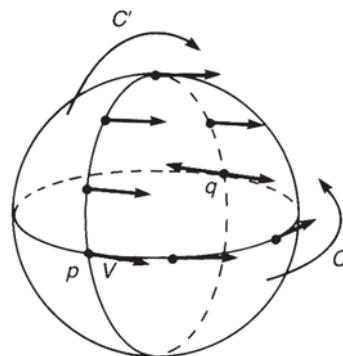


Abb. 7.2. Es ist natürlich, den Paralleltransport von V entlang eines Großkreises zu definieren, wenn der Winkel zwischen V und dem Großkreis festgehalten wird. Wenn V von p aus entlang zweier Großkreise C und C' paralleltransportiert wird, weisen die resultierenden Vektoren am Punkt q in entgegengesetzte Richtungen.

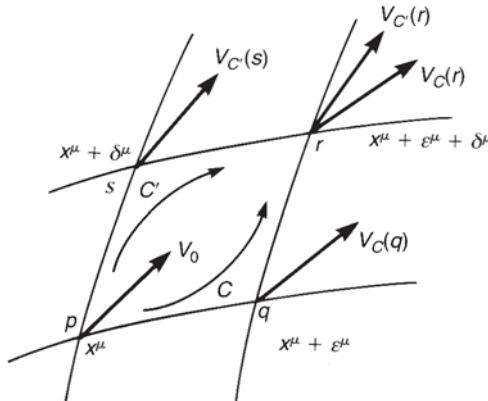


Abb. 7.3. Ein Vektor V_0 bei p wird entlang C und C' paralleltransportiert, und man erhält bei r den Vektor $V_C(r)$ bzw. $V_{C'}(r)$. Die Krümmung misst die Differenz zwischen den beiden paralleltransportierten Vektoren.

Pfad ab, auf welchem der Paralleltransport erfolgt. Wir erwarten, dass die Nichtintegrabilität des Paralleltransports einen intrinsischen Krümmungsbegriff darstellt, welcher nicht von der speziellen Koordinatenwahl abhängt. Betrachten wir ein infinitesimales Parallelogramm $pqrq$ mit den Koordinaten $\{x^\mu\}$, $\{x^\mu + \varepsilon^\mu\}$, $\{x^\mu + \varepsilon^\mu + \delta^\mu\}$ bzw. $\{x^\mu + \delta^\mu\}$ mit den infinitesimalen Größen ε^μ und δ^μ (Abb. 7.3). Wenn wir einen Vektor $V_0 \in T_p M$ entlang $C = pqr$ paralleltransportieren, erhalten wir einen Vektor $V_C(r) \in T_r M$. Der Vektor V_0 , paralleltransportiert nach q entlang C , ist

$$V_C^\mu(q) = V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \varepsilon^\nu.$$

Dann ist $V_C^\mu(r)$ durch

$$\begin{aligned} V_C^\mu(r) &= V_C^\mu(q) - V_C^\kappa(q) \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(q) \delta^\nu \\ &= V_0^\mu - V_0^\nu \Gamma^\mu_{\nu\kappa} \varepsilon^\kappa - [V_0^\kappa - V_0^\rho \Gamma^\kappa_{\zeta\rho}(p) \varepsilon^\zeta] \cdot [\Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) + \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \varepsilon^\lambda] \delta^\nu \\ &\simeq V_0^\mu - V_0^\nu \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \varepsilon^\kappa - V_0^\kappa \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \delta^\nu - V_0^\kappa [\partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) - \Gamma^\rho_{\nu\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\nu\rho}(p)] \varepsilon^\lambda \delta^\nu \end{aligned}$$

gegeben, wobei wir Terme bis zur zweiten Ordnung in ε und δ mitgeführt haben. Ähnlich gibt der Paralleltransport von V_0 entlang $C' = psr$ einen anderen Vektor $V_{C'}(r) \in T_r M$, der durch

$$V_{C'}^\mu(r) \simeq V_0^\mu - V_0^\nu \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \delta^\kappa - V_0^\kappa \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \varepsilon^\nu - V_0^\kappa [\partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\kappa}(p) - \Gamma^\rho_{\nu\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\lambda\rho}(p)] \varepsilon^\lambda \delta^\nu$$

gegeben ist. Die zwei Vektoren bei r unterscheiden sich durch

$$\begin{aligned} V_{C'}^\mu(r) - V_C^\mu(r) &= V_0^\kappa [\partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\kappa}(p) - \Gamma^\rho_{\lambda\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\nu\rho}(p) + \Gamma^\rho_{\nu\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\lambda\rho}(p)] \varepsilon^\lambda \delta^\nu \\ &= V_0^\kappa R^\mu_{\nu\lambda\kappa} \varepsilon^\lambda \delta^\nu. \end{aligned} \tag{7.44}$$

Als nächstes schauen wir uns die geometrische Bedeutung des Torsionstensors an. Sei $p \in M$ ein Punkt mit den Koordinaten $\{x^\mu\}$. Seien $X = \varepsilon^\mu e_\mu$ und $Y = \delta^\mu e_\mu$ infinitesimale Vektoren in $T_p M$. Wenn wir diese Vektoren als kleine Verschiebungen

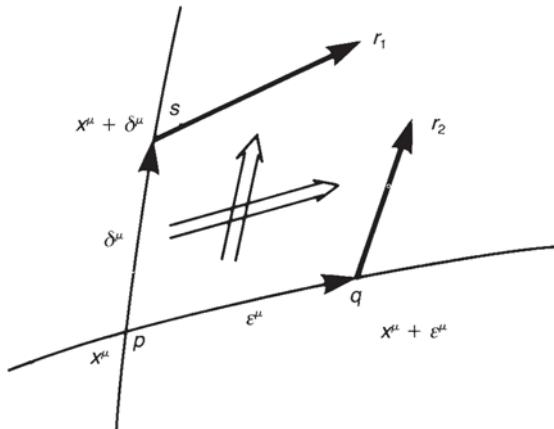


Abb. 7.4. Der Vektor qr_2 (sr_1) ist der nach q (s) paralleltransportierte Vektor ps (pq). Im Allgemeinen ist $r_1 \neq r_2$, und die Torsion misst die Differenz r_2r_1 .

ansehen, definieren sie zwei Punkte q und s in der Nähe von p , deren Koordinaten $\{x^\mu + \varepsilon^\mu\}$ bzw. $\{x^\mu + \delta^\mu\}$ sind (Abb. 7.4). Wenn wir X entlang der Linie ps paralleltransportieren, erhalten wir einen Vektor sr_1 , dessen Komponente $\varepsilon^\mu - \varepsilon^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \delta^\nu$ ist. Der Verschiebungsvektor, welcher p und r_1 verbindet, ist:

$$pr_1 = ps + sr_1 = \delta^\mu + \varepsilon^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \varepsilon^\lambda \delta^\nu.$$

Ähnlich ergibt der Paralleltransport von δ^μ entlang pq einen Vektor

$$pr_2 = pq + qr_2 = \varepsilon^\mu + \delta^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \varepsilon^\lambda \delta^\nu.$$

Im Allgemeinen stimmen r_1 und r_2 nicht miteinander überein, und ihre Differenz ist

$$r_2r_1 = pr_2 - pr_1 = (\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}) \varepsilon^\lambda \delta^\nu = T^\mu_{\nu\lambda} \varepsilon^\lambda \delta^\nu. \quad (7.45)$$

Somit misst der Torsionstensor, wie weit es uns misslingt, das Parallelogramm aus den kleinen Verschiebungsvektoren und ihren Paralleltransporten zu schließen.

Beispiel 7.2. Nehmen wir an, wir navigieren ein Schiff auf der Erdoberfläche. Wir definieren, dass ein Vektor paralleltransportiert wird, wenn der Winkel zwischen diesem Vektor und dem jeweiligen Längengrad während der Fahrt fest bleibt.² Nehmen wir weiter an, dass wir uns auf einem kleinen Viereck $pqrs$ bewegen, dessen Seiten Breiten- und Längenkreise sind (Abb. 7.5(a)). Wir transportieren einen Vektor bei p parallel einmal entlang pqr und einmal entlang psr . Gemäß unserer Definition des Paralleltransports sollten zwei Vektoren bei r übereinstimmen

² Diese Definition des Paralleltransports ist nicht die üblicherweise verwendete. Beispielsweise ist auf diese Weise eine Geodäte kein Großkreis, sondern eine gerade Linie in der Mercator-Projektion; siehe Beispiel 7.5.

und daher der Krümmungstensor verschwinden. Um die Torsion zu ermitteln, parametrisieren wir die Punkte p, q, r und s wie in Abb. 7.5(b) dargestellt. Wir erhalten die Torsion, indem wir die Differenz zwischen pr_1 und pr_2 wie in Gleichung (7.45) bestimmen. Wenn wir den Vektor pq entlang ps paralleltransportieren, erhalten wir einen Vektor sr_1 mit der Länge $R\sin \theta d\phi$. Ein Paralleltransport des Vektors ps entlang pq ergibt jedoch einen Vektor $qr_2 = qr$. Da sr die Länge $R\sin(\theta - d\theta)d\phi \approx R\sin \theta d\phi - R\cos \theta d\theta d\phi$ hat, stellen wir fest, dass r_1r_2 eine Länge $R\cos \theta d\theta d\phi$ hat. Da r_1r_2 parallel zu $-\partial/\partial\phi$ ist, hat der Zusammenhang eine Torsion $T^\phi_{\theta\phi}$, siehe Gleichung (7.45). Mit $g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta$ ergibt sich, dass r_1r_2 die Komponenten $(0, -\cot \theta d\theta d\phi)$ hat. Da die ϕ -Komponente von r_1r_2 gleich $T^\phi_{\theta\phi} d\theta d\phi$ ist, erhalten wir $T^\phi_{\theta\phi} = -\cot \theta$. \diamond

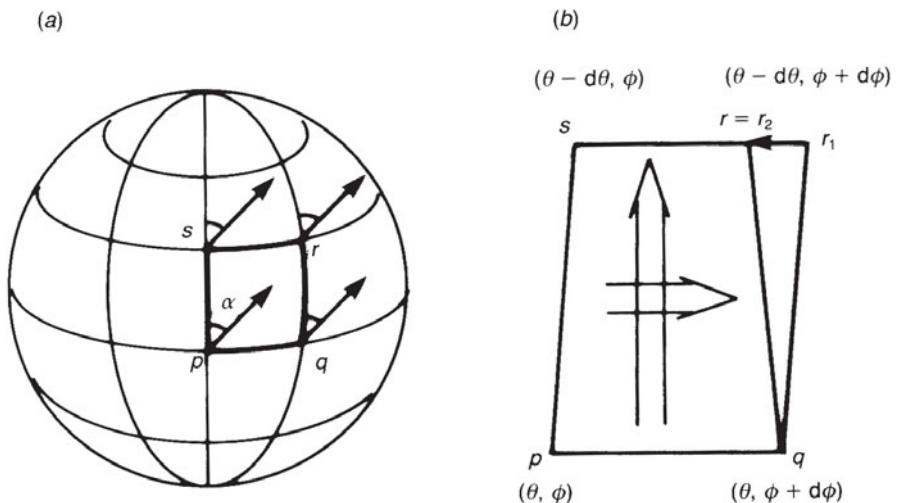


Abb. 7.5. (a) Der Winkel α zwischen einem Vektor bei p und dem dortigen Längengrad bleibt während dieses Paralleltransports gleich. (b) Der Vektor sr_1 (qr_2) ist der Vektor pq (ps), paralleltransportiert nach s (q). Die Torsion verschwindet nicht.

Beachten Sie, dass die Basis $\{\partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi\}$ an den Polen nicht wohldefiniert ist. Es ist bekannt, dass es auf der Sphäre S^2 keine zwei Vektorfelder geben kann, die überall auf der S^2 linear unabhängig sind. Jedes Vektorfeld auf S^2 muss irgendwo auf S^2 verschwinden und kann daher dort nicht von dem anderen Vektorfeld linear unabhängig sein. Wenn eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit M m Vektorfelder erlaubt, die überall linear unabhängig sind, heißt M **parallelisierbar**. Auf einer parallelisierbaren Mannigfaltigkeit können wir diese m Vektorfelder verwenden, um an jedem Punkt von M einen Tangentialraum zu definieren. Ein Vektor $V_p \in T_p M$ wird als parallel zu $V_q \in T_q M$ definiert, wenn alle Komponenten von V_p bei $T_p M$ mit denen von V_q bei $T_q M$ übereinstimmen. Da die Vektorfelder in ganz M definiert sind, sollte diese Parallelität unabhängig von dem Pfad zwischen p und q sein, weswegen

der Riemann'sche Krümmungstensor verschwindet, obwohl der Torsionstensor im Allgemeinen nicht verschwindet. Für S^m ist dies nur möglich, wenn $m = 1, 3$ oder 7 ist, was eng mit der Existenz von komplexen Zahlen, Quaternionen und Oktonionen zusammenhängt. Der Deutlichkeit halber betrachten wir die

$$S^3 = \left\{ (x^1, x^2, x^3, x^4) \mid \sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = 1 \right\},$$

eingebettet in (\mathbb{R}^4, δ) . Die drei orthonormalen Vektoren

$$\begin{aligned} e_1(x) &= (-x^2, x^1, -x^4, x^3), \\ e_2(x) &= (-x^3, x^4, x^1, -x^2), \\ e_3(x) &= (-x^4, -x^3, x^2, x^1) \end{aligned} \quad (7.46)$$

stehen orthogonal auf $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ und sind überall linear unabhängig auf der S^3 , definieren also den Tangentialraum $T_x S^3$. Zwei Vektoren $V_1(x)$ und $V_2(y)$ sind parallel, wenn $V_1(x) = \sum c^i e_i(x)$ und $V_2(y) = \sum c^i e_i(y)$ ist. Die Zusammenhangskoeffizienten werden aus (7.14) berechnet. Sei $\varepsilon e_1(x)$ eine kleine Verschiebung, unter welcher $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ sich in $x' = x + \varepsilon e_1(x) = \{x^1 - \varepsilon x^2, x^2 + \varepsilon x^1, x^3 - \varepsilon x^4, x^4 + \varepsilon x^3\}$ ändert. Die Differenz zwischen den Basisvektoren bei x und bei x' ist $e_2(x') - e_2(x) = (-x^3 - \varepsilon x^4, x^4 + \varepsilon x^3, x^1 - \varepsilon x^2, -x^2 - \varepsilon x^1) - (-x^3, x^4, x^1, -x^2) = -\varepsilon e_3(x) = \varepsilon \Gamma^{\mu}_{12} e_{\mu}(x)$, daher ist $\Gamma^3_{12} = -1$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0$. Ähnlich gilt $\Gamma^3_{21} = 1$, und wir erhalten daraus $\Gamma^3_{12} = -2$. Sie sollten auch die übrigen Zusammenhangskoeffizienten ausrechnen und sich so davon überzeugen, dass $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -2 (+2)$ ist, wenn $(\lambda\mu\nu)$ eine gerade (ungerade) Permutation von (123) ist, und andernfalls verschwindet.

Wie hängt nun die Parallelisierbarkeit der S^3 mit der Existenz von Quaternionen zusammen? Die Multiplikation von Quaternionen ist definiert als

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3, x^4) \cdot (y^1, y^2, y^3, y^4) \\ = (x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 - x^4 y^4, x^1 y^2 + x^2 y^1 + x^3 y^4 - x^4 y^3, \\ x^1 y^3 - x^2 y^4 + x^3 y^1 + x^4 y^2, x^1 y^4 + x^2 y^3 - x^3 y^2 + x^4 y^1). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Wir können S^3 als die Menge der Einheitsquaternionen definieren:

$$S^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) | x \cdot \bar{x} = 1\},$$

wobei die „quaternionisch“ Konjugierte von x als $\bar{x} = (x^1, -x^2, -x^3, -x^4)$ definiert ist. Wegen (7.46) wird der Tangentialraum bei $x_0 = (1, 0, 0, 0)$ durch

$$e_1 = (0, 1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 0, 1)$$

aufgespannt. Dann lassen sich die Basisvektoren (7.46) des Tangentialraums bei $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ als die Quaternionenprodukte

$$e_1(x) = e_1 \cdot x, \quad e_2(x) = e_2 \cdot x, \quad e_3(x) = e_3 \cdot x \quad (7.48)$$

ausdrücken. Wegen dieser Algebra ist es *immer* möglich, einen Satz von Basisvektoren an einem beliebigen Punkt der S^3 zu finden, sofern die Basisvektoren an einem bestimmten gegebenen Punkt vorliegen, beispielsweise $x_0 = (1, 0, 0, 0)$.

Aus den gleichen Gründen ist eine Lie-Gruppe parallelisierbar. Wenn am neutralen Element e einer Lie-Gruppe G die Basisvektoren $\{V_1, \dots, V_m\}$ gegeben sind, können wir durch Linkstranslation von $\{V_\mu\}$ immer einen Satz Basisvektoren von $T_g G$ finden (siehe Abschnitt 5.6):

$$\{V_1, \dots, V_n\} \xrightarrow{L_{g*}} \{X_1|_g, \dots, X_n|_g\}. \quad (7.49)$$

7.3.3 Der Ricci-Tensor und die skalare Krümmung

Aus dem Riemann'schen Krümmungstensor konstruieren wir neue Tensoren durch Kontraktion (Verjüngung) der Indizes. Der **Ricci-Tensor** Ric^3 ist ein Tensor vom Typ $(0, 2)$, der durch

$$Ric(X, Y) \equiv \langle dx^\mu, R(e_\mu, Y)X \rangle \quad (7.50a)$$

definiert ist. Seine Komponenten sind

$$Ric_{\mu\nu} = Ric(e_\mu, e_\nu) = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}. \quad (7.50b)$$

Die **skalare Krümmung** \mathcal{R} (auch Krümmungsskalar genannt) erhält man durch weitere Kontraktion der Indizes:

$$\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} Ric(e_\mu, e_\nu) = g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}. \quad (7.51)$$

7.4 Levi-Civita-Zusammenhänge

7.4.1 Der Hauptsatz der Riemann'schen Geometrie

Unter den affinen Zusammenhängen gibt es einen besonderen Zusammenhang namens **Levi-Civita-Zusammenhang**, welcher die natürliche Verallgemeinerung des Zusammenhangs in der klassischen Differentialgeometrie von Flächen darstellt. Ein Zusammenhang ∇ heißt **symmetrischer Zusammenhang**, wenn der Torsionstensor verschwindet. In der Koordinatenbasis genügen die Zusammenhangskoeffizienten eines symmetrischen Zusammenhangs der Gleichung

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \quad (7.52)$$

Satz 7.1. (Hauptsatz der (pseudo-)Riemann'schen Geometrie) Auf einer (pseudo-)Riemann'schen Mannigfaltigkeit (M, g) existiert ein eindeutiger *symmetrischer*

³ Im Deutschen wird für den Ricci-Tensor oft auch das Symbol $R_{\mu\nu}$ verwendet. Zur besseren Unterscheidung vom Riemann-Tensor bleiben wir hier aber bei „ $Ric_{\mu\nu}$ “ (Anm. d. Ü.).

Zusammenhang, der *kompatibel* mit der Metrik g ist. Dieser Zusammenhang wird **Levi-Civita-Zusammenhang** genannt.

Beweis

Die Aussage folgt direkt aus Gleichung (7.34). Sei ∇ ein beliebiger Zusammenhang, sodass gilt:

$$\tilde{\Gamma}^\kappa_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + K^\kappa_{\mu\nu},$$

wobei $\left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\}$ das Christoffel-Symbol ist und K der Kontorsionstensor. In Übung 7.5 haben wir gezeigt, dass $\Gamma^\kappa_{\mu\nu} \equiv \tilde{\Gamma}^\kappa_{\mu\nu} + t^\kappa_{\mu\nu}$ ein weiterer Zusammenhangskoeffizient ist, wenn t ein Tensorfeld vom Typ $(1,2)$ ist. Jetzt wählen wir $t^\kappa_{\mu\nu} = -K^\kappa_{\mu\nu}$, sodass gilt:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (7.53)$$

Aufgrund der Konstruktion ist dies symmetrisch und bei gegebener Metrik natürlich auch eindeutig. \square

Übung 7.8

Sei V ein Levi-Civita-Zusammenhang.

(a) Sei $f \in \mathcal{F}(M)$. Zeigen Sie:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f = \nabla_\nu \nabla_\mu f. \quad (7.54)$$

(b) Sei $\omega \in \Omega^1(M)$. Zeigen Sie:

$$d\omega = (\nabla_\mu \omega)_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (7.55)$$

(c) Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ und sei $U \in \mathcal{X}(M)$ das korrespondierende Vektorfeld: $U^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu$. Zeigen Sie, dass für jedes $V \in \mathcal{X}(M)$ gilt:

$$g(\nabla_X U, V) = \langle \nabla_X \omega, V \rangle. \quad (7.56)$$

Beispiel 7.3.

(a) Die Metrik auf \mathbb{R}^2 ist in Polarkoordinaten durch $g = dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi$ gegeben. Die nichtverschwindenden Komponenten der Levi-Civita-Zusammenhangskoeffizienten sind $\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = r^{-1}$ und $\Gamma^r_{\phi\phi} = -r$. Dies steht in Einklang mit dem Ergebnis aus Beispiel 7.1.

(b) Die induzierte Metrik auf S^2 ist $g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi$. Die nichtverschwindenden Komponenten des Levi-Civita-Zusammenhangs sind

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos \theta \sin \theta, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot \theta. \quad (7.57)$$

\diamond

7.4.2 Der Levi-Civita-Zusammenhang in der klassischen Geometrie von Flächen

In der klassischen Differentialgeometrie von in den \mathbb{R}^3 eingebetteten Flächen definiert Levi-Civita die Parallelität von Vektoren an nahe beieinanderliegenden Punkten p und q in der folgenden Weise (Abb. 7.6): Man nehme zuerst die Tangentialebene bei p und einen Vektor V_p bei p , der in dieser Tangentialebene liegt. Ein Vektor V_q bei q ist nach dieser Definition parallel zu V_p , wenn die Projektion von V_q auf die Tangentialebene bei p parallel zu V_p im konventionellen Sinne ist. Dann nehme man zwei Punkte q und s in der Nähe von p , wie in Abb. 7.7 skizziert, und transportiere den Verschiebungsvektor ps parallel entlang ps und entsprechend ps parallel entlang pq . Wenn Parallelität nach Levi-Civita definiert wird, bilden die auf die Tangentialebene bei p projizierten Verschiebungsvektoren ein geschlossenes Parallelogramm, weswegen bei dieser Parallelität die Torsion verschwindet. Wie in Satz 7.1 bewiesen, existiert ein eindeutiger Zusammenhang mit verschwindender Torsion, womit die hier definierte Parallelität auf beliebige Mannigfaltigkeiten verallgemeinert wird.

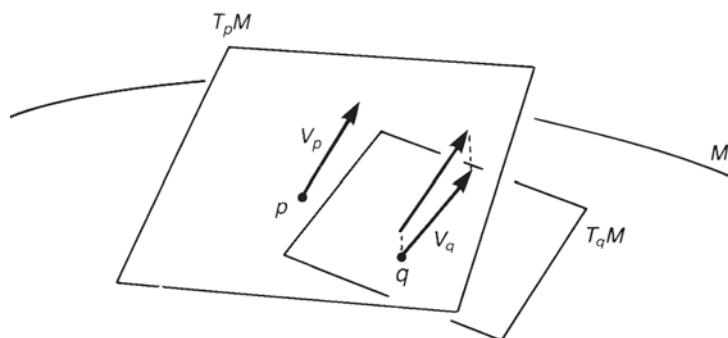


Abb. 7.6. Auf einer Fläche M wird ein Vektor $V_p \in T_p M$ als parallel zu $V_q \in T_q M$ definiert, wenn die Projektion von V_q auf $T_p M$ parallel zu V_p ist im gewöhnlich Sinne von Parallelität im \mathbb{R}^2 .

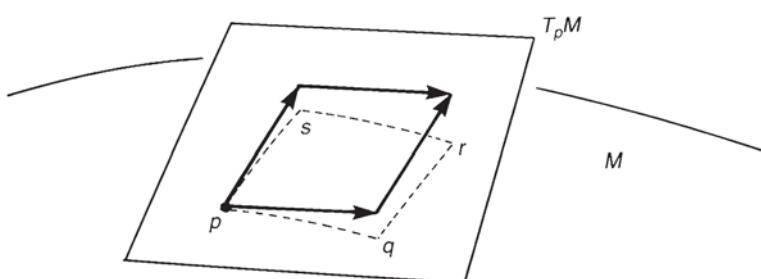


Abb. 7.7. Wenn die Parallelität nach Levi-Civita definiert wird, verschwindet die Torsion identisch.

7.4.3 Geodäten

Mit dem Levi-Civita-Zusammenhang kann man die Zusammenhangskoeffizienten, Riemann-Tensoren und viele weitere Beziehungen mit einfachen Routinen berechnen. Neben dieser rechnerischen Vereinfachung liefert uns der Levi-Civita-Zusammenhang eine weitere Interpretation von Geodäten nicht als *geradestmögliche*, sondern als *kürzestmögliche* Kurven zwischen zwei gegebenen Punkten. In der Newton'schen Mechanik ist die Bahn eines freien Teilchens sowohl die geradeste als auch die kürzeste Verbindung zwischen Start- und Endpunkt, nämlich eine gerade Linie. Einstein schlug vor, dass dies auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie der Fall sein sollte: Wenn Gravitation als ein Aspekt der Raumzeitgeometrie verstanden wird, sollte ein frei fallendes Teilchen der geradestmöglichen wie auch der kürzestmöglichen Kurve folgen.⁴

Beispiel 7.4. In einer flachen Mannigfaltigkeit (\mathbb{R}^m, δ) oder (\mathbb{R}^m, η) verschwinden die Levi-Civita -Zusammenhangskoeffizienten Γ identisch. Daher lässt sich dort die Geodätengleichung (7.19b) leicht lösen, und man erhält $x^\mu = A^\mu t + B^\mu$, mit konstanten A^μ und B^μ . \diamond

Übung 7.9 Eine Metrik auf einem Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ sei durch $g = d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz$ gegeben, wobei ϕ der Polarwinkel von S^1 und z die Koordinate von \mathbb{R} ist. Zeigen Sie, dass die durch den Levi-Civita-Zusammenhang gegebenen Geodäten Schraubenlinien (Helices) sind.

Die Äquivalenz zwischen der geradestmöglichen Kurve und dem lokalen Extremum des Abstands beweist man wie folgt. Zuerst parametrisieren wir die Kurve mit dem Abstand s vom Startpunkt: $x^\mu = x^\mu(s)$. Die Länge eines Pfads c , der zwei Punkte p und q verbindet, ist

$$I(c) = \int_c ds = \int_c \sqrt{g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu} ds, \quad (7.58)$$

mit $x'^\mu = dx^\mu/ds$. Anstatt dass wir die Euler-Lagrange-Gleichung aus (7.58) herleiten, werden wir eine etwas einfachere Aufgabe lösen. Sei $F \equiv \frac{1}{2} g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$. Wir schreiben (7.58) als $I(c) = \int_c L(F) ds$. Die Euler-Lagrange-Gleichung für das ursprüngliche Problem hat die Form

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial x'^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0. \quad (7.59)$$

⁴ Wenn man es genau nimmt, ist „kürzestmögliche Kurve“ eine zu starke Forderung. Wie wir später sehen werden, ist die Länge einer über den Levi-Civita-Zusammenhang definierten Geodäte ein lokales Extremum.

Dann erfüllt $F = L^2/2$ die Gleichung

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x'^\lambda} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^\lambda} = L \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial x'^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} \right] + \frac{\partial L}{\partial x'^\lambda} \frac{dL}{ds} = \frac{\partial L}{\partial x'^\lambda} \frac{dL}{ds}. \quad (7.60)$$

Der letzte Ausdruck verschwindet, da $L \equiv 1$ entlang der Kurve $dL/ds = 0$ ist. Damit haben wir bewiesen, dass F die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt, sofern L dies tut. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (g_{\lambda\mu} x'^\mu) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} x'^\mu x'^\nu \\ = \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} x'^\mu x'^\nu + g_{\lambda\mu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} x'^\mu x'^\nu \\ = g_{\lambda\mu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Wenn (7.61) mit $g^{\kappa\lambda}$ multipliziert wird, erhalten wir wieder die Geodätengleichung (7.19b).

Nachdem wir gezeigt haben, dass L und F dasselbe Variationsproblem lösen, können wir dies verwenden, um die Christoffel-Symbole auszurechnen. Betrachten wir als Beispiel die Sphäre S^2 . Dort ist F gegeben als $\frac{1}{2}(\theta'^2 + \sin^2 \theta \phi'^2)$, und die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (7.62a)$$

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + 2 \cot \theta \frac{d\phi}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0. \quad (7.62b)$$

Daraus lesen wir die Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin \theta \cos \theta$ und $\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot \theta$ ab, siehe Gleichung (7.57).

Beispiel 7.5. Lassen Sie uns die Geodäten der S^2 berechnen. Dazu lösen wir nicht die Geodätengleichungen (7.62), sondern wir minimieren die Länge einer Kurve zwischen zwei Punkten auf der S^2 . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir diesen Punkten die Koordinaten (θ_1, ϕ_0) und (θ_2, ϕ_0) zuschreiben. Sei $\phi = \phi(\theta)$ eine Kurve, welche diese Punkte verbindet. Dann ist die Länge dieser Kurve

$$I(c) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2 \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2} d\theta. \quad (7.63)$$

Diese wird minimal, wenn $d\phi/d\theta \equiv 0$ ist, also gilt: $\phi \equiv \phi_0$. Somit ist die Geodäte ein Großkreis (θ, ϕ_0) mit $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.⁵ \diamond

Beispiel 7.6. Sei U die obere Halbebene $U \equiv \{(x, y) | y > 0\}$, hier auch **Poincaré-Halbebene** genannt, auf welcher wir die folgende Metrik (die „Poincaré-Metrik“) einführen:

$$g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2}. \quad (7.67)$$

Die Geodätengleichungen sind

$$x'' - \frac{2}{y} x' y' = 0, \quad (7.68a)$$

$$y'' + \frac{1}{y} [(x')^2 - (y')^2] = 0, \quad (7.68b)$$

mit $x' \equiv dx/ds$ usw. Die erste Gleichung von (7.68) ist leicht zu integrieren, wenn man sie durch x' teilt:

$$\frac{x'}{y^2} = \frac{1}{R}. \quad (7.69)$$

Dabei ist R eine Konstante. Da der Parameter s so gewählt wird, dass der Vektor (x', y') Einheitslänge hat, erfüllt er $(x'^2 + y'^2)/y^2 = 1$. Mit (7.69) wird daraus $y^2/R^2 + (y'/y)^2 = 1$ oder

$$ds = \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2/R^2}} = \frac{dt}{\sin t},$$

⁵ Gleichung (7.62) direkt zu lösen, ist auch nicht sehr schwer. Sei $\theta = \theta(\phi)$ die Gleichung der Geodäte. Dann sind

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d^2\theta}{d\phi^2} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 + \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d^2\phi}{ds^2}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung von (7.62) führt auf

$$\frac{d^2\theta}{d\phi^2} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 + \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d^2\phi}{ds^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0. \quad (7.64)$$

Die zweite Gleichung von (7.62) ergibt zusammen mit (7.64)

$$\frac{d^2\theta}{d\phi^2} - 2 \cot \theta \left(\frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 - \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (7.65)$$

Wenn wir $f(\theta) \equiv \cot \theta$ definieren, wird (7.65) zu

$$\frac{d^2f}{d\phi^2} + f = 0,$$

mit der allgemeinen Lösung $f(\theta) = \cot \theta = A \cos \phi + B \sin \phi$ oder

$$A \sin \theta \cos \phi + B \sin \theta \sin \phi - \cos \theta = 0. \quad (7.66)$$

Gleichung (7.66) ist die Gleichung eines Großkreises, der in einer Ebene mit dem Normalenvektor $(A, B, -1)$ liegt.

wobei wir $y = R \sin t$ setzen. Gleichung (7.69) wird dann zu

$$x' = \frac{y^2}{R} = R \sin^2 t.$$

Nun lösen wir x nach t auf und erhalten

$$x = \int x' ds = \int \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} dt = \int R \sin t dt = -R \cos t + x_0.$$

Schließlich erhalten wir die Lösung

$$x = -R \cos t + x_0, \quad y = R \sin t \quad (y > 0). \quad (7.70)$$

Dies ist ein Kreis mit Radius R und Mittelpunkt $(x_0, 0)$. Maximal ausgedehnte Geodäten, deren Länge unendlich wird, ergeben sich für $0 < t < \pi$ (Abb. 7.8):

$$I = \int ds = \int_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{ds}{dt} dt = \int_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{1}{\sin t} dt = -\frac{1}{2} \log \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \Big|_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \infty.$$

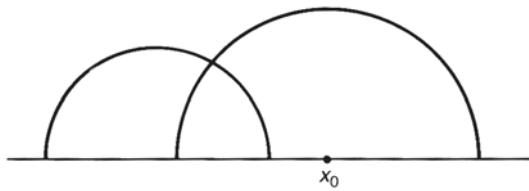


Abb. 7.8. Geodäten in der Poincaré-Halbebene. Die Geodäte hat eine unendliche Länge.

◇

7.4.4 Das Normalkoordinatensystem

Das jetzt folgende Thema betrifft nicht allein Levi-Civita-Zusammenhänge, es nimmt aber eine besonders einfache Form an, wenn der Levi-Civita-Zusammenhang verwendet wird. Sei $c(t)$ eine Geodäte in (M, g) , definiert in Bezug auf den Zusammenhang ∇ , und es gelte

$$c(0) = p, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_p = X = X^\mu e_\mu \in T_p M, \quad (7.71)$$

mit den $\{e_\mu\}$ als Koordinatenbasis bei p . Jede von p ausgehende Geodäte wird durch die Angabe von $X \in T_p M$ festgelegt. Wir betrachten einen Punkt q in der Nähe von p . Es gibt viele Geodäten, die p und q verbinden – es gibt jedoch nur *eine einzige* Geodäte c_q mit $c_q(1) = q$. Sei $X_q \in T_p M$ der Tangentialvektor dieser Geodäte bei p . Solange q nicht zu weit von p entfernt ist, legt q auf eindeutige Weise $X_q = X_q^\mu e_\mu \in T_p M$ fest, und $\varphi : q \rightarrow X_q^\mu$ eignet sich gut als Koordinatensystem in der Nachbarschaft

von p . Dieses Koordinatensystem nennt man **Normalkoordinatensystem** in p mit der Basis $\{e_\mu\}$. Offensichtlich ist $\varphi(p) = 0$. Wir definieren eine Abbildung $\text{EXP} : T_p M \rightarrow M$ mit $\text{EXP} : X_q \mapsto q$. Per definitionem gilt

$$\varphi(\text{EXP}(X_q^\mu e_\mu)) = X_q^\mu. \quad (7.72)$$

Bezüglich dieses Koordinatensystems hat eine Geodäte $c(t)$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ die Koordinatendarstellung

$$\varphi(c(t)) = X^\mu = X_q^\mu t, \quad (7.73)$$

wobei die X_q^μ die Normalkoordinaten von q sind.

Jetzt zeigen wir, dass Levi-Civita-Zusammenhangskoeffizienten im Normalkoordinatensystem verschwinden. Dazu schreiben wir die Geodätengleichung im Normalkoordinatensystem:

$$0 = \frac{d^2 X^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(X_q^\kappa t) \frac{dX^\nu}{dt} \frac{dX^\lambda}{dt} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(X_q^\kappa t) X_q^\nu X_q^\lambda. \quad (7.74)$$

Wegen $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(p) X_q^\nu X_q^\lambda = 0$ für alle X_q^ν bei p , für die $t = 0$ ist, erhalten wir $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(p) + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(p) = 0$. Da unser Zusammenhang symmetrisch ist, muss gelten

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(p) = 0. \quad (7.75)$$

Als eine Konsequenz hat die kovariante Ableitung eines beliebigen Tensors t in diesem Koordinatensystem bei p die extrem einfache Gestalt

$$\nabla_X t^{\dots} = X[t^{\dots}]. \quad (7.76)$$

Gleichung (7.75) bedeutet nicht, dass $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ bei q ($\neq p$) verschwindet. Tatsächlich folgt aus (7.42)

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu}(p) = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}(p) - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}(p) \quad (7.77)$$

und daher $\partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}(p) \neq 0$, wenn $R^\kappa_{\lambda\mu\nu}(p) \neq 0$ ist.

7.4.5 Riemann'scher Krümmungstensor mit Levi-Civita-Zusammenhang

Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Die Komponenten des Riemann'schen Krümmungstensors sind gegeben durch (7.42) mit

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\},$$

während der Torsionstensor definitionsgemäß verschwindet. Viele Formeln vereinfachen sich, wenn man Levi-Civita-Zusammenhänge verwendet.

Übung 7.10

- (a) Sei $g = dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi)$ die Metrik von (\mathbb{R}^3, δ) , mit $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$. Zeigen Sie durch direktes Ausrechnen, dass alle Komponenten des Riemann'schen Krümmungstensors verschwinden, wenn er bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs definiert wird.
- (b) Die **Robertson-Walker-Metrik** beschreibt ein räumlich homogenes und isotropes Universum:

$$g = -dt \otimes dt + a^2(t) \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - kr^2} + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi) \right). \quad (7.78)$$

Dabei ist k eine Konstante, welche man durch geeignetes Reskalieren von r , $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$ auf die Werte -1 , 0 oder $+1$ bringen kann. Für $k = +1$ ist r auf $0 \leq r < 1$ beschränkt. Berechnen Sie Riemann-Tensor, Ricci-Tensor und skalare Krümmung.

- (c) Die **Schwarzschild-Metrik** hat die Form

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt \otimes dt + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi) \quad (7.79)$$

wobei $0 < 2M < r$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$ sind. Berechnen Sie den Riemann-Tensor, den Ricci-Tensor und die skalare Krümmung. (Anmerkung: Die Metrik (7.79) beschreibt die Raumzeit eines sphärisch symmetrischen Objekts mit Masse M .)

- Übung 7.11** Sei R der Riemann-Tensor bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} \right) \\ &\quad + g_{\zeta\eta} (\Gamma^\zeta{}_{\kappa\mu} \Gamma^\eta{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\zeta{}_{\kappa\nu} \Gamma^\eta{}_{\lambda\mu}), \end{aligned}$$

mit $R_{\kappa\lambda\mu\nu} \equiv g_{\kappa\zeta} R^\zeta{}_{\lambda\mu\nu}$. Bestätigen Sie die folgenden Symmetrien:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} \quad \text{vgl. (7.43)}, \quad (7.80a)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \quad (7.80b)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}, \quad (7.80c)$$

$$Ric_{\mu\nu} = Ric_{\nu\mu}. \quad (7.80d)$$

Satz 7.2. (Bianchi-Identitäten) Sei R der Riemann-Tensor bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs. Dann genügt R den folgenden Identitäten:

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0 \quad (\text{erste Bianchi-Identität}), \quad (7.81a)$$

$$(\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V = 0 \quad (\text{zweite Bianchi-Identität}). \quad (7.81b)$$

Beweis

Unser Beweis folgt dem bei Nomizu (1981). Wir definieren den Symmetrisierer \mathfrak{S} durch $\mathfrak{S}\{f(X, Y, Z)\} = f(X, Y, Z) + f(Z, X, Y) + f(Y, Z, X)$. Wir beweisen die erste Bianchi-Identität $\mathfrak{S}\{R(X, Y)Z\} = 0$. Kovariante Differenziation der Identität $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ nach Z ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_Z \{\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\} \\ &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \{\nabla_{[X, Y]} Z + [Z, [X, Y]]\}, \end{aligned}$$

wobei für die zweite Gleichung wiederum die Bedingung der Torsionsfreiheit verwendet wurde. Symmetrisieren ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{S}\{\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[X, Y]} Z - [Z, [X, Y]]\} \\ &= \mathfrak{S}\{\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[X, Y]} Z\} = \mathfrak{S}\{R(X, Y)Z\}, \end{aligned}$$

wobei die Jacobi-Identität $\mathfrak{S}\{[X, [Y, Z]]\} = 0$ verwendet wurde.

Die zweite Bianchi-Identität wird $\mathfrak{S}\{(\nabla_X R)(Y, Z)\}V = 0$, wobei \mathfrak{S} nur (X, Y, Z) symmetrisiert. Wenn die Identität $R(T(X, Y), Z)V = R(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z)V = 0$ symmetrisiert wird, folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{S}\{R(\nabla_X Y, Z) - R(\nabla_Y X, Z) - R([X, Y], Z)\}V \\ &= \mathfrak{S}\{R(\nabla_Z X, Y) - R(X, \nabla_Z Y) - R([X, Y], Z)\}V. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Mit der Produktregel

$$\nabla_Z \{R(X, Y)V\} = (\nabla_Z R)(X, Y)V + R(X, Y)\nabla_Z V + R(\nabla_Z X, Y)V + R(X, \nabla_Z Y)V$$

wird Gleichung (7.82) zu

$$0 = \mathfrak{S}\{-(\nabla_Z R)(X, Y) + [\nabla_Z, R(X, Y)] - R([X, Y], Z)\}V.$$

Die letzten zwei Terme verschwinden, wenn man $R(X, Y)V = \{[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}\}V$ einsetzt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\{[\nabla_Z, R(X, Y)] - R([X, Y], Z)\}V \\ = \mathfrak{S}\{[\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]] - [\nabla_Z, \nabla_{[X, Y]}] - [\nabla_{[X, Y]}, \nabla_Z] + \nabla_{[[X, Y], Z]}\}V = 0, \end{aligned}$$

wobei die Jacobi-Identitäten $\mathfrak{S}\{[\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]]\} = \mathfrak{S}\{[[X, Y], Z]\} = 0$ verwendet wurden. Schließlich erhalten wir $\mathfrak{S}\{(\nabla_X R)(Y, Z)\}V = 0$. \square

In Komponentenform lauten die Bianchi-Identitäten

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} + R^\kappa{}_{\mu\nu\lambda} + R^\kappa{}_{\nu\lambda\mu} = 0 \quad (\text{erste Bianchi-Identität}), \quad (7.83a)$$

$$(\nabla_\kappa R)^\xi{}_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_\mu R)^\xi{}_{\lambda\nu\kappa} + (\nabla_\nu R)^\xi{}_{\lambda\kappa\mu} = 0 \quad (\text{zweite Bianchi-Identität}). \quad (7.83b)$$

Durch Kontrahieren der Indizes ξ und μ in der zweiten Bianchi-Identität erhalten wir eine wichtige Beziehung:

$$(\nabla_\kappa Ric)_{\lambda\nu} + (\nabla_\mu R)^\mu{}_{\lambda\nu\kappa} - (\nabla_\nu Ric)_{\lambda\kappa} = 0. \quad (7.84)$$

Werden die Indizes λ und ν weiter kontrahiert, ergibt sich $\nabla_\mu(\mathcal{R}\delta - 2Ric)^\mu{}_\kappa = 0$ oder

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (7.85)$$

wobei $G^{\mu\nu}$ der **Einstein-Tensor** ist, definiert als

$$G^{\mu\nu} = Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R}. \quad (7.86)$$

Historisch gesehen setzte Einstein bei der Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie zuerst den Ricci-Tensor $Ric^{\mu\nu}$ mit dem Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ gleich. Später erkannte er, dass $T^{\mu\nu}$ der kovarianten Erhaltungsgleichung $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ genügt, während dies für $Ric^{\mu\nu}$ nicht der Fall ist. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, schlug er vor, dass $G^{\mu\nu}$ mit $T^{\mu\nu}$ gleichgesetzt werden sollte. Diese neue Gleichung ist insofern eine natürliche Wahl, als sie sich aus der Variation einer skalaren Wirkung herleiten lässt, siehe Abschnitt 7.10.

Übung 7.12 Sei (M, g) eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit $g = -dt \otimes dt + R^2(t)dx \otimes dx$, mit einer beliebigen Funktion $R(t)$ von t . Zeigen Sie, dass der Einstein-Tensor verschwindet.

Die Symmetrieeigenschaften (7.80a) bis (7.80c) beschränken die Zahl der unabhängigen Komponenten des Riemann-Tensors. Sei m die Dimension einer Mannigfaltigkeit (M, g) . Wegen der Antisymmetrie $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\nu\mu}$ gibt es $N \equiv \binom{m}{2}$ unabhängige Auswahlen für das Paar (μ, ν) . Ähnlich folgt aus $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$, dass es N unabhängige Paare von (κ, λ) geben muss. Da $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ symmetrisch bezüglich Vertauschung der Paare (κ, λ) und (μ, ν) ist, reduziert sich die Zahl der unabhängigen Auswahlen dieser Paare von N^2 auf $\binom{N+1}{2} = \frac{1}{2}N(N+1)$. Die erste Bianchi-Identität

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} + R_{\kappa\mu\nu\lambda} + R_{\kappa\nu\lambda\mu} = 0 \quad (7.87)$$

schränkt die Anzahl der unabhängigen Komponenten noch weiter ein. Die linke Seite von (7.87) ist total antisymmetrisch bezüglich Durchtauschen der Indizes (λ, μ, ν) . Darüber hinaus sorgt die Antisymmetrie von (7.80b) dafür, dass $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ total antisymmetrisch in allen Indizes ist. Für $m < 4$ wird (7.87) trivial erfüllt und stellt keine zusätzliche Einschränkung dar. Wenn $m \geq 4$ ist, ergibt (7.87) nur dann nichttriviale Einschränkungen, wenn alle Indizes verschieden sind. Die Zahl der Bedingungen ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, vier unterschiedliche Indizes aus m Indizes zu ziehen, also $\binom{m}{4}$. Wenn wir dann noch beachten, dass $\binom{m}{4} = m(m-1)(m-2)(m-3)/4!$ für $m < 4$ verschwindet, ist die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Riemann-Tensors durch

$$F(m) = \frac{1}{2}\binom{m}{2}\left[\binom{m}{2} + 1\right] - \binom{m}{4} = \frac{1}{12}m^2(m^2 - 1) \quad (7.88)$$

gegeben. Was bedeutet dies im Einzelnen? Die Aussage $F(1) = 0$ bedeutet einfach, dass eindimensionale Mannigfaltigkeiten flach sind. Wegen $F(2) = 1$ gibt es nur eine unabhängige Komponente R_{1212} auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, die anderen Komponenten sind entweder 0 oder $\pm R_{1212}$. Die Beziehung $F(4) = 20$ ist eine wohlbekannte Eigenschaft der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Übung 7.13 Sei (M, g) eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass der Riemann-Tensor sich als

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = K(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}) \quad (7.89)$$

schreibt, mit $K \in \mathcal{F}(M)$. Berechnen Sie den Ricci-Tensor, um zu zeigen, dass $Ric_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$ ist. Berechnen Sie die skalare Krümmung, um zu zeigen, dass $K = \mathcal{R}/2$ ist.

7.5 Holonomie

Sei (M, g) eine m -dimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit dem affinen Zusammenhang ∇ . Der Zusammenhang definiert bei jedem Tangentialraum $T_p M$ wie folgt auf natürliche Weise eine Transformationsgruppe.

Definition 7.3. Seien p ein Punkt in (M, g) und $\{c(t) | 0 \leq t \leq 1, c(0) = c(1) = p\}$ eine Menge von geschlossenen Schleifen bei p . Wir betrachten einen Vektor $X \in T_p M$ und transportieren X parallel entlang einer Kurve $c(t)$. Am Ende eines Trips entlang $c(t)$ kommen wir bei einem neuen Vektor $X_c \in T_p M$ an. Somit induzieren die Schleife $c(t)$ und der Zusammenhang ∇ eine lineare Transformation

$$P_c : T_p M \rightarrow T_p M. \quad (7.90)$$

Die Menge dieser Transformationen wird mit $H(p)$ bezeichnet und trägt den Namen **Holonomiegruppe** bei p .

Wir nehmen an, dass $H(p)$ von rechts auf $T_p M$ wirkt: $P_c X = X h$ ($h \in H(p)$). In Komponenten bedeutet das $P_c X = X^\mu h_\mu{}^\nu e_\nu$, mit der Basis $\{e_\nu\}$ von $T_p M$. Es ist leicht zu sehen, dass $H(p)$ eine Gruppe ist: Das Produkt $P_{c'} P_c$ korrespondiert mit einem Paralleltransport, der zuerst entlang c und dann entlang c' erfolgt. Wenn wir $P_d = P_{c'} P_c$ schreiben, ist die Schleife d durch

$$d(t) = \begin{cases} c(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (7.91)$$

gegeben. Das neutrale Element korrespondiert mit der konstanten Abbildung $c_p(t) = p$ ($0 \leq t \leq 1$), und die Inverse von P_c ist durch $P_{c^{-1}}$ mit $c^{-1}(t) = c(1-t)$ gegeben. Beachten Sie, dass $H(p)$ eine Untergruppe der $GL(m, \mathbb{R})$ ist, welche die maximal mögliche Holonomiegruppe darstellt. $H(p)$ ist dann und nur dann trivial, wenn der Riemann-Tensor verschwindet. Insbesondere können wir $H(p)$ trivial machen, wenn (M, g) parallelisierbar ist (siehe Beispiel 7.2).

Wenn M (bogenweise) zusammenhängt, sind zwei beliebige Punkte $p, q \in M$ durch eine Kurve a verbunden. Diese Kurve a definiert eine Abbildung $\tau_a : T_p M \rightarrow T_q M$,

welche einen Vektor aus $T_p M$ entlang a nach $T_q M$ paralleltransportiert. Dann besteht zwischen den Holonomiegruppen $H(p)$ und $H(q)$ die Beziehung

$$H(q) = \tau_a^{-1} H(p) \tau_a, \quad (7.92)$$

mithin ist $H(q)$ isomorph zu $H(p)$.

Im Allgemeinen ist eine Holonomiegruppe, wie gesagt, eine Untergruppe der $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Wenn ∇ ein metrischer Zusammenhang ist, erhält ∇ die Länge eines Vektors: $g_p(P_c(X), P_c(X)) = g_p(X, X)$ für $X \in T_p M$. Dann muss die entsprechende Holonomiegruppe eine Untergruppe der $\mathrm{SO}(m)$ sein, wenn (M, g) orientierbar und Riemann'sch ist, und der $\mathrm{SO}(m-1, 1)$, wenn (M, g) orientierbar und Lorentz'sch ist.

Beispiel 7.7. Wir arbeiten die Holonomiegruppe des Levi-Civita-Zusammenhangs auf der S^2 aus, mit der Metrik $g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 d\phi \otimes d\phi$. Die nichtverschwindenden Zusammenhangskoeffizienten sind $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin \theta \cos \theta$ und $\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot \theta$. Der Einfachheit halber betrachten wir einen Vektor $e_\theta = \partial/\partial\theta$ am Punkt $(\theta_0, 0)$ und transportieren ihn parallel entlang eines Kreises $\theta = \theta_0$ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$). Sei X der entlang dieses Kreises paralleltransportierte Vektor e_θ . Dieser Vektor $X = X^\theta e_\theta + X^\phi e_\phi$ erfüllt die Gleichungen

$$\partial_\phi X^\theta - \sin \theta_0 \cos \theta_0 X^\phi = 0, \quad (7.93a)$$

$$\partial_\phi X^\phi + \cot \theta_0 X^\theta = 0. \quad (7.93b)$$

Diese beiden Gleichungen stellen harmonische Schwingungen dar. In der Tat erhalten wir, wenn wir die Ableitung von (7.93a) nach ϕ bilden und (7.93b) verwenden:

$$\frac{d^2 X^\theta}{d\phi^2} - \sin \theta_0 \cos \theta_0 \frac{dX^\phi}{d\phi} = \frac{d^2 X^\theta}{d\phi^2} - \cos^2 \theta_0 X^\theta = 0. \quad (7.94)$$

Die allgemeine Lösung ist $X^\theta = A \cos(C_0 \phi) + B \sin(C_0 \phi)$, mit $C_0 \equiv \cos \theta_0$. Wegen $X^\theta = 1$ bei $\phi = 0$ ergibt sich

$$X^\theta = \cos(C_0 \phi), \quad X^\phi = -\frac{\sin(C_0 \phi)}{\sin \theta_0}.$$

Nach dem Paralleltransport entlang des Kreises landen wir bei

$$X(\phi = 2\pi) = \cos(2\pi C_0) e_\theta - \frac{\sin(2\pi C_0)}{\sin \theta_0} e_\phi. \quad (7.95)$$

Nun wird der Vektor um $\Theta = 2\pi \cos \theta_0$ rotiert, wobei sein Betrag konstant gehalten wird. Wenn wir einen Punkt $p \in S^2$ und einen Kreis in S^2 wählen, welcher durch p läuft, können wir immer ein Koordinatensystem finden, in welchem der Kreis durch $\theta = \theta_0$ ($0 \leq \theta < \pi$) gegeben ist und wir die obige Berechnung anwenden können. Der Rotationswinkel ist $-2\pi \leq \Theta < 2\pi$, und wir stellen fest, dass die Holonomiegruppe bei $p \in S^2$ die Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ ist. \diamond

Allgemein lässt die Sphäre S^m ($m \geq 2$) die Holonomiegruppe $\text{SO}(m)$ zu. Produktmannigfaltigkeiten erlauben stärker eingeschränkte Holonomiegruppen. Das folgende Beispiel wurde Horowitz (1986) entnommen. Wir betrachten sechsdimensionale Mannigfaltigkeiten aus Sphären mit Standardmetriken. Beispiele sind etwa S^6 , $S^3 \times S^3$, $S^2 \times S^2 \times S^2$ oder $T^6 = S^1 \times \dots \times S^1$. Die jeweiligen Holonomiegruppen sind:

- (i) S^6 : $H(p) = \text{SO}(6)$,
- (ii) $S^3 \times S^3$: $H(p) = \text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$,
- (iii) $S^2 \times S^2 \times S^2$: $H(p) = \text{SO}(2) \times \text{SO}(2) \times \text{SO}(2)$,
- (iv) T^6 : $H(p)$ ist trivial, da der Riemann-Tensor verschwindet.

Übung 7.14 Zeigen Sie, dass die Holonomiegruppe des Levi-Civita-Zusammenhangs der Metrik von Beispiel 7.6 (Poincaré-Halbebene) die $\text{SO}(2)$ ist.

7.6 Isometrien und konforme Transformationen

7.6.1 Isometrien

Definition 7.4. Sei (M, g) eine (pseudo-)Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Ein Diffeomorphismus $f : M \rightarrow M$ ist eine **Isometrie**, wenn er die Metrik

$$f^*g_{f(p)} = g_p \quad (7.96a)$$

erhält, d. h., wenn $g_{f(p)}(f_*X, f_*Y) = g_p(X, Y)$ für $X, Y \in T_p M$ ist.

In Komponenten lautet die Bedingung (7.96a)

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(f(p)) = g_{\mu\nu}(p), \quad (7.96b)$$

wobei x und y die Koordinaten von p bzw. $f(p)$ sind. Die identische Abbildung, die Verknüpfung von Isometrien und die Inverse einer Isometrie sind sämtlich Isometrien; die Isometrien bilden also eine Gruppe. Da eine Isometrie die *Länge* eines Vektors und insbesondere auch die eines infinitesimalen Verschiebungsvektors erhält (daher auch der Name!), kann man sie als eine Bewegung von starren Körpern betrachten. Beispielsweise ist die Isometriegruppe im \mathbb{R}^n die euklidische Gruppe E^n , also die Menge der Abbildungen $f : x \mapsto Ax + T$ ($A \in \text{SO}(n)$, $T \in \mathbb{R}^n$).

7.6.2 Konforme Transformationen

Definition 7.5. Sei (M, g) eine (pseudo-)Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Ein Diffeomorphismus $f : M \rightarrow M$ wird eine **konforme Transformation** genannt, wenn er

die Metrik bis auf eine Skalierung erhält,

$$f^*g_{f(p)} = e^{2\sigma} g_p \quad (\sigma \in \mathcal{F}(M)), \quad (7.97a)$$

also $g_{f(p)}(f_*X, f_*Y) = e^{2\sigma} g_p(X, Y)$ für $X, Y \in T_p M$.

In Komponenten wird die Bedingung (7.97a) zu

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(f(p)) = e^{2\sigma(p)} g_{\mu\nu}(p). \quad (7.97b)$$

Die Menge der konformen Transformationen auf M ist eine Gruppe, die **konforme Gruppe** $\text{Conf}(M)$. Wir definieren den Winkel θ zwischen zwei Vektoren $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\mu \partial_\mu$ ($X, Y \in T_p M$) als

$$\cos \theta = \frac{g_p(X, Y)}{\sqrt{g_p(X, X)g_p(Y, Y)}} = \frac{g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu}{\sqrt{g_{\zeta\eta} X^\zeta X^\eta g_{\kappa\lambda} Y^\kappa Y^\lambda}}. \quad (7.98)$$

Bei einer konformen Transformation f gilt für den Winkel θ' zwischen f_*X und f_*Y

$$\cos \theta' = \frac{e^{2\sigma} g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu}{\sqrt{e^{2\sigma} g_{\zeta\eta} X^\zeta X^\eta \cdot e^{2\sigma} g_{\kappa\lambda} Y^\kappa Y^\lambda}} = \cos \theta.$$

f erhält also den Winkel. Mit anderen Worten: f ändert die *Skala*, aber nicht die *Gestalt*.

Ein mit den konformen Transformationen verwandtes Konzept ist die Weyl-Reskalierung. Seien g und \bar{g} Metriken auf einer Mannigfaltigkeit M . \bar{g} heißt **konform verwandt** mit g , wenn gilt:

$$\bar{g}_p = e^{2\sigma(p)} g_p. \quad (7.99)$$

Natürlich ist dies eine Äquivalenzrelation in der Menge der Metriken auf M . Die Äquivalenzklasse wird **konforme Struktur** genannt. Die Transformation $g \rightarrow e^{2\sigma} g$ heißt **Weyl-Reskalierung**. Die Menge der Weyl-Reskalierungen auf M ist eine Gruppe, die mit $\text{Weyl}(M)$ bezeichnet wird.

Beispiel 7.8. Sei $w = f(z)$ eine holomorphe Funktion, definiert auf der komplexen Ebene \mathbb{C} .⁶ Wir schreiben Realteil und Imaginärteil der jeweiligen Variablen als $z = x + iy$ und $w = u + iv$. Die Abbildung $f : (x, y) \mapsto (u, v)$ ist konform wegen

$$du^2 + dv^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] (dx^2 + dy^2), \quad (7.100)$$

⁶ Eine C^∞ -Funktion, aufgefasst als eine Funktion von $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$, ist holomorph, wenn $\partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) = 0$ ist.

wobei die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen verwendet wurden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

◊

Übung 7.15 Sei $f : M \rightarrow M$ eine konforme Transformation auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) . Zeigen Sie, dass $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$ die lokale Lichtkegelstruktur erhält, also gilt:

$$f_* : \begin{cases} \text{zeitartiger Vektor} & \mapsto \text{zeitartiger Vektor} \\ \text{Nullvektor} & \mapsto \text{Nullvektor} \\ \text{raumartiger Vektor} & \mapsto \text{raumartiger Vektor.} \end{cases} \quad (7.101)$$

Sei \bar{g} eine Metrik auf M , die mit g konform verwandt ist: $\bar{g} = e^{2\sigma(p)}g$. Lassen Sie uns den Riemann-Tensor von \bar{g} bestimmen. Wir könnten dazu einfach \bar{g} in die Definitionsgleichung (7.42) einsetzen. Wir folgen aber lieber der eleganten koordinatenfreien Herleitung von Nomizu (1981). Sei K die Differenz der kovarianten Ableitungen $\bar{\nabla}$ nach \bar{g} und ∇ nach g :

$$K(X, Y) \equiv \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y. \quad (7.102)$$

Behauptung 7.1. Sei U ein Vektorfeld, das mit einer 1-Form $d\sigma$: $Z[\sigma] = \langle d\sigma, Z \rangle = g(U, Z)$ korrespondiert. Dann ist

$$K(X, Y) = X[\sigma]Y + Y[\sigma]X - g(X, Y)U. \quad (7.103)$$

Beweis

Wegen der Torsionsfreiheit ist $K(X, Y) = K(Y, X)$. Aus $\bar{\nabla}_X \bar{g} = \nabla_X g = 0$ folgt

$$X[\bar{g}(Y, Z)] = \bar{\nabla}_X [\bar{g}(Y, Z)] = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$

und außerdem

$$X[\bar{g}(Y, Z)] = \nabla_X [e^{2\sigma} g(Y, Z)] = 2X[\sigma]e^{2\sigma} g(Y, Z) + e^{2\sigma} [g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)].$$

Wenn wir die Differenz zwischen diesen zwei Ausdrücken bilden, erhalten wir

$$g(K(X, Y), Z) + g(Y, K(X, Z)) = 2X[\sigma]g(Y, Z). \quad (7.104a)$$

Permutationen von (X, Y, Z) ergeben

$$g(K(Y, X), Z) + g(X, K(Y, Z)) = 2Y[\sigma]g(X, Z), \quad (7.104b)$$

$$g(K(Z, X), Y) + g(X, K(Z, Y)) = 2Z[\sigma]g(X, Y), \quad (7.104c)$$

und die Kombination $(7.104a) + (7.104b) - (7.104c)$ liefert

$$g(K(X, Y), Z) = X[\sigma]g(Y, Z) + Y[\sigma]g(X, Z) - Z[\sigma]g(X, Y). \quad (7.105)$$

Der letzte Term lässt sich umformen zu

$$Z[\sigma]g(X, Y) = g(U, Z)g(X, Y) = g(g(Y, X)U, Z).$$

Einsetzen in (7.105) führt auf

$$g(K(X, Y) - X[\sigma]Y - Y[\sigma]X + g(X, Y)U, Z) = 0.$$

Da dies für beliebige Z wahr ist, ergibt sich (7.103). \square

Der Komponentenausdruck für K ist

$$\begin{aligned} K(e_\mu, e_\nu) &= \bar{\nabla}_\mu e_\nu - \nabla_\mu e_\nu = (\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu})e_\lambda \\ &= e_\mu[\sigma]e_\nu + e_\nu[\sigma]e_\mu - g(e_\mu, e_\nu)g^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\sigma e_\lambda, \end{aligned}$$

woraus man leicht sieht, dass gilt:

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \delta^\lambda_\mu \partial_\nu \sigma + \delta^\lambda_\nu \partial_\mu \sigma - g_{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}\partial_\kappa \sigma. \quad (7.106)$$

Um den Riemann'schen Krümmungstensor zu erhalten, starten wir bei der Definition:

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \bar{\nabla}_X [\nabla_Y Z + K(Y, Z)] - \bar{\nabla}_Y [\nabla_X Z + K(X, Z)] \\ &\quad - \{\nabla_{[X, Y]} Z + K([X, Y], Z)\} \\ &= \nabla_X \{\nabla_Y Z + K(Y, Z)\} + K(X, \nabla_Y Z + K(Y, Z)) \\ &\quad - \nabla_Y \{\nabla_X Z + K(X, Z)\} - K(Y, \nabla_X Z + K(X, Z)) \\ &\quad - \{\nabla_{[X, Y]} Z + K([X, Y], Z)\}. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Nach einer nicht komplizierten, aber länglichen Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \langle \nabla_X d\sigma, Z \rangle Y - \langle \nabla_Y d\sigma, Z \rangle X \\ &\quad - g(Y, Z)\nabla_X U + Y[\sigma]Z[\sigma]X \\ &\quad - g(Y, Z)U[\sigma]X + X[\sigma]g(Y, Z)U \\ &\quad + g(X, Z)\nabla_Y U - X[\sigma]Z[\sigma]Y \\ &\quad + g(X, Z)U[\sigma]Y - Y[\sigma]g(X, Z)U. \end{aligned} \quad (7.108)$$

Definieren wir nun ein Tensorfeld B vom Typ $(1, 1)$ durch

$$BX \equiv -X[\sigma]U + \nabla_X U + \frac{1}{2}U[\sigma]X. \quad (7.109)$$

Wegen $g(\nabla_Y U, Z) = \langle \nabla_Y d\sigma, Z \rangle$ (siehe Übung 7.8(c)) wird aus (7.108)

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - [g(Y, Z)BX - g(BX, Z)Y + g(BY, Z)X - g(X, Z)BY]. \quad (7.110)$$

In Komponenten schreibt sich das so:

$$\bar{R}^\kappa_{\lambda\mu\nu} = R^\kappa_{\lambda\mu\nu} - g_{\nu\lambda}B_\mu{}^\kappa + g_{\xi\lambda}B_\mu{}^\xi\delta^\kappa_\nu - g_{\xi\lambda}B_\nu{}^\xi\delta^\kappa_\mu + g_{\mu\lambda}B_\nu{}^\kappa, \quad (7.111)$$

wobei die Tensorkomponenten von B folgende sind:

$$\begin{aligned} B_\mu{}^\kappa &= -\partial_\mu\sigma U^\kappa + (\nabla_\mu U)^\kappa + \frac{1}{2}U[\sigma]\delta_\mu{}^\kappa \\ &= -\partial_\mu\sigma g^{\kappa\lambda}\partial_\lambda\sigma + g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu\partial_\lambda\sigma - \Gamma^\xi_{\mu\lambda}\partial_\xi\sigma) + \frac{1}{2}g^{\lambda\xi}\partial_\lambda\sigma\partial_\xi\sigma\delta_\mu{}^\kappa \end{aligned} \quad (7.112)$$

Beachten Sie, dass $B_{\mu\nu} \equiv g_{\nu\lambda}B_\mu{}^\lambda = B_{\nu\mu}$ ist.

Durch Kontraktion der Indizes in (7.111) erhalten wir

$$\overline{Ric}_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}B_\lambda{}^\lambda - (m-2)B_{\nu\mu}, \quad (7.113)$$

$$e^{2\sigma}\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - 2(m-1)B_\lambda{}^\lambda. \quad (7.114a)$$

Dabei ist $m = \dim M$. Gleichung (7.114a) lässt sich auch als

$$\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\mathcal{R}} = [\mathcal{R} - 2(m-1)B_\lambda{}^\lambda]g_{\mu\nu} \quad (7.114b)$$

schreiben. Wenn wir $g_{\mu\nu}B_\lambda{}^\lambda$ und $B_{\mu\nu}$ in $\bar{R}^\kappa_{\lambda\mu\nu}$ zugunsten von \overline{Ric} und $\bar{\mathcal{R}}$ eliminieren und Terme mit und ohne Überstrich separieren, kommen wir zu einer von σ unabhängigen Kombination:

$$\begin{aligned} C_{\kappa\lambda\mu\nu} &= R_{\kappa\lambda\mu\nu} - \frac{1}{m-2}(Ric_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - Ric_{\lambda\mu}g_{\kappa\nu} + Ric_{\lambda\nu}g_{\kappa\mu} - Ric_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}) \\ &\quad + \frac{\mathcal{R}}{(m-2)(m-1)}(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}), \end{aligned} \quad (7.115)$$

mit $m \geq 4$ (siehe Aufgabe 7.2 für $m = 3$). Der Tensor C wird **Weyl-Tensor** genannt. Sie sollten sich davon überzeugen, dass $C_{\kappa\lambda\mu\nu} = e^{-2\sigma}\bar{C}_{\kappa\lambda\mu\nu}$ ist.

Wenn jeder Punkt p einer (pseudo-)Riemann'schen Mannigfaltigkeit (M, g) eine Karte (U, φ) hat, die p enthält, sodass $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma}\delta_{\mu\nu}$ ist, dann nennt man (M, g) **konform flach**. Da der Weyl-Tensor für eine flache Metrik verschwindet, verschwindet er auch für eine konform flache Metrik. Wenn $\dim M \geq 4$ ist, dann ist $C = 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für konforme Flachheit (Satz von Weyl-Schouten). Wenn $\dim M = 3$ ist, verschwindet der Weyl-Tensor identisch; siehe Aufgabe 7.2. Für $\dim M = 2$ ist M immer konform flach; siehe das nächste Beispiel.

Beispiel 7.9. Jede zweidimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit (M, g) ist konform flach. Sei (x, y) die ursprüngliche lokale Koordinate, mit welcher die Metrik die Form

$$ds^2 = g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2 \quad (7.116)$$

nimmt. Sei $g \equiv g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2$. Wir schreiben (7.116) als

$$ds^2 = \left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} + i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{xx}}}dy \right) \left(\sqrt{g_{yy}}dx + \frac{g_{xy} - i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{xx}}}dy \right).$$

Gemäß der Theorie über das Lösen von Differentialgleichungen existiert ein integrierender Faktor $\lambda(x, y) = \lambda_1(x, y) + i\lambda_2(x, y)$, sodass gilt:

$$\lambda \left(\sqrt{g_{xx}} dx + \frac{g_{xy} + i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{xx}}} dy \right) = du + i dv, \quad (7.117a)$$

$$\bar{\lambda} \left(\sqrt{g_{yy}} dx + \frac{g_{xy} - i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{xx}}} dy \right) = du - i dv. \quad (7.117b)$$

Dann ist $ds^2 = (du^2 + dv^2)/|\lambda|^2$, und wir haben, wenn wir $|\lambda|^{-2} = e^{2\sigma}$ setzen, das gewünschte Koordinatensystem. Die Koordinaten (u, v) werden **isotherme Koordinaten** genannt.⁷

Es sei beispielsweise $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ die Standardmetrik der S^2 . Wir erhalten

$$\frac{d}{d\theta} \log \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| = \frac{1}{\sin \theta}$$

und stellen fest, dass $f : (\theta, \phi) \mapsto (u, v)$ mit $u = \log |\tan \frac{1}{2}\theta|$ und $v = \phi$ eine konform flache Metrik ergibt. Tatsächlich ist

$$ds^2 = \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta^2}{\sin^2 \theta} + d\phi^2 \right) = \sin^2 \theta (du^2 + dv^2).$$

Für eine Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) haben wir als integrierende Faktoren $\lambda(x, y)$ und $\mu(x, y)$, mit

$$\lambda \left(\sqrt{g_{xx}} dx + \frac{g_{xy} + \sqrt{-g}}{\sqrt{g_{xx}}} dy \right) = du + dv, \quad (7.118a)$$

$$\mu \left(\sqrt{g_{xx}} dx + \frac{g_{xy} - \sqrt{-g}}{\sqrt{g_{xx}}} dy \right) = du - dv. \quad (7.118b)$$

In den Koordinaten (u, v) nimmt die Metrik die Form $ds^2 = \lambda^{-1} \mu^{-1} (du^2 - dv^2)$ an. Das Produkt $\lambda\mu$ ist entweder positiv definit oder negativ definit, und wir können $1/|\lambda\mu| = e^{2\sigma}$ setzen. Damit erhalten wir

$$ds^2 = \pm e^{2\sigma} (du^2 - dv^2). \quad (7.119)$$

◊

Übung 7.16 Sei (M, g) die zweidimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit des **Milne-Universums** mit $g = -dt \otimes dt + t^2 dx \otimes dx$. Verwenden Sie die Transformation $|t| \mapsto e^\eta$, um zu zeigen, dass g konform flach ist. Tatsächlich kann man es mit $(\eta, x) \mapsto (u = e^\eta \sinh x, v = e^\eta \cosh x)$ noch weiter vereinfachen. Welche Metrik ergibt sich dann?

⁷ Wenn wir die Kurve „ u = eine Konstante“ als eine Isotherme interpretieren, entspricht „ v = eine (andere) Konstante“ der Richtung des Wärmeflusses.

7.7 Killing-Vektorfelder und konforme Killing-Vektorfelder

7.7.1 Killing-Vektorfelder

Seien (M, g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Wenn eine Verschiebung εX (mit infinitesimalem ε) eine Isometrie erzeugt, wird das Vektorfeld X ein **Killing-Vektorfeld** genannt. Die Koordinate x^μ eines Punkts $p \in M$ ändert sich unter dieser Verschiebung zu $x^\mu + \varepsilon X^\mu(p)$, siehe (5.42). Wenn $f : x^\mu \mapsto x^\mu + \varepsilon X^\mu$ eine Isometrie ist, gilt dafür (7.96b):

$$\frac{\partial(x^\kappa + \varepsilon X^\kappa)}{\partial x^\mu} \frac{\partial(x^\lambda + \varepsilon X^\lambda)}{\partial x^\nu} g_{\kappa\lambda}(x + \varepsilon X) = g_{\mu\nu}(x).$$

Nach einer einfachen Rechnung ergibt sich, dass $g_{\mu\nu}$ und X^μ die **Killing-Gleichung** erfüllen:

$$X^\xi \partial_\xi g_{\mu\nu} + \partial_\mu X^\kappa g_{\kappa\nu} + \partial_\nu X^\lambda g_{\mu\lambda} = 0. \quad (7.120a)$$

Mit der Definition der Lie-Ableitung schreibt sich dies in der folgenden kompakten Form:

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = 0. \quad (7.120b)$$

Sei $\phi_t : M \rightarrow M$ eine einparametrische Gruppe von Transformationen, welche das Killing-Vektorfeld X erzeugen. Gleichung (7.120b) zeigt dann, dass die lokale Geometrie sich nicht verändert, wenn wir uns entlang ϕ_t bewegen. In diesem Sinn stellen die Killing-Vektorfelder die Richtung der Symmetrie einer Mannigfaltigkeit dar.

Eine Menge von Killing-Vektorfeldern wird als abhängig definiert, wenn sich eines von ihnen als Linearkombination der anderen mit *konstanten* Koeffizienten ausdrücken lässt. Daher kann es mehr Killing-Vektorfelder geben, als die Mannigfaltigkeit Dimensionen hat. (Die Zahl der unabhängigen Symmetrien hängt nicht direkt mit $\dim M$ zusammen. Die *maximale* Anzahl dagegen durchaus, siehe Beispiel 7.10.)

Übung 7.17 Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Zeigen Sie: Die Killing-Gleichung hierfür schreibt sich als

$$(\nabla_\mu X)_\nu + (\nabla_\nu X)_\mu = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu - 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} X_\lambda = 0. \quad (7.121)$$

Übung 7.18 Ermitteln Sie drei Killing-Vektorfelder von (\mathbb{R}^2, δ) . Zeigen Sie, dass zwei von ihnen Translationen entsprechen, während das dritte mit einer Rotation korrespondiert; vgl. das nächste Beispiel.

Beispiel 7.10. Lassen Sie uns die Killing-Vektorfelder der Minkowski-Raumzeit (\mathbb{R}^4, η) aufstellen, für die alle Levi-Civita-Zusammenhangskoeffizienten verschwinden. Die Killing-Gleichung lautet

$$\partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu = 0. \quad (7.122)$$

Man sieht leicht, dass X_μ höchstens von erster Ordnung in x ist. Die konstanten Lösungen

$$X_{(i)}^\mu = \delta_i^\mu \quad (0 \leq i \leq 3) \quad (7.123a)$$

entsprechen den Raumzeittranslationen. Als nächstes sei $X_\mu = a_{\mu\nu}x^\nu$ mit einer Konstanten $a_{\mu\nu}$. Gleichung (7.122) bedeutet, dass $a_{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist bezüglich $\mu \leftrightarrow \nu$. Wegen $\binom{4}{2} = 6$ gibt es sechs unabhängige Lösungen von dieser Form, von denen die drei mit

$$X_{(j)0} = 0, \quad X_{(j)m} = \varepsilon_{jm}x^n \quad (1 \leq j, m, n \leq 3) \quad (7.123b)$$

mit räumlichen Rotationen um die x^j -Achse korrespondieren, während die übrigen drei mit

$$X_{(k)0} = x^k, \quad X_{(k)m} = -\delta_{km}x^0 \quad (1 \leq k, m \leq 3) \quad (7.123c)$$

Lorentz-Boosts entlang der x^k -Achse entsprechen.

In einer m -dimensionalen Minkowski-Raumzeit ($m \geq 2$) gibt es $m(m+1)/2$ Killing-Vektorfelder, von denen m Translationen erzeugen, $(m-1)$ Boosts und $(m-1)(m-2)/2$ räumliche Rotationen. Diejenigen Räume (oder Raumzeiten), welche $m(m+1)/2$ Killing-Vektorfelder erlauben, nennt man **maximal symmetrische Räume**. \diamond

Seien X und Y zwei Killing-Vektorfelder. Wir überprüfen leicht, dass

- (i) eine Linearkombination $aX + bY$ ($a, b \in \mathbb{R}$) eine Killing-Vektorfeld ist,
- (ii) die Lie-Klammer $[X, Y]$ ein Killing-Vektorfeld ist.

(i) ist offensichtlich wegen der Linearität der kovarianten Ableitung. Um (ii) zu beweisen, verwenden wir Gleichung (5.58) und erhalten $\mathcal{L}_{[X,Y]}g = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Yg - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_Xg = 0$ wegen $\mathcal{L}_Xg = \mathcal{L}_Yg = 0$. Daher bilden alle Killing-Vektorfelder einer Mannigfaltigkeit M die Lie-Algebra der Symmetrieeoperationen auf M ; siehe das folgende Beispiel.

Beispiel 7.11. Sei $g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi$ die Standardmetrik der S^2 . Die Killing-Gleichungen (7.121) sind:

$$\partial_\theta X_\theta + \partial_\theta X_\theta = 0, \quad (7.124a)$$

$$\partial_\phi X_\phi + \partial_\phi X_\phi + 2 \sin \theta \cos \theta X_\theta = 0, \quad (7.124b)$$

$$\partial_\theta X_\phi + \partial_\phi X_\theta - 2 \cot \theta X_\phi = 0. \quad (7.124c)$$

Aus (7.124a) folgt, dass X_θ unabhängig von θ : $X_\theta(\theta, \phi) = f(\phi)$ ist. Einsetzen in (7.124b) ergibt

$$X_\phi = -F(\phi) \sin \theta \cos \theta + g(\theta), \quad (7.125)$$

mit $F(\phi) = \int^\phi f(\phi) d\phi$. Wenn wir (7.125) in (7.124c) einsetzen, ergibt sich

$$-F(\phi)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \frac{dg}{d\theta} + \frac{df}{d\phi} + 2 \cot \theta (F(\phi) \sin \theta \cos \theta - g(\theta)) = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich separieren:

$$\frac{dg}{d\theta} - 2 \cot \theta g(\theta) = -\frac{df}{d\phi} - F(\phi).$$

Da beide Seiten jeweils separat konstant sein müssen ($\equiv C$), erhalten wir

$$\frac{dg}{d\theta} - 2 \cot \theta g(\theta) = C, \quad (7.126a)$$

$$\frac{df}{d\phi} + F(\phi) = -C. \quad (7.126b)$$

Gleichung (7.126a) wird gelöst, wenn wir beide Seiten mit $\exp(-\int d\theta 2 \cot \theta) = \sin^{-2} \theta$ multiplizieren, um aus der linken Seite eine totale Ableitung zu machen:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{g(\theta)}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{C}{\sin^2 \theta}.$$

Die Lösung hierfür ist schnell gefunden:

$$g(\theta) = (C_1 - C \cot \theta) \sin^2 \theta.$$

Wenn wir (7.126b) noch einmal differenzieren, stellen wir fest, dass f harmonisch ist:

$$X_\theta(\phi) = f(\phi) = A \sin \phi + B \cos \phi,$$

$$F(\phi) = -A \cos \phi + B \sin \phi - C.$$

Einsetzen dieser Ergebnisse in (7.125) führt auf

$$\begin{aligned} X_\phi(\theta, \phi) &= -(-A \cos \phi + B \sin \phi - C) \sin \theta \cos \theta + (C_1 - C \cot \theta) \sin^2 \theta \\ &= (A \cos \phi - B \sin \phi) \sin \theta \cos \theta + C_1 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Ein allgemeiner Killing-Vektor ist durch

$$\begin{aligned} X &= X^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= A \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + B \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + C_1 \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (7.127)$$

gegeben. Die Basisvektoren

$$L_x = -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (7.128a)$$

$$L_y = \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (7.128b)$$

$$L_z = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (7.128c)$$

erzeugen Rotationen um die x -, y - bzw. z -Achse.

Diese Vektoren erzeugen die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass die S^2 der homogene Raum $\text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ ist und die Metrik auf S^2 diese $\text{SO}(3)$ -Symmetrie erhält; siehe Beispiel 5.18(a). Im Allgemeinen hat die $S^n = \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$ mit der üblichen Metrik $\dim \text{SO}(n+1) = n(n+1)/2$ Killing-Vektoren, welche die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n+1)$ bilden. Die Sphäre S^n mit der üblichen Metrik ist ein maximal symmetrischer Raum. Wir können die S^n ein wenig zusammenquetschen, um die Zahl ihrer Symmetrien zu verringern. Wenn wir z.B. die S^2 entlang der z -Achse zusammendrücken, hat sie nur noch eine Rotationssymmetrie um die z -Achse, und es gibt auch nur noch ein Killing-Vektorfeld $L_z = \partial/\partial\phi$. \diamond

7.7.2 Konforme Killing-Vektorfelder

Seien (M, g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $X \in \mathcal{X}(M)$. Wenn eine durch εX gegebene infinitesimale Verschiebung eine konforme Transformation erzeugt, wird das Vektorfeld X ein **konformes Killing-Vektorfeld** (CKV von engl. „conformal Killing vector field“) genannt. Unter der Verschiebung $x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon X^\mu$ schreibt sich diese Bedingung als

$$\frac{\partial(x^\kappa + \varepsilon X^\kappa)}{\partial x^\mu} \frac{\partial(x^\lambda + \varepsilon X^\lambda)}{\partial x^\nu} g_{\kappa\lambda}(x + \varepsilon X) = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}(x).$$

Wir sehen, dass $\sigma \propto \varepsilon$ ist, und setzen $\sigma = \varepsilon\psi/2$, mit $\psi \in \mathcal{F}(M)$. Dann stellen wir fest, dass $g_{\mu\nu}$ und X^μ die Gleichung

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = X^\xi \partial_\xi g_{\mu\nu} + \partial_\mu X^\kappa g_{\kappa\nu} + \partial_\nu X^\lambda g_{\mu\lambda} = \psi g_{\mu\nu} \quad (7.129a)$$

erfüllen. Gleichung (7.129a) lässt sich problemlos nach ψ auflösen:

$$\psi = \frac{X^\xi g^{\mu\nu} \partial_\xi g_{\mu\nu} + 2\partial_\mu X^\mu}{m}, \quad (7.129b)$$

wobei wieder $m = \dim M$ ist. Wir bestätigen die beiden folgenden Aussagen:

- (i) Eine Linearkombination von CKVs ist ein CKV: $(\mathcal{L}_{aX+bY} g)_{\mu\nu} = (a\varphi + b\psi)g_{\mu\nu}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = \varphi g_{\mu\nu}$ und $\mathcal{L}_Y g_{\mu\nu} = \psi g_{\mu\nu}$.
- (ii) Die Lie-Klammer $[X, Y]$ von einem CKV ist wiederum ein CKV: $\mathcal{L}_{[X,Y]} g_{\mu\nu} = (X[\psi] - Y[\varphi])g_{\mu\nu}$.

Beispiel 7.12. Sei x^μ die Koordinate von (\mathbb{R}^m, δ) . Der **Dilatationsvektor**

$$D \equiv x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (7.130)$$

ist ein CKV, denn es ist

$$\mathcal{L}_D \delta_{\mu\nu} = \partial_\mu x^\kappa \delta_{\kappa\nu} + \partial_\nu x^\lambda \delta_{\mu\lambda} = 2\delta_{\mu\nu}.$$

\diamond

7.8 Nichtkoordinatenbasen

7.8.1 Definitionen

In der Koordinatenbasis wird $T_p M$ durch $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ und $T_p^* M$ durch $\{dx^\mu\}$ aufgespannt. Wenn M dazu mit einer Metrik g versehen ist, könnte auch eine andere Wahl möglich sein. Betrachten wir die Linearkombination

$$\hat{e}_\alpha = e_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{mit} \quad \{e_\alpha^\mu\} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}), \quad (7.131)$$

wobei $\det e_\alpha^\mu > 0$ ist. Mit anderen Worten: $\{\hat{e}_\alpha\}$ ist das System der Basisvektoren, die man erhält, wenn man auf die Basis $\{e_\mu\}$ unter Beibehaltung der Orientierung eine $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ -Rotation anwendet. Wir verlangen, dass $\{\hat{e}_\alpha\}$ orthonormal bezüglich g sein soll:

$$g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = e_\alpha^\mu e_\beta^\nu g_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (7.132a)$$

Wenn die Mannigfaltigkeit Lorentz'sch ist, sollte $\delta_{\alpha\beta}$ durch $\eta_{\alpha\beta}$ ersetzt werden. Wir können Gleichung (7.132a) leicht umkehren:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^\alpha e_\nu^\beta \delta_{\alpha\beta}, \quad (7.132b)$$

wobei e^α_μ die Inverse von e_μ^μ ist: $e^\alpha_\mu e_\alpha^\nu = \delta_\mu^\nu$ sowie $e^\alpha_\mu e_\beta^\mu = \delta_\beta^\alpha$.⁸ Da ein Vektor V unabhängig von der gewählten Basis ist, folgt $V = V^\mu e_\mu = V^\alpha \hat{e}_\alpha = V^\alpha e_\alpha^\mu e_\mu$. Es ergibt sich

$$V^\mu = V^\alpha e_\alpha^\mu \quad \text{und} \quad V^\alpha = e_\mu^\alpha V^\mu. \quad (7.133)$$

Führen wir nun die duale Basis $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ ein, definiert über $\langle \hat{\theta}^\alpha, \hat{e}_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha$. Zudem ist $\hat{\theta}^\alpha$ durch

$$\hat{\theta}^\alpha = e_\mu^\alpha dx^\mu \quad (7.134)$$

gegeben. In Abhängigkeit von $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ erhalten wir für die Metrik

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \delta_{\alpha\beta} \hat{\theta}^\alpha \otimes \hat{\theta}^\beta. \quad (7.135)$$

Die Basen $\{\hat{e}_\alpha\}$ und $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ heißen **Nichtkoordinatenbasen**. Wir verwenden $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \dots$ für die Koordinatenbasis und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, um die Nichtkoordinatenbasis zu bezeichnen. Die Koeffizienten e_α^μ heißen **Vierbeine**, wenn der Raum vierdimensional ist, und **Vielbeine**⁹, wenn er mehr als vier („viele“) Dimensionen hat. Die Nichtkoordinatenbasis hat eine nichtverschwindende Lie-Klammer. Wenn die $\{\hat{e}_\alpha\}$ durch (7.131) gegeben sind, genügen sie der Bedingung

$$[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta]|_p = c_{\alpha\beta}^\gamma(p) \hat{e}_\gamma|_p, \quad (7.136a)$$

⁸ Wir haben hier dasselbe Symbol für eine Matrix und ihre Inverse verwendet. Solange die Indizes explizit (und korrekt) ausgeschrieben werden, sollte dies keine allzu große Verwirrung stiften.

⁹ Die Bezeichnungen „Vierbein“ und „Vielbein“ erscheinen auch im engl. Original dieses Buchs auf Deutsch (Anm. d. Ü.).

mit

$$c_{\alpha\beta}{}^\gamma(p) = e^\gamma{}_v [e_\alpha{}^\mu \partial_\mu e_\beta{}^\nu - e_\beta{}^\mu \partial_\mu e_\alpha{}^\nu](p). \quad (7.136b)$$

Beispiel 7.13. Die Standardmetrik auf S^2 ist

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi = \hat{\theta}^1 \otimes \hat{\theta}^1 + \hat{\theta}^2 \otimes \hat{\theta}^2, \quad (7.137)$$

wobei $\hat{\theta}^1 = d\theta$ und $\hat{\theta}^2 = \sin \theta d\phi$ ist. Die „Zweibeine“ sind

$$\begin{aligned} e^1{}_\theta &= 1, & e^1{}_\phi &= 0, \\ e^2{}_\theta &= 0, & e^2{}_\phi &= \sin \theta. \end{aligned} \quad (7.138)$$

Die nichtverschwindenden Komponenten von $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ sind $c_{12}{}^2 = -c_{21}{}^2 = -\cot \theta$. \diamond

Übung 7.19 (a) Verifizieren Sie die Identitäten

$$\delta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} e^\alpha{}_\mu e^\beta{}_\nu, \quad g^{\mu\nu} = \delta^{\alpha\beta} e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu. \quad (7.139)$$

(b) Seien γ^α die Dirac-Matrizen in der Minkowski-Raumzeit, für die $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$ gilt. Definieren Sie die Analoga der Dirac-Matrizen in der gekrümmten Raumzeit durch $\gamma^\mu \equiv e_\alpha{}^\mu \gamma^\alpha$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (7.140)$$

7.8.2 Cartan-Strukturgleichungen

In Abschnitt 7.3 wurden der Krümmungstensor R und der Torsionstensor T definiert:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \\ T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned}$$

Es seien $\{\hat{e}_\alpha\}$ die Nichtkoordinatenbasis und $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ die duale Basis. Die Vektorfelder $\{\hat{e}_\alpha\}$ erfüllen $[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta] = c_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{e}_\gamma$. Wir definieren die Zusammenhangskoeffizienten bezüglich der Basis $\{\hat{e}_\alpha\}$ über

$$\nabla_\alpha \hat{e}_\beta \equiv \nabla_{\hat{e}_\alpha} \hat{e}_\beta = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \hat{e}_\gamma. \quad (7.141)$$

Mit $\hat{e}_\alpha = e_\alpha{}^\mu e_\mu$ wird Gleichung (7.141) zu $e_\alpha{}^\mu (\partial_\mu e_\beta{}^\nu + e_\beta{}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}) e_\nu = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} e_\gamma{}^\nu e_\nu$, was uns auf

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = e^\gamma{}_v e_\alpha{}^\mu (\partial_\mu e_\beta{}^\nu + e_\beta{}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}) = e^\gamma{}_v e_\alpha{}^\mu \nabla_\mu e_\beta{}^\nu \quad (7.142)$$

führt. Die Komponenten von T und R sind in dieser Basis gegeben durch

$$\begin{aligned} T^\alpha{}_{\beta\gamma} &= \langle \hat{\theta}^\alpha, T(\hat{e}_\beta, \hat{e}_\gamma) \rangle = \langle \hat{\theta}^\alpha, \nabla_\beta \hat{e}_\gamma - \nabla_\gamma \hat{e}_\beta - [\hat{e}_\beta, \hat{e}_\gamma] \rangle \\ &= \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} - c_{\beta\gamma}{}^\alpha, \end{aligned} \quad (7.143)$$

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \langle \hat{\theta}^\alpha, \nabla_\gamma \nabla_\delta \hat{e}_\beta - \nabla_\delta \nabla_\gamma \hat{e}_\beta - \nabla_{[\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta]} \hat{e}_\beta \rangle \\ &= \langle \hat{\theta}^\alpha, \nabla_\gamma (\Gamma^\varepsilon{}_{\delta\beta} \hat{e}_\varepsilon) - \nabla_\delta (\Gamma^\varepsilon{}_{\gamma\beta} \hat{e}_\varepsilon) - c_{\gamma\delta}{}^\varepsilon \nabla_\varepsilon \hat{e}_\beta \rangle \\ &= \hat{e}_\gamma [\Gamma^\alpha{}_{\delta\beta}] - \hat{e}_\delta [\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}] + \Gamma^\varepsilon{}_{\delta\beta} \Gamma^\alpha{}_{\gamma\varepsilon} - \Gamma^\varepsilon{}_{\gamma\beta} \Gamma^\alpha{}_{\delta\varepsilon} - c_{\gamma\delta}{}^\varepsilon \Gamma^\alpha{}_{\varepsilon\beta}. \end{aligned} \quad (7.144)$$

Wir definieren eine matrixwertige 1-Form $\{\omega^\alpha_\beta\}$, die **Zusammenhangs-1-Form**, durch

$$\omega^\alpha_\beta \equiv \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} \hat{\theta}^\gamma. \quad (7.145)$$

Satz 7.3. Die Zusammenhangs-1-Form ω^α_β erfüllt die **Cartan-Strukturgleichungen**,

$$d\hat{\theta}^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \hat{\theta}^\beta = T^\alpha, \quad (7.146a)$$

$$d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta = R^\alpha_\beta, \quad (7.146b)$$

mit $T^\alpha \equiv \frac{1}{2} T^\alpha{}_{\beta\gamma} \hat{\theta}^\beta \wedge \hat{\theta}^\gamma$ als **Torsions-** und $R^\alpha_\beta \equiv \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \hat{\theta}^\gamma \wedge \hat{\theta}^\delta$ als **Krümmungs-2-Form**.

Beweis

Wir lassen die linke Seite von Gleichung (7.146a) auf die Basisvektoren \hat{e}_γ und \hat{e}_δ wirken:

$$\begin{aligned} d\hat{\theta}^\alpha(\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta) &+ [\langle \omega^\alpha_\beta, \hat{e}_\gamma \rangle \langle \hat{\theta}^\beta, \hat{e}_\delta \rangle - \langle \hat{\theta}^\beta, \hat{e}_\gamma \rangle \langle \omega^\alpha_\beta, \hat{e}_\delta \rangle] \\ &= \{\hat{e}_\gamma[\langle \hat{\theta}^\alpha, \hat{e}_\delta \rangle] - \hat{e}_\delta[\langle \hat{\theta}^\alpha, \hat{e}_\gamma \rangle] - \langle \hat{\theta}^\alpha, [\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta] \rangle\} + \{\langle \omega^\alpha_\delta, \hat{e}_\gamma \rangle - \langle \omega^\alpha_\gamma, \hat{e}_\delta \rangle\} \\ &= -c_{\gamma\delta}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\delta\gamma} = T^\alpha{}_{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde (5.70) verwendet. Die rechte Seite, angewandt auf \hat{e}_γ und \hat{e}_δ , ergibt

$$\frac{1}{2} T^\alpha{}_{\beta\epsilon} [\langle \hat{\theta}^\beta, \hat{e}_\gamma \rangle \langle \hat{\theta}^\epsilon, \hat{e}_\delta \rangle - \langle \hat{\theta}^\epsilon, \hat{e}_\gamma \rangle \langle \hat{\theta}^\beta, \hat{e}_\delta \rangle] = T^\alpha{}_{\gamma\delta},$$

was Gleichung (7.146a) verifiziert.

Gleichung (7.146b) kann ganz ähnlich bewiesen werden – versuchen Sie es als Übung. \square

Wenn wir die äußeren Ableitungen von (7.146a) und (7.146b) bilden, erhalten wir die Nichtkoordinatenbasisversionen der **Bianchi-Identitäten**, vgl. (7.81a und b):

$$dT^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge T^\beta = R^\alpha_\beta \wedge \hat{\theta}^\beta, \quad (7.147a)$$

$$dR^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge R^\gamma_\beta - R^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta = 0. \quad (7.147b)$$

7.8.3 Das lokale Bezugssystem

In einer m -dimensionalen Riemann'schen Mannigfaltigkeit hat der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ insgesamt $m(m+1)/2$ Freiheitsgrade, das Vielbein e_α^μ hat dagegen m^2 Freiheitsgrade. Es gibt viele Nichtkoordinatenbasen, die auf dieselbe Metrik g führen und die an jedem Punkt p miteinander durch die *lokale* orthogonale Rotation

$$\hat{\theta}^\alpha \longrightarrow \hat{\theta}'^\alpha(p) = \Lambda^\alpha_\beta(p) \hat{\theta}^\beta(p) \quad (7.148)$$

verknüpft sind. Das Vielbein transformiert sich wie

$$e^\alpha_\mu(p) \longrightarrow e'^\alpha_\mu(p) = \Lambda^\alpha_\beta(p) e^\beta_\mu(p). \quad (7.149)$$

Anders als $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \dots$, die sich unter Koordinatenwechsel transformieren, transformieren sich die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ unter der lokalen orthogonalen Rotation und sind inert unter Koordinatenwechsel. Da der metrische Tensor invariant unter der Rotation ist, genügt Λ^α_β der Beziehung

$$\Lambda^\alpha_\beta \delta_{\alpha\delta} \Lambda^\delta_\gamma = \delta_{\beta\gamma}, \quad \text{wenn } M \text{ Riemann'sch ist, bzw.} \quad (7.150a)$$

$$\Lambda^\alpha_\beta \eta_{\alpha\delta} \Lambda^\delta_\gamma = \eta_{\beta\gamma}, \quad \text{wenn } M \text{ Lorentz'sch ist.} \quad (7.150b)$$

Dies impliziert, dass $\{\Lambda^\alpha_\beta(p)\} \in \mathrm{SO}(m)$, wenn M Riemann'sch ist, mit $\dim M = m$; und wenn M Lorentz'sch ist, folgt entsprechend $\{\Lambda^\alpha_\beta(p)\} \in \mathrm{SO}(m-1, 1)$. Die Dimension dieser Lie-Gruppen ist $m(m-1)/2 = m^2 - m(m+1)/2$, was der Differenz in der Zahl der Freiheitsgrade von e_α^μ und $g_{\mu\nu}$ entspricht. Unter der lokalen Bezugssystemrotation $\Lambda^\alpha_\beta(p)$ werden die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ rotiert, während die „Welt-Indizes“ $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \dots$ nicht betroffen sind. Unter der Rotation (7.148) transformiert sich der Basisvektor wie

$$\hat{e}_\alpha \longrightarrow \hat{e}'_\alpha = \hat{e}_\beta (\Lambda^{-1})^\beta_\alpha. \quad (7.151)$$

Sei $t = t^\mu_\nu e_\mu \otimes dx^\nu$ ein Tensorfeld vom Typ $(1, 1)$. In den Basen $\{\hat{e}_\alpha\}$ und $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ ergibt sich $t = t^\alpha_\beta \hat{e}_\alpha \otimes \hat{\theta}^\beta$, dabei ist $t^\alpha_\beta = e^\alpha_\mu e_\beta^\nu t^\mu_\nu$. In den neuen Bezugssystemen $\{\hat{e}'_\alpha\} = \{\hat{e}_\beta (\Lambda^{-1})^\beta_\alpha\}$ und $\{\hat{\theta}'^\alpha\} = \{\Lambda^\alpha_\beta \hat{\theta}^\beta\}$ nimmt der Tensor t die Form

$$t = t'^\alpha_\beta \hat{e}'_\alpha \otimes \hat{\theta}'^\beta = t'^\alpha_\beta \hat{e}_\gamma (\Lambda^{-1})^\gamma_\alpha \otimes \Lambda^\beta_\delta \hat{\theta}^\delta$$

an, woraus wir diese Transformationsregel ablesen können:

$$t^\alpha_\beta \longrightarrow t'^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_\gamma t^\gamma_\delta (\Lambda^{-1})^\delta_\beta.$$

Um es zusammenzufassen: Die oberen (unteren) Nichtkoordinatenindizes werden durch Λ (Λ^{-1}) rotiert. Der Übergang von der Koordinatenbasis zur Nichtkoordinatenbasis erfolgt durch die Multiplikation von Vielbeinen.

Hieraus können wir die Transformationsregel für die Zusammenhangs-1-Form ω^α_β ableiten. Die Torsions-2-Form transformiert sich wie

$$T^\alpha \longrightarrow T'^\alpha = d\hat{\theta}'^\alpha + \omega'^\alpha_\beta \wedge \hat{\theta}'^\beta = \Lambda^\alpha_\beta [d\hat{\theta}^\beta + \omega^\beta_\gamma \wedge \hat{\theta}^\gamma].$$

Einsetzen von $\hat{\theta}'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \hat{\theta}^\beta$ in diese Gleichung liefert

$$\omega'^\alpha_\beta \Lambda^\beta_\gamma = \Lambda^\alpha_\delta \omega^\delta_\gamma - d\Lambda^\alpha_\gamma.$$

Wir multiplizieren beide Seiten von rechts mit Λ^{-1} und erhalten

$$\omega'^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_\gamma \omega^\gamma_\delta (\Lambda^{-1})^\delta_\beta + \Lambda^\alpha_\gamma (d\Lambda^{-1})^\gamma_\beta. \quad (7.152)$$

Dabei haben wir die Identität $d\Lambda \Lambda^{-1} + \Lambda d\Lambda^{-1} = 0$ verwendet, welche sich aus $\Lambda \Lambda^{-1} = I_m$ ableitet.

Die Krümmungs-2-Form transformiert sich unter einer lokalen Bezugssystemrotation Λ homogen gemäß

$$R^\alpha_\beta \longrightarrow R'^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_\gamma R^\gamma_\delta (\Lambda^{-1})^\delta_\beta. \quad (7.153)$$

7.8.4 Der Levi-Civita-Zusammenhang in einer Nichtkoordinatenbasis

Sei ∇ ein Levi-Civita-Zusammenhang auf (M, g) , der sich durch $\nabla_X g = 0$ (Metrikkompatibilität) und $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0$ (Torsionsfreiheit) auszeichnet. Es ist interessant zu untersuchen, welche Formen diese Bedingungen im vorliegenden Ansatz annehmen. Zwischen den Komponenten $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ und $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ besteht die Beziehung (7.142). Sei (M, g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit (sollte (M, g) Lorentz'sch sein, ersetzen wir einfach im Folgenden überall $\delta_{\alpha\beta}$ durch $\eta_{\alpha\beta}$). Wenn wir den **Ricci-Rotationskoeffizienten** $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ durch $\delta_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma}$ definieren, wird aus der Metrikkompatibilität

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= \delta_{\alpha\delta}e^\delta_\lambda e^\mu_\beta \nabla_\mu e^\lambda_\gamma = -\delta_{\alpha\delta}e^\lambda_\gamma e^\mu_\beta \nabla_\mu e^\delta_\lambda \\ &= -\delta_{\gamma\delta}e^\delta_\lambda e^\mu_\beta \nabla_\mu e^\alpha_\lambda = -\Gamma_{\gamma\beta\alpha},\end{aligned}\quad (7.154)$$

wobei $\nabla_\mu g = 0$ verwendet wurde. Mit der Zusammenhangs-1-Form $\omega_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta$ wird daraus

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}. \quad (7.155)$$

Die Bedingung der Torsionsfreiheit lautet hier

$$d\hat{\theta}^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \hat{\theta}^\beta = 0. \quad (7.156)$$

Überzeugen Sie sich davon, dass (7.156) die Symmetrie des Zusammenhangskoeffizienten in der Koordinatenbasis ($\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$) impliziert. Die Bedingung (7.156) ermöglicht es uns, die $c_{\alpha\beta}^\gamma$ der Basis $\{\hat{e}_\alpha\}$ zu berechnen. Sehen wir uns die Kommutatorrelation

$$c_{\alpha\beta}^\gamma \hat{e}_\gamma = [\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta] = \nabla_\alpha \hat{e}_\beta - \nabla_\beta \hat{e}_\alpha \quad (7.157)$$

an, wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Bedingung der Torsionsfreiheit folgt. Aus (7.141) erhalten wir

$$c_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}. \quad (7.158)$$

Einsetzen von (7.158) in (7.144) erlaubt es uns, den Riemann'schen Krümmungstensor nur in Abhängigkeit von Γ auszudrücken:

$$\begin{aligned}R^\alpha_{\beta\gamma\delta} &= \hat{e}_\gamma[\Gamma^\alpha_{\delta\beta}] - \hat{e}_\delta[\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}] + \Gamma^\varepsilon_{\delta\beta}\Gamma^\alpha_{\gamma\varepsilon} - \Gamma^\varepsilon_{\gamma\beta}\Gamma^\alpha_{\delta\varepsilon} \\ &\quad - (\Gamma^\varepsilon_{\gamma\delta} - \Gamma^\varepsilon_{\delta\gamma})\Gamma^\alpha_{\varepsilon\beta}.\end{aligned}\quad (7.159)$$

Beispiel 7.14. Betrachten wir noch einmal die Sphäre S^2 in Beispiel 7.13. Die Komponenten von e^α_μ sind

$$e^1_\theta = 1, \quad e^1_\phi = 0, \quad e^2_\theta = 0, \quad e^2_\phi = \sin \theta. \quad (7.160)$$

Wir bemerken zunächst, dass aus der Metrikbedingung $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ folgt und daher auch $\omega^1_1 = \omega^2_2 = 0$. Andere Zusammenhangs-1-Formen erhalten wir aus den Bedingungen der Torsionsfreiheit:

$$d(\sin \theta d\phi) + \omega^1_2 \wedge (\sin \theta d\phi) = 0, \quad (7.161a)$$

$$d(\sin \theta d\phi) + \omega^2_1 \wedge d\theta = 0. \quad (7.161b)$$

Aus der zweiten Gleichung von (7.161) sieht man sofort, dass $\omega^2_1 = \cos \theta d\phi$ ist. Die Metrikbedingung $\omega_{12} = -\omega_{21}$ führt auf $\omega^1_2 = -\cos \theta d\phi$. Der Riemann-Tensor ergibt sich auch aus den Cartan-Strukturgleichungen:

$$\omega^1_2 \wedge \omega^2_1 = \frac{1}{2} R^1_{1\alpha\beta} \hat{\theta}^\alpha \wedge \hat{\theta}^\beta \quad (7.162a)$$

$$d\omega^1_2 = \frac{1}{2} R^1_{2\alpha\beta} \hat{\theta}^\alpha \wedge \hat{\theta}^\beta \quad (7.162b)$$

$$d\omega^2_1 = \frac{1}{2} R^2_{1\alpha\beta} \hat{\theta}^\alpha \wedge \hat{\theta}^\beta \quad (7.162c)$$

$$\omega^2_1 \wedge \omega^1_2 = \frac{1}{2} R^2_{2\alpha\beta} \hat{\theta}^\alpha \wedge \hat{\theta}^\beta. \quad (7.162d)$$

Die nichtverschwindenden Komponenten des Riemann-Tensors sind $R^1_{212} = -R^1_{221} = \sin \theta$ und $R^2_{112} = -R^2_{121} = -\sin \theta$. Der Übergang zum Koordinatenbasisausdruck erfolgt mithilfe von e_α^μ und e^α_μ . Beispielsweise ist

$$R^\theta_{\phi\theta\phi} = e_\alpha^\theta e^\beta_\phi e^\gamma_\theta e^\delta_\phi R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} R^1_{212} = \frac{1}{\sin \theta}. \quad \diamond$$

Beispiel 7.15. Die Schwarzschild-Metrik ist durch

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -\hat{\theta}^0 \otimes \hat{\theta}^0 + \hat{\theta}^1 \otimes \hat{\theta}^1 + \hat{\theta}^2 \otimes \hat{\theta}^2 + \hat{\theta}^3 \otimes \hat{\theta}^3 \end{aligned} \quad (7.163)$$

gegeben, mit

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^0 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt, & \hat{\theta}^1 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr, \\ \hat{\theta}^2 &= r d\theta, & \hat{\theta}^3 &= r \sin \theta d\phi. \end{aligned} \quad (7.164)$$

Die Parameter laufen in den Intervallen $0 < 2M < r$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$. Die Metrikbedingung ergibt $\omega^0_0 = \omega^1_1 = \omega^2_2 = \omega^3_3 = 0$, und die Bedingungen der Torsionsfreiheit sind

$$d[(1 - 2M/r)^{1/2} dt] + \omega^0_\beta \wedge \hat{\theta}^\beta = 0, \quad (7.165a)$$

$$d[(1 - 2M/r)^{-1/2} dr] + \omega^1_\beta \wedge \hat{\theta}^\beta = 0, \quad (7.165b)$$

$$d(r d\theta) + \omega^2_\beta \wedge \hat{\theta}^\beta = 0, \quad (7.165c)$$

$$d(r \sin \theta d\phi) + \omega^3_\beta \wedge \hat{\theta}^\beta = 0. \quad (7.165d)$$

Die nichtverschwindenden Komponenten der Zusammenhangs-1-Formen sind

$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= \omega^1_0 = \frac{M}{r^2} dt, & \omega^2_1 &= -\omega^1_2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} d\theta, \\ \omega^3_1 &= -\omega^1_3 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \sin \theta d\phi, & \omega^3_2 &= -\omega^2_3 = \cos \theta d\phi. \end{aligned} \quad (7.166)$$

Die Krümmungs-2-Formen ergeben sich aus den Strukturgleichungen zu

$$\begin{aligned} R^0_1 &= R^1_0 = \frac{M}{r^3} \hat{\theta}^0 \wedge \hat{\theta}^1, & R^0_2 &= R^2_0 = -\frac{2M}{r^3} \hat{\theta}^0 \wedge \hat{\theta}^2, \\ R^0_3 &= R^3_0 = -\frac{M}{r^3} \hat{\theta}^0 \wedge \hat{\theta}^3, & R^1_2 &= -R^2_1 = -\frac{M}{r^3} \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^2, \\ R^1_3 &= -R^3_1 = -\frac{M}{r^3} \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^3, & R^2_3 &= -R^3_2 = \frac{2M}{r^3} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^3. \end{aligned} \quad (7.167)$$

◊

7.9 Differentialformen und die Hodge-Theorie

7.9.1 Invariante Volumenelemente

Wir haben in Abschnitt 5.5 das Volumenelement als eine nichtverschwindende m -Form auf einer m -dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit M definiert. Wenn M mit einer Metrik g versehen ist, dann existiert ein natürliches Volumenelement, welches invariant unter Koordinatentransformation ist. Lassen Sie uns das **invariante Volumenelement** durch

$$\Omega_M \equiv \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m \quad (7.168)$$

definieren. Dabei ist $g = \det g_{\mu\nu}$, und die x^μ sind die Koordinaten der Karte (U, φ) . Die m -Form Ω_M ist in der Tat invariant unter einem Koordinatenwechsel: Seien die y^λ die Koordinaten einer anderen Karte (V, ψ) mit $U \cap V \neq \emptyset$. Das invariante Volumenelement ist dann in den y -Koordinaten

$$\sqrt{\left| \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\lambda} g_{\mu\nu} \right) \right|} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m.$$

Wenn wir beachten, dass $dy^\lambda = (\partial y^\lambda / \partial x^\mu) dx^\mu$ ist, wird hieraus

$$\left| \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\kappa} \right) \right| \sqrt{|g|} \det \left(\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\nu} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m = \pm \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Wenn x^μ und y^κ dieselbe Orientierung definieren, ist $\det(\partial x^\mu / \partial y^\kappa)$ streng positiv auf $U \cap V$, und Ω_M ist invariant unter dem Koordinatenwechsel.

Übung 7.20 Sei $\{\hat{\theta}^\alpha\} = \{e^\alpha_\mu dx^\mu\}$ die Nichtkoordinatenbasis. Zeigen Sie, dass sich das invariante Volumenelement als

$$\Omega_M = |e| dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m = \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^2 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^m \quad (7.169)$$

schreiben lässt, mit $e = \det e^\alpha_\mu$.

Jetzt, da wir das invariante Volumenelement definiert haben, ist es nur natürlich, eine Integration von $f \in \mathcal{F}(M)$ über M zu definieren, und zwar als

$$\int_M f \Omega_M \equiv \int_M f \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \dots dx^m. \quad (7.170)$$

Offensichtlich ist (7.170) invariant unter einem Wechsel der Koordinaten. In der Physik gibt es viele Objekte, die als Volumenintegrale von diesem Typ ausgedrückt werden, siehe Abschnitt 7.10.

7.9.2 Dualitätstransformationen

Wie in Abschnitt 5.4 gezeigt, ist der Vektorraum der r -Formen $\Omega^r(M)$ auf einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M isomorph zu $\Omega^{m-r}(M)$. Wenn M mit einer Metrik g versehen ist, können wir einen natürlichen Isomorphismus zwischen den beiden Räumen definieren, den man **Hodge-Stern-Operator** (Hodge-*) nennt. Wir definieren den total antisymmetrischen Tensor ε (auch Levi-Civita-Symbol oder einfach ε -Tensor genannt) gemäß

$$\varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m) \text{ eine gerade Permutation von } (12 \dots m) \text{ ist} \\ -1, & \text{wenn } (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m) \text{ eine ungerade Permutation von } (12 \dots m) \text{ ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.171a)$$

Beachten Sie, dass gilt:

$$g^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} = g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \dots g^{\mu_m \nu_m} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = g^{-1} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}. \quad (7.171b)$$

Der Hodge-* ist eine lineare Abbildung $* : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{m-r}(M)$, deren Wirkung auf einen Basisvektor von $\Omega^r(M)$ über

$$*(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \quad (7.172)$$

definiert ist. Man sollte darauf achten, dass $*1$ das invariante Volumenelement ist:

$$*1 = \frac{\sqrt{|g|}}{m!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Für

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M)$$

ist

$$*\omega = \frac{\sqrt{|g|}}{r!(m-r)!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}. \quad (7.173)$$

In der Nichtkoordinatenbasis $\{\theta^\alpha\} = \{e^\alpha_\mu dx^\mu\}$ wird die $*$ -Operation zu

$$*(\hat{\theta}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\alpha_r}) = \frac{1}{(m-r)!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_{r+1} \dots \beta_m} \hat{\theta}^{\beta_{r+1}} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\beta_m}, \quad (7.174)$$

mit

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } (\alpha_1 \dots \alpha_m) \text{ eine gerade Permutation von } (12 \dots m) \text{ ist,} \\ -1, & \text{wenn } (\alpha_1 \dots \alpha_m) \text{ eine ungerade Permutation von } (12 \dots m) \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.175)$$

Die Indizes werden durch $\delta^{\alpha\beta}$ bzw. $\eta^{\alpha\beta}$ angehoben.

Satz 7.4. Wenn (M, g) Riemann'sch ist, gilt

$$**\omega = (-1)^{r(m-r)}\omega. \quad (7.176a)$$

Ist (M, g) Lorentz'sch, dann ist

$$**\omega = (-1)^{1+r(m-r)}\omega. \quad (7.176b)$$

Beweis

Man beweist (7.176a) leichter in einer Nichtkoordinatenbasis. Sei

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \hat{\theta}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\alpha_r}.$$

Zweimaliges Anwenden von $*$ auf ω ergibt

$$\begin{aligned} **\omega &= \frac{1}{r!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{1}{(m-r)!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_{r+1} \dots \beta_m} \frac{1}{r!} \varepsilon^{\beta_{r+1} \dots \beta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_r} \hat{\theta}^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\gamma_r} \\ &= \frac{(-1)^{r(m-r)}}{r! r! (m-r)!} \sum_{\alpha \beta \gamma} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_{r+1} \dots \beta_m} \varepsilon_{\gamma_1 \dots \gamma_r \beta_{r+1} \dots \beta_m} \hat{\theta}^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\gamma_r} \\ &= \frac{(-1)^{r(m-r)}}{r!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \hat{\theta}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\alpha_r} = (-1)^{r(m-r)}\omega, \end{aligned}$$

wobei die Identität

$$\sum_{\beta \gamma} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_{r+1} \dots \beta_m} \varepsilon_{\gamma_1 \dots \gamma_r \beta_{r+1} \dots \beta_m} \hat{\theta}^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\gamma_r} = r!(m-r)! \hat{\theta}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\alpha_r}$$

ausgenutzt wurde. Beweisen Sie (7.176b) als Übung – Tipp: Es ist $\det \eta = -1$. \square

Somit stellen wir fest, dass $(-1)^{r(m-r)}**$ (bzw. $(-1)^{1+r(m-r)}**$) eine identische Abbildung auf $\Omega^r(M)$ ist. Wir definieren die Inverse von $*$ durch

$$*^{-1} = (-1)^{r(m-r)}*, \quad \text{wenn } (M, g) \text{ Riemann'sch ist,} \quad (7.177a)$$

$$*^{-1} = (-1)^{1+r(m-r)}*, \quad \text{wenn } (M, g) \text{ Lorentz'sch ist.} \quad (7.177b)$$

7.9.3 Innere Produkte von r -Formen

Wir verwenden die Gleichungen

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \\ \eta &= \frac{1}{r!} \eta_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.\end{aligned}$$

Das äußere Produkt $\omega \wedge * \eta$ ist eine m -Form:

$$\begin{aligned}\omega \wedge * \eta &= \frac{1}{(r!)^2} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \eta_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\mu_{r+1} \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \wedge dx^{\mu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\mu\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \eta^{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{1}{r!(m-r)!} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_r \mu_{r+1} \dots \mu_m} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_r \mu_{r+1} \dots \mu_m} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \eta^{\mu_1 \dots \mu_r} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.\end{aligned}\tag{7.178}$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass das Produkt symmetrisch ist:

$$\omega \wedge * \eta = \eta \wedge * \omega.\tag{7.179}$$

Seien $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ die Nichtkoordinatenbasis und

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{r!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \hat{\theta}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\alpha_r}, \\ \eta &= \frac{1}{r!} \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \hat{\theta}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^{\alpha_r}.\end{aligned}$$

Gleichung (7.178) sieht dann folgendermaßen aus:

$$\omega \wedge * \eta = \frac{1}{r!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \eta^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \hat{\theta}^1 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^m.\tag{7.180}$$

Da $\alpha \wedge * \beta$ eine m -Form ist, ist ihr Integral über M wohldefiniert. Wir definieren das innere Produkt (ω, η) von zwei r -Formen durch

$$\begin{aligned}(\omega, \eta) &\equiv \int \omega \wedge * \eta \\ &= \frac{1}{r!} \int_M \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \eta^{\mu_1 \dots \mu_r} \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^m.\end{aligned}\tag{7.181}$$

Wegen $\omega \wedge * \eta = \eta \wedge * \omega$ ist das innere Produkt symmetrisch:

$$(\omega, \eta) = (\eta, \omega).\tag{7.182}$$

Wenn (M, g) Riemann'sch ist, ist das innere Produkt positiv definit,

$$(\alpha, \alpha) \geq 0,\tag{7.183}$$

wobei die Gleichheit nur gilt, wenn $\alpha = 0$ ist. Dies ist nicht so, wenn (M, g) Lorentz'sch ist.

7.9.4 Adjungierte von äußeren Ableitungen

Definition 7.6. Sei $d : \Omega^{r-1}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ der Operator der äußeren Ableitung. Der adjungierte äußere Ableitungsoperator $d^\dagger : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$ ist definiert durch

$$d^\dagger = (-1)^{mr+m+1} * d *, \quad (7.184a)$$

wenn (M, g) Riemann'sch ist, und durch

$$d^\dagger = (-1)^{mr+m} * d *, \quad (7.184b)$$

wenn (M, g) Lorentz'sch ist. Hierbei ist $m = \dim M$.

Insgesamt ergibt sich für eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{m-r}(M) & \xrightarrow{(-1)^{mr+m+1} d} & \Omega^{m-r+1}(M) \\ \uparrow * & & \downarrow * \\ \Omega^r(M) & \xrightarrow{d^\dagger} & \Omega^{r-1}(M). \end{array} \quad (7.185)$$

Der Operator d^\dagger ist nilpotent, weil d nilpotent ist: $d^{\dagger 2} = *d * *d * \propto *d^2 * = 0$.

Satz 7.5. Es seien (M, g) eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand und $\alpha \in \Omega^r(M), \beta \in \Omega^{r-1}(M)$. Dann ist

$$(d\beta, \alpha) = (\beta, d^\dagger \alpha). \quad (7.186)$$

Beweis

Weil sowohl $d\beta \wedge * \alpha$ als auch $\beta \wedge * d^\dagger \alpha$ m -Formen sind, sind ihre Integrale über M wohldefiniert. d angewandt auf $\beta \wedge * \alpha$ ergibt

$$d(\beta \wedge * \alpha) = d\beta \wedge * \alpha - (-1)^r \beta \wedge d * \alpha.$$

Nehmen wir an, (M, g) sei Riemann'sch. Unter Beachtung der Tatsache, dass $d * \alpha$ eine $(m - r + 1)$ -Form ist, und nach Einfügen von $(-1)^{(m-r+1)(m-(m-r+1))} * * = (-1)^{mr+m+r+1} * *$, d. h. der identischen Abbildung, vor $d * \alpha$ im zweiten Term erhalten wir

$$d(\beta \wedge * \alpha) = d\beta \wedge * \alpha - (-1)^{mr+m+1} \beta \wedge (*d * \alpha).$$

Integration dieser Gleichung über M führt auf

$$\begin{aligned} \int_M d\beta \wedge * \alpha - \int_M \beta \wedge * [(-1)^{mr+m+1} * d * \alpha] &= \int_M d(\beta \wedge * \alpha) \\ &= \int_{\partial M} \beta \wedge * \alpha = 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Annahme folgt. Dies zeigt, dass $(d\beta, \alpha) = (\beta, d^\dagger \alpha)$ ist. Überlegen Sie sich: Wie sieht der Beweis aus, wenn (M, g) Lorentz'sch ist? \square

7.9.5 Laplace-Operator, harmonische Formen und Hodge'scher Zerlegungssatz

Definition 7.7. Der **Laplace-Operator** $\Delta : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ ist definiert durch

$$\Delta = (d + d^\dagger)^2 = dd^\dagger + d^\dagger d. \quad (7.187)$$

Als Beispiel bestimmen wir die explizite Form von $\Delta : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^0(M)$ für ein $f \in \mathcal{F}(M)$. Wegen $d^\dagger f = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta f &= d^\dagger d f = - * d * (\partial_\mu f dx^\mu) \\ &= - * d \left(\frac{\sqrt{|g|}}{(m-1)!} \partial_\mu f g^{\mu\lambda} \varepsilon_{\lambda\nu_2 \dots \nu_m} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \right) \\ &= - * \frac{1}{(m-1)!} \partial_\nu [\sqrt{|g|} g^{\lambda\mu} \partial_\mu f] \varepsilon_{\lambda\nu_2 \dots \nu_m} dx^\nu \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \\ &= - * \partial_\nu [\sqrt{|g|} g^{\nu\mu} \partial_\mu f] dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\nu [\sqrt{|g|} g^{\nu\mu} \partial_\mu f]. \end{aligned} \quad (7.188)$$

Übung 7.21 Betrachten Sie eine 1-Form $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ im euklidischen Raum (\mathbb{R}^m, δ) . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Delta \omega = - \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^2 \omega_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\mu} dx^\nu.$$

Beispiel 7.16. In Beispiel 5.11 wurde gezeigt, dass sich die Hälfte der Maxwell-Gleichungen auf die Identität $dF = d^2A = 0$ reduziert, wobei $A = A_\mu dx^\mu$ die Vektorpotenzial-1-Form ist und $F = dA$ die elektromagnetische 2-Form. Seien ρ die elektrische Ladungsdichte und j die elektrische Stromdichte, welche die Strom-1-Form $j = \eta_{\mu\nu} j^\nu dx^\mu = -\rho dt + j \cdot dx$ bilden. Dann wird aus den übrigen Maxwell-Gleichungen

$$d^\dagger F = d^\dagger dA = j \quad (7.189a)$$

oder in den Komponenten

$$\nabla \cdot E = \rho, \quad \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = j. \quad (7.189b)$$

Das Vektorpotenzial A hat eine große Zahl von Freiheitsgraden, und wir können immer ein A auswählen, welches die **Lorenz-Bedingung** $d^\dagger A = 0$ erfüllt. Dann wird (7.189a) zu $(dd^\dagger + d^\dagger d)A = \Delta A = j$. \diamond

Sei (M, g) eine kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Der Laplace-Operator Δ ist ein positiver Operator auf M in dem Sinn, dass

$$(\omega, \Delta \omega) = (\omega, (d^\dagger d + dd^\dagger)\omega) = (d\omega, d\omega) + (d^\dagger \omega, d^\dagger \omega) \geq 0, \quad (7.190)$$

wobei wir (7.183) verwendet haben. Eine r -Form ω heißt **harmonisch**, wenn $\Delta\omega = 0$ ist, und **geschlossen (kogeschlossen)**, wenn $d\omega = 0$ ($d^\dagger\omega = 0$) ist. Der folgende Satz ergibt sich direkt aus (7.190):

Satz 7.6. Eine r -Form ω ist dann und nur dann harmonisch, wenn ω geschlossen und kogeschlossen ist.

Eine r -Form ω wird **koexakt** genannt, wenn sie sich *global* als

$$\omega_r = d^\dagger \beta_{r+1} \quad (7.191)$$

schreiben lässt, wobei $\beta_{r+1} \in \Omega^{r+1}(M)$ ist.¹⁰ Wir bezeichnen die Menge der harmonischen r -Formen auf M mit $\text{Harm}^r(M)$, die Menge der exakten r -Formen mit $d\Omega^{r-1}(M)$ und die Menge der koexakten r -Formen mit $d^\dagger\Omega^{r+1}(M)$.¹¹

Satz 7.7. (Hodge'scher Zerlegungssatz) Sei (M, g) eine kompakte orientierbare Riemann'sche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann lässt sich $\Omega^r(M)$ auf eindeutige Weise zerlegen in

$$\Omega^r(M) = d\Omega^{r-1}(M) \oplus d^\dagger\Omega^{r+1}(M) \oplus \text{Harm}^r(M). \quad (7.192a)$$

Dies bedeutet, dass jede r -Form ω_r sich global als

$$\omega_r = d\alpha_{r-1} + d^\dagger\beta_{r+1} + \gamma_r \quad (7.192b)$$

schreiben lässt, mit $\alpha_{r-1} \in \Omega^{r-1}(M)$, $\beta_{r+1} \in \Omega^{r+1}(M)$ und $\gamma_r \in \text{Harm}^r(M)$.

Wenn $r = 0$ ist, definieren wir $\Omega^{-1}(M) = \{0\}$. Der Beweis dieses Satzes benötigt die Ergebnisse der beiden folgenden leichten Übungen.

Übung 7.22 Sei (M, g) gegeben wie in Satz 7.7. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(d\alpha_{r-1}, d^\dagger\beta_{r+1}) = (d\alpha_{r-1}, \gamma_r) = (d^\dagger\beta_{r+1}, \gamma_r) = 0. \quad (7.193)$$

Zeigen Sie außerdem: Wenn $\omega_r \in \Omega^r(M)$ die Gleichung

$$(d\alpha_{r-1}, \omega_r) = (d^\dagger\beta_{r+1}, \omega_r) = (\gamma_r, \omega_r) = 0 \quad (7.194)$$

für beliebige $d\alpha_{r-1} \in d\Omega^{r-1}(M)$ und $d^\dagger\beta_{r+1} \in d^\dagger\Omega^{r+1}(M)$ sowie $\gamma_r \in \text{Harm}^r(M)$ erfüllt, dann ist $\omega_r = 0$.

¹⁰ Zum Vergleich: Eine Form $\omega_r \in \Omega^r(M)$ ist exakt, wenn $\omega_r = d\alpha_{r-1}$ ($\alpha_{r-1} \in \Omega^{r-1}(M)$) ist.

¹¹ Achtung: Wir haben die Menge der exakten r -Formen bisher $B^r(M)$ genannt.

Übung 7.23 Nehmen Sie an, $\omega_r \in \Omega^r(M)$ lasse sich als $\omega_r = \Delta\psi_r$ schreiben für ein $\psi_r \in \Omega^r(M)$. Zeigen Sie, dass $(\omega_r, \gamma_r) = 0$ für beliebige $\gamma_r \in \text{Harm}^r(M)$ ist. Der Beweis in der anderen Richtung, „wenn ω_r orthogonal auf irgendeiner harmonischen r -Form ist, dann lässt sich ω_r als $\Delta\psi_r$ für irgendein $\psi_r \in \Omega^r(M)$ schreiben“, ist hochgradig technisch, und wir stellen hier nur fest, dass der Operator Δ^{-1} (die Green-Funktion) im vorliegenden Fall wohldefiniert und ψ_r durch $\Delta^{-1}\omega_r$ gegeben ist.

Sei $P : \Omega^r(M) \rightarrow \text{Harm}^r(M)$ ein Projektionsoperator in den Raum der harmonischen r -Formen. Wir betrachten ein Element $\omega_r \in \Omega^r(M)$. Da $\omega_r - P\omega_r$ orthogonal zu $\text{Harm}^r(M)$ ist, kann man es für ein $\psi_r \in \Omega^r(M)$ als $\Delta\psi_r$ schreiben. Dann ergibt sich

$$\omega_r = d(d^\dagger \psi_r) + d^\dagger(d\psi_r) + P\omega_r. \quad (7.195)$$

Dies ist die Zerlegung gemäß Satz 7.7.

7.9.6 Harmonische Formen und De-Rham-Kohomologiegruppen

Wir zeigen, dass jedes Element der De-Rham-Kohomologiegruppe eine eindeutige harmonische Darstellung hat. Sei $[\omega_r] \in H^r(M)$. Wir zeigen zuerst, dass $\omega_r \in \text{Harm}^r(M) \oplus d\Omega^{r-1}(M)$ ist. Gemäß (7.192b) wird ω_r zerlegt in $\omega_r = \gamma_r + d\alpha_{r-1} + d^\dagger\beta_{r+1}$. Wegen $d\omega_r = 0$ erhalten wir

$$0 = (d\omega_r, \beta_{r+1}) = (dd^\dagger\beta_{r+1}, \beta_{r+1}) = (d^\dagger\beta_{r+1}, d^\dagger\beta_{r+1}).$$

Dies gilt dann und nur dann, wenn gilt: $d^\dagger\beta_{r+1} = 0$. Daher ist $\omega_r = \gamma_r + d\alpha_{r-1}$. Aus (7.195) ergibt sich

$$\omega_r = P\omega_r + d(d^\dagger\psi) = P\omega_r + dd^\dagger\Delta^{-1}\omega_r. \quad (7.196a)$$

$\gamma_r \equiv P\omega_r$ ist die harmonische Darstellung von $[\omega_r]$. Als nächstes sei $\tilde{\omega}_r$ eine andere Darstellung von $[\omega_r]$: $\tilde{\omega}_r - \omega_r = d\eta_{r-1}$, $\eta_{r-1} \in \Omega^{r-1}(M)$. Analog zu (7.196a) gilt dann

$$\tilde{\omega}_r = P\tilde{\omega}_r + d(d^\dagger\Delta^{-1}\tilde{\omega}_r) = P\omega_r + d(\dots), \quad (7.196b)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen daher kommt, dass $d\eta_{r-1}$ orthogonal auf $\text{Harm}^r(M)$ steht und daher seine Projektion auf $\text{Harm}^r(M)$ verschwindet. (7.196a) und (7.196b) zeigen, dass $[\omega_r]$ eine eindeutige harmonische Darstellung $P\omega_r$ hat.

Dieser Beweis zeigt, dass $H^r(M) \subset \text{Harm}^r(M)$ ist. Nun beweisen wir: $H^r(M) \supset \text{Harm}^r(M)$. Wegen $d\gamma_r = 0$ für beliebige $\gamma_r \in \text{Harm}^r(M)$ erhalten wir $Z^r(M) \supset \text{Harm}^r(M)$. Ebenso ergibt sich $B^r(M) \cap \text{Harm}^r(M) = \emptyset$, wegen $B^r(M) = d\Omega^{r-1}(M)$, siehe Gleichung (7.192a). Somit ist jedes Element von $\text{Harm}^r(M)$ ein nichttriviales Mitglied von $H^r(M)$, und wir stellen fest, dass $\text{Harm}^r(M)$ ein Untervektorraum von $H^r(M)$ ist und daher gilt: $\text{Harm}^r(M) \subset H^r(M)$. Wir haben damit bewiesen:

Satz 7.8. (Satz von Hodge) Auf einer kompakten orientierbaren Riemann'schen Mannigfaltigkeit (M, g) ist $H^r(M)$ isomorph zu $\text{Harm}^r(M)$:

$$H^r(M) \cong \text{Harm}^r(M). \quad (7.197)$$

Den Isomorphismus erhält man durch Identifizieren von $[\omega] \in H^r(M)$ mit $P\omega \in \text{Harm}^r(M)$.

Insbesondere gilt

$$\dim \text{Harm}^r(M) = \dim H^r(M) = b^r, \quad (7.198)$$

mit der Betti-Zahl b^r . Die Euler-Charakteristik ist durch

$$\chi(M) = \sum (-1)^r b^r = \sum (-1)^r \dim \text{Harm}^r(M) \quad (7.199)$$

gegeben, siehe Satz 3.7. Machen Sie sich klar, dass die linke Seite der Gleichung eine topologische Größe ist, während es sich bei der rechten Seite um eine analytische Größe handelt, die sich aus dem Eigenwertproblem des Laplace-Operators Δ ergibt.

7.10 Aspekte der Allgemeinen Relativitätstheorie

7.10.1 Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) ist eine der schönsten und erfolgreichsten Theorien in der klassischen Physik. Die Theorie stimmt mit allen astrophysikalischen und kosmologischen Beobachtungen perfekt überein: Messungen im Sonnensystem wie der Perihel-drehung des Merkur, der Abstrahlung von Gravitationswellen durch Pulsare, der Gravitationsrotverschiebung, des Gravitationslinseneffekts usw. Sollten Sie noch nicht so vertraut mit der Allgemeinen Relativitätstheorie sein, können Sie z. B. Berry (1989) oder den *Primer* (die „ART-Fibel“) von Price (1982) zu Rate ziehen.

Einstein stellte die beiden folgenden Prinzipien auf, um auf ihnen die Allgemeine Relativitätstheorie zu konstruieren:

- (I) **Allgemeines Relativitätsprinzip:** Alle physikalischen Gesetze nehmen in jedem Koordinatensystem dieselbe Form an.
- (II) **Äquivalenzprinzip:** Es existiert ein Koordinatensystem, in welchem der Effekt eines Gravitationsfelds lokal verschwindet. (Ein Beobachter in einem frei fallenden Aufzug spürt – bis zum Aufprall – keine Schwerkraft.)

Jede Gravitationstheorie muss sich im Grenzfall schwacher Felder auf die Newton'sche Theorie reduzieren. In Newtons Theorie genügt das Gravitationspotenzial Φ der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \quad (7.200)$$

mit der Massendichte ρ . Die Einstein-Gleichung (Einstein'sche Feldgleichung) verallgemeinert dieses klassische Ergebnis, sodass es mit dem Allgemeinen Relativitätsprinzip verträglich wird.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird das Gravitationspotenzial durch die Komponenten des metrischen Tensors ersetzt. Dann haben wir anstelle der linken Seite von Gleichung (7.200) den **Einstein-Tensor**, der durch

$$G_{\mu\nu} \equiv Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} \quad (7.201)$$

definiert ist. In ähnlicher Weise tritt an die Stelle der Massendichte ein allgemeineres Objekt, der **Energie-Impuls-Tensor** $T_{\mu\nu}$. Die **Einstein-Gleichung** sieht formal der Gleichung (7.200) sehr ähnlich:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (7.202)$$

Die Konstante $8\pi G$ wurde so gewählt, dass (7.202) im Grenzfall schwacher Felder das Newton'sche Ergebnis reproduziert. Den Tensor $T_{\mu\nu}$ erhält man aus der Materiewirkung durch ein Variationsprinzip. Aus dem Noether-Theorem wissen wir, dass $T_{\mu\nu}$ einer Erhaltungsgleichung der Form $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ gehorchen muss. Ein ähnliches Erhaltungsgesetz gilt für $G_{\mu\nu}$ (aber nicht für $Ric_{\mu\nu}$). Wir werden im nächsten Unterabschnitt sehen, dass sich die linke Seite von (7.202) ebenfalls aus einem Variationsprinzip ableiten lässt.

Übung 7.24 Betrachten Sie eine Metrik

$$g_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq 3)$$

und einen Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ mit $T_{00} = \rho c^2$ und $T_{0i} = T_{ij} = 0$, was in Ruhe befindlichem Staub entspricht. Zeigen Sie, dass (7.202) sich im Limes schwacher Felder ($\Phi/c^2 \ll 1$) auf die Poisson-Gleichung reduziert.

7.10.2 Einstein-Hilbert-Wirkung

Dieses und das nächste Beispiel wurden aus Weinberg (1972) entnommen. Die ART beschreibt die Dynamik der Geometrie, d. h. die Dynamik von $g_{\mu\nu}$. Wie lautet das Prinzip der kleinsten Wirkung für diese Theorie? Wie üblich fordern wir, dass die relevante Wirkung ein Skalar sein sollte. Darüber hinaus sollte es die Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ enthalten: $\int \sqrt{|g|} d^m x$ kann nicht die Dynamik der Metrik beschreiben. Die einfachste Annahme dürfte $S_{EH} \propto \int \mathcal{R} \sqrt{|g|} d^m x$ sein. Weil \mathcal{R} ein Skalar ist und $\sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \dots dx^m$ das invariante Volumenelement, ist S_{EH} ein Skalar. Im Folgenden zeigen wir, dass S_{EH} unter Variation bezüglich der Metrik in der Tat auf die Einstein-Gleichung führt. Unser Zusammenhang wird auf den Levi-Civita-Zusammenhang beschränkt. Wir beweisen zunächst eine formale Behauptung.

Behauptung 7.2. Sei (M, g) eine (pseudo-)Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Die Variation $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ ändert $g^{\mu\nu}$, g und $Ric_{\mu\nu}$ wie

$$(a) \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda} g^{\nu\lambda} \delta g_{\lambda\lambda}, \quad (7.203)$$

$$(b) \quad \delta g = gg^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad \delta \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (7.204)$$

$$(c) \quad \delta Ric_{\mu\nu} = \nabla_\kappa \delta \Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\kappa_{\kappa\mu} \quad (\textbf{Palatini-Identität}). \quad (7.205)$$

Beweis(a) Aus $g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\kappa^\nu$ folgt

$$0 = \delta(g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu}) = \delta g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu} + g_{\kappa\lambda}\delta g^{\lambda\nu}.$$

Multiplizieren mit $g^{\mu\kappa}$ führt auf $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}\delta g_{\kappa\lambda}$.(b) Wir vermerken zuerst die Matrixidentität $\ln(\det g_{\mu\nu}) = \text{sp}(\ln g_{\mu\nu})$. Diese lässt sich durch Diagonalisieren von $g_{\mu\nu}$ beweisen. Unter der Variation $\delta g_{\mu\nu}$ wird aus der linken Seite $\delta g \cdot g^{-1}$, während die rechte Seite $g^{\mu\nu} \cdot \delta g_{\mu\nu}$ ergibt und daher $\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$. Der Rest von (7.204) lässt sich hieraus leicht herleiten.(c) Seien Γ und $\tilde{\Gamma}$ zwei Zusammenhänge. Die Differenz $\delta\Gamma \equiv \tilde{\Gamma} - \Gamma$ ist ein Tensor vom Typ (1,2), siehe Übung 7.5. Im vorliegenden Fall nehmen wir $\tilde{\Gamma}$ als einen mit $g + \delta g$ sowie Γ als einen mit g assoziierten Zusammenhang an. Wir werden im Normalkoordinatensystem arbeiten, in welchem $\Gamma \equiv 0$ ist (natürlich ist im Allgemeinen $\partial\Gamma \neq 0$); siehe Abschnitt 7.4. Wir erhalten

$$\delta Ric_{\mu\nu} = \partial_\kappa\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\kappa\mu} = \nabla_\kappa\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \nabla_\nu\Gamma^\kappa_{\kappa\mu}.$$

(Rechnen Sie die zweite Gleichheit nach!) Da beide Seiten Tensoren sind, ist diese Aussage in jedem Koordinatensystem gültig. \square Wir definieren die **Einstein-Hilbert-Wirkung** durch

$$S_{\text{EH}} \equiv \frac{1}{16\pi G} \int \mathcal{R} \sqrt{-g} d^4x. \quad (7.206)$$

Der konstante Faktor $1/16\pi G$ wird eingeführt, um beim Newton'schen Grenzfall zu landen, wenn Materie hinzugenommen wird, siehe Gleichung (7.214). Wir weisen jetzt nach, dass $\delta S_{\text{EH}} = 0$ auf die Vakuum-Einstein-Gleichung führt. Unter der Variation $g \rightarrow g + \delta g$ mit $\delta g \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow 0$ wird aus dem Integranden

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{R}\sqrt{-g}) &= \delta(g^{\mu\nu}Ric_{\mu\nu}\sqrt{-g}) \\ &= \delta g^{\mu\nu}Ric_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\delta Ric_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \mathcal{R}\delta(\sqrt{-g}) \\ &= -g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}\delta g_{\kappa\lambda}Ric_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}(\nabla_\kappa\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \nabla_\nu\Gamma^\kappa_{\kappa\mu})\sqrt{-g} + \frac{1}{2}\mathcal{R}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass der zweite Term eine totale Divergenz ist,

$$\begin{aligned} &\nabla_\kappa(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu}\sqrt{-g}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\kappa\mu}\sqrt{-g}) \\ &= \partial_\kappa(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\sqrt{-g}) - \partial_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\kappa\mu}\sqrt{-g}), \end{aligned}$$

und daher nicht zur Variation beiträgt. Aus den verbleibenden Termen erhalten wir

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int \left(-Ric^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{R}g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (7.207)$$

Wenn wir verlangen, dass unter einer beliebigen Variation δg $\delta S_{\text{EH}} = 0$ wird, erhalten wir die Vakuum-Einstein-Gleichung:

$$G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 0, \quad (7.208)$$

wobei der symmetrische Tensor G den Namen **Einstein-Tensor** trägt.

Bisher haben wir nur das Gravitationsfeld berücksichtigt. Nehmen wir an, es existiere Materie, beschrieben durch eine Wirkung

$$S_M \equiv \int \mathcal{L}(\phi) \sqrt{-g} d^4x. \quad (7.209)$$

Hierbei ist $\mathcal{L}(\phi)$ die Lagrange-Dichte der Theorie. Typische Beispiele sind das reelle Skalarfeld und die elektrodynamischen Maxwell-Felder:

$$S_S \equiv -\frac{1}{2} \int [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2] \sqrt{-g} d^4x, \quad (7.210a)$$

$$S_{ED} \equiv -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (7.210b)$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$. Wenn die Materiewirkung sich unter δg um δS_M ändert, ist der **Energie-Impuls-Tensor** $T^{\mu\nu}$ durch

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (7.211)$$

definiert. Weil $\delta g_{\mu\nu}$ symmetrisch ist, sollte $T^{\mu\nu}$ ebenfalls symmetrisch sein. Beispielsweise ist $T_{\mu\nu}$ für ein reelles Skalarfeld gegeben durch

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= 2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} S_S \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + m^2 \phi^2). \end{aligned} \quad (7.212)$$

Nehmen wir an, ein Gravitationsfeld sei an ein Materiefeld mit der Wirkung S_M gekoppelt. Nun lautet das Wirkungsprinzip

$$\delta(S_{EH} + S_M) = 0 \quad (7.213)$$

unter $g \rightarrow g + \delta g$. Mit (7.207) und (7.211) erhalten wir die **Einstein-Gleichung**

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (7.214)$$

Übung 7.25 Wir können zur skalaren Krümmung einen zusätzlichen Skalar hinzufügen, ohne die Invarianz der Wirkung zu beeinträchtigen. Beispielsweise können wir eine sog. **kosmologische Konstante** Λ einbauen:

$$\widetilde{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M (\mathcal{R} + \Lambda) \sqrt{-g} d^4x. \quad (7.215)$$

Schreiben Sie die Vakuum-Einstein-Gleichung auf. Andere Skalare, die man addieren könnte, wären z. B. Terme wie \mathcal{R}^2 , $Ric^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}$ oder $R_{\kappa\lambda\mu\nu} R^{\kappa\lambda\mu\nu}$.

7.10.3 Spinoren in gekrümmter Raumzeit

Um halbwegs konkret zu bleiben, betrachten wir einen Dirac-Spinor ψ in einer vier-dimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeit M . Das Vierbein $e^\alpha{}_\mu$, das durch

$$g_{\mu\nu} = e^\alpha{}_\mu e^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta} \quad (7.216)$$

gegeben ist, definiert an jedem Punkt $p \in M$ ein orthonormales Bezugssystem mit $\{\hat{e}^\alpha = e^\alpha{}_\mu dx^\mu\}$. Wie bisher stehen die $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ für die lokalen orthonormalen Indizes, während μ, ν, λ, \dots die Koordinatenindizes sein sollen. Bezuglich dieses Systems genügen die Dirac-Matrizen $\gamma^\alpha = e^\alpha{}_\mu \gamma^\mu$ der Bedingung $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$. Unter einer lokalen Lorentz-Transformation $\Lambda^\alpha{}_\beta(p)$ transformiert sich der Dirac-Spinor wie

$$\psi(p) \rightarrow \rho(\Lambda)\psi(p), \quad \bar{\psi}(p) \rightarrow \bar{\psi}(p)\rho(\Lambda)^{-1}, \quad (7.217)$$

mit $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ und $\rho(\Lambda)$ als der Spinordarstellung von Λ . Um eine invariante Wirkung zu konstruieren, suchen wir eine kovariante Ableitung $\nabla_\alpha \psi$, die ein lokaler Lorentz-Vektor ist und sich als ein Spinor transformiert:

$$\nabla_\alpha \psi \rightarrow \rho(\Lambda)\Lambda_\alpha{}^\beta \nabla_\beta \psi. \quad (7.218)$$

Wenn wir solch ein $\nabla_\alpha \psi$ erhalten, kann eine invariante Lagrange-Dichte durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\alpha \nabla_\alpha + m) \psi \quad (7.219)$$

gegeben sein, mit m als der Masse von ψ . Wir beachten, dass sich $e_\alpha{}^\mu \partial_\mu \psi$ unter $\Lambda(p)$ wie

$$e_\alpha{}^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \Lambda_\alpha{}^\beta e_\beta{}^\mu \partial_\mu \rho(\Lambda)\psi = \Lambda_\alpha{}^\beta e_\beta{}^\mu [\rho(\Lambda)\partial_\mu \psi + \partial_\mu \rho(\Lambda)\psi] \quad (7.220)$$

transformiert. Nehmen wir an, dass ∇_α von der Form

$$\nabla_\alpha \psi = e_\alpha{}^\mu [\partial_\mu + \Omega_\mu] \psi \quad (7.221)$$

ist. Aus (7.218) und (7.220) erhalten wir, dass Ω_μ der Gleichung

$$\Omega_\mu \rightarrow \rho(\Lambda)\Omega_\mu \rho(\Lambda)^{-1} - \partial_\mu \rho(\Lambda)\rho(\Lambda)^{-1} \quad (7.222)$$

genügt. Um die explizite Form von Ω_μ zu bestimmen, betrachten wir eine infinitesimale lokale Lorentz-Transformation $\Lambda_\alpha{}^\beta(p) = \delta_\alpha{}^\beta + \varepsilon_\alpha{}^\beta(p)$. Der Dirac-Spinor transformiert sich gemäß

$$\psi \rightarrow \exp[\frac{1}{2}i\varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}]\psi \simeq [1 + \frac{1}{2}i\varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}]\psi, \quad (7.223)$$

wobei $\Sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4}i[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$ die Spinor-Darstellung der Erzeuger der Lorentz-Transformation ist. $\Sigma_{\alpha\beta}$ genügt der Algebraeigenschaft der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(1, 3)$:

$$i[\Sigma_{\alpha\beta}, \Sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\Sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\gamma\alpha}\Sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\Sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\Sigma_{\gamma\beta}. \quad (7.224)$$

Unter derselben Lorentz-Transformation transformiert sich Ω_μ wie

$$\begin{aligned}\Omega_\mu &\rightarrow (1 + \frac{1}{2}i\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta})\Omega_\mu(1 - \frac{1}{2}i\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}) - \frac{1}{2}i\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}(1 - \frac{1}{2}i\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}) \\ &= \Omega_\mu + \frac{1}{2}i\epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta}, \Omega_\mu] - \frac{1}{2}i\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (7.225)$$

Wir erinnern uns, dass sich die Zusammenhangs-1-Form $\omega^\alpha{}_\beta$ unter einer infinitesimalen Lorentz-Transformation wie

$$\omega^\alpha{}_\beta \rightarrow \omega^\alpha{}_\beta + \epsilon^\alpha{}_\gamma\omega^\gamma{}_\beta - \omega^\alpha{}_\gamma\epsilon^\gamma{}_\beta - d\epsilon^\alpha{}_\beta \quad (7.226a)$$

transformiert, siehe (7.152), oder in Komponenten:

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \rightarrow \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \epsilon^\alpha{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\mu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\epsilon^\gamma{}_\beta - \partial_\mu\epsilon^\alpha{}_\beta. \quad (7.226b)$$

Aus (7.224), (7.225) und (7.226b) ergibt sich, dass die Kombination

$$\Omega_\mu \equiv \frac{1}{2}i\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}i\epsilon^\alpha{}_\nu\nabla_\mu e^\beta{}^\nu\Sigma_{\alpha\beta} \quad (7.227)$$

die Transformationseigenschaft (7.222) erfüllt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}i\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta\Sigma_{\alpha\beta} &\rightarrow \frac{1}{2}i(\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta + \epsilon^\alpha{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_\mu{}^\beta - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\epsilon^{\gamma\beta} - \partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta})\Sigma_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}i\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta\Sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}i(\epsilon^\alpha{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_\mu{}^\beta\Sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\epsilon^{\gamma\beta}\Sigma_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}i\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}i\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta\Sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}i\epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta}, \frac{1}{2}i\Gamma^\gamma{}_\mu{}^\delta\Sigma_{\gamma\delta}] - \frac{1}{2}i\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die Lagrange-Dichte, welche ein Skalar sowohl unter Koordinatenwechsel als auch unter lokalen Lorentz-Rotationen ist,

$$\mathcal{L} \equiv \bar{\psi}[i\gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{2}i\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\Sigma_{\beta\gamma}) + m]\psi, \quad (7.228)$$

und die skalare Wirkung

$$S_\psi = \int_M d^4x \sqrt{-g}\bar{\psi}[i\gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{2}i\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\Sigma_{\beta\gamma}) + m]\psi. \quad (7.229a)$$

Wenn ψ an ein Eichfeld \mathcal{A} gekoppelt ist, gilt für die Wirkung

$$S_\psi = \int_M d^4x \sqrt{-g}\bar{\psi}[i\gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{2}i\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\Sigma_{\beta\gamma}) + m]\psi. \quad (7.229b)$$

Interessanterweise verschwindet der Spinzusammenhangsterm für $\dim M = 2$. Um dies zu sehen, schreiben wir Gleichung (7.229a) um:

$$S_\psi = \frac{1}{2} \int_M d^2x \sqrt{-g}\bar{\psi}[i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \frac{1}{2}i\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\{i\gamma^\mu, \Sigma_{\beta\gamma}\} + m]\psi. \quad (7.229a')$$

Dabei ist $\gamma^\mu = \gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu$, und wir haben totale Ableitungen zur Lagrange-Dichte hinzugefügt, um diese Hermite'sch zu machen. Die nichtverschwindenden Komponenten von Σ sind $\Sigma_{01} \propto [\gamma_0, \gamma_1] \propto \gamma_3$, wobei γ_3 das zweidimensionale Analogon von γ_5 ist. Wegen $\{\gamma^\mu, \gamma_3\} = 0$ fällt der Spinzusammenhangsterm in S_ψ heraus.

7.11 Bosonische Stringtheorie

Die Quantenfeldtheorie (QFT) wird gelegentlich Teilchenphysik genannt, weil sie die Dynamik von Teilchen behandelt. Sofern „nur“ Hochenergieprozesse betrachtet werden, deren typische Energien viel kleiner als die Planck-Energie ($\approx 10^{19}$ GeV) sind, spricht nichts gegen diese Sichtweise. Wenn wir jedoch in diesem Kontext die Gravitation quantisieren wollen, stoßen wir auf eine undurchdringliche Barriere. Wir wissen nicht, wie wir die in der QFT der Gravitation allgegenwärtigen Ultraviolettdivergenzen renormieren sollen. In den frühen 1980er Jahren versuchten Physiker, durch Einführen von Supersymmetrie eine konsistente Gravitationstheorie zu konstruieren. Obwohl dies partielle Verbesserungen brachte, konnte die sich ergebende Supergravitation die „UV-Katastrophe“ nicht komplett beseitigen.

In den späten 1960er und frühen 1970er Jahren war das duale Resonanzmodell ein heißer Kandidat für eine Hadronenfeldtheorie. Es ersetzte Teilchen durch eindimensionale Objekte, sog. **Strings**. Leider enthielt die Theorie jedoch Tachyonen (Teilchen mit imaginärer Masse) und Spin-2-Teilchen, und war, schlimmer noch, nur in einer 26-dimensionalen Raumzeit konsistent. Daher gab man das Modell auf und verlegte sich stattdessen auf die Quantenchromodynamik (QCD). Einige Theoretiker bemerkten jedoch, dass die Stringtheorie notwendigerweise das Graviton enthält und deshalb ein Kandidat für eine Quantengravitation sein könnte.

Mittlerweile ist die Supersymmetrie in die Stringtheorie integriert; die **Superstringtheorie** ist frei von Tachyonen und konsistent in einer zehndimensionalen Raumzeit. Es gibt mehrere Versionen dieser Theorie, und eine mathematisch vollständig konsistente Superstringtheorie könnte einmal die langersehnte *theory of everything* (TOE, auf Deutsch: „Theorie von Allem“) werden.

Wir studieren die elementaren Aspekte der bosonischen Stringtheorie im letzten Kapitel dieses Buchs. Wir untersuchen auch einige für Superstrings relevante mathematische Hilfsmittel. Der klassische Review hierzu ist Scherk (1975). Mehr Literaturhinweise werden Sie in Kapitel 14 finden.

7.11.1 Die Stringwirkung

Die Bahn eines Teilchens in einer D -dimensionalen Minkowski-Raumzeit ist durch die Menge der D Funktionen $X^\mu(\tau)$, $1 \leq \mu \leq D$, gegeben, wobei τ die Bahn parametrisiert. Ein String ist ein eindimensionales Objekt, dessen Zustand zwei Zahlen (σ, τ) parametrisieren, wobei σ raumartig und τ zeitartig ist. Seine Position in der D -dimensionalen Minkowski-Raumzeit ist gegeben durch $X^\mu(\sigma, \tau)$, siehe Abb. 7.9. Der Parameter σ kann als $\sigma \in [0, \pi]$ normiert werden. Ein String kann offen oder geschlossen sein. Wir suchen jetzt eine Wirkung, welche die Stringdynamik bestimmt.

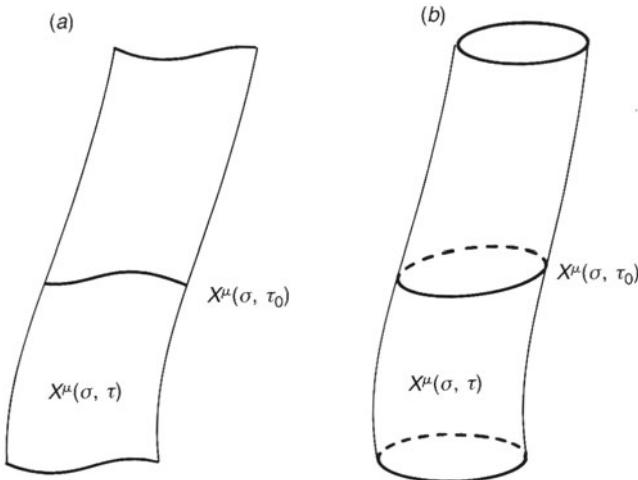


Abb. 7.9. Die Trajektorie („Bahn“) eines offenen (a) und eines geschlossenen Strings (b). Schnitte der Trajektorien bei festem Parameter τ_0 sind ebenfalls dargestellt.

Als erstes sehen wir, dass die Wirkung eines relativistischen Teilchens die *Länge* der Weltlinie

$$S \equiv m \int_{s_A}^{s_E} ds = m \int_{\tau_A}^{\tau_E} d\tau (-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)^{1/2} \quad (7.230)$$

ist, mit $\dot{X}^\mu \equiv dX^\mu/d\tau$. Für manche Zwecke ist es geschickt, einen anderen Ausdruck zu wählen:

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{g} (g^{-1} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - m^2). \quad (7.231)$$

Dabei wird die Hilfsvariable $g \equiv g_{\tau\tau}$ als eine Metrik betrachtet.

Übung 7.26 Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf, die sich aus (7.231) ergeben. Eliminieren Sie g aus (7.231) und verwenden Sie die Bewegungsgleichung, um (7.230) zu reproduzieren.

Was ist der Vorteil von (7.231) gegenüber (7.230)? Zunächst erkennen wir, dass (7.231) selbst für $m^2 = 0$ sinnvoll ist, während (7.230) in diesem Fall verschwindet. Zweitens ist (7.231) nur quadratisch in X , während die X -Abhängigkeit von (7.230) ziemlich kompliziert ist.

Nambu (1970) schlug zur Beschreibung von Strings eine Wirkung vor, welche proportional zur *Fläche* der Weltfläche ist, womit die von der Trajektorie eines Strings aufgespannte Fläche gemeint ist. Offenbar ist dies die Verallgemeinerung der Länge der Weltlinie eines Teilchens. Die sog. **Nambu-Wirkung** sieht folgendermaßen aus:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_A}^{\tau_E} d\tau [-\det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)]^{1/2}, \quad (7.232)$$

mit $\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma$ und $\partial_\alpha X^\mu \equiv \partial X^\mu / \partial \xi^\alpha$. Der Parameter τ_A (τ_E) ist der Anfangs- (End-)Wert des Parameters τ , während der Parameter α' der inversen Stringspannung (der Regge-Steigung) entspricht.

Übung 7.27 Die Wirkung S muss dimensionslos sein. Wir nehmen auch σ und τ als dimensionslos an. Zeigen Sie, dass α' die Dimension $[\text{Länge}]^2$ hat.

Obwohl diese Wirkung ein schönes geometrisches Bild liefert, ist sie nicht quadratisch in X , und es stellte sich heraus, dass die Quantisierung der Theorie ziemlich schwierig ist. Suchen wir also eine äquivalente Wirkung, die sich besser quantisieren lässt. Wir gehen analog zum Fall der Punktteilchen vor. Die folgende quadratische Wirkung für Strings heißt **Polyakov-Wirkung** (Polyakov 1981) und ist durch

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_A}^{\tau_E} d\tau \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (7.233)$$

definiert, mit $g = \det g_{\alpha\beta}$ und $g^{\alpha\beta} = (g^{-1})^{\alpha\beta}$. Wenn der String offen ist, ist die Trajektorie eine Fläche, für einen geschlossenen String eine Röhre, siehe Abb. 7.9. Es wird hier gezeigt, dass die Wirkung (7.233) nach Eliminieren von g mit (7.232) übereinstimmt. Es sollte jedoch angemerkt werden, dass dies nur für die Lagrange-Dichte wahr ist. Es gibt keine Garantie dafür, dass dies auch auf der Quantenebene gültig bleibt. Es wurde gezeigt, dass die auf den jeweiligen Lagrange-Dichten basierende Quantentheorie nur für $D = 26$ übereinstimmt. Die Wirkung (7.233) ist invariant unter

(i) lokaler Reparametrisierung der Weltfläche,

$$\tau \rightarrow \tau'(\tau, \sigma), \quad \sigma \rightarrow \sigma'(\tau, \sigma), \quad (7.234a)$$

(ii) Weyl-Reskalierung,

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g'_{\alpha\beta} \equiv e^{\phi(\sigma, \tau)} g_{\alpha\beta}, \quad (7.234b)$$

(iii) globaler Poincaré-Transformation,

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + a^\mu, \quad \Lambda \in \text{SO}(D-1, 1) \quad (a \in \mathbb{R}^D). \quad (7.234c)$$

Diese Symmetrien werden wir uns später genauer ansehen.

Übung 7.28 Wenn man die Symmetrien (i) und (iii) ausnutzt, ist es immer möglich, $g_{\alpha\beta}$ in einer Form $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ zu wählen. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für X^μ auf und zeigen Sie, dass dies der Gleichung

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta X^\mu = 0 \quad (7.235)$$

genügt.

7.11.2 Symmetrien der Polyakov-Strings

Die bosonische Stringtheorie ist auf einer zweidimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) definiert. Die Einbettung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^D$ ist durch $\xi^\alpha \mapsto X^\mu$ definiert, wobei $\{\xi^\alpha\} = (\tau, \sigma)$ die lokalen Koordinaten von M sind. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die physikalische Raumzeit Minkowski'sch ist, (\mathbb{R}^D, η) . Die **Polyakov-Wirkung**

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (7.236)$$

bleibt invariant unter der Koordinatenreparametrisierung $\text{Diff}(M)$, weil das Volumenelement $\sqrt{-g} d^2\xi$ invariant und $g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$ ein Skalar ist.

Nun sind wir bereit, die Bewegungsgleichung herzuleiten. Unsere Variationsparameter sind die *Einbettung* X^μ und die Geometrie $g_{\alpha\beta}$. Unter der Variation δX^μ gilt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X_\mu) = 0. \quad (7.237a)$$

Unter der Variation $\delta g_{\alpha\beta}$ ändert sich der Integrand von S gemäß

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu) &= \delta \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\gamma\delta} \delta g^{\gamma\delta} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \end{aligned}$$

wobei Behauptung 7.2 verwendet wurde. Da dies für jede beliebige Variation $\delta g_{\alpha\beta}$ verschwinden sollte, ergibt sich

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (g^{\gamma\delta} \partial_\gamma X^\mu \partial_\delta X_\mu) = 0. \quad (7.237b)$$

Auflösen nach $g_{\alpha\beta}$ ergibt

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (7.238)$$

womit gezeigt ist, dass die induzierte Metrik (die rechte Seite der Gleichung) mit $g_{\alpha\beta}$ übereinstimmt. Wir setzen (7.238) in (7.236) ein, um $g_{\alpha\beta}$ zu eliminieren, und erhalten wieder die Nambu-Wirkung:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{-\det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)}. \quad (7.239)$$

Aufgrund der Konstruktion ist die Wirkung S invariant unter einer lokalen Reparametrisierung von M : $\{\xi^\alpha\} \rightarrow \{\xi'^\alpha(\xi)\}$. Zusätzlich hat die Wirkung weitere Invarianzen. Unter der globalen **Poincaré-Transformation** in der D -dimensionalen Raumzeit,

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu \equiv \Lambda^\mu_\nu X^\nu + a^\mu, \quad (7.240)$$

transformiert sich die Wirkung S wie

$$\begin{aligned} S &\rightarrow -\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\Lambda^\mu_\kappa X^\kappa + a^\mu) \partial_\beta (\Lambda^\nu_\lambda X^\lambda + a^\nu) \eta_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\kappa \partial_\beta X^\lambda (\Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\lambda \eta_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Aus $\Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda \eta_{\mu\nu} = \eta_{\kappa\lambda}$ folgern wir, dass S invariant unter globalen Poincaré-Transformationen ist. Die Wirkung S ist ebenso invariant unter der **Weyl-Reskalierung** $g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \rightarrow e^{2\sigma(\tau, \sigma)} g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$, wobei (τ, σ) festgehalten wird. Tatsächlich transformiert sich S wie

$$S \rightarrow -\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{-e^{4\sigma}} g e^{-2\sigma} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

und bleibt daher invariant. Beachten Sie, dass die Invarianz gegenüber Weyl-Reskalierung nur dann existiert, wenn M zweidimensional ist, was Strings gegenüber anderen ausgedehnten Objekten wie etwa Membranen auszeichnet.

Da $\dim M = 2$ ist können wir die Weltfläche immer mit der isothermen Koordinate aus Beispiel 7.9 parametrisieren, sodass gilt:

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\sigma(\tau, \sigma)} \eta_{\alpha\beta}. \quad (7.241)$$

Die Invarianz gegenüber Weyl-Reskalierung erlaubt uns auch, die Standardmetrik $\eta_{\alpha\beta}$ auf der Weltfläche zu wählen. Die Metrik $g_{\alpha\beta}$ hat drei unabhängige Komponenten, während die Reparametrisierung zwei Freiheitsgrade hat und die Weyl-Skalierungsinvarianz nur einen. Somit können wir, solange wir es mit Strings zu tun haben, die Standardmetrik $\eta_{\alpha\beta}$ wählen.

Wir beenden unsere Diskussion von Polyakov-Strings an dieser Stelle. Wir werden sie in Kapitel 14 wieder treffen, wo wir sie auf sehr elegante Weise quantisieren werden.

Übung 7.29 Seien (M, g) und (N, h) Riemann'sche Mannigfaltigkeiten. Betrachten Sie eine Karte U von M , in der die Metrik g die Form

$$g = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu$$

nimmt. Betrachten Sie eine Karte V von N , auf der h die Form

$$h = h_{\alpha\beta}(\phi) d\phi^\alpha \otimes d\phi^\beta$$

hat. Eine Abbildung $\phi : M \rightarrow N$, definiert durch $x \mapsto \phi(x)$, wird **harmonische Abbildung** genannt, wenn sie die Bedingung

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu [\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi^\alpha] + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \partial_\mu \phi^\alpha \partial_\nu \phi^\beta g^{\mu\nu} = 0 \quad (7.242)$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass man diese Gleichung durch Variation der Wirkung

$$S \equiv \frac{1}{2} \int d^m x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^\alpha \partial_\nu \phi^\beta h_{\alpha\beta}(\phi) \quad (7.243)$$

nach ϕ erhält. Physikalische Anwendungen von harmonischen Abbildungen finden Sie bei Misner (1978) und Sánchez (1988). Einen Review der mathematischen Aspekte hiervon enthält Eells und Lemaire (1968).

Aufgaben

7.1 Sei ∇ ein allgemeiner Zusammenhang, für den der Torsionstensor nicht verschwindet. Zeigen Sie, dass die erste Bianchi-Identität zu

$$\mathfrak{S}\{R(X, Y)Z\} = \mathfrak{S}\{T(X, [Y, Z])\} + \mathfrak{S}\{\nabla_X[T(Y, Z)]\}$$

wird, wobei \mathfrak{S} der in Satz 7.2 definierte Symmetrisierer ist. Zeigen Sie auch, dass die zweite Bianchi-Identität durch

$$\mathfrak{S}\{(\nabla_X R)(Y, Z)\}V = \mathfrak{S}\{R(X, T(Y, Z))\}V$$

gegeben ist, wobei \mathfrak{S} nur X, Y und Z symmetrisiert.

7.2 Sei (M, g) eine konforme flache dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass der **Weyl-Schouten-Tensor**, definiert durch

$$C_{\lambda\mu\nu} \equiv \nabla_\nu Ric_{\lambda\mu} - \nabla_\mu Ric_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}(g_{\lambda\mu}\partial_\nu\mathcal{R} - g_{\lambda\nu}\partial_\mu\mathcal{R}),$$

verschwindet. Für $\dim M = 3$ ist bekannt, dass $C_{\lambda\mu\nu} = 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für konforme Flachheit ist.

7.3 Betrachten Sie eine Metrik

$$g = -dt \otimes dt + dr \otimes dr + (1 - 4\mu^2)r^2 d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz,$$

mit $0 < \mu < 1/2$ und $\mu \neq 1/4$. Führen Sie eine neue Variable

$$\tilde{\phi} \equiv (1 - 4\mu)\phi$$

ein und zeigen Sie, dass die Metrik g sich auf die Minkowski-Metrik reduziert. Bedeutet dies, dass g die Minkowski-Raumzeit beschreibt? Berechnen Sie den Riemann'schen Krümmungstensor und zeigen Sie, dass es eine stringartige Singularität bei $r = 0$ gibt. Diese Singularität ist *konisch* (die Raumzeit ist überall flach, außer entlang dieser Linie). Diese Metrik modelliert die Raumzeit eines kosmischen Strings.

8

Komplexe Mannigfaltigkeiten

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, welcher differenzierbare Strukturen zulässt. Hier führen wir nun mit der komplexen Struktur eine weitere Struktur ein, die ebenfalls für die Physik große Bedeutung hat. In der elementaren komplexen Analysis müssen die partiellen Ableitungen den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gehorchen. Es geht dabei nicht nur um die Differenzierbarkeit, sondern auch um die Analytizität einer Funktion. Eine komplexe Mannigfaltigkeit lässt eine komplexe Struktur zu, in der jede Koordinatenumgebung homöomorph zu \mathbb{C}^m ist und der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen analytisch ist.

Weitergehende Einzelheiten können Sie z. B. bei Chern (1979), Goldberg (1962) oder Greene (1987) nachschlagen. Kapitel 0 von Griffiths und Harris (1978) gibt einen kurzen und prägnanten Überblick über die hier angesprochenen Themen. Physische Anwendungen finden Sie bei Horowitz (1986) und Candelas (1988).

8.1 Komplexe Mannigfaltigkeiten

Zunächst einmal definieren wir eine holomorphe (oder analytische) Abbildung auf \mathbb{C}^m : Eine komplexwertige Funktion $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ ist **holomorph**, wenn $f = f_1 + i f_2$ den **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen** für jedes $z^\mu = x^\mu + i y^\mu$ genügt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f_2}{\partial y^\mu}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial f_1}{\partial y^\mu}. \quad (8.1)$$

Die Abbildung $(f^1, \dots, f^n) : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ heißt holomorph, wenn alle f^λ ($1 \leq \lambda \leq n$) holomorph sind.

8.1.1 Definitionen

Definition 8.1. M ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

- (i) M ist ein topologischer Raum.
- (ii) M ist mit einer Familie von Paaren $\{(U_i, \varphi_i)\}$ versehen.

(iii) $\{U_i\}$ ist eine Familie von offenen Mengen, welche M überdeckt. Die Abbildung φ_i ist ein Homöomorphismus von U_i in eine offene Teilmenge U von \mathbb{C}^m . (Aus diesem Grund ist M von gerader Dimension.)

(iv) Für gegebene U_i und U_j mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist die Abbildung $\psi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ von $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ nach $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ holomorph.

Die Zahl m wird die komplexe Dimension von M genannt, man schreibt dafür $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. Die reelle Dimension $2m$ schreibt man entweder $\dim_{\mathbb{R}} M$ oder einfach $\dim M$. Seien $z^\mu = \varphi_i(p)$ und $w^\nu = \varphi_j(p)$ die (komplexen) Koordinaten eines Punkts $p \in U_i \cap U_j$ in der Karte (U_i, φ_i) bzw. (U_j, φ_j) . Axiom (iv) stellt sicher, dass die Funktion $w^\nu = u^\nu + i v^\nu$ ($1 \leq \nu \leq m$) holomorph in $z^\mu = x^\mu + i y^\mu$ ist, also gilt:

$$\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial v^\nu}{\partial y^\mu}, \quad \frac{\partial u^\nu}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} \quad (1 \leq \mu, \nu \leq m).$$

Diese Axiome sorgen dafür, dass die Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten unabhängig von den speziellen gewählten Koordinaten betrieben werden kann. Beispielsweise ist der \mathbb{C}^m selbst die einfachste komplexe Mannigfaltigkeit. Eine einzige Karte überdeckt den gesamten Raum und φ ist die identische Abbildung.

Seien $\{(U_i, \varphi_i)\}$ und $\{(V_j, \psi_j)\}$ Atlanten von M . Wenn die Vereinigung von zwei Atlanten wieder ein Atlas ist, der die Axiome von Definition 8.1 erfüllt, dann sagt man, dass die beiden Atlanten dieselbe komplexe Struktur definieren. Eine komplexe Mannigfaltigkeit kann eine Reihe von komplexen Strukturen haben (siehe Beispiel 8.2).

8.1.2 Beispiele

Beispiel 8.1. In Übung 5.1 wurde gezeigt, dass für einen Punkt $P(x, y, z) \in S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\}$ die vom Nordpol aus projizierten stereografischen Koordinaten

$$(X, Y) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

sind, während die stereografischen Koordinaten eines Punkts $P(x, y, z) \in S^2 \setminus \{\text{Südpol}\}$ – vom Südpol aus projiziert –

$$(U, V) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{-y}{1+z} \right)$$

sind. (Achten Sie dabei auf die Orientierung von (U, V) in Abb. 5.5.) Lassen Sie uns nun komplexe Koordinaten definieren:

$$Z = X + iY, \quad \bar{Z} = X - iY \quad \text{und} \quad W = U + iV, \quad \bar{W} = U - iV.$$

W ist eine holomorphe Funktion von Z :

$$W = \frac{x - iy}{1+z} = \frac{1-z}{1+z}(X - iY) = \frac{X - iY}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{Z}.$$

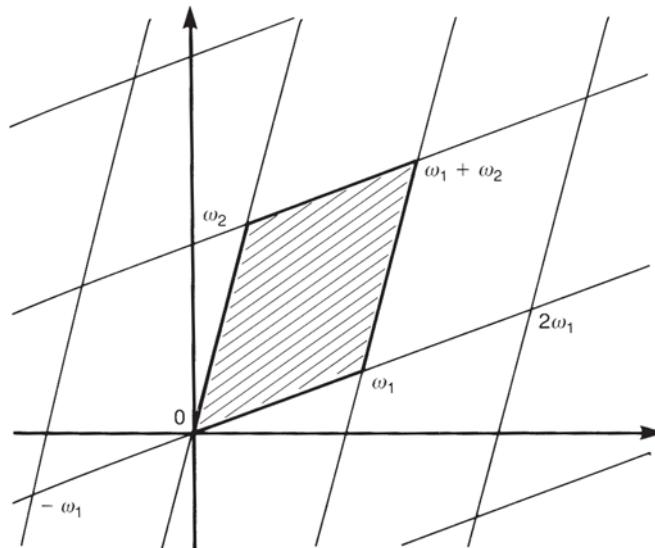


Abb. 8.1. Zwei komplexe Zahlen ω_1 und ω_2 definieren ein Gitter $L(\omega_1, \omega_2)$ in der komplexen Ebene. $\mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$ ist homöomorph zum Torus (schraffierte Fläche).

Damit ist die S^2 eine komplexe Mannigfaltigkeit, die man mit der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ identifizieren kann. ◇

Beispiel 8.2. Für die komplexe Ebene \mathbb{C} definieren wir ein Gitter¹ $L(\omega_1, \omega_2) \equiv \{\omega_1 m + \omega_2 n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, wobei ω_1 und ω_2 zwei nichtverschwindende komplexe Zahlen sind, sodass $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$ ist, siehe Abb. 8.1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ wählen. Die Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$ erhält man durch Identifizieren der Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, sodass $z_1 - z_2 = \omega_1 m + \omega_2 n$ für irgendwelche $m, n \in \mathbb{Z}$ ist. Da gegenüberliegende Seiten der schraffierten Fläche in Abb. 8.1 identifiziert werden, ist $\mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$ homöomorph zum Torus T^2 . Die komplexe Struktur von \mathbb{C} induziert auf natürliche Weise diejenige von $\mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$. Wir sagen dafür auch, das Paar (ω_1, ω_2) definiere eine komplexe Struktur auf dem T^2 . Es existieren viele Paare (ω_1, ω_2) , welche auf dieselbe komplexe Struktur auf dem T^2 führen.

Wann definieren zwei Paare (ω_1, ω_2) und (ω'_1, ω'_2) mit $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, $\text{Im}(\omega'_2/\omega'_1) > 0$ dieselbe komplexe Struktur? Wir erkennen zuerst, dass zwei Gitter

¹ engl. lattice

$L(\omega_1, \omega_2)$ und $L(\omega'_1, \omega'_2)$ dann und nur dann zusammenfallen, wenn eine Matrix²

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \equiv \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$$

existiert, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Diese Aussage wird wie folgt bewiesen. Wir betrachten

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Wegen $\omega'_1, \omega'_2 \in L(\omega_1, \omega_2)$ erhalten wir $L(\omega'_1, \omega'_2) \subset L(\omega_1, \omega_2)$. Aus

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}$$

erhalten wir auch $L(\omega_1, \omega_2) \subset L(\omega'_1, \omega'_2)$. Somit ist $L(\omega_1, \omega_2) = L(\omega'_1, \omega'_2)$. Umgekehrt sind, wenn $L(\omega_1, \omega_2) = L(\omega'_1, \omega'_2)$ ist, ω'_1 und ω'_2 Gitterpunkte von $L(\omega_1, \omega_2)$ und lassen sich in der Form $\omega'_1 = d\omega_1 + c\omega_2$ und $\omega'_2 = b\omega_1 + a\omega_2$ schreiben, mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ebenso können wir ω_1 und ω_2 als $\omega_1 = d'\omega'_1 + c'\omega'_2$ und $\omega_2 = b'\omega'_1 + a'\omega'_2$ ausdrücken, mit $a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

was auf

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

führt. Gleichsetzen der Determinanten auf beiden Seiten ergibt $(a'd' - b'c')(ad - bc) = 1$. Da alle Einträge ganze Zahlen sind, ist dies nur dann möglich, wenn $ad - bc = \pm 1$ ist. Wegen

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\omega'_2}{\omega'_1}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{b\omega_1 + a\omega_2}{d\omega_1 + c\omega_2}\right) = \frac{ad - bc}{|c(\omega_2/\omega_1) + d|^2} \mathrm{Im}\left(\frac{\omega'_2}{\omega'_1}\right) > 0$$

muss $ad - bc > 0$ sein, d. h.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Nun ist es offensichtlich, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

² Die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ wurde in Gleichung (2.4) definiert. In der Gruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ werden die beiden Matrizen A und $-A$ miteinander identifiziert.

dasselbe Gitter definiert wie

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

und wir müssen diejenigen Matrizen aus $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ miteinander identifizieren, die sich nur in ihrem Vorzeichen unterscheiden. Daher stimmen zwei Gitter überein, wenn zwischen ihnen die Beziehung $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ besteht.

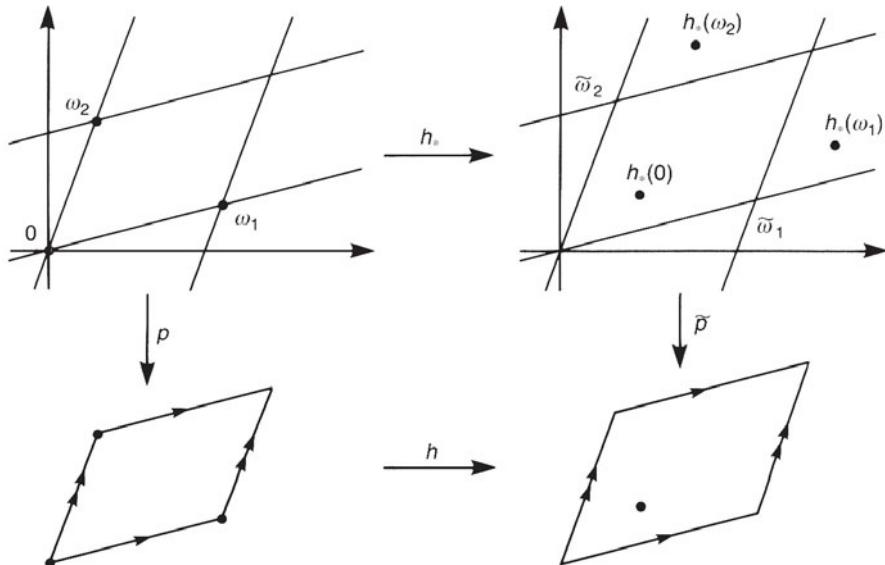


Abb. 8.2. Eine holomorphe Bijektion $h : \mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \mathbb{C}/L(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ und die natürlichen Projektionen $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$, $\tilde{p} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ definieren eine holomorphe Bijektion $h_* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Nehmen wir an, es gebe nur eine injektive holomorphe Abbildung h von $\mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$ nach $\mathbb{C}/L(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$, wobei $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ und $\mathrm{Im}(\tilde{\omega}_2/\tilde{\omega}_1) > 0$ ist. Seien $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$ und $\tilde{p} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ die natürlichen Projektionen. Beispielsweise bildet p einen Punkt in \mathbb{C} auf einen äquivalenten Punkt in $\mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$ ab. Wir wählen den Ursprung 0 und definieren den Punkt $h_*(0)$, sodass $\tilde{p} \circ h_*(0) = h \circ p(0)$ ist (Abb. 8.2):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{h_*} & \mathbb{C} \\ p \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ \mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2) & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}/L(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2). \end{array} \quad (8.3)$$

Dann gelangen wir durch analytische Fortsetzung vom Ursprung aus zu einer injektiven holomorphen Abbildung h_* von \mathbb{C} auf sich selbst, welche die Bedingung

$$\tilde{p} \circ h_*(z) = h \circ p(z) \quad (\text{für alle } z \in \mathbb{C}) \quad (8.4)$$

erfüllt, womit das Diagramm in (8.3) kommutiert. Es ist bekannt, dass eine injektive holomorphe Abbildung von \mathbb{C} auf sich selbst von der Form $z \rightarrow h_*(z) = az + b$ sein muss, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ ist. Dann gilt $h_*(\omega_1) - h_*(0) = a\omega_1$ und $h_*(\omega_2) - h_*(0) = a\omega_2$. Damit h als eine Abbildung von $\mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$ nach $\mathbb{C}/L(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ wohldefiniert ist, muss gelten: $a\omega_1, a\omega_2 \in L(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$, siehe Abb. 8.2. Indem wir die Rollen von (ω_1, ω_2) und (ω'_1, ω'_2) vertauschen, erhalten wir $\tilde{a}\tilde{\omega}_1, \tilde{a}\tilde{\omega}_2 \in L(\omega_1, \omega_2)$, mit einer komplexen Zahl $\tilde{a} \neq 0$. Daraus können wir schließen, dass, wenn $\mathbb{C}/L(\omega_1, \omega_2)$ und $\mathbb{C}/L(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ dieselbe komplexe Struktur haben, es eine Matrix $M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ und eine komplexe Zahl $\lambda (= \tilde{a}^{-1})$ geben muss, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} = \lambda M \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Umgekehrt können wir bestätigen, dass (ω_1, ω_2) und (ω'_1, ω'_2) dieselbe komplexe Struktur definieren, wenn sie wie in Gleichung (8.5) zusammenhängen. Tatsächlich definieren

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

dasselbe Gitter (modulo Translation) und wir können $h_* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ als $z \mapsto z + b$ wählen. $L(\omega_1, \omega_2)$ und $L(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)$ definieren ebenfalls diese komplexe Struktur. Wir setzen in diesem Fall $h_* : z \mapsto \lambda z + b$.

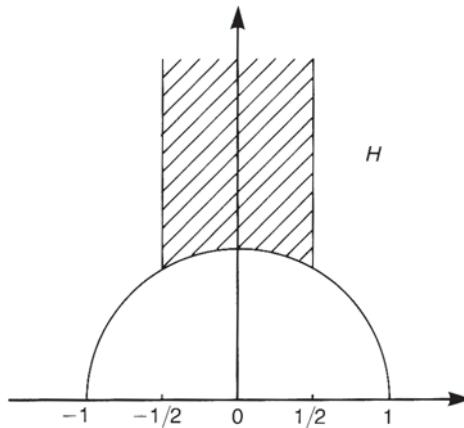
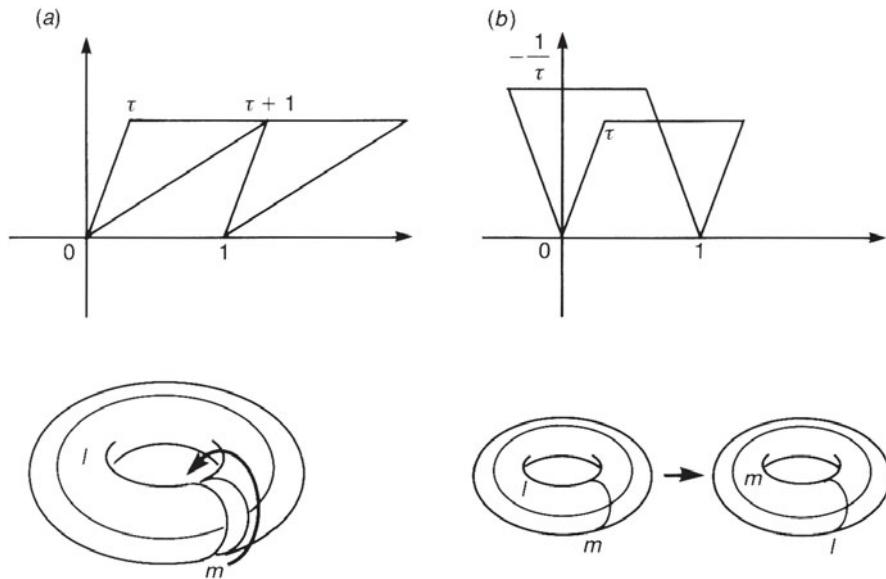
Wir haben jetzt gezeigt, dass die komplexe Struktur auf T^2 durch ein Paar von komplexen Zahlen (ω_1, ω_2) bis auf einen konstanten Faktor sowie eine Matrix aus $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ festgelegt wird. Um den konstanten Faktor loszuwerden, führen wir den modularen Parameter $\tau \equiv \omega_2/\omega_1 \in H \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ ein, um die komplexe Struktur des T^2 zu spezifizieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir 1 und τ als Erzeuger eines Gitters. Beachten Sie jedoch, dass nicht alle $\tau \in H$ unabhängige modulare Parameter sind. Wie oben gezeigt, definieren τ und $\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d)$ dieselbe komplexe Struktur, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}).$$

Der Quotientenraum $H/\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ ist in Abb. 8.3 skizziert, die Herleitung können Sie bei Koblitz (1984) auf S. 100 oder bei Gunning (1962) auf S. 4 nachlesen.

Der Übergang $\tau \rightarrow \tau'$ heißt **modulare Transformation** und wird durch $\tau \rightarrow \tau + 1$ und $\tau \rightarrow -1/\tau$ erzeugt. Die Transformation $\tau \rightarrow \tau + 1$ erzeugt einen **Dehn-Twist**³ entlang des Meridians m , vgl. Abb. 8.4(a): (i) Schneide einen Torus entlang m auf. (ii) Nimm die eine Schnittkante und rotiere sie um 2π , während die andere Kante fix bleibt. (iii) Leime die Kanten wieder zusammen. Die andere Transformation $\tau \rightarrow -1/\tau$ entspricht dem Vertauschen der Rollen von Breitengrad l (engl. „latitude“) und Meridian m , siehe Abb. 8.4(b). \diamond

³ „Dehn-Schraubung“, nach Max Dehn; der Begriff hat also nichts mit einer Dehnung o. Ä. zu tun (Anm. d. Ü.).

Abb. 8.3. Der Quotientenraum $H/\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$.Abb. 8.4. (a) Dehn-Twists erzeugen modulare Transformationen. (b) $\tau \rightarrow -1/\tau$ vertauscht die Rolle von Breitenkreis l und Meridian m .

Beispiel 8.3. Der **komplexe projektive Raum** $\mathbb{C}P^n$ ist ähnlich wie der $\mathbb{R}P^n$ definiert; siehe Beispiel 5.4. Das n -Tupel $z = (z^0, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ bestimmt eine komplexe Gerade durch den Ursprung, vorausgesetzt es ist $z \neq 0$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation mit $z \sim w$, wenn eine komplexe Zahl $a \neq 0$ existiert, sodass $w = az$ ist. Dann ist $\mathbb{C}P^n \equiv (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$. Die $n+1$ Zahlen z^0, z^1, \dots, z^n werden **homogene Koordinaten** genannt, geschrieben als $[z^0, z^1, \dots, z^n]$, wobei (z^0, \dots, z^n) mit $(\lambda z^0, \dots, \lambda z^n)$ identifi-

ziert wird ($\lambda \neq 0$). Eine Karte U_μ ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, sodass $z^\mu \neq 0$ ist. In einer Karte U_μ werden die **inhomogenen Koordinaten** durch $\xi_{(\mu)}^\nu = z^\nu/z^\mu$ ($\nu \neq \mu$) definiert. In der Schnittmenge $U_\mu \cap U_\nu \neq \emptyset$ lautet die Koordinatentransformation $\psi_{\mu\nu} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ wie folgt:

$$\xi_{(\nu)}^\lambda \mapsto \xi_{(\mu)}^\lambda = \frac{z^\nu}{z^\mu} \xi_{(\nu)}^\lambda. \quad (8.6)$$

Demzufolge ist $\psi_{\mu\nu}$ einfach eine Multiplikation mit z^ν/z^μ , was natürlich holomorph ist. \diamondsuit

Beispiel 8.4. Die **komplexen Graßmann-Mannigfaltigkeiten** $G_{k,n}(\mathbb{C})$ sind ähnlich definiert wie die reellen Graßmann-Mannigfaltigkeiten; siehe Beispiel 5.5. $G_{k,n}(\mathbb{C})$ ist die Menge der komplexen k -dimensionalen Unterräume von \mathbb{C}^n . Beachten Sie, dass $\mathbb{C}P^n = G_{1,n+1}(\mathbb{C})$ ist.

Es sei $M_{k,n}(\mathbb{C})$ die Menge der $(k \times n)$ -Matrizen mit Rang k ($k \leq n$). Wir setzen $A, B \in M_{k,n}(\mathbb{C})$ und definieren eine Äquivalenzrelation durch $A \sim B$, wenn ein $g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ existiert, sodass $B = gA$ ist. Wir identifizieren $G_{k,n}(\mathbb{C})$ mit $M_{k,n}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. Sei $\{A_1, \dots, A_l\}$ eine Kollektion aller $(k \times k)$ -Unterdeterminanten von $A \in M_{k,n}(\mathbb{C})$. Wir definieren die Karte U_α als eine Teilmenge von $G_{k,n}(\mathbb{C})$, sodass $\det A_\alpha \neq 0$ ist. Die $k(n-k)$ Koordinaten auf U_α sind durch die nichttrivialen Einträge der Matrix $A_\alpha^{-1}A$ definiert; siehe auch Beispiel 5.5. \diamondsuit

Beispiel 8.5. Die gemeinsamen Nullstellen einer Menge von homogenen Polynomen sind eine kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}P^n$ und werden als **algebraische Varietät** bezeichnet. Es sei z. B. $P(z^0, \dots, z^n)$ ein homogenes Polynom d -ten Grades. Wenn $a \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, genügt P der Gleichung

$$P(az^0, \dots, az^n) = a^d P(z^0, \dots, z^n).$$

Dies zeigt, dass die Nullstellen von P auf $\mathbb{C}P^n$ definiert sind: Wenn $P(z^0, \dots, z^n) = 0$ ist, dann ist $P([z^0, \dots, z^n]) = 0$. Der Deutlichkeit halber betrachten wir

$$P(z^0, z^1, z^2) = (z^0)^2 + (z^1)^2 + (z^2)^2$$

und definieren N als

$$N = \{[z^0, z^1, z^2] \in \mathbb{C}P^2 \mid P(z^0, z^1, z^2) = 0\}. \quad (8.7)$$

Wir definieren U_μ wie in Beispiel 8.3. In $N \cap U_0$ erhalten wir mit $\xi_{(0)}^\mu = z^\mu/z^0$ ($z^0 \neq 0$):

$$[\xi_{(0)}^1]^2 + [\xi_{(0)}^2]^2 + 1 = 0.$$

Sei $(\xi_{(0)}^1, \xi_{(0)}^2) \mapsto (\eta^1 = \xi_{(0)}^1, \eta^2 = [\xi_{(0)}^1]^2 + [\xi_{(0)}^2]^2 + 1)$ ein holomorpher Koordinatenwechsel. Beachten Sie: $\partial(\eta^1, \eta^2)/\partial(\xi_{(0)}^1, \xi_{(0)}^2) \neq 0$, wenn nicht $\xi_{(0)}^2 = z^2 = 0$ ist. Dann ist

offensichtlich $N \cap U_0 \cap U_2 = \{(\eta^1, \eta^2) \in \mathbb{C}^2 | \eta^2 = 0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^2 . Aus $\xi_{(0)}^2 = z^2 = 0$ folgt $(\xi_{(0)}^1, \xi_{(0)}^2) \mapsto (\zeta^1 = [\xi_{(0)}^1]^2 + [\xi_{(0)}^2]^2 + 1, \zeta^2 = \xi_{(0)}^2)$, deren Jacobi-Determinante nur für $\xi_{(0)}^1 = z^1 = 0$ verschwindet. Dann ist die Menge $N \cap U_0 \cap U_1 = \{(\zeta^1, \zeta^2) \in \mathbb{C}^2 | \zeta^1 = 0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^2 . Auf $N \cap U_0 \cap U_1 \cap U_2$ ist der Koordinatenwechsel $\eta^1 \mapsto \zeta^2$ eine Multiplikation mit z^2/z^1 , also holomorph. Dies definiert eine eindimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit N des \mathbb{CP}^2 . \diamond

Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Beispielsweise lässt sich \mathbb{C}^m als der \mathbb{R}^{2m} ansehen, wenn man $z^\mu = x^\mu + iy^\mu$ setzt ($x^\mu, y^\mu \in \mathbb{R}$). Ähnlich hat jede Karte U einer komplexen Mannigfaltigkeit Koordinaten (z^1, \dots, z^m) , die sich als reelle Koordinaten $(x^1, y^1, \dots, x^m, y^m)$ verstehen lassen. Die Analytizität der Koordinatentransformationsfunktionen garantiert, dass diese differenzierbar sind, wenn man die Mannigfaltigkeit als eine $2m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit interpretiert.

8.2 Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten

8.2.1 Holomorphe Abbildungen

Seien M, N komplexe Mannigfaltigkeiten, $f : M \rightarrow N$ sowie $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ und $\dim_{\mathbb{C}} N = n$. Wir betrachten einen Punkt p in einer Karte (U, φ) von M . Sei (V, ψ) eine Karte von N , mit $f(p) \in V$. Wenn wir $\{z^\mu\} = \varphi(p)$ und $\{w^\nu\} = \psi(f(p))$ schreiben, haben wir eine Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$. Ist jede Funktion w^ν ($1 \leq \nu \leq n$) eine holomorphe Funktion von z^μ , so ist f eine **holomorphe Abbildung**. Diese Definition ist unabhängig von den speziellen gewählten Koordinaten. Es sei nämlich (U', φ') eine andere Karte mit $U \cap U' \neq \emptyset$ und den Koordinaten $z'^\lambda = x'^\lambda + iy'^\lambda$. Wir wählen einen Punkt $p \in U \cap U'$. Wenn $w^\nu = u^\nu + iv^\nu$ eine holomorphe Funktion bezüglich z ist, dann gilt

$$\frac{\partial u^\nu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial u^\nu}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial v^\nu}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial y'^\lambda} + \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y'^\lambda} = \frac{\partial v^\nu}{\partial y'^\lambda}.$$

Entsprechend erhalten wir $\partial u^\nu / \partial y'^\lambda = -\partial v^\nu / \partial x'^\lambda$. Somit ist w^ν auch bezüglich z' holomorph. Ebenso lässt sich zeigen, dass die Eigenschaft der Holomorphie unabhängig von der Karte in N ist.

Seien M und N komplexe Mannigfaltigkeiten. Wir sagen, M sei **biholomorph** zu N , wenn ein Diffeomorphismus $f : M \rightarrow N$ existiert, der ebenfalls holomorph ist ($f^{-1} : N \rightarrow M$ ist dann automatisch holomorph). Die Abbildung f wird in diesem Fall ein **Biholomorphismus** genannt.

Eine **holomorphe Funktion** ist eine holomorphe Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{C}$. Es gibt einen bemerkenswerten Satz über holomorphe Funktionen: Jede holomorphe Funk-

tion auf einer *kompakten* komplexen Mannigfaltigkeit ist *konstant*. Dies ist eine Verallgemeinerung des Maximumsprinzips der elementaren komplexen Analysis, siehe Wells (1980). Die Menge der holomorphen Funktionen auf M wird mit $\mathcal{O}(M)$ bezeichnet, $\mathcal{O}(U)$ ist die Menge der holomorphen Funktionen auf $U \subset M$.

8.2.2 Komplexifizierungen

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{R}} M = m$. Wenn $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ gemäß $f = g + ih$ zerlegt wird, mit $g, h \in \mathcal{F}(M)$, dann ist f eine komplexwertige glatte Funktion. Die Menge der komplexwertigen glatten Funktionen auf M heißt **Komplexifizierung** von $\mathcal{F}(M)$, geschrieben als $\mathcal{F}(M)^{\mathbb{C}}$. Eine komplexifizierte Funktion gehorcht im Allgemeinen nicht den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Für $f = g + ih \in \mathcal{F}(M)^{\mathbb{C}}$ ist die komplex Konjugierte von f die Funktion $\bar{f} \equiv g - ih$. f ist dann und nur dann reell, wenn $f = \bar{f}$ ist.

Bevor wir $T_p M$ komplexifizieren, definieren wir die Komplexifizierung $V^{\mathbb{C}}$ eines allgemeinen Vektorraums V mit $\dim_{\mathbb{R}} V = m$. Ein Element von $V^{\mathbb{C}}$ hat die Form $X + iY$, mit $X, Y \in V$. Der Vektorraum $V^{\mathbb{C}}$ wird ein komplexer Vektorraum der komplexen Dimension m , wenn Vektoraddition und Skalarmultiplikation mit einer komplexen Zahl $a + ib$ wie folgt definiert werden:

$$(X_1 + iY_1) + (X_2 + iY_2) = (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2), \\ (a + ib)(X + iY) = (aX - bY) + i(bX + aY).$$

V ist ein Untervektorraum von $V^{\mathbb{C}}$, da $X \in V$ und $X + i0 \in V^{\mathbb{C}}$ miteinander identifiziert werden können. Vektoren in V nennt man **reelle Vektoren**. Der komplexe konjugierte Vektor von $Z = X + iY$ ist $\bar{Z} = X - iY$. Ein Vektor Z ist reell, wenn $Z = \bar{Z}$ ist.

Ein linearer Operator A auf V wird *fortgesetzt*, sodass er auf $V^{\mathbb{C}}$ wirkt, gemäß

$$A(X + iY) = A(X) + iA(Y). \quad (8.8)$$

Wenn $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Funktion ist ($A \in V^*$), ist ihre Fortsetzung eine komplexwertige lineare Funktion auf $V^{\mathbb{C}}$, also $A : V^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$. Im Allgemeinen lässt sich jeder auf V und V^* definierte Tensor fortsetzen, sodass er auf $V^{\mathbb{C}}$ und $(V^*)^{\mathbb{C}}$ definiert ist. Ein fortgesetzter Tensor wird komplexifiziert gemäß $t = t_1 + it_2$, wobei t_1 und t_2 Tensoren vom selben Typ sind. Der komplexe konjugierte Tensor von t ist $\bar{t} \equiv t_1 - it_2$. Ein reeller Tensor hat $t = \bar{t}$, und $A : V^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ist reell, wenn $\overline{A(X + iY)} = A(X - iY)$ ist.

Sei $\{e_k\}$ eine Basis von V . Fassen wir diese Basisvektoren als komplexe Vektoren auf, wird dieselbe Basis $\{e_k\}$ zur Basis von $V^{\mathbb{C}}$. Um dies zu sehen, betrachten wir $X = X^k e_k$, $Y = Y^k e_k \in V$. Dann wird $Z = X + iY$ eindeutig als $(X^k + iY^k)e_k$ ausgedrückt, und wir erhalten $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$.

Jetzt sind wir bereit, den Tangentialraum $T_p M$ zu komplexifizieren. Wenn V durch $T_p M$ ersetzt wird, ergibt sich die Komplexifizierung $T_p M^{\mathbb{C}}$ von $T_p M$, deren Elemente als $Z = X + iY$ ($X, Y \in T_p M$) ausgedrückt werden. Der Vektor Z wirkt auf eine Funktion $f = f_1 + if_2 \in \mathcal{F}(M)^{\mathbb{C}}$ gemäß

$$Z[f] = X[f_1 + if_2] + iY[f_1 + if_2] = X[f_1] - Y[f_2] + i\{X[f_2] + Y[f_1]\}. \quad (8.9)$$

Der duale Vektorraum T_p^*M wird komplexifiziert, wenn $\omega, \eta \in T_p^*M$ zu $\zeta = \omega + i\eta$ kombiniert werden. Die Menge der komplexifizierten dualen Vektoren bezeichnet man als $(T_p^*M)^\mathbb{C}$. Ein Tensor t wird fortgesetzt, indem man ihn auf $T_pM^\mathbb{C}$ und $(T_p^*M)^\mathbb{C}$ definiert und dann komplexifiziert.

Übung 8.1 Zeigen Sie, dass $(T_p^*M)^\mathbb{C} = (T_pM^\mathbb{C})^*$ ist. (Ab jetzt schreiben wir für den komplexifizierten dualen Vektorraum einfach nur $T_p^*M^\mathbb{C}$.)

Für zwei gegebene glatte Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ definieren wir ein komplexes Vektorfeld $Z = X + iY$. Offensichtlich ist $Z|_p \in T_pM^\mathbb{C}$. Die Menge der komplexen Vektorfelder ist die Komplexifizierung von $\mathcal{X}(M)$ und wird als $\mathcal{X}(M)^\mathbb{C}$ bezeichnet. Das konjugierte Vektorfeld von $Z = X + iY$ ist $\bar{Z} = X - iY$. Es ist $Z = \bar{Z}$, wenn $Z \in \mathcal{X}(M)$ und daher $\mathcal{X}(M)^\mathbb{C} \supset \mathcal{X}(M)$ ist. Die Lie-Klammer von $Z = X + iY \in \mathcal{X}(M)^\mathbb{C}$ und $W = U + iV \in \mathcal{X}(M)^\mathbb{C}$ ist

$$[X + iY, U + iV] = \{[X, U] - [Y, V]\} + i\{[X, V] + [Y, U]\}. \quad (8.10)$$

Es liegt auf der Hand, wie ein Tensorfeld vom Typ (p, q) komplexifiziert wird: Ist $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$, dann ist $\xi \equiv \omega + i\eta \in \Omega^1(M)^\mathbb{C}$ eine komplexifizierte 1-Form.

8.2.3 Fastkomplexe Struktur

Da eine komplexe Mannigfaltigkeit auch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, können wir auf die in Kapitel 5 entwickelten Ergebnisse aufbauen. Nun schränken wir diese Resultate in geeigneter Weise ein. Sehen wir uns den Tangentialraum einer komplexen Mannigfaltigkeit M mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ an. Der Tangentialraum T_pM wird durch $2m$ Vektoren aufgespannt:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}; \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \right\}. \quad (8.11)$$

Die $z^\mu = x^\mu + iy^\mu$ sind die Koordinaten von p in einer Karte (U, φ) . Dieselben Koordinaten spannen

$$\{dx^1, \dots, dx^m; dy^1, \dots, dy^m\} \quad (8.12)$$

den Raum T_p^*M auf. Lassen Sie uns die $2m$ Vektoren

$$\frac{\partial}{\partial z^\mu} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right\}, \quad (8.13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right\} \quad (8.13b)$$

definieren, mit $1 \leq \mu \leq m$. Logischerweise bilden sie eine Basis des $2m$ -dimensionalen (komplexen) Vektorraums $T_pM^\mathbb{C}$. Beachten Sie, dass $\partial/\partial \bar{z}^\mu = \partial/\partial z^\mu$ ist. Analog bilden die $2m$ 1-Formen

$$dz^\mu \equiv dx^\mu + i dy^\mu, \quad d\bar{z}^\mu \equiv dx^\mu - i dy^\mu \quad (8.14)$$

die Basis von $T_p^*M^\mathbb{C}$. Sie sind dual zu (8.13):

$$\langle dz^\mu, \partial/\partial \bar{z}^\nu \rangle = \langle d\bar{z}^\mu, \partial/\partial z^\nu \rangle = 0, \quad (8.15a)$$

$$\langle dz^\mu, \partial/\partial z^\nu \rangle = \langle d\bar{z}^\mu, \partial/\partial \bar{z}^\nu \rangle = \delta^\mu_\nu. \quad (8.15b)$$

Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Wir definieren eine lineare Abbildung $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$:

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \quad J_p \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (8.16)$$

J_p ist ein *reeller* Tensor vom Typ $(1, 1)$. Beachten Sie, dass gilt:

$$J_p^2 = -\text{id}_{T_p M}. \quad (8.17)$$

Grob gesagt ist J_p eine Multiplikation mit $\pm i$ und wirkt unabhängig von der Karte: Seien (U, φ) und (V, ψ) sich überlappende Karten mit $\varphi(p) = z^\mu = x^\mu + iy^\mu$ und $\psi(p) = w^\mu = u^\mu + iv^\mu$. Auf $U \cap V$ erfüllen die Funktionen $z^\mu = z^\mu(w)$ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen:

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial u^\mu} \right) = J_p \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial u^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial y^\nu}{\partial u^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) = \frac{\partial y^\nu}{\partial v^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} + \frac{\partial x^\nu}{\partial v^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial v^\mu}.$$

Ebenso ergibt sich $J_p \partial/\partial v^\mu = -\partial/\partial u^\mu$. Dementsprechend nimmt J_p in der Basis (8.11) die Form

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

an, wobei I_m die $(m \times m)$ -Einheitsmatrix ist. Da alle Komponenten von J_p an jedem Punkt konstant sind, können wir ein glattes Tensorfeld J definieren, dessen Komponenten bei p durch (8.18) gegeben sind. Das Tensorfeld J wird **fastkomplexe Struktur** der komplexen Mannigfaltigkeit M genannt. Beachten Sie, dass jede $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit *lokal* ein Tensorfeld J zulässt, welches quadriert $-I_{2m}$ ergibt. J kann jedoch über mehrere Karten verteilt und *global* nur auf einer komplexen Mannigfaltigkeit definiert sein. Der Tensor J charakterisiert die komplexe Struktur vollständig. Die fastkomplexe Struktur J_p lässt sich erweitern, sodass sie auf $T_p M^\mathbb{C}$ definiert ist:

$$J_p(X + iY) \equiv J_p X + iJ_p Y. \quad (8.19)$$

Aus (8.16) folgt

$$J_p \partial/\partial z^\mu = i\partial/\partial z^\mu, \quad J_p \partial/\partial \bar{z}^\mu = -i\partial/\partial \bar{z}^\mu. \quad (8.20)$$

Damit haben wir einen Ausdruck für J_p in (anti-)holomorphen Basen:

$$J_p = i dz^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial z^\mu} - i d\bar{z}^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \quad (8.21)$$

die Komponenten sind durch

$$J_p = \begin{pmatrix} iI_m & 0 \\ 0 & -iI_m \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

gegeben. Sei $Z \in T_p M^{\mathbb{C}}$ ein Vektor der Form $Z = Z^\mu \partial/\partial z^\mu$. Dann ist Z ein Eigenvektor von J_p : $J_p Z = iZ$. Ähnlich genügt $Z = Z^\mu \partial/\partial \bar{z}^\mu$ der Bedingung $J_p Z = -iZ$. Auf diese Weise separiert man den Tangentialraum $T_p M^{\mathbb{C}}$ einer komplexen Mannigfaltigkeit in zwei *disjunkte* Vektorräume:

$$T_p M^{\mathbb{C}} = T_p M^+ \oplus T_p M^-, \quad (8.23)$$

mit

$$T_p M^\pm = \{Z \in T_p M^{\mathbb{C}} | J_p Z = \pm iZ\}. \quad (8.24)$$

Wir definieren die Projektionsoperatoren $\mathcal{P}^\pm : T_p M^{\mathbb{C}} \rightarrow T_p M^\pm$ durch

$$\mathcal{P}^\pm \equiv \frac{1}{2}(I_{2m} \mp iJ_p). \quad (8.25)$$

Tatsächlich ist $J_p \mathcal{P}^\pm Z = \frac{1}{2}(J_p \mp iJ_p^2)Z = \pm i\mathcal{P}^\pm Z$ für beliebige $Z \in T_p M^{\mathbb{C}}$. Daher ist

$$Z^\pm \equiv \mathcal{P}^\pm Z \in T_p M^\pm. \quad (8.26)$$

Nun lässt sich $Z \in T_p M^{\mathbb{C}}$ eindeutig in $Z = Z^+ + Z^-$ ($Z^\pm \in T_p M^\pm$) zerlegen. $T_p M^+$ wird durch $\{\partial/\partial z^\mu\}$ aufgespannt und $T_p M^-$ durch $\{\partial/\partial \bar{z}^\mu\}$. Ein Vektor $Z \in T_p M^+$ heißt **holomorpher Vektor**, $Z \in T_p M^-$ entsprechend **antiholomorph**. Wir bestätigen sofort, dass gilt:

$$T_p M^- = \overline{T_p M^+} = \{\bar{Z} | Z \in T_p M^+\}. \quad (8.27)$$

Beachten Sie, dass $\dim_{\mathbb{C}} T_p M^+ = \dim_{\mathbb{C}} T_p M^- = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} T_p M^{\mathbb{C}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} M$ ist.

Übung 8.2 Seien (U, φ) und (V, ψ) einander überlappende Karten auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M sowie $z^\mu = \varphi(p)$ und $w^\mu = \psi(p)$. Bestätigen Sie, dass $X = X^\mu \partial/\partial z^\mu$ in den Koordinaten w^μ nur eine holomorphe Basis $\{\partial/\partial w^\mu\}$ enthält. Damit ist die Separation von $T_p M^{\mathbb{C}}$ in $T_p M^\pm$ unabhängig von Karten (beachten Sie, dass J unabhängig von Karten definiert wurde).

Zu einem gegebenen komplexifizierten Vektorfeld $Z \in \mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}}$ erhalten wir ein neues Vektorfeld $JZ \in \mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}}$, das an jedem Punkt von M durch $JZ|_p = J_p \cdot Z|_p$ definiert ist. Das Vektorfeld Z wird auf natürliche Weise separiert gemäß

$$Z = Z^+ + Z^- \quad (Z^\pm = \mathcal{P}^\pm Z), \quad (8.28)$$

mit $Z^\pm = \mathcal{P}^\pm Z$. Das Vektorfeld Z^+ (Z^-) wird **holomorphes (antiholomorphes) Vektorfeld** genannt. Dementsprechend wird, wenn J erst einmal gegeben ist, $\mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}}$ eindeutig in

$$\mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}} = \mathcal{X}(M)^+ \oplus \mathcal{X}(M)^- \quad (8.29)$$

zerlegt. $Z = Z^+ + Z^- \in \mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}}$ ist dann und nur dann reell, wenn $Z^+ = \overline{Z^-}$ ist.

Übung 8.3 Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)^+$. Zeigen Sie, dass $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)^+$ ist. (Wenn $X, Y \in \mathcal{X}(M)^-$ ist, dann ist $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)^-$.)

8.3 Komplexe Differentialformen

Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit definieren wir komplexe Differentialformen, mit deren Hilfe wir topologische Eigenschaften wie Kohomologiegruppen diskutieren wollen.

8.3.1 Komplexifizierung von reellen Differentialformen

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ($\dim_{\mathbb{R}} M = m$). Für zwei q -Formen $\omega, \eta \in \Omega_p^q(M)$ bei p definieren wir eine **komplexe q -Form** $\zeta = \omega + i\eta$. Wir bezeichnen den Vektorraum der komplexen q -Formen bei p mit $\Omega_p^q(M)^{\mathbb{C}}$. Natürlich ist $\Omega_p^q(M) \subset \Omega_p^q(M)^{\mathbb{C}}$. Die Konjugierte von ζ ist $\bar{\zeta} = \omega - i\eta$. Eine komplexe q -Form ζ ist reell, wenn $\zeta = \bar{\zeta}$ ist.

Übung 8.4 Sei $\omega \in \Omega_p^q(M)^{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie:

$$\overline{\omega}(V_1, \dots, V_q) = \overline{\omega(\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_q)} \quad (V_i \in T_p M^{\mathbb{C}}). \quad (8.30)$$

Zeigen Sie auch: $\overline{\omega + \eta} = \overline{\omega} + \bar{\eta}$, $\overline{\lambda\omega} = \bar{\lambda}\overline{\omega}$ und $\overline{\bar{\omega}} = \omega$, mit $\omega, \eta \in \Omega_p^q(M)^{\mathbb{C}}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

Eine komplexe, auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M definierte q -Form α ist eine glatte Zuordnung eines Elements aus $\Omega_p^q(M)^{\mathbb{C}}$. Die Menge der komplexen q -Formen bezeichnet man als $\Omega^q(M)^{\mathbb{C}}$. Die Zerlegung einer komplexen q -Form ζ in $\zeta = \omega + i\eta$ mit $\omega, \eta \in \Omega^q(M)$ ist eindeutig.

Das äußere Produkt von $\zeta = \omega + i\eta$ und $\xi = \varphi + i\psi$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \zeta \wedge \xi &= (\omega + i\eta) \wedge (\varphi + i\psi) \\ &= (\omega \wedge \varphi - \eta \wedge \psi) + i(\omega \wedge \psi + \eta \wedge \varphi). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Die äußere Ableitung d wirkt auf $\zeta = \omega + i\eta$ gemäß

$$d\zeta = d\omega + i d\eta. \quad (8.32)$$

d ist ein reeller Operator: $\overline{d\zeta} = d\omega - i d\eta = d\bar{\zeta}$.

Übung 8.5 Seien $\omega \in \Omega^q(M)^{\mathbb{C}}$ und $\xi \in \Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\omega \wedge \xi = (-1)^{qr} \xi \wedge \omega, \quad (8.33)$$

$$d(\omega \wedge \xi) = d\omega \wedge \xi + (-1)^q \omega \wedge d\xi. \quad (8.34)$$

8.3.2 Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten

Ab jetzt wollen wir uns auf komplexe Mannigfaltigkeiten beschränken, in denen die Zerlegungen $T_p M^{\mathbb{C}} = T_p M^+ \oplus T_p M^-$ und $\mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}} = \mathcal{X}(M)^+ \oplus \mathcal{X}(M)^-$ vorliegen.

Definition 8.2. Es seien M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$, $\omega \in \Omega_p^q(M)^{\mathbb{C}}$ ($q \leq 2m$) und r, s positive ganze Zahlen mit $r + s = q$. Die $V_i \in T_p M^{\mathbb{C}}$ ($1 \leq i \leq q$) seien Vektoren entweder in $T_p M^+$ oder in $T_p M^-$. Wenn $\omega(V_1, \dots, V_q) = 0$ ist, sofern nicht r der V_i in $T_p M^+$ liegen und s der V_i in $T_p M^-$, sagt man, ω sei vom **Bigrad** (r, s) oder einfacher: eine (r, s) -Form. Die Menge der (r, s) -Formen bei p wird als $\Omega_p^{r,s}(M)$ bezeichnet. Wenn eine (r, s) -Form jedem Punkt von M glatt zugewiesen wird, liegt eine über ganz M definierte (r, s) -Form vor. Die Menge der (r, s) -Formen über M bezeichnen wir als $\Omega^{r,s}(M)$.

Wir betrachten eine Karte (U, φ) mit den komplexen Koordinaten $\varphi(p) = z^\mu$. Für die Tangentialräume $T_p M^{\pm}$ wählen wir die Basen aus (8.13); die dualen Basen sind durch (8.14) gegeben. Beachten Sie, dass dz^μ vom Bigrad $(1, 0)$ ist, wegen $\langle dz^\mu, \partial/\partial \bar{z}^\nu \rangle = 0$, und dass $d\bar{z}^\mu$ entsprechend vom Bigrad $(0, 1)$ ist. In diesen Basen schreibt sich eine Form ω vom Bigrad (r, s) als

$$\omega = \frac{1}{r! s!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r \nu_1 \dots \nu_s} dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_s}. \quad (8.35)$$

Die Menge $\{dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_s}\}$ ist die Basis von $\Omega_p^{r,s}(M)$. Die Komponenten sind jeweils separat total antisymmetrisch in den μ und ν . Seien z^μ und w^μ zwei überlappende Koordinaten. Überzeugen Sie sich davon, dass eine (r, s) -Form im z^μ -Koordinatensystem auch im w^ν -System eine (r, s) -Form ist.

Behauptung 8.1. Seien M eine komplexe Mannigfaltigkeit ($\dim_{\mathbb{C}} M = m$) und ω, ξ komplexe Differentialformen auf M .

- (a) Wenn $\omega \in \Omega^{q,r}(M)$ ist, dann ist $\bar{\omega} \in \Omega^{r,q}(M)$.
- (b) Wenn $\omega \in \Omega^{q,r}(M)$ und $\xi \in \Omega^{q',r'}(M)$ ist, dann ist $\omega \wedge \xi \in \Omega^{q+q',r+r'}(M)$.
- (c) Eine komplexe q -Form ω lässt sich eindeutig als

$$\omega = \sum_{r+s=q} \omega^{(r,s)} \quad (8.36a)$$

schreiben, mit $\omega^{(r,s)} \in \Omega^{r,s}(M)$. Damit ergibt sich die Zerlegung

$$\Omega^q(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=q} \Omega^{r,s}(M). \quad (8.36b)$$

Der Beweis ist einfach und sei Ihnen überlassen. Jetzt können wir jede q -Form ω zerlegen gemäß

$$\omega = \sum_{r+s=q} \omega^{(r,s)} = \sum_{r+s=q} \frac{1}{r! s!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_s}, \quad (8.37)$$

mit

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial z^{\mu_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{\mu_r}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\nu_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\nu_s}} \right). \quad (8.38)$$

Übung 8.6 Sei $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. Überprüfen Sie, dass gilt:

$$\dim_{\mathbb{R}} \Omega_p^{r,s}(M) = \begin{cases} \binom{m}{r} \binom{m}{s}, & \text{wenn } 0 \leq r, s \leq m \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie auch: $\dim_{\mathbb{R}} \Omega_p^q(M)^{\mathbb{C}} = \sum_{r+s=q} \dim_{\mathbb{R}} \Omega_p^{r,s}(M) = \binom{2m}{q}$.

8.3.3 Dolbeault-Operatoren

Lassen Sie uns die äußere Ableitung einer (r, s) -Form ω berechnen. Aus (8.35) erhalten wir

$$\begin{aligned} d\omega = & \frac{1}{r!s!} \left(\frac{\partial}{\partial z^\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} dz^\lambda + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} d\bar{z}^\lambda \right) \\ & \cdot dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_s}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

$d\omega$ ist eine Mischung aus einer $(r+1, s)$ -Form und einer $(r, s+1)$ -Form. Wir separieren die Wirkung von d nach den Zielertern:

$$d = \partial + \bar{\partial}, \quad (8.40)$$

wobei $\partial : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{r+1,s}(M)$ und $\bar{\partial} : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{r,s+1}(M)$ ist. Wenn z. B. $\omega = \omega_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu$ ist, sind die äußeren Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial\omega &= \frac{\partial \omega_{\mu\bar{\nu}}}{\partial z^\lambda} dz^\lambda \wedge dz^{\mu\bar{\nu}} \wedge d\bar{z}^\nu, \\ \bar{\partial}\omega &= \frac{\partial \omega_{\mu\bar{\nu}}}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda \wedge dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu = -\frac{\partial \omega_{\mu\bar{\nu}}}{\partial \bar{z}^\lambda} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\lambda \wedge d\bar{z}^\nu. \end{aligned}$$

Die Operatoren ∂ und $\bar{\partial}$ werden **Dolbeault-Operatoren** genannt.

Die Wirkung von ∂ und $\bar{\partial}$ auf eine allgemeine q -Form ω , wie sie in (8.37) gegeben ist, ist

$$\partial\omega = \sum_{r+s=q} \partial\omega^{(r,s)} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\partial}\omega = \sum_{r+s=q} \bar{\partial}\omega^{(r,s)}. \quad (8.41)$$

Satz 8.1. Seien M eine komplexe Mannigfaltigkeit sowie $\omega \in \Omega^q(M)^{\mathbb{C}}$ und $\xi \in \Omega^p(M)^{\mathbb{C}}$. Dann gelten

$$\partial\bar{\partial}\omega = (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\omega = \bar{\partial}\partial\omega = 0, \quad (8.42a)$$

$$\partial\bar{\omega} = \overline{\bar{\partial}\omega}, \quad \bar{\partial}\bar{\omega} = \overline{\partial\omega}, \quad (8.42b)$$

$$\partial(\omega \wedge \xi) = \partial\omega \wedge \xi + (-1)^q \omega \wedge \partial\xi, \quad (8.42c)$$

$$\bar{\partial}(\omega \wedge \xi) = \bar{\partial}\omega \wedge \xi + (-1)^q \omega \wedge \bar{\partial}\xi. \quad (8.42d)$$

Beweis

Es genügt, diese Aussagen zu beweisen, wenn ω vom Bigrad (r, s) ist.

(a) Wegen $d = \partial + \bar{\partial}$ gilt

$$0 = d^2\omega = (\partial + \bar{\partial})(\partial + \bar{\partial})\omega = \partial\partial\omega + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\omega + \bar{\partial}\bar{\partial}\omega.$$

Die drei Terme auf der rechten Seite sind vom Bigrad $(r+2, s)$, $(r+1, s+1)$ bzw. $(r, s+2)$. Aus Behauptung 8.1(c) folgt, dass jeder Term separat verschwinden muss.

(b) Wegen $d\bar{\omega} = \overline{d\omega}$ gilt

$$\partial\bar{\omega} + \bar{\partial}\bar{\omega} = d\bar{\omega} = \overline{(\partial + \bar{\partial})\omega} = \overline{\partial\omega} + \overline{\bar{\partial}\omega}.$$

Wenn wir beachten, dass $\partial\omega$ und $\overline{\partial\omega}$ vom Bigrad $(s+1, r)$ sowie $\bar{\partial}\bar{\omega}$ und $\overline{\bar{\partial}\bar{\omega}}$ vom Bigrad $(s, r+1)$ sind, können wir schließen, dass $\partial\bar{\omega} = \overline{\partial\omega}$ und $\bar{\partial}\bar{\omega} = \overline{\bar{\partial}\omega}$ ist.

(c) Wir nehmen an, ω sei vom Bigrad (r, s) und ξ vom Bigrad (r', s') . Gleichung (8.42c) wird bewiesen durch Separieren von $d(\omega \wedge \xi) = d\omega \wedge \xi + (-1)^q \omega \wedge d\xi$ in Formen von Bigraden $(r+r'+1, s+s')$ und $(r+r', s+s'+1)$ (für Gleichung (8.42d) analog). \square

Definition 8.3. Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Wenn für $\omega \in \Omega^{r,0}(M)$ die Beziehung $\bar{\partial}\omega = 0$ gilt, heißt die r -Form ω **holomorphe r -Form**.

Sehen wir uns eine holomorphe 0-Form $f \in \mathcal{F}(U)^\mathbb{C}$ auf einer Karte (U, φ) an. Die Bedingung $\bar{\partial}f = 0$ wird dann zu

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\lambda} = 0 \quad (1 \leq \lambda \leq m = \dim_{\mathbb{C}} M). \quad (8.43)$$

Eine holomorphe 0-Form ist einfach eine holomorphe Funktion: $f \in \mathcal{F}(U)^\mathbb{C}$. Sei $\omega \in \Omega^{r,0}(M)$, mit $1 \leq r \leq m = \dim_{\mathbb{C}} M$. Auf einer Karte (U, φ) ist

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r}. \quad (8.44)$$

Dann ist $\bar{\partial}\omega = 0$ dann und nur dann, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} = 0,$$

d.h., wenn die $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ holomorphe Funktionen auf U sind.

Sei $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. Die Folge von \mathbb{C} -linearen Abbildungen

$$\Omega^{r,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,m-1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,m}(M) \quad (8.45)$$

nennt man **Dolbeault-Komplex**. Beachten Sie, dass $\bar{\partial}^2 = 0$ ist. Die Menge der $\bar{\partial}$ -geschlossenen (r,s) -Formen (derjenigen $\omega \in \Omega^{r,s}(M)$, für die $\bar{\partial}\omega = 0$ ist) wird **(r,s) -Kozykel** genannt und mit $Z_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ bezeichnet. Die Menge der $\bar{\partial}$ -exakten (r,s) -Formen (derjenigen $\omega \in \Omega^{r,s}(M)$, für die $\omega = \bar{\partial}\eta$ für irgendein $\eta \in \Omega^{r,s-1}(M)$ ist) heißt **(r,s) -Korand**, wir schreiben hierfür $B_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$. Der komplexe Vektorraum

$$H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) \equiv Z_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)/B_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) \quad (8.46)$$

ist die **(r,s) -te $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppe**, siehe Abschnitt 8.6.

8.4 Hermite'sche Mannigfaltigkeiten, Hermite'sche Differentialgeometrie

Seien M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ und g eine Riemann'sche Metrik von M als einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Wir betrachten $Z = X + iY$, $W = U + iV \in T_p M^{\mathbb{C}}$ und setzen g so fort, dass gilt:

$$g_p(Z, W) = g_p(X, U) - g_p(Y, V) + i[g_p(X, V) + g_p(Y, U)]. \quad (8.47)$$

Die Komponenten von g bezüglich der Basen (8.13) sind

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p(\partial/\partial z^\mu, \partial/\partial z^\nu), \quad (8.48a)$$

$$g_{\mu\bar{\nu}}(p) = g_p(\partial/\partial z^\mu, \partial/\partial \bar{z}^\nu), \quad (8.48b)$$

$$g_{\bar{\mu}\nu}(p) = g_p(\partial/\partial \bar{z}^\mu, \partial/\partial z^\nu), \quad (8.48c)$$

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(p) = g_p(\partial/\partial \bar{z}^\mu, \partial/\partial \bar{z}^\nu). \quad (8.48d)$$

Wir überprüfen leicht, dass gilt:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = g_{\bar{\nu}\bar{\mu}}, \quad g_{\bar{\mu}\nu} = g_{\nu\bar{\mu}}, \quad \overline{g_{\mu\nu}} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, \quad \overline{g_{\mu\nu}} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}. \quad (8.49)$$

8.4.1 Die Hermite'sche Metrik

Wenn die Riemann'sche Metrik g einer komplexen Mannigfaltigkeit M die Bedingung

$$g_p(J_p X, J_p Y) = g_p(X, Y) \quad (8.50)$$

an jedem Punkt $p \in M$ und für beliebige $X, Y \in T_p M$ erfüllt, sagt man, g sei eine **Hermite'sche Metrik**. Das Paar (M, g) wird **Hermite'sche Mannigfaltigkeit** genannt. Der Vektor $J_p X$ steht bezüglich einer Hermite'schen Metrik orthogonal auf X :

$$g_p(J_p X, X) = g_p(J_p^2 X, J_p X) = -g_p(J_p X, X) = 0. \quad (8.51)$$

Satz 8.2. Eine komplexe Mannigfaltigkeit lässt immer eine Hermite'sche Metrik zu.

Beweis

Sei g irgendeine Riemann'sche Metrik einer komplexen Mannigfaltigkeit M . Wir definieren eine neue Metrik \hat{g} durch

$$\hat{g}_p(X, Y) \equiv \frac{1}{2}[g_p(X, Y) + g_p(J_p X, J_p Y)]. \quad (8.52)$$

Sicherlich ist $\hat{g}_p(J_p X, J_p Y) = \hat{g}_p(X, Y)$. Darüber hinaus ist \hat{g} positiv definit, sofern g es ist. Daher ist \hat{g} eine Hermite'sche Metrik auf M . \square

Sei g eine Hermite'sche Metrik auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M . Mit (8.50) erhalten wir

$$g_{\mu\nu} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = g\left(J \frac{\partial}{\partial z^\mu}, J \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = -g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = -g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$$

und daraus $g_{\mu\nu} = 0$. Wir stellen außerdem fest, dass $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$ ist. Die Hermite'sche Metrik g ist dann⁴

$$g = g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \otimes d\bar{z}^\nu + g_{\bar{\mu}\nu} d\bar{z}^\mu \otimes dz^\nu. \quad (8.54)$$

8.4.2 Kähler-Formen

Sei (M, g) eine Hermite'sche Mannigfaltigkeit. Wir definieren ein Tensorfeld Ω mit der folgenden Wirkung auf $X, Y \in T_p M$:

$$\Omega_p(X, Y) = g_p(J_p X, Y) \quad (X, Y \in T_p M). \quad (8.55)$$

Ω ist antisymmetrisch: $\Omega(X, Y) = g(JX, Y) = g(J^2 X, JY) = -g(JY, X) = -\Omega(Y, X)$. Daher definiert Ω eine 2-Form, genannt die **Kähler-Form** der Hermite'schen Metrik g . Wir erkennen, dass Ω invariant unter der Wirkung von J ist:

$$\Omega(JX, JY) = g(J^2 X, JY) = g(J^3 X, J^2 Y) = \Omega(X, Y). \quad (8.56)$$

Erweitert man den Definitionsbereich von $T_p M$ auf $T_p M^{\mathbb{C}}$, wird Ω eine 2-Form vom Bigrad $(1, 1)$. In der Tat ergibt sich für die Metrik (8.54)

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = g\left(J \frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = i g_{\mu\nu} = 0.$$

⁴ Anmerkung: Wir setzen $X, Y \in T_p M^+$ und definieren ein inneres Produkt h_p in $T_p M^+$ durch

$$h_p(X, Y) \equiv g_p(X, \bar{Y}). \quad (8.53)$$

Es ist leicht zu sehen, dass h_p eine positiv definite Hermite'sche Form in $T_p M^+$ ist. Tatsächlich sind

$$\overline{h(X, Y)} = \overline{g(X, \bar{Y})} = g(\bar{X}, Y) = h(Y, X)$$

und $h(X, X) = g(X, \bar{X}) = g(X_1, X_1) + g(X_2, X_2) \geq 0$ für $X = X_1 + iX_2$. Dies ist der Grund dafür, dass eine Metrik g , welche der Bedingung (8.50) gehorcht, *Hermite'sch* genannt wird.

Wir erhalten auch

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = 0, \quad \Omega\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = ig_{\mu\bar{\nu}} = -\Omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}, \frac{\partial}{\partial z^\mu}\right).$$

Damit sind die Komponenten von Ω

$$\Omega_{\mu\nu} = \Omega_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0, \quad \Omega_{\mu\bar{\nu}} = -\Omega_{\bar{\nu}\mu} = ig_{\mu\bar{\nu}}. \quad (8.57)$$

Wir können auch schreiben:

$$\Omega = ig_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \otimes d\bar{z}^\nu - ig_{\bar{\nu}\mu} d\bar{z}^\nu \otimes dz^\mu = ig_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu. \quad (8.58)$$

Ebenso lässt sich Ω als

$$\Omega = -J_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu \quad (8.59)$$

schreiben, wobei $J_{\mu\bar{\nu}} = g_{\mu\bar{\nu}} J^{\bar{\nu}}_\nu = -ig_{\mu\bar{\nu}}$ ist. Ω ist eine reelle Form:

$$\overline{\Omega} = -ig_{\mu\bar{\nu}} d\bar{z}^\mu \wedge dz^\nu = ig_{\bar{\nu}\mu} dz^\nu \wedge d\bar{z}^\mu = \Omega. \quad (8.60)$$

Mithilfe der Kähler-Form zeigen wir im Folgenden, dass jede Hermite'sche Mannigfaltigkeit, und damit jede komplexe Mannigfaltigkeit, orientierbar ist. Wir bemerken zuerst, dass wir eine orthonormale Basis $\{\hat{e}_1, J\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m, J\hat{e}_m\}$ wählen können. Tatsächlich folgt aus $g(\hat{e}_1, \hat{e}_1) = 1$, dass $g(J\hat{e}_1, J\hat{e}_1) = g(\hat{e}_1, \hat{e}_1) = 1$ und $g(\hat{e}_1, J\hat{e}_1) = -g(J\hat{e}_1, \hat{e}_1) = 0$ ist. Somit bilden \hat{e}_1 und $J\hat{e}_1$ eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Unterraums. Wir betrachten jetzt \hat{e}_2 , was orthonormal auf \hat{e}_1 und $J\hat{e}_1$ ist, und bilden den Unterraum $\{\hat{e}_2, J\hat{e}_2\}$. Durch Wiederholen dieser Prozedur erhalten wir eine Orthonormalbasis $\{\hat{e}_1, J\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m, J\hat{e}_m\}$.

Lemma 8.1. Sei Ω die Kähler-Form einer Hermite'schen Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. Dann ist

$$\underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_m$$

eine nirgendwo verschwindende $2m$ -Form.

Beweis

Mit der soeben eingeführten Orthonormalbasis ergibt sich

$$\Omega(\hat{e}_i, J\hat{e}_j) = g(J\hat{e}_i, J\hat{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \Omega(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \Omega(J\hat{e}_i, J\hat{e}_j) = 0.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_{m}(\hat{e}_1, J\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m, J\hat{e}_m) &= \sum_P \Omega(\hat{e}_{P(1)}, J\hat{e}_{P(1)}) \dots \Omega(\hat{e}_{P(m)}, J\hat{e}_{P(m)}) \\ &= m! \Omega(\hat{e}_1, J\hat{e}_1) \dots \Omega(\hat{e}_m, J\hat{e}_m) = m!, \end{aligned}$$

wobei P ein Element der Permutationsgruppe von m Objekten ist. Dies zeigt, dass $\Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ an keinem Punkt verschwinden kann. \square

Weil die reelle $2m$ -Form $\Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ nirgendwo verschwindet, kann sie als ein Volumenelement dienen. Damit erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 8.3. Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist orientierbar.

8.4.3 Kovariante Ableitungen

Sei (M, g) eine Hermite'sche Mannigfaltigkeit. Wir definieren einen mit der komplexen Struktur kompatiblen Zusammenhang. Es ist nur natürlich, anzunehmen, dass aus einem holomorphen Vektor $V \in T_p M^+$, der zu einem anderen Punkt q paralleltransportiert wird, wieder ein holomorpher Vektor $\tilde{V}(q) \in T_q M^+$ wird. Wir werden später zeigen, dass die fastkomplexe Struktur unter dieser Forderung kovariant erhalten ist. Seien $\{z^\mu\}$ und $\{z^\mu + \Delta z^\mu\}$ die Koordinaten von p bzw. q . Außerdem seien $V = V^\mu \partial/\partial z^\mu|_p$ und $\tilde{V}(q) = \tilde{V}^\mu(z + \Delta z) \partial/\partial z^\mu|_q$. Wir nehmen an – vgl. (7.9) –, dass gilt:

$$\tilde{V}^\mu(z + \Delta z) = V^\mu(z) - V^\lambda(z)\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(z)\Delta z^\nu. \quad (8.61)$$

Dann genügen die Basisvektoren – vgl. (7.14) – der Bedingung

$$\nabla_\mu \frac{\partial}{\partial z^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(z) \frac{\partial}{\partial z^\lambda}. \quad (8.62a)$$

Da $\partial/\partial \bar{z}^\mu$ das konjugierte Vektorfeld von $\partial/\partial z^\mu$ ist, erhalten wir

$$\nabla_{\bar{\mu}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} = \Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda}, \quad (8.62b)$$

wobei $\Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \overline{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}$ ist. $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ und $\Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ sind die einzigen nichtverschwindenden Komponenten der Zusammenhangskoeffizienten. Beachten Sie, dass $\nabla_\mu \partial/\partial \bar{z}^\nu = \nabla_{\bar{\mu}} \partial/\partial z^\nu = 0$ ist. Für die duale Basis sind die nichtverschwindenden kovarianten Ableitungen

$$\nabla_\mu dz^\nu = -\Gamma^\nu_{\mu\lambda} dz^\lambda, \quad \nabla_{\bar{\mu}} d\bar{z}^\nu = -\Gamma^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}} \bar{z}^\lambda. \quad (8.63)$$

Die kovariante Ableitung von $X^+ = X^\mu \partial/\partial z^\mu \in \mathcal{X}(M)^+$ ist

$$\nabla_\mu X^+ = (\partial_\mu X^\lambda + X^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial z^\lambda}, \quad (8.64)$$

mit $\partial_\mu \equiv \partial/\partial z^\mu$. Für $X^- = X^{\bar{\mu}} \partial/\partial \bar{z}^\mu \in \mathcal{X}(M)^-$ gilt

$$\nabla_\mu X^- = \partial_\mu X^{\bar{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda}, \quad (8.65)$$

wegen $\Gamma^{\bar{\lambda}}_{\mu\nu} = \Gamma^{\bar{\lambda}}_{\mu\bar{\nu}} = 0$. Was die antiholomorphen Vektoren anbelangt, funktioniert ∇_μ als die gewöhnliche Ableitung ∂_μ . In ähnlicher Weise erhalten wir

$$\nabla_{\bar{\mu}} X^+ = \partial_{\bar{\mu}} X^\lambda \frac{\partial}{\partial z^\lambda}, \quad (8.66)$$

$$\nabla_{\bar{\mu}} X^- = (\partial_{\bar{\mu}} X^{\bar{\lambda}} + X^{\bar{\nu}} \Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{\lambda}}}. \quad (8.67)$$

Dies verallgemeinert man leicht auf ein beliebiges Tensorfeld, etwa $t = t_{\mu\nu}{}^{\bar{\lambda}} dz^\mu \otimes dx^\nu \otimes \partial/\partial \bar{z}^\lambda$:

$$\begin{aligned} (\nabla_\kappa t)_{\mu\nu}{}^{\bar{\lambda}} &= \partial_\kappa t_{\mu\nu}{}^{\bar{\lambda}} - t_{\xi\nu}{}^{\bar{\lambda}} \Gamma_{\kappa\xi}^\xi - t_{\mu\xi}{}^{\bar{\lambda}} \Gamma_{\kappa\nu}^\xi, \\ (\nabla_{\bar{\kappa}} t)_{\mu\nu}{}^{\bar{\lambda}} &= \partial_{\bar{\kappa}} t_{\mu\nu}{}^{\bar{\lambda}} + t_{\mu\nu}{}^{\bar{\xi}} \Gamma_{\bar{\kappa}\bar{\xi}}^{\bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Wir fordern wie in Abschnitt 7.2 die **Metrikkompatibilität**, also $\nabla_\kappa g_{\mu\bar{\nu}} = \nabla_{\bar{\kappa}} g_{\mu\bar{\nu}} = 0$. In Komponenten geschrieben, gilt

$$\partial_\kappa g_{\mu\bar{\nu}} - g_{\lambda\bar{\nu}} \Gamma_{\kappa\mu}^{\bar{\lambda}} = 0, \quad \partial_{\bar{\kappa}} g_{\mu\bar{\nu}} - g_{\mu\bar{\lambda}} \Gamma_{\bar{\kappa}\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}} = 0. \quad (8.68)$$

Die Zusammenhangskoeffizienten lassen sich einfach ablesen:

$$\Gamma_{\kappa\mu}^{\bar{\lambda}} = g^{\bar{\nu}\lambda} \partial_\kappa g_{\mu\bar{\nu}}, \quad \Gamma_{\bar{\kappa}\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}} = g^{\bar{\lambda}\mu} \partial_{\bar{\kappa}} g_{\mu\bar{\nu}}, \quad (8.69)$$

wobei $\{g^{\bar{\nu}\lambda}\}$ die inverse Matrix von $g_{\mu\bar{\nu}}$ ist: $g_{\mu\bar{\lambda}} g^{\bar{\lambda}\nu} = \delta_\mu^\nu$, $g^{\bar{\nu}\lambda} g_{\lambda\bar{\mu}} = \delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}}$. Ein metrikkompatibler Zusammenhang, für den Γ (gemischte Indizes) = 0 ist, heißt **Hermite'scher Zusammenhang**. Aufgrund der Konstruktion ist dieser eindeutig und durch Gleichung (8.69) gegeben.

Satz 8.4. Die fastkomplexe Struktur J ist kovariant konstant bezüglich des Hermite'schen Zusammenhangs:

$$(\nabla_\kappa J)_\nu{}^\mu = (\nabla_{\bar{\kappa}} J)_\nu{}^\mu = (\nabla_\kappa J)_{\bar{\nu}}{}^{\bar{\mu}} = (\nabla_{\bar{\kappa}} J)_{\bar{\nu}}{}^{\bar{\mu}} = 0. \quad (8.70)$$

Beweis

Wir beweisen das erste Gleichheitszeichen. Aus (8.22) folgt

$$(\nabla_\kappa J)_\nu{}^\mu = \partial_\kappa i \delta_\nu{}^\mu - i \delta_\xi{}^\mu \Gamma_{\kappa\nu}^\xi + i \delta_\nu{}^\xi \Gamma_{\kappa\xi}^\mu = 0.$$

Die anderen Gleichungen ergeben sich mithilfe ähnlicher Rechnungen. \square

8.4.4 Torsion und Krümmung

Der Torsionstensor T und der Riemann'sche Krümmungstensor R sind durch

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (8.71)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (8.72)$$

definiert. Wir erhalten

$$T\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) \frac{\partial}{\partial z^\lambda},$$

$$T\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = T\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = 0,$$

$$T\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = (\Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\nu}\bar{\mu}}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda}.$$

Die nichtverschwindenden Komponenten sind

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = g^{\bar{\xi}\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\bar{\xi}} - \partial_\nu g_{\mu\bar{\xi}}), \quad (8.73a)$$

$$T^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\nu}\bar{\mu}} = g^{\bar{\lambda}\bar{\xi}} (\partial_{\bar{\mu}} g_{\bar{\nu}\bar{\xi}} - \partial_{\bar{\nu}} g_{\bar{\mu}\bar{\xi}}). \quad (8.73b)$$

Für den Riemann-Tensor ergibt sich z. B.

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\eta}.$$

Einsetzen von (8.69) führt auf

$$\begin{aligned} R^\kappa_{\lambda\mu\nu} &= \partial_\mu g^{\bar{\xi}\kappa} \partial_\nu g_{\lambda\bar{\xi}} + g^{\bar{\xi}\kappa} \partial_\mu \partial_\nu g_{\lambda\bar{\xi}} - \partial_\nu g^{\bar{\xi}\kappa} \partial_\mu g_{\lambda\bar{\xi}} - g^{\bar{\xi}\kappa} \partial_\mu \partial_\nu g_{\lambda\bar{\xi}} \\ &\quad + g^{\bar{\xi}\eta} \partial_\nu g_{\lambda\bar{\xi}} g^{\bar{\zeta}\kappa} \partial_\mu g_{\eta\bar{\zeta}} - g^{\bar{\xi}\eta} \partial_\mu g_{\lambda\bar{\xi}} g^{\bar{\zeta}\kappa} \partial_\nu g_{\eta\bar{\zeta}} = 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Identität $g^{\bar{\xi}\kappa} \partial_\mu g_{\eta\bar{\zeta}} = -g_{\eta\bar{\zeta}} \partial_\mu g^{\bar{\xi}\kappa}$ usw. ausgenutzt. Allgemein erhalten wir

$$R^\kappa_{\bar{\lambda}AB} = R^{\bar{\kappa}}_{\lambda AB} = R^A_{B\kappa\lambda} = R^A_{B\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = 0, \quad (8.74)$$

wobei A und B irgendwelche (holomorphen oder antiholomorphen) Indizes sind. Im Endeffekt bleiben uns nur die Komponenten $R^\kappa_{\lambda\bar{\mu}\nu}$, $R^\kappa_{\lambda\mu\bar{\nu}}$, $R^{\bar{\kappa}}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{\nu}}$ und $R^{\bar{\kappa}}_{\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}}$ übrig. Beachten Sie die triviale Symmetrie $R^\kappa_{\lambda\bar{\mu}\nu} = -R^\kappa_{\lambda\bar{\nu}\bar{\mu}}$. Dadurch reduzieren sich die unabhängigen Komponenten auf $R^\kappa_{\lambda\bar{\mu}\nu}$ und $R^{\bar{\kappa}}_{\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}} = R^\kappa_{\lambda\bar{\mu}\nu}$. Wir erhalten

$$R^\kappa_{\lambda\bar{\mu}\nu} = \partial_{\bar{\mu}} \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} = \partial_{\bar{\mu}} (g^{\bar{\xi}\kappa} \partial_\nu g_{\lambda\bar{\xi}}), \quad (8.75a)$$

$$R^{\bar{\kappa}}_{\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \Gamma^{\bar{\kappa}}_{\bar{\nu}\bar{\lambda}} = \partial_\mu (g^{\bar{\xi}\bar{\kappa}} \partial_{\bar{\nu}} g_{\bar{\lambda}\bar{\xi}}). \quad (8.75b)$$

Übung 8.7 Zeigen Sie, dass gilt:

$$R_{\bar{\kappa}\lambda\bar{\mu}\nu} \equiv g_{\bar{\kappa}\bar{\xi}} R^\xi_{\lambda\bar{\mu}\nu} = \partial_{\bar{\mu}} \partial_\nu g_{\lambda\bar{\kappa}} - g^{\bar{\eta}\bar{\xi}} \partial_{\bar{\mu}} g_{\bar{\kappa}\bar{\xi}} \partial_\nu g_{\lambda\bar{\eta}}, \quad (8.76a)$$

$$R_{\kappa\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}} \equiv g_{\kappa\bar{\xi}} R^{\bar{\xi}}_{\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} g_{\bar{\lambda}\kappa} - g^{\eta\bar{\xi}} \partial_\mu g_{\bar{\kappa}\bar{\xi}} \partial_{\bar{\nu}} g_{\eta\bar{\lambda}}, \quad (8.76b)$$

$$R_{\bar{\kappa}\lambda\mu\bar{\nu}} \equiv g_{\bar{\kappa}\bar{\xi}} R^\xi_{\lambda\mu\bar{\nu}} = -R_{\bar{\kappa}\lambda\bar{\nu}\mu}, \quad (8.76c)$$

$$R_{\kappa\bar{\lambda}\bar{\mu}\nu} \equiv g_{\kappa\bar{\xi}} R^{\bar{\xi}}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\nu} = -R_{\kappa\bar{\lambda}\nu\bar{\mu}}. \quad (8.76d)$$

Bestätigen Sie außerdem die Symmetrien

$$R_{\bar{\kappa}\lambda\bar{\mu}\nu} = -R_{\lambda\bar{\kappa}\bar{\mu}\nu}, \quad R_{\kappa\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}} = -R_{\bar{\lambda}\kappa\mu\bar{\nu}}. \quad (8.77)$$

Wir kontrahieren die Indizes des Riemann-Tensors:

$$\mathfrak{R}_{\mu\bar{\nu}} \equiv R^\kappa_{\kappa\mu\bar{\nu}} = -\partial_{\bar{\nu}} (g^{\kappa\bar{\xi}} \partial_\mu g_{\kappa\bar{\xi}}) = -\partial_{\bar{\nu}} \partial_\mu \log G. \quad (8.78)$$

Dabei ist $G \equiv \det(g_{\mu\bar{\nu}}) = \sqrt{g}$. Um zum letzten Gleichheitszeichen zu gelangen, haben wir die Identität $\delta G = G g^{\mu\bar{\nu}} \delta g_{\mu\bar{\nu}}$ ausgenutzt, siehe Gleichung (7.204). Wir definieren die **Ricci-Form** durch

$$\mathfrak{R} \equiv i\mathfrak{R}_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu = -\partial\bar{\partial} \log G. \quad (8.79)$$

\Re ist eine *reelle* Form: $\overline{\Re} = -i\partial\bar{\partial}\log G = -i\partial\bar{\partial}\log G = \Re$. Mit der Identität $\partial\bar{\partial} = -\frac{1}{2}d(\partial - \bar{\partial})$ stellen wir fest, dass \Re geschlossen ist: $d\Re \propto d^2(\partial - \bar{\partial})\log G = 0$. Dies heißt aber nicht, dass \Re exakt ist. Tatsächlich ist G kein Skalar, und $(\partial - \bar{\partial})\log G$ ist nicht global definiert. \Re definiert ein nichtriviales Element $c_1(M) \equiv [\Re/2\pi] \in H^2(M; \mathbb{R})$, die sog. **erste Chern-Klasse**, siehe Abschnitt 11.2.

Behauptung 8.2. Die erste Chern-Klasse $c_1(M)$ ist invariant unter einer glatten Transformation der Metrik $g \rightarrow g + \delta g$.

Beweis

Aus Gleichung (7.204) folgt $\delta \log G = g^{\mu\bar{\nu}} \delta g_{\mu\bar{\nu}}$. Dann ist

$$\delta\Re = \delta i\partial\bar{\partial}\log G = i\partial\bar{\partial}g^{\mu\bar{\nu}} \delta g_{\mu\bar{\nu}} = -\frac{1}{2}d(\partial - \bar{\partial})ig^{\mu\bar{\nu}} \delta g_{\mu\bar{\nu}}.$$

Da $g^{\mu\bar{\nu}} \delta g_{\mu\bar{\nu}}$ ein Skalar ist, ist $\omega \equiv -\frac{1}{2}(\partial - \bar{\partial})g^{\mu\bar{\nu}} \delta g_{\mu\bar{\nu}}$ eine wohldefinierte 1-Form auf M . Damit ist $\delta\Re = d\omega$ eine exakte 2-Form, und es ist $[\Re] = [\Re + \delta\Re]$. Das heißt, $c_1(M)$ bleibt invariant unter $g \rightarrow g + \delta g$. \square

8.5 Kähler-Mannigfaltigkeiten und Kähler-Differentialgeometrie

8.5.1 Definitionen

Definition 8.4. Eine **Kähler-Mannigfaltigkeit** ist eine Hermite'sche Mannigfaltigkeit (M, g) , deren Kähler-Form Ω geschlossen ist: $d\Omega = 0$. Die Metrik g ist die **Kähler-Metrik** von M . (Achtung: Nicht alle komplexen Mannigfaltigkeiten lassen Kähler-Metriken zu.)

Satz 8.5. Eine Hermite'sche Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine Kähler-Mannigfaltigkeit dann und nur dann, wenn die fastkomplexe Struktur J die Bedingung

$$\nabla_\mu J = 0 \tag{8.80}$$

erfüllt, wobei ∇_μ der mit g assoziierte Levi-Civita-Zusammenhang ist.

Beweis

Wir bemerken zunächst, dass sich $d\omega$ für eine beliebige r -Form ω als

$$d\omega = \nabla\omega \equiv \frac{1}{r!} \nabla_\mu \omega_{\nu_1 \dots \nu_r} dx^\mu \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_r} \tag{8.81}$$

schreiben lässt.⁵ Jetzt beweisen wir, dass $\nabla_\mu J = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $\nabla_\mu \Omega = 0$ ist. Wir bestätigen die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} (\nabla_Z \Omega)(X, Y) &= \nabla_Z[\Omega(X, Y)] - \Omega(\nabla_Z X, Y) - \Omega(X, \nabla_Z Y) \\ &= \nabla_Z[g(JX, Y)] - g(J\nabla_Z X, Y) - g(JX, \nabla_Z Y) \\ &= (\nabla_Z g)(JX, Y) + g(\nabla_Z JX, Y) - g(J\nabla_Z X, Y) \\ &= g(\nabla_Z JX - J\nabla_Z X, Y) = g((\nabla_Z J)X, Y), \end{aligned}$$

wobei $\nabla_Z g = 0$ verwendet wurde. Da dies für beliebige X, Y, Z gilt, folgt, dass dann und nur dann $\nabla_Z \Omega = 0$ ist, wenn gilt: $\nabla_Z J = 0$. \square

Die Sätze 8.4 und 8.5 zeigen, dass die Riemann-Struktur kompatibel mit der Hermite'schen Struktur in der Kähler-Mannigfaltigkeit ist.

Sei g eine Kähler-Metrik. Wegen $d\Omega = 0$ gilt

$$\begin{aligned} (\partial + \bar{\partial})ig_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu &= i\partial_\lambda g_{\mu\bar{\nu}} dz^\lambda \wedge dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu + i\partial_{\bar{\lambda}} g_{\mu\bar{\nu}} d\bar{z}^\lambda \wedge dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu \\ &= \frac{1}{2}i(\partial_\lambda g_{\mu\bar{\nu}} - \partial_\mu g_{\lambda\bar{\nu}}) dz^\lambda \wedge dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu \\ &\quad + \frac{1}{2}i(\partial_{\bar{\lambda}} g_{\mu\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}} g_{\mu\bar{\lambda}}) d\bar{z}^\lambda \wedge dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu = 0. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial g_{\mu\bar{\nu}}}{\partial z^\lambda} = \frac{\partial g_{\lambda\bar{\nu}}}{\partial z^\mu}, \quad \frac{\partial g_{\mu\bar{\nu}}}{\partial \bar{z}^\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\bar{\lambda}}}{\partial \bar{z}^\nu}. \quad (8.82)$$

Nehmen wir an, eine Hermite'sche Metrik g sei auf einer Karte U_i durch

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{K}_i \quad (8.83)$$

gegeben, mit $\mathcal{K}_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Offenkundig genügt diese Metrik der Bedingung (8.82), sie ist also eine Kähler-Metrik. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass man jede Kähler-Metrik *lokal* wie in Gleichung (8.83) ausdrücken kann. Die Funktion \mathcal{K}_i heißt **Kähler-Potenzial** der Kähler-Metrik. Es folgt, dass $\Omega = i\partial\bar{\partial}\mathcal{K}_i$ auf U_i .

Seien (U_i, φ_i) und (U_j, φ_j) einander überlappende Karten. Auf $U_i \cap U_j$ ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial z^\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} \mathcal{K}_i dz^\mu \otimes d\bar{z}^\nu = \frac{\partial}{\partial w^\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\beta} \mathcal{K}_j dw^\alpha \otimes d\bar{w}^\beta,$$

mit $z = \varphi_i(p)$ und $w = \varphi_j(p)$. Es folgt dann

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^\mu} \frac{\partial \bar{w}^\beta}{\partial \bar{z}^\nu} \frac{\partial}{\partial w^\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\beta} \mathcal{K}_j = \frac{\partial}{\partial z^\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} \mathcal{K}_i. \quad (8.84)$$

⁵ Zum Beispiel

$$\begin{aligned} \nabla \Omega &= \frac{1}{2} \nabla_\lambda \Omega_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \Omega_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \Omega_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} \Omega_{\mu\kappa}) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} \partial_\lambda \Omega_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = d\Omega, \end{aligned}$$

da Γ symmetrisch ist.

Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $\mathcal{K}_j(w, \bar{w}) = \mathcal{K}_i(z, \bar{z}) + \phi_{ij}(z) + \psi_{ij}(\bar{z})$ ist, wobei ϕ_{ij} (ψ_{ij}) holomorph (antiholomorph) in z ist.

Übung 8.8 Sei M eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit ohne Rand. Zeigen Sie, dass

$$\Omega^m \equiv \underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_m$$

geschlossen, aber nicht exakt ist ($m = \dim_{\mathbb{C}} M$). *Tipp:* Verwenden Sie den Stokes'schen Satz. Auf diese Weise kann die $2m$ -te Betti-Zahl nicht verschwinden: $b^{2m} \geq 1$. Wir werden später sehen, dass $b^{2p} \geq 1$ für $1 \leq p \leq m$ ist.

Beispiel 8.6. Sei $M = \mathbb{C}^m = \{(z^1, \dots, z^m)\}$. Mit der Gleichsetzung $z^\mu \rightarrow x^\mu + iy^\mu$ wird \mathbb{C}^m mit \mathbb{R}^{2m} identifiziert. Sei δ die euklidische Metrik des \mathbb{R}^{2m} :

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) &= \delta\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) = \delta_{\mu\nu}, \\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{8.85a}$$

Wenn wir beachten, dass $J\partial/\partial x^\mu = \partial/\partial y^\mu$ und $J\partial/\partial y^\mu = -\partial/\partial x^\mu$ ist, stellen wir fest, dass δ eine Hermite'sche Metrik ist. In komplexen Koordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) &= \delta\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = 0, \\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) &= \delta\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{8.85b}$$

Die Kähler-Form ist durch

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_{\mu=1}^m dz^\mu \wedge d\bar{z}^\mu = \frac{i}{2} \sum_{\mu=1}^m dx^\mu \wedge dy^\mu \tag{8.86}$$

gegeben. Natürlich ist $d\Omega = 0$, und wir stellen fest, dass die euklidische Metrik δ von \mathbb{R}^{2m} eine Kähler-Metrik des \mathbb{C}^m ist. Das Kähler-Potenzial ist

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum z^\mu \bar{z}^\mu. \tag{8.87}$$

Die Kähler-Mannigfaltigkeit \mathbb{C}^m wird **komplexer euklidischer Raum** genannt. ◇

Beispiel 8.7. Jede orientierbare komplexe Mannigfaltigkeit M mit $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ ist Kähler'sch. Wir betrachten eine Hermite'sche Metrik g mit der Kähler-Form Ω . Da Ω eine reelle 2-Form ist, muss eine 3-Form $d\Omega$ auf M verschwinden. Eindimensionale kompakte orientierbare komplexe Mannigfaltigkeiten sind als **Riemann'sche Flächen** bekannt. ◇

Beispiel 8.8. Der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ ist eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Sei $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ eine Karte, und deren inhomogene Koordinaten $\varphi_\alpha(p) = \zeta_{(\alpha)}^\nu$ seien ($\nu \neq \alpha$), vgl. Beispiel 8.3. Es empfiehlt sich, die folgende übersichtlichere Notation einzuführen, mit $\{\zeta^\nu_{(\alpha)} | 1 \leq \nu \leq m\}$ und

$$\xi_{(\alpha)}^\nu = \zeta_{(\alpha)}^\nu \quad (\nu \leq \alpha - 1), \quad \xi_{(\alpha)}^{\nu+1} = \zeta_{(\alpha)}^\nu \quad (\nu \geq \alpha). \quad (8.88)$$

$\{\zeta^\nu_{(\alpha)}\}$ ist dabei einfach ein anderer Name für $\{\xi_{(\alpha)}^\nu\}$. Wir definieren eine positiv definite Funktion

$$\mathcal{K}_\alpha(p) \equiv \sum_{\nu=1}^n |\zeta_{(\alpha)}^\nu(p)|^2 + 1 = \sum_{\nu=1}^{n+1} \left| \frac{z^\nu}{z^\alpha} \right|^2. \quad (8.89)$$

An einem Punkt $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ hängen $\mathcal{K}_\alpha(p)$ und $\mathcal{K}_\beta(p)$ miteinander zusammen wie

$$\mathcal{K}_\alpha(p) = \left| \frac{z^\beta}{z^\alpha} \right|^2 \mathcal{K}_\beta(p). \quad (8.90)$$

Daraus folgt dann

$$\log \mathcal{K}_\alpha = \log \mathcal{K}_\beta + \log \overline{\frac{z^\beta}{z^\alpha}} + \log \overline{\frac{z^\beta}{z^\alpha}}. \quad (8.91)$$

Da z^β/z^α eine holomorphe Funktion ist, ergibt sich $\bar{\partial} \log z^\beta/z^\alpha = 0$. Also ist

$$\partial \overline{\log z^\beta/z^\alpha} = \overline{\partial \log z^\beta/z^\alpha} = 0.$$

Dies wiederum bedeutet:

$$\partial \bar{\partial} \log \mathcal{K}_\alpha = \partial \bar{\partial} \log \mathcal{K}_\beta. \quad (8.92)$$

Eine geschlossene 2-Form Ω wird lokal definiert durch

$$\Omega \equiv i \partial \bar{\partial} \log \mathcal{K}_\alpha. \quad (8.93)$$

Es existiert eine Hermite'sche Metrik, deren Kähler-Form Ω ist. Wir betrachten $X, Y \in T_p \mathbb{C}P^n$ und definieren $g : T_p \mathbb{C}P^n \otimes T_p \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(X, Y) = \Omega(X, JY)$. Um zu zeigen, dass g eine Hermite'sche Metrik ist, müssen wir zeigen, dass g die Gleichung (8.50) erfüllt und dazu positiv definit ist. Die Hermitizität ist offensichtlich, da $g(JX, JY) = -\Omega(JX, Y) = \Omega(Y, JX) = g(X, Y)$ ist. Als nächsten zeigen wir, dass g positiv definit ist. Auf einer Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ erhalten wir

$$\Omega = i \frac{\partial^2 \log \mathcal{K}}{\partial \zeta^\mu \partial \bar{\zeta}^\nu} d\zeta^\mu \wedge d\bar{\zeta}^\nu, \quad (8.94)$$

wobei wir der Übersichtlichkeit halber den Index (α) weggelassen haben. Wenn wir den Ausdruck (8.89) für \mathcal{K} auf U_α einsetzen, erhalten wir

$$\Omega = i \sum_{\mu, \nu} \frac{\delta_{\mu\nu} (\sum |\zeta^\lambda|^2 + 1) - \zeta^\mu \bar{\zeta}^\nu}{(\sum |\zeta^\lambda|^2 + 1)^2} d\zeta^\mu \wedge d\bar{\zeta}^\nu. \quad (8.95)$$

Es seien X ein reeller Vektor, $X = X^\mu \partial/\partial \zeta^\mu + \bar{X}^\mu \partial/\partial \bar{\zeta}^\mu$, und $JX = iX^\mu \partial/\partial \zeta^\mu - i\bar{X}^\mu \partial/\partial \bar{\zeta}^\mu$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(X, X) &= \Omega(X, JX) = 2 \sum_{\mu, \nu} \frac{\delta_{\mu\nu}(\sum |\zeta^\lambda|^2 + 1) - \zeta^\mu \bar{\zeta}^\nu}{(\sum |\zeta^\lambda|^2 + 1)^2} X^\mu \bar{X}^\nu \\ &= 2 \left[\sum_\mu |X^\mu|^2 \left(\sum_\lambda |\zeta^\lambda|^2 + 1 \right) - \left| \sum_\mu X^\mu \zeta^\mu \right|^2 \right] \left(\sum_\lambda |\zeta^\lambda|^2 + 1 \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Aus der Schwarz'schen Ungleichung $\sum_\mu |X^\mu|^2 \cdot \sum_\lambda |\zeta^\lambda|^2 \geq \sum_\mu |X^\mu \zeta^\mu|^2$ folgt dann, dass g positiv definit ist. Man nennt diese Metrik auch die **Fubini-Study-Metrik** des $\mathbb{C}P^n$. \diamond

Hierzu noch ein paar nützliche Fakten:

- (a) Die S^2 ist die einzige Sphäre, welche eine komplexe Struktur erlaubt. Wegen $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ ist sie eine Kähler-Mannigfaltigkeit.
- (b) Ein Produkt von zwei ungeradzahlig-dimensionalen Sphären, $S^{2m+1} \times S^{2n+1}$, erlaubt immer eine komplexe Struktur. Diese komplexe Struktur lässt keine Kähler-Metrik zu.
- (c) Jede komplexe Untermannigfaltigkeit einer Kähler-Mannigfaltigkeit ist ebenfalls Kähler'sch.

8.5.2 Kähler'sche Geometrie

Eine Kähler-Metrik g wird durch die Gleichungen (8.82) charakterisiert:

$$\frac{\partial g_{\mu\bar{\nu}}}{\partial z^\lambda} = \frac{\partial g_{\lambda\bar{\nu}}}{\partial z^\mu}, \quad \frac{\partial g_{\mu\bar{\nu}}}{\partial \bar{z}^\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\bar{\lambda}}}{\partial \bar{z}^\nu}.$$

Dies garantiert, dass die Kähler-Metrik *torsionsfrei* ist:

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = g^{\bar{\xi}\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\bar{\xi}} - \partial_\nu g_{\mu\bar{\xi}}) = 0, \quad (8.96a)$$

$$T^{\bar{\lambda}}{}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = g^{\bar{\lambda}\xi} (\partial_{\bar{\mu}} g_{\bar{\nu}\xi} - \partial_{\bar{\nu}} g_{\bar{\mu}\xi}) = 0. \quad (8.96b)$$

In diesem Sinn definiert die Kähler-Metrik einen Zusammenhang, der dem Levi-Civita-Zusammenhang sehr ähnelt. Der Riemann-Tensor erhält dabei eine zusätzliche Symmetrie, und zwar

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\bar{\nu}} = -\partial_{\bar{\nu}} (g^{\bar{\xi}\kappa} \partial_\mu g_{\lambda\bar{\xi}}) = -\partial_{\bar{\nu}} (g^{\bar{\xi}\kappa} \partial_\lambda g_{\mu\bar{\xi}}) = R^\kappa{}_{\mu\lambda\bar{\nu}}, \quad (8.97)$$

neben den sich aus (8.97) mit den bekannten Symmetrieeoperationen ergebenden Symmetrien:

$$R^{\bar{\kappa}}{}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\nu} = R^{\bar{\kappa}}{}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}\nu}, \quad R^\kappa{}_{\lambda\bar{\mu}\nu} = R^\kappa{}_{\nu\bar{\mu}\lambda}, \quad R^{\bar{\kappa}}{}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{\nu}} = R^{\bar{\kappa}}{}_{\bar{\nu}\bar{\mu}\bar{\lambda}}. \quad (8.98)$$

Die Ricci-Form \mathfrak{R} wird definiert wie zuvor:

$$\mathfrak{R} = -i\partial_{\bar{\nu}}\partial_{\mu} \log G dz^{\mu} \wedge d\bar{z}^{\nu}.$$

Wegen (8.97) stimmen die Komponenten der Ricci-Form mit $Ric_{\mu\bar{\nu}}$ überein: $\mathfrak{R}_{\mu\bar{\nu}} \equiv R^{\kappa}_{\kappa\mu\bar{\nu}} = R^{\kappa}_{\mu\kappa\bar{\nu}} = Ric_{\mu\bar{\nu}}$. Wenn $Ric = \mathfrak{R} = 0$ ist, sagt man, die Kähler-Metrik sei **Ricci-flach**.

Satz 8.6. Sei (M, g) eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Wenn M eine Ricci-flache Metrik h zulässt, dann muss ihre erste Chern-Klasse verschwinden.

Beweis

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{R} = 0$ für die Metrik h . Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, ist $\mathfrak{R}(g) - \mathfrak{R}(h) = \mathfrak{R}(g) = d\omega$. Daher stimmt die aus g berechnete $c_1(M)$ mit der aus h abgeleiteten überein und verschwindet somit. \square

Eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chern-Klasse wird **Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit** genannt. Calabi (1957) vermutete, dass die Kähler-Mannigfaltigkeit M eine Ricci-flache Metrik zulässt, wenn $c_1(M) = 0$ ist, was Yau (1977) dann bewiesen hat. Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten mit $\dim_{\mathbb{C}} M = 3$ gelten als Kandidaten für eine Superstring-Kompaktifizierung, siehe Horowitz (1986) und Candelas (1988).

8.5.3 Die Holonomiegruppe von Kähler-Mannigfaltigkeiten

Bevor wir diesen Abschnitt abschließen, werfen wir einen kurzen Blick auf die Holonomiegruppen von Kähler-Mannigfaltigkeiten. Sei (M, g) eine Hermite'sche Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. Wir betrachten einen Vektor $X \in T_p M^+$ und transportieren ihn parallel entlang einer Schleife c bei p . Wir erhalten dann einen Vektor $X' \in T_p M^+$, wobei $X'^{\mu} = X^{\mu} h_{\nu}{}^{\mu}$ ist. Beachten Sie, dass ∇ die holomorphen und die antiholomorphen Indizes nicht vermischt, weswegen X' keine Komponenten in $T_p M^-$ hat. Darauf hinaus erhält ∇ die Länge eines Vektors. Diese Tatsachen sagen uns, dass $(h_{\mu}{}^{\nu}(c))$ in $U(m) \subset O(2m)$ enthalten ist.

Satz 8.7. Wenn g die Ricci-flache Metrik einer m -dimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit M ist, dann ist die Holonomiegruppe in $SU(m)$ enthalten.

Beweis

Unser Beweis bleibt skizzenhaft. Wenn $X = X^{\mu} \partial/\partial z^{\mu} \in T_p M^+$ entlang des kleinen Parallelogramms in Abb. 8.5 zum Ausgangspunkt p paralleltransportiert wird, erhalten wir den Vektor $X' \in T_p M^+$, dessen Komponenten

$$X'^{\mu} = X^{\mu} + X^{\nu} R^{\mu}_{\nu\lambda} \varepsilon^{\lambda}{}^{\bar{\lambda}} \quad (8.99)$$

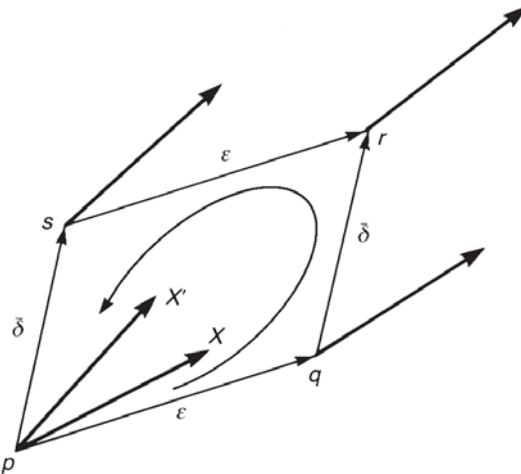


Abb. 8.5. $X \in T_p M^+$ wird entlang $pqr s$ paralleltransportiert und kommt als Vektor $X' \in T_p M^+$ am Ausgangspunkt an.

sind, vgl. (7.44). Daraus ergibt sich

$$h_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + R_{\mu\bar{\lambda}}^\nu \bar{\epsilon}^\kappa \bar{\delta}^\lambda. \quad (8.100)$$

$U(m)$ lässt sich in der Umgebung des neutralen Elements zerlegen in $U(m) = SU(m) \times U(1)$. Insbesondere wird die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(m) = T_e(U(m))$ in

$$\mathfrak{u}(m) = \mathfrak{su}(m) \oplus \mathfrak{u}(1) \quad (8.101)$$

separiert. $\mathfrak{su}(m)$ ist der spurfreie Anteil von $\mathfrak{u}(m)$, während $\mathfrak{u}(1)$ die Spur enthält. Da die vorliegende Metrik Ricci-flach ist, verschwindet der $\mathfrak{u}(1)$ -Anteil:

$$R_{\kappa\bar{\mu}\bar{\nu}}^\kappa \bar{\epsilon}^\mu \bar{\delta}^\nu = \mathfrak{R}_{\mu\bar{\nu}} \bar{\epsilon}^\mu \bar{\delta}^\nu = 0.$$

Dies zeigt, dass die Holonomiegruppe in $SU(m)$ enthalten ist.⁶

□

8.6 Harmonische Formen und $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppen

Die (r,s) -te $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppe ist definiert durch

$$H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) \equiv Z_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)/B_{\bar{\partial}}^{r,s}(M). \quad (8.102)$$

⁶ Streng genommen haben wir nur gezeigt, dass die eingeschränkte Holonomiegruppe in $SU(m)$ enthalten ist. Diese Aussage bleibt auch dann wahr, wenn M mehrfach zusammenhängend ist.

Ein Element $[\omega] \in H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ ist eine Äquivalenzklasse von $\bar{\partial}$ -geschlossenen Formen vom Bigrad (r,s) , welche sich von ω um eine $\bar{\partial}$ -exakte Form unterscheiden:

$$[\omega] = \{\eta \in \Omega^{r,s}(M) | \bar{\partial}\eta = 0, \omega - \eta = \bar{\partial}\psi, \psi \in \Omega^{r,s-1}(M)\}. \quad (8.103)$$

Offensichtlich ist $H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ ein komplexer Vektorraum. Ähnlich wie bei den De-Rham-Kohomologiegruppen sind die $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppen von \mathbb{C}^m trivial, d. h., alle geschlossenen (r,s) -Formen sind exakt. Die $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppen messen die topologische Nichttrivialität einer komplexen Mannigfaltigkeit M .

8.6.1 Die adjungierten Operatoren ∂^\dagger und $\bar{\partial}^\dagger$

Sei M eine Hermite'sche Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. Wir definieren das innere Produkt von $\alpha, \beta \in \Omega^{r,s}(M)$ ($0 \leq r, s \leq m$) durch

$$(\alpha, \beta) \equiv \int_M \alpha \wedge \bar{*} \beta, \quad (8.104)$$

wobei $\bar{*} : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{m-r, m-s}(M)$ über den **Hodge-Stern-Operator** (Hodge-*) definiert ist, siehe Abschnitt 7.9.2:

$$\bar{*}\beta \equiv \overline{* \beta} = * \bar{\beta}. \quad (8.105)$$

$*\beta$ wird wie in Gleichung (7.173) berechnet und dann auf $\Omega^{r+s}(M)^{\mathbb{C}}$ fortgesetzt.⁷

Wir definieren die adjungierten Operatoren ∂^\dagger und $\bar{\partial}^\dagger$ von ∂ und $\bar{\partial}$ durch

$$(\alpha, \partial\beta) = (\partial^\dagger \alpha, \beta), \quad (\alpha, \bar{\partial}\beta) = (\bar{\partial}^\dagger \alpha, \beta). \quad (8.106)$$

Die Operatoren ∂^\dagger und $\bar{\partial}^\dagger$ verändern den Bigrad einer Form gemäß $\partial^\dagger : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{r-1,s}(M)$ und $\bar{\partial}^\dagger : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{r,s-1}(M)$. Offensichtlich ist $d^\dagger = \partial^\dagger + \bar{\partial}^\dagger$. Wenn wir beachten, dass eine komplexe Mannigfaltigkeit M als differenzierbare Mannigfaltigkeit eine gerade Dimension hat, erhalten wir, vgl. (7.184a),

$$d^\dagger = -* d *. \quad (8.107)$$

Behauptung 8.3.

$$\partial^\dagger = -* \bar{\partial} *, \quad \bar{\partial}^\dagger = -* \partial *. \quad (8.108)$$

⁷ Der Hodge-* bildet eine (r,s) -Form auf eine $(m-s, m-r)$ -Form ab, da er – bis auf einen irrelevanten Faktor – auf einer Basis von $\Omega^{r,s}(M)$ wie

$$*dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_s} \sim \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\mu_{r+1} \dots \mu_m} \varepsilon^{\bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s}_{\nu_{s+1} \dots \nu_m} \cdot d\bar{z}^{\mu_{r+1}} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\mu_m} \wedge dz^{\nu_{s+1}} \wedge \dots \wedge dz^{\nu_m}$$

wirkt. Beachten Sie, dass die obigen ε -Symbole die einzigen nichtverschwindenden Komponenten in einer Hermite'schen Mannigfaltigkeit sind. Daraus folgt dann $\bar{*} : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{m-r, m-s}(M)$.

Beweis

Seien $\omega \in \Omega^{r-1,s}(M)$ und $\psi \in \Omega^{r,s}(M)$. Wenn wir beachten, dass $\omega \wedge \bar{*}\psi \in \Omega^{m-1,m}(M)$ und daher $\bar{\partial}(\omega \wedge \bar{*}\psi) = 0$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \bar{*}\psi) &= \partial(\omega \wedge \bar{*}\psi) = \partial\omega \wedge \bar{*}\psi + (-1)^{r+s-1} \omega \wedge \partial(\bar{*}\psi) \\ &= \partial\omega \wedge \bar{*}\psi + (-1)^{r+s-1} \omega \wedge (-1)^{r+s+1} \bar{*}\bar{\partial}(\bar{*}\psi) \\ &= \partial\omega \wedge \bar{*}\psi + \omega \wedge \bar{*}\bar{\partial}\bar{*}\psi, \end{aligned} \quad (8.109)$$

wobei verwendet wurde, dass $\partial\bar{*}\psi \in \Omega^{2m-r-s-1}(M)$ ist, sowie $\bar{*}\bar{\partial}\beta = * * \beta$ und (7.176a). Wenn wir (8.109) über eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit M ohne Rand integrieren, ergibt sich

$$0 = (\partial\omega, \psi) + (\omega, \bar{*}\bar{\partial}\bar{*}\psi).$$

Der zweite Term ist

$$(\omega, \bar{*}\bar{\partial}\bar{*}\psi) = (\omega, \bar{*}\overline{\bar{\partial}}\bar{*}\psi) = (\omega, \bar{*}\bar{\partial}*\psi).$$

Schließlich erhalten wir $0 = (\partial\omega, \psi) + (\omega, \bar{*}\bar{\partial}*\psi)$, also $\partial^\dagger = -*\bar{\partial}*$. Die andere Formel, $\bar{\partial}^\dagger = -*\partial*$, folgt auf ähnliche Weise. \square

Als ein Korollar von Behauptung 8.3 ergibt sich

$$(\partial^\dagger)^2 = (\bar{\partial}^\dagger)^2 = 0. \quad (8.110)$$

8.6.2 Laplace-Operatoren und der Satz von Hodge

Neben dem üblichen Laplace-Operator $\Delta = (dd^\dagger + d^\dagger d)$ können wir auf einer Hermite'schen Mannigfaltigkeit auch zwei andere Laplace-Operatoren Δ_∂ und $\Delta_{\bar{\partial}}$ definieren:

$$\Delta_\partial \equiv (\partial + \partial^\dagger)^2 = \partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial, \quad (8.111a)$$

$$\Delta_{\bar{\partial}} \equiv (\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger)^2 = \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial}. \quad (8.111b)$$

Eine (r,s) -Form ω , für die $\Delta_\partial\omega = 0$ ($\Delta_{\bar{\partial}}\omega = 0$) gilt, heißt **∂ -harmonisch** (**$\bar{\partial}$ -harmonisch**). Wenn $\Delta_\partial\omega = 0$ ($\Delta_{\bar{\partial}}\omega = 0$) ist, genügt ω der Gleichung $\partial\omega = \partial^\dagger\omega = 0$ ($\bar{\partial}\omega = \bar{\partial}^\dagger\omega = 0$).

Wir haben hier nun die komplexe Version der Hodge-Zerlegung vor uns. Sei $\text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ die Menge der $\bar{\partial}$ -harmonischen (r,s) -Formen:

$$\text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) \equiv \{\omega \in \Omega^{r,s}(M) | \Delta_{\bar{\partial}}\omega = 0\}. \quad (8.112)$$

Satz 8.8. (**Satz von Hodge**) $\Omega^{r,s}(M)$ hat die eindeutige orthogonale Zerlegung

$$\Omega^{r,s}(M) = \bar{\partial}\Omega^{r,s-1}(M) \oplus \bar{\partial}^\dagger\Omega^{r,s+1}(M) \oplus \text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r,s}(M), \quad (8.113a)$$

das bedeutet, eine (r, s) -Form ω lässt sich in eindeutiger Weise als

$$\omega = \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}^\dagger\beta + \gamma \quad (8.113b)$$

ausdrücken, mit $\alpha \in \Omega^{r, s-1}(M)$, $\beta \in \Omega^{r, s+1}(M)$ und $\gamma \in \text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$.

Den Beweis finden Sie z. B. bei Schwartz (1986) in Vorlesung 22. Wenn ω $\bar{\partial}$ -geschlossen ist, gilt $\bar{\partial}\omega = \bar{\partial}$ und $\bar{\partial}^\dagger\beta = 0$. Dann impliziert $0 = \langle \beta, \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger\beta \rangle = \langle \bar{\partial}^\dagger\beta, \bar{\partial}^\dagger\beta \rangle \geq 0$, dass $\bar{\partial}^\dagger\beta = 0$ ist. Somit lässt sich jede geschlossene (r, s) -Form ω als $\omega = \gamma + \bar{\partial}\alpha$ schreiben ($\alpha \in \Omega^{r, s-1}(M)$). Dies zeigt, dass $H_{\bar{\partial}}^{r, s}(M) \subset \text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$ ist. Beachten Sie auch, dass $\text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r, s}(M) \subset Z_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$ ist, wegen $\bar{\partial}\gamma = 0$ für $\gamma \in \text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$. Darüber hinaus gilt $\text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r, s}(M) \cap B_{\bar{\partial}}^{r, s}(M) = \emptyset$, weil $B_{\bar{\partial}}^{r, s}(M) = \bar{\partial}\Omega^{r, s-1}(M)$ orthogonal zu $\text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$ ist. Dann folgt $\text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r, s}(M) \cong H_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$. Wenn $P : \Omega^{r, s}(M) \rightarrow \text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$ den Projektionsoperator auf eine harmonische (r, s) -Form bezeichnet, hat $[\omega] \in H_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$ die eindeutige harmonische Darstellung $P\omega \in \text{Harm}_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$.

8.6.3 Laplace-Operatoren auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit

In einer allgemeinen Hermite'schen Mannigfaltigkeit gibt es keine besonderen Beziehungen zwischen den Laplace-Operatoren Δ , Δ_∂ und $\Delta_{\bar{\partial}}$. Wenn M jedoch eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist, sind die Laplace-Operatoren im Wesentlichen *gleich*. (Beachten Sie, dass der Levi-Civita-Zusammenhang in einer Kähler-Mannigfaltigkeit kompatibel mit dem Hermite'schen Zusammenhang ist.)

Satz 8.9. Sei M eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\Delta = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}}. \quad (8.114)$$

Der Beweis erfordert ein paar technische Kniffe, weswegen wir hier einfach auf Schwartz (1986) und Goldberg (1962) verweisen. Dieser Satz setzt einige Randbedingungen für die Kohomologiegruppen einer Kähler-Mannigfaltigkeit M . Eine Form ω , für die $\bar{\partial}\omega = \bar{\partial}^\dagger\omega = 0$ gilt, erfüllt ebenso $\partial\omega = \partial^\dagger\omega = 0$. Sei ω eine holomorphe p -Form: $\bar{\partial}\omega = 0$. Da ω in seiner Entwicklung keine $d\bar{z}^\mu$ enthält, erhalten wir $\bar{\partial}^\dagger\omega = 0$ und daher $\Delta_{\bar{\partial}}\omega = (\bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial})\omega = 0$. Entsprechend Satz 8.9 ergibt sich $\Delta\omega = 0$, d. h., *jede holomorphe Form ist automatisch harmonisch* in Bezug auf die Kähler-Metrik. Umgekehrt impliziert $\Delta\omega = 0$, dass $\bar{\partial}\omega = 0$ ist, und daher ist jede harmonische Form vom Bigrad $(p, 0)$ holomorph.

8.6.4 Die Hodge-Zahlen von Kähler-Mannigfaltigkeiten

Die komplexe Dimension von $H_{\bar{\partial}}^{r, s}(M)$ wird **Hodge-Zahl** $b^{r, s}$ genannt. Die Kohomologiegruppen einer komplexen Mannigfaltigkeit fasst man in dem **Hodge-Diaman-**

ten⁸) zusammen:

$$\begin{pmatrix} & & b^{m,m} & \\ & b^{m,m-1} & & b^{m-1,m} \\ & \cdots & \cdots & \\ b^{m,0} & b^{m-1,1} & \cdots & b^{1,m-1} & b^{0,m} \\ & \cdots & \cdots & & \\ & b^{1,0} & & b^{0,1} & \\ & & b^{0,0} & & \end{pmatrix}. \quad (8.115)$$

Diese $(m+1)^2$ Hodge-Zahlen sind alles andere als voneinander unabhängig, wie wir noch sehen werden.

Satz 8.10. Sei M eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. Dann erfüllen die Hodge-Zahlen die Gleichungen

$$(a) \quad b^{r,s} = b^{s,r}, \quad (8.116)$$

$$(b) \quad b^{r,s} = b^{m-r,m-s}. \quad (8.117)$$

Beweis

(a) Wenn $\omega \in \Omega^{r,s}(M)$ harmonisch ist, erfüllt es die Gleichung $\Delta_{\bar{\partial}}\omega = \Delta_{\partial}\omega = 0$. Dann ist die (s,r) -Form $\bar{\omega}$ ebenfalls harmonisch: $\Delta_{\bar{\partial}}\bar{\omega} = 0$, wegen $\Delta_{\bar{\partial}}\bar{\omega} = \overline{\Delta_{\partial}\omega} = \overline{\Delta_{\bar{\partial}}\omega} = 0$ (beachten Sie $\Delta_{\partial} = \Delta_{\bar{\partial}}$). Somit existiert für jede harmonische Form vom Bigrad (r,s) eine harmonische Form vom Bigrad (s,r) und umgekehrt. Daraus folgt $b^{r,s} = b^{s,r}$.

(b) Seien $\omega \in \Omega^{r,s}(M)$ und $\psi \in H_{\bar{\partial}}^{m-r,m-s}(M)$. Dann ist $\omega \wedge \psi$ ein Volumenelement und es lässt sich zeigen (Schwartz 1986): Das Integral $\int_M \omega \wedge \psi$ definiert eine *nichtsinguläre* Abbildung $H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) \times H_{\bar{\partial}}^{m-r,m-s}(M) \rightarrow \mathbb{C}$ und somit die Dualität von $H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ und $H_{\bar{\partial}}^{m-r,m-s}(M)$. Dies zeigt, dass $H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ isomorph zu $H_{\bar{\partial}}^{m-r,m-s}(M)$ als ein Vektorraum ist, und daraus folgt $\dim_{\mathbb{C}} H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) = \dim_{\mathbb{C}} H_{\bar{\partial}}^{m-r,m-s}(M)$ und daher $b^{r,s} = b^{m-r,m-s}$. \square

Dementsprechend ist die Hodge-Raute einer Kähler-Mannigfaltigkeit symmetrisch bezüglich der vertikalen und der horizontalen Achse. Diese Symmetrien reduzieren die Zahl der unabhängigen Hodge-Zahlen auf $(\frac{1}{2}m+1)^2$, wenn m gerade ist, und auf $\frac{1}{4}(m+1)(m+3)$, wenn m ungerade ist.

In einer allgemeinen Hermite'schen Mannigfaltigkeit gibt es keine direkten Beziehungen zwischen den Betti-Zahlen und den Hodge-Zahlen. Wenn M hingegen eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist, stellt Satz 8.11 eine enge Beziehung zwischen ihnen her.

⁸ Der englische Ausdruck „Hodge diamond“ müsste eigentlich korrekt als „Hodge-Raute“ übersetzt werden (Anm. d. Ü.).

Satz 8.11. Es sei M eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ und $\partial M = \emptyset$. Dann genügen die Betti-Zahlen b^p ($1 \leq p \leq 2m$) den folgenden Bedingungen:

$$(a) \quad b^p = \sum_{r+s=p} b^{r,s}, \quad (8.118)$$

$$(b) \quad b^{2p-1} \text{ ist gerade} \quad (1 \leq p \leq m), \quad (8.119)$$

$$(c) \quad b^{2p} \geq 1 \quad (1 \leq p \leq m). \quad (8.120)$$

Beweis

(a) $H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ ist ein komplexer Vektorraum, der von $\Delta_{\bar{\partial}}$ -harmonischen (r,s) -Formen aufgespannt wird: $H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) = \{[\omega] \mid \omega \in \Omega^{r,s}(M), \Delta_{\bar{\partial}}\omega = 0\}$. Der reelle Vektorraum $H^p(M)$ wiederum wird von Δ -harmonischen p -Formen aufgespannt: $H^p(M) = \{[\omega] \mid \omega \in \Omega^p(M), \Delta\omega = 0\}$. Dann ist die Komplexifizierung von $H^p(M)$ der Raum $H^p(M)^{\mathbb{C}} = \{[\omega] \mid \omega \in \Omega^p(M)^{\mathbb{C}}, \Delta\omega = 0\}$. Da M Kähler'sch ist, erfüllt jede Form ω , welche der Bedingung $\Delta_{\bar{\partial}}\omega = 0$ genügt, auch $\Delta\omega = 0$ und umgekehrt. Wegen

$$\Omega^p(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=p} \Omega^{r,s}(M)$$

erhalten wir

$$H^p(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=p} H^{r,s}(M).$$

Unter Beachtung von $\dim_{\mathbb{R}} H^p(M) = \dim_{\mathbb{C}} H^p(M)^{\mathbb{C}}$ erhalten wir $b^p = \sum_{r+s=p} b^{r,s}$.

(b) Aus (a) und (8.117) folgt

$$b^{2p-1} = \sum_{r+s=2p-1} b^{r,s} = 2 \cdot \sum_{\substack{r+s=2p-1 \\ r>s}} b^{r,s}.$$

Somit muss b^{2p-1} gerade sein.

(c) Die entscheidende Beobachtung ist hier, dass die Kähler-Form Ω eine geschlossene *reelle* 2-Form ist, $d\Omega = 0$, und dass die reelle 2p-Form

$$\Omega^p = \underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_p$$

ebenfalls geschlossen ist: $d\Omega^p = 0$. Wir zeigen, dass Ω^p nicht exakt ist. Nehmen wir an, es sei $\Omega^p = d\eta$ für irgendein $\eta \in \Omega^{2p-1}(M)$. Dann ist $\Omega^m = \Omega^{m-p} \wedge \Omega^p = d(\Omega^{m-p} \wedge \eta)$. Aus dem Stokes'schen Satz ergibt sich

$$\int_M \Omega^m = \int_M d(\Omega^{m-p} \wedge \eta) = \int_{\partial M} \Omega^{m-p} \wedge \eta = 0.$$

Da die linke Seite der Gleichung das Volumen von M ist, ist dies ein Widerspruch. Darum hat $H^{2p}(M)$ mindestens ein nichttriviales Element, und wir haben bewiesen: $b^{2p} \geq 1$. \square

Wenn eine Kähler-Mannigfaltigkeit Ricci-flach ist, existiert eine zusätzliche Beziehung zwischen den Hodge-Zahlen, welche die Anzahl der unabhängigen Hodge-Zahlen noch weiter reduziert, siehe Horowitz (1986) und Candelas (1988).

8.7 Fastkomplexe Mannigfaltigkeiten

Dieser und der nächste Abschnitt behandeln Räume, die eng mit den komplexen Mannigfaltigkeiten verwandt sind. Dies sind eher spezielle Themen, die Sie beim ersten Lesen auch auslassen können.

8.7.1 Definitionen

Es gibt differenzierbare Mannigfaltigkeiten, welche eine Struktur haben, die derjenigen von komplexen Mannigfaltigkeiten ähnelt. Um diese Mannigfaltigkeiten zu untersuchen, schwächen wir Bedingung (8.16) gewissermaßen etwas ab.

Definition 8.5. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das Paar (M, J) , oder einfach M , wird eine **fastkomplexe Mannigfaltigkeit** genannt, wenn ein Tensorfeld J vom Typ $(1, 1)$ existiert, sodass an jedem Punkt p von M gilt: $J_p^2 = -\text{id}_{T_p M}$. Dieses Tensorfeld J heißt auch **fastkomplexe Struktur**.

Wegen $J_p^2 = -\text{id}_{T_p M}$ hat J_p die Eigenwerte $\pm i$. Wenn es m Eigenwerte $+i$ gibt, muss es ebenso viele Eigenwerte $-i$ geben, daher ist J_p eine $(2m \times 2m)$ -Matrix und $J_p^2 = -I_{2m}$. Somit hat die Mannigfaltigkeit M eine gerade Dimension. Beachten Sie, dass nicht alle Mannigfaltigkeiten mit gerader Dimension fastkomplex sind. Beispielsweise ist die S^4 keine fastkomplexe Mannigfaltigkeit (Steenrod 1951). Beachten Sie auch, dass wir jetzt nur noch die schwächere Bedingung $J_p^2 = -I_{2m}$ fordern. Natürlich genügt der durch (8.16) definierte Tensor J_p der Bedingung $J_p^2 = -I_{2m}$, daher ist jede komplexe Mannigfaltigkeit auch eine fastkomplexe Mannigfaltigkeit. Es gibt aber fastkomplexe Mannigfaltigkeiten, die keine komplexen Mannigfaltigkeiten sind. So weiß man, dass die S^6 eine fastkomplexe Struktur erlaubt, obwohl sie *keine* komplexe Mannigfaltigkeit ist (Fröhlicher 1955).

Lassen Sie uns einen Tangentialraum einer fastkomplexen Mannigfaltigkeit (M, J) komplexifizieren. Wenn J_p eine lineare Transformation bei $T_p M$ ist, sodass $J_p^2 = -I_{2m}$ gilt, setzen wir J_p zu einer \mathbb{C} -linearen Abbildung fort, die auf $T_p M^\mathbb{C}$ definiert ist. Die auf $T_p M^\mathbb{C}$ definierte Transformation J_p erfüllt ebenfalls $J_p^2 = -I_{2m}$:

$$J_p^2(X + iY) = J_p^2X + iJ_p^2Y = -X + i(-Y) = -(X + iY).$$

Dabei sind $X, Y \in T_p M$. Wir zerlegen nun $T_p M^\mathbb{C}$ in zwei disjunkte Untervektorräume, entsprechend dem Eigenwert von J_p :

$$T_p M^\mathbb{C} = T_p M^+ \oplus T_p M^- . \quad (8.121)$$

Dabei ist

$$T_p M^\pm = \{Z \in T_p M^\mathbb{C} \mid J_p Z = \pm iZ\}. \quad (8.122)$$

Jeder Vektor $V \in T_p M^{\mathbb{C}}$ lässt sich als $V = W_1 + \overline{W}_2$ schreiben, mit $W_1, W_2 \in T_p M^+$. Beachten Sie, dass $J_p V = iW_1 - i\overline{W}_2$ ist. An dieser Stelle ist Ihnen möglicherweise bereits aufgefallen, dass wir jetzt der Klassifikation von Vektoren und Vektorfeldern folgen können, die wir in Abschnitt 8.2 für die komplexen Mannigfaltigkeiten entwickelt hatten. Tatsächlich besteht der einzige Unterschied darin, dass auf einer komplexen Mannigfaltigkeit die fastkomplexe Struktur explizit durch Gleichung (8.18) gegeben ist, während sie auf einer fastkomplexen Mannigfaltigkeit lediglich der weniger strengen Bedingung $J_p^2 = -I_{2m}$ gehorchen muss. Um die komplexifizierten Tangentialräume und Vektorräume zu klassifizieren, brauchen wir nur die letztere Bedingung. Dementsprechend separieren wir $T_p M^{\mathbb{C}}$ in $T_p M^{\pm}$ und $\mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}}$ in $\mathcal{X}(M)^{\pm}$, obwohl nicht notwendigerweise für $T_p M^+$ eine Basis von der Form $\{\partial/\partial z^\mu\}$ existieren muss. Wir können auch hier die Projektionsoperatoren

$$\mathcal{P}^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\text{id}_{T_p M} \mp iJ_p) : T_p M^{\mathbb{C}} \rightarrow T_p M^{\pm} \quad (8.123)$$

definieren. Wir nennen einen Vektor in $T_p M^+$ ($T_p M^-$) einen holomorphen (antiholomorphen) Vektor und ein Vektorfeld in $\mathcal{X}(M)^+$ ($\mathcal{X}(M)^-$) ein holomorphes (antiholomorphes) Vektorfeld.

Definition 8.6. Sei (M, J) eine fastkomplexe Mannigfaltigkeit. Wenn die Lie-Klammer von zwei beliebigen holomorphen Vektorfeldern $X, Y \in \mathcal{X}^+(M)$ wiederum ein holomorphes Vektorfeld ist, also $[X, Y] \in \mathcal{X}^+(M)$ ist, sagt man, die fastkomplexe Struktur J sei **integrabel**.

Sei (M, J) eine fastkomplexe Mannigfaltigkeit. Wir definieren das **Nijenhuis-Tensorfeld** $N : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ durch

$$N(X, Y) \equiv [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]. \quad (8.124)$$

In einer gegebenen Basis $\{e^\mu = \partial/\partial x^\mu\}$ und der dualen Basis $\{dx^\mu\}$ wird die fastkomplexe Struktur als $J = J_\mu^\lambda dx^\mu \otimes \partial/\partial x^\lambda$ ausgedrückt. In Komponenten sieht N folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= (X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu) e_\mu \\ &\quad + J_\lambda^\mu \{J_\kappa^\nu X^\kappa \partial_\nu Y^\lambda - Y^\nu \partial_\nu (J_\kappa^\lambda X^\kappa)\} e_\mu \\ &\quad + J_\lambda^\mu \{X^\nu \partial_\nu (J_\kappa^\lambda Y^\kappa) - J_\kappa^\nu Y^\kappa \partial_\nu X^\lambda\} e_\mu \\ &\quad - \{J_\kappa^\nu X^\kappa \partial_\nu (J_\lambda^\mu Y^\lambda) - J_\kappa^\nu Y^\kappa \partial_\nu (J_\lambda^\mu X^\lambda)\} e_\mu \\ &= X^\kappa Y^\nu \left[-J_\lambda^\mu (\partial_\nu J_\kappa^\lambda) + J_\lambda^\mu (\partial_\kappa J_\nu^\lambda) \right. \\ &\quad \left. - J_\kappa^\lambda (\partial_\lambda J_\nu^\mu) + J_\nu^\lambda (\partial_\lambda J_\kappa^\mu) \right] e_\mu. \end{aligned} \quad (8.125)$$

Damit ist N in der Tat linear in X und Y und mithin ein Tensor. Ist J eine komplexe Struktur, dann ist sie durch Gleichung (8.18) gegeben und das Nijenhuis-Tensorfeld verschwindet trivial.

Satz 8.12. Eine fastkomplexe Struktur J auf einer Mannigfaltigkeit M ist dann und nur dann integriabel, wenn für beliebige $A, B \in \mathcal{X}(M)$ gilt $N(A, B) = 0$.

Beweis

Seien $Z = X + iY$, $W = U + iV \in \mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}}$. Wir setzen das Nijenhuis-Tensorfeld so fort, dass seine Wirkung auf Vektorfelder in $\mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} N(Z, W) &= [Z, W] + J[JZ, W] + J[Z, JW] - [JZ, JW] \\ &= \{N(X, U) - N(Y, V)\} + i\{N(X, V) + N(Y, U)\}. \end{aligned} \quad (8.126)$$

Es sei nun $N(A, B) = 0$ für beliebige $A, B \in \mathcal{X}(M)$. Aus (8.126) ergibt sich, dass $N(Z, W) = 0$ für $Z, W \in \mathcal{X}^{\mathbb{C}}(M)$ ist. Seien $Z, W \in \mathcal{X}^+(M) \subset \mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}}$. Wegen $JZ = iZ$ und $JW = iW$ gilt $N(Z, W) = 2\{[Z, W] + iJ[Z, W]\}$. Nach Voraussetzung ist $N(Z, W) = 0$, sodass folgt $[Z, W] = -iJ[Z, W]$ oder $J[Z, W] = i[Z, W]$, also $[Z, W] \in \mathcal{X}^+(M)$. Damit ist die fastkomplexe Struktur integriabel.

Sei umgekehrt J integriabel. Da $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}(M)$ eine direkte Summe von $\mathcal{X}^+(M)$ und $\mathcal{X}^-(M)$ ist, können wir $Z, W \in \mathcal{X}^{\mathbb{C}}(M)$ in $Z = Z^+ + Z^-$ und $W = W^+ + W^-$ separieren. Dann ist

$$N(Z, W) = N(Z^+, W^+) + N(Z^+, W^-) + N(Z^-, W^+) + N(Z^-, W^-).$$

Wegen $JZ^{\pm} = \pm iZ^{\pm}$ und $JW^{\pm} = \pm iW^{\pm}$ sieht man leicht: $N(Z^+, W^-) = N(Z^-, W^+) = 0$. Außerdem erhalten wir

$$\begin{aligned} N(Z^+, W^+) &= [Z^+, W^+] + J[iZ^+, W^+] + J[Z^+, iW^+] - [iZ^+, iW^+] \\ &= 2[Z^+, W^+] - 2[Z^+, W^+] = 0, \end{aligned}$$

wegen $J[Z^+, W^+] = i[Z^+, W^+]$. Ähnlich verschwindet $N(Z^-, W^-)$, und wir haben gezeigt, dass $N(Z, W) = 0$ für alle $Z, W \in \mathcal{X}^{\mathbb{C}}(M)$ ist. Insbesondere sollte es für $Z, W \in \mathcal{X}(M)$ verschwinden. \square

Wenn M eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, ist die komplexe Struktur J ein konstantes Tensorfeld, und das Nijenhuis-Tensorfeld verschwindet. Was ist mit der umgekehrten Richtung? Wir stellen einen wichtigen (und schwierig zu beweisenden) Satz auf:

Satz 8.13.

(Newlander und Nirenberg 1957) Sei (M, J) eine $2m$ -dimensionale fastkomplexe Mannigfaltigkeit. Wenn J integriabel ist, ist die Mannigfaltigkeit M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit der fastkomplexen Struktur J .

Summa summarum können wir sagen:

$$\text{integriable fastkomplexe Struktur} = \text{verschwindendes Nijenhuis-Tensorfeld} = \text{komplexe Mannigfaltigkeit}.$$

8.8 Orbifolds

Seien M eine Mannigfaltigkeit und G eine *diskrete* Gruppe, die auf M wirkt. Dann nennt man den Quotientenraum $\Gamma \equiv M/G$ eine **Orbifold**. Wie wir später sehen werden, existieren in M Fixpunkte, die unter der Wirkung von G nicht transformiert werden. Diese Punkte sind singulär, und die Orbifold ist im Allgemeinen keine Mannigfaltigkeit. Damit kann sich aus einer simplen Mannigfaltigkeit M eine Orbifold M/G mit einer ziemlich komplizierten Topologie ergeben.

8.8.1 Eindimensionale Beispiele

Um eine etwas konkretere Vorstellung zu bekommen, starten wir mit einem einfachen Beispiel. Wir betrachten $M = \mathbb{R}^2$ und identifizieren diese mit der komplexen Ebene \mathbb{C} . Dann wählen wir $G = \mathbb{Z}_3$ und identifizieren die Punkte z , $e^{2\pi i/3}z$ und $e^{4\pi i/3}z$. Die Orbifold M/G besteht aus einem Drittel der komplexen Ebene, und nach Identifizieren der Kanten landen wir bei einem Kegel, siehe Abb. 8.6. Es ist interessant, sich die Holonomiegruppe dieser Orbifold anzusehen. Wir nutzen den flachen Zusammenhang, der von der euklidischen Metrik von \mathbb{C} induziert wird. Dann erhalten wir nach Paralleltransport eines Vektors V entlang der Schleife C (diese ist wirklich eine Schleife!) einen Vektor \tilde{V} , der sich von V nach der Identifizierung unterscheidet. Beachten Sie, dass der Winkel zwischen V und \tilde{V} $2\pi/3$ beträgt. Man überprüft leicht, dass die Holonomiegruppe die \mathbb{Z}_3 ist. Da die Holonomie für die Schleife C_0 , welche nicht um den Ursprung läuft, trivial ist, stellen wir fest, dass die Krümmung am Ursprung singulär ist (erinnern Sie sich daran, dass die Krümmung die Nichttrivialität der Holonomie misst, siehe Abschnitt 7.3). Im Allgemeinen sind die Fixpunkte (im vorliegenden Fall der Ursprung) singuläre Punkte der Krümmung. Beachten Sie jedoch, dass \mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 eine Mannigfaltigkeit *ist*, da sie eine offene Überdeckung hat, die homöomorph zum \mathbb{R}^2 ist.

Ein weniger triviales Beispiel erhält man, wenn man den Torus als Mannigfaltigkeit wählt. Wir identifizieren die Punkte z und $z + m + ne^{i\pi/3}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) in der komplexen Ebene wie in Abb. 8.7(a). Wenn wir die Kanten des Parallelogramms OPQR identifizieren, erhalten wir den Torus T^2 . Nun wirke \mathbb{Z}_3 auf den T^2 gemäß $\alpha : z \mapsto e^{2\pi i/3}z$. Wir ermitteln die drei nicht äquivalenten Fixpunkte $z = (n/\sqrt{3})e^{i\pi/6}$, wobei $n = 0, 1$ oder 2 ist. Diese Orbifold $\Gamma = T^2/\mathbb{Z}_3$ besteht aus zwei Dreiecken, die einen Hohlraum umgeben, vgl. Abb. 8.7(b). Wenn wir den Paralleltransport von Vektoren über den von der flachen Metrik des Torus induzierten flachen Zusammenhang definieren, stellen wir fest, dass die Holonomie um jeden Fixpunkt die \mathbb{Z}_3 ist.

8.8.2 Dreidimensionale Beispiele

Orbifolds mit drei komplexen Dimensionen wurden als Kandidaten für die Komplektifizierung von Superstringtheorien vorgeschlagen. Eine detaillierte Behandlung

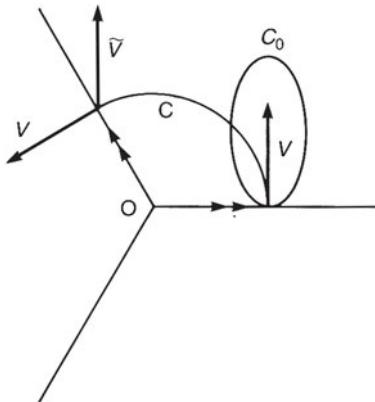


Abb. 8.6. Die Orbifold C/\mathbb{Z}_3 besteht aus einem Drittel der komplexen Ebene. Die Kanten der Orbifold werden wie gezeigt identifiziert. V wird nach einem Paralleltransport entlang C zu einem Vektor \tilde{V} . Der Winkel zwischen V und \tilde{V} beträgt $2\pi/3$.

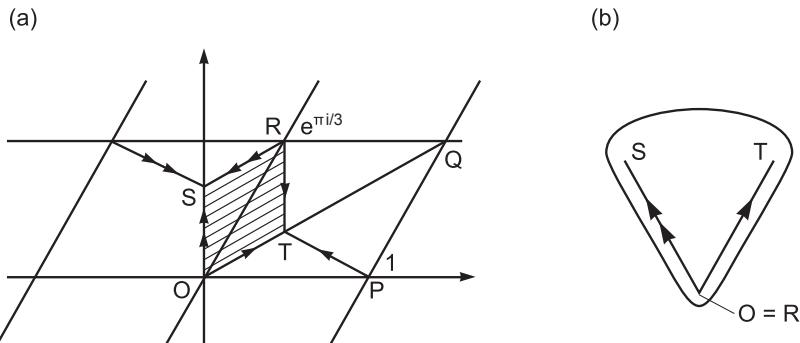


Abb. 8.7. Unter der Wirkung von \mathbb{Z}_3 werden Punkte auf dem Torus T^2 identifiziert. Die schraffierte Fläche ist die Orbifold $\Gamma = T^2/\mathbb{Z}_3$. Wenn die Kanten der Orbifold identifiziert werden, landen wir bei dem Objekt in (b), das homöomorph zur Sphäre S^2 ist.

dieses Themas liegt außerhalb des Rahmens dieses Buchs. Konsultieren Sie hierzu Dixon *et al.* (1985, 1986) und Green *et al.* (1987).

Sei $T = \mathbb{C}^3/L$ ein dreidimensionaler komplexer Torus, wobei L ein Gitter in \mathbb{C}^3 ist. Der Deutlichkeit halber seien (z_1, z_2, z_3) die Koordinaten von \mathbb{C}^3 , und wir identifizieren z_i und $z_i + m + ne^{\pi i/3}$. Unter dieser Identifizierung wird T mit einem Produkt von drei Tori identifiziert: $T = T_1 \times T_2 \times T_3$. T lässt wie gehabt die Wirkung von \mathbb{Z}_3 zu gemäß $\alpha : z_i \mapsto e^{2\pi i/3} z_i$. Wenn jedes z_i einen der Werte $0, (1/\sqrt{3})e^{i\pi/6}, (2/\sqrt{3})e^{\pi i/6}$ annimmt, lässt die Wirkung von α den Punkt (z_i) invariant. Somit gibt es $3^3 = 27$

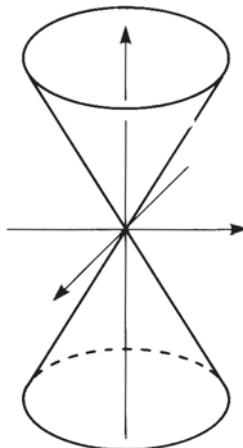


Abb. 8.8. Die konische Singularität. Der Ursprung sieht nicht aus wie \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n .

Fixpunkte in der Orbifold. Im vorliegenden Fall ist der Fixpunkt eine konische Singularität (Abb. 8.8), und die Orbifold kann keine Mannigfaltigkeit sein.⁹

⁹ Das Auftreten der konischen Singularität wird mit einem einfacheren Beispiel besser verständlich: Sei $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, und es wirke \mathbb{Z}_2 auf \mathbb{C}^2 wie $(x, y) \mapsto \pm(x, y)$. Dann hat die Orbifold $\Gamma = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ eine konische Singularität am Ursprung. Tatsächlich ist $[(x, y)] \mapsto (x^2, xy, y^2) \equiv (X, Y, Z)$ eine Einbettung von Γ in \mathbb{C}^3 . Beachten Sie, dass X, Y und Z über $Y^2 = XZ$ zusammenhängen. Wenn man X, Y und Z als reelle Variablen ansieht, ist dies einfach die Gleichung eines Konus bzw. Kegels.

9

Faserbündel

Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal wie der \mathbb{R}^m aussieht, aber nicht notwendigerweise auch global. Durch Einführen einer Karte geben wir der Mannigfaltigkeit eine lokale euklidische Struktur, was es uns ermöglicht, konventionelle Analysis mit mehreren Variablen zu betreiben. Ein Faserbündel ist sozusagen ein topologischer Raum, der lokal wie ein direktes Produkt von zwei topologischen Räumen aussieht. Viele physikalische Theorien, wie die Allgemeine Relativitätstheorie und Eichtheorien, lassen sich auf natürliche Weise mithilfe von Faserbündeln formulieren.

Relevante Referenzwerke sind Choquet-Bruhat *et al.* (1982), Eguchi *et al.* (1980) und Nash und Sen (1983). Eine vollständige Darstellung finden Sie bei Kobayashi und Nomizu (1963, 1969) und Steenrod (1951).

9.1 Tangentialbündel

Wir beginnen unsere Exposition mit einem motivierenden Beispiel. Ein **Tangentialbündel** TM über einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Kollektion aller Tangentialräume von M :

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (9.1)$$

Die Mannigfaltigkeit M , über die TM definiert wird, heißt **Basisraum** (oder nur Basis). Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M . Wenn $x^\mu = \varphi_i(p)$ die Koordinate auf U_i ist, wird ein Element von

$$TU_i \equiv \bigcup_{p \in U_i} T_p M$$

durch einen Punkt $p \in M$ und einen Vektor $V = V^\mu(p)(\partial/\partial x^\mu)|_p \in T_p M$ spezifiziert. Wenn wir beachten, dass U_i homöomorph zu einer offenen Teilmenge $\varphi(U_i)$ des \mathbb{R}^m und jedes $T_p M$ homöomorph zu \mathbb{R}^m ist, stellen wir fest, dass sich TU_i mit einem direkten Produkt $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ identifizieren lässt (Abb. 9.1). Für $(p, V) \in TU_i$ ist die Gleichsetzung durch $(p, V) \mapsto (x^\mu(p), V^\mu(p))$ gegeben. TU_i ist eine $2m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Was noch wichtiger ist, TU_i lässt sich in ein direktes Produkt $U_i \times \mathbb{R}^m$ zerlegen. Wenn wir uns einen Punkt u aus TU_i heraussuchen,

können wir systematisch die in u enthaltene Information zerlegen in einen Punkt $p \in M$ und einen Vektor $V \in T_p M$. Auf diese Weise kommen wir ganz natürlich auf das Konzept einer **Projektion** $\pi : TU_i \rightarrow U_i$ (Abb. 9.1). Für einen beliebigen Punkt $u \in TU_i$ ist $\pi(u)$ ein Punkt $p \in U_i$, an dem der Vektor definiert ist. Die Information über den Vektor geht unter der Projektion vollständig verloren. Beachten Sie, dass $\pi^{-1}(p) = T_p M$ ist. Im Kontext der Theorie der Faserbündel wird $T_p M$ als **Faser** bei p bezeichnet.

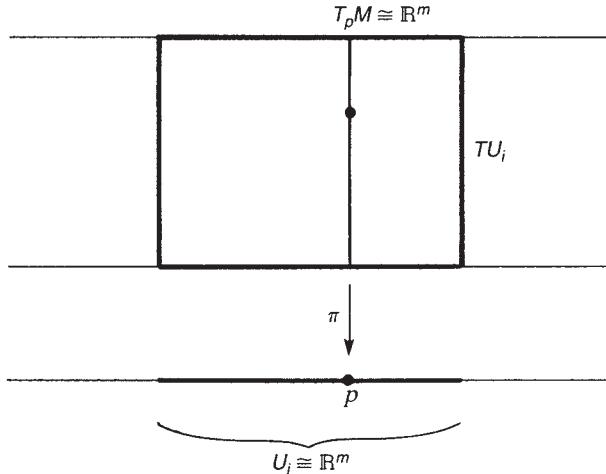


Abb. 9.1. Ein lokales Stück $TU_i \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ eines Tangentialbündels TM . Die Projektion π projiziert einen Vektor $V \in T_p M$ auf den Punkt p .

Es ist aufgrund der Konstruktion offensichtlich, dass für $M = \mathbb{R}^m$ das Tangentialbündel selbst als ein direktes Produkt $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ausgedrückt wird. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, und die nichttriviale Struktur des Tangentialbündels ist ein Maß für die topologische Nichttrivialität von M . Um dies einzusehen, müssen wir uns nicht nur eine einzelne Karte U_i anschauen, sondern außerdem auch andere Karten. Sei U_j eine Karte, sodass $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, und die $y^\mu = \psi(p)$ die Koordinaten auf U_j sind. Wir betrachten einen Vektor $V \in T_p M$ mit $p \in U_i \cap U_j$. Dabei hat V zwei Koordinatendarstellungen:

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p = \tilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Big|_p. \quad (9.2)$$

Man sieht leicht, dass zwischen den beiden Darstellungen der Zusammenhang

$$\tilde{V}^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}(p) V^\mu \quad (9.3)$$

besteht. Damit $\{x^\mu\}$ und $\{y^\nu\}$ gute Koordinatensysteme sind, muss die Matrix $(G_\mu^\nu) \equiv (\partial y^\nu / \partial x^\mu)$ nichtsingulär sein: $(G_\mu^\nu) \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$. Somit werden Faserkoordinaten bei

jedem Koordinatenwechsel durch ein Element von $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ rotiert. Die *Gruppe* $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ wird **Strukturgruppe** von TM genannt. Auf diese Weise werden die Fasern miteinander „verwoben“ und bilden ein Tangentialbündel, das demzufolge eine recht komplizierte topologische Struktur haben kann.

Quasi *en passant* bemerken wir, dass die Projektion π auf M global definiert werden kann. Es ist offensichtlich, dass $\pi(u) = p$ nicht von einer speziellen Koordinatenwahl abhängt. Somit ist $\pi : TM \rightarrow M$ ohne Bezugnahme auf lokale Karten global definiert.

Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M . X weist jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor $X|_p \in T_p M$ zu. In unserer jetzigen Betrachtungsweise ist X eine glatte Abbildung $M \rightarrow TM$. Diese Abbildung ist nicht vollkommen beliebig, da ein Punkt p auf einen Punkt $u \in TM$ so abgebildet werden muss, dass $\pi(u) = p$ ist. Wir definieren einen **Schnitt** (auf Englisch auch „cross section“) von TM als eine glatte Abbildung $s : M \rightarrow TM$, sodass $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ ist. Wenn ein Schnitt $s_i : U_i \rightarrow TU_i$ nur auf einer Karte U_i definiert ist, heißt er **lokaler Schnitt**.

9.2 Faserbündel

Das Tangentialbündel im vorherigen Abschnitt ist ein Beispiel für eine allgemeinere Struktur namens Faserbündel. Definitionen sind jetzt definitiv angezeigt.

9.2.1 Definitionen

Definition 9.1. Ein (differenzierbares) Faserbündel (E, π, M, F, G) besteht aus den folgenden Objekten:

- (i) einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit E , dem **Totalraum**;
- (ii) einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M namens **Basisraum**;
- (iii) einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit F namens **Faser** oder **typische Faser**;
- (iv) einer Surjektion $\pi : E \rightarrow M$, die **Projektion** genannt wird; das Urbild $\pi^{-1}(p) = F_p \cong F$ heißt Faser bei p ;
- (v) einer Lie-Gruppe G , der **Strukturgruppe**, welche von links auf F wirkt;
- (vi) einer Menge von offenen Überdeckungen $\{U_i\}$ von M mit einem Diffeomorphismus $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ mit $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$, welchen man **lokale Trivialisierung** nennt, da ϕ_i^{-1} das Urbild $\pi^{-1}(U_i)$ *surjektiv* auf das direkte Produkt $U_i \times F$ abbildet.
- (vii) Wenn wir $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$ schreiben, ist die Abbildung $\phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$ ein Diffeomorphismus. Wir verlangen auf $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, dass $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \rightarrow F$

ein Element von G ist. Dann hängen ϕ_i und ϕ_j über eine glatte Abbildung $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ gemäß

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f) \quad (9.4)$$

zusammen, vgl. Abb. 9.2. Die Abbildungen t_{ij} heißen **Übergangsfunktionen**.¹

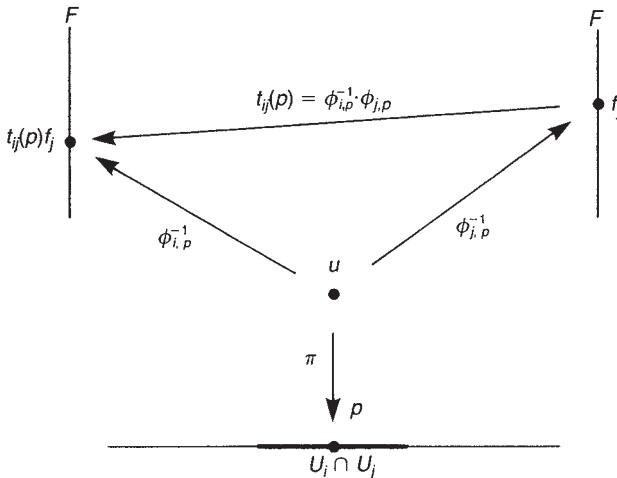


Abb. 9.2. Auf dem „Überlapp“ $U_i \cap U_j$ werden zwei Elemente $f_i, f_j \in F$ dem Punkt $u \in \pi^{-1}(p)$ zugewiesen ($p \in U_i \cap U_j$). Sie hängen mittels $t_{ij}(p)$ wie $f_i = t_{ij}(p)f_j$ zusammen.

Wir sollten einige Punkte klarstellen. Zu einer Karte U_i des Basisraums M ist $\pi^{-1}(U_i)$ ein direktes Produkt, das zu $U_i \times F$ diffeomorph ist, mit dem Diffeomorphismus $\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$. Wenn $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist, haben wir zwei Abbildungen ϕ_i und ϕ_j auf $U_i \cap U_j$. Wählen wir einen Punkt u , sodass $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$. Wir weisen dann diesem u zwei Elemente von F zu, eines mittels ϕ_i^{-1} und eines über ϕ_j^{-1} :

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, f_i), \quad \phi_j^{-1}(u) = (p, f_j), \quad (9.5)$$

¹ Anmerkungen: Wir verwenden für ein Faserbündel (E, π, M, F, G) oft die Kurznotation „ $E \xrightarrow{\pi} M$ “ oder auch nur „ E “.

Streng genommen sollte die Definition eines Faserbündels unabhängig von der speziellen Überdeckung $\{U_i\}$ von M sein. In der mathematischen Literatur wird diese Definition verwendet, um ein **Koordinatenbündel** $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\}, \{\phi_i\})$ zu definieren. Man sagt, zwei Koordinatenbündel $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\}, \{\phi_i\})$ und $(E, \pi, M, F, G, \{V_i\}, \{\psi_i\})$ seien äquivalent, wenn $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\} \cup \{V_j\}, \{\phi_i\} \cup \{\psi_j\})$ wiederum ein Koordinatenbündel ist. Ein Faserbündel wird dann als eine Äquivalenzklasse von Koordinatenbündeln definiert. In praktischen physikalischen Anwendungen verwenden wir hingegen immer eine spezielle Überdeckung und machen keinen Unterschied zwischen einem Koordinaten- und einem Faserbündel.

siehe Abb. 9.2. Es existiert eine Abbildung $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, welche f_i und f_j über $f_i = t_{ij}(p)f_j$ miteinander verknüpft. Dies kann man auch wie in Gleichung (9.4) schreiben.

Wir verlangen, dass die Übergangsfunktionen den folgenden Konsistenzbedingungen genügen:

$$t_{ii}(p) = \text{identische Abbildung} \quad (p \in U_i), \quad (9.6a)$$

$$t_{ij}(p) = t_{ji}(p)^{-1} \quad (p \in U_i \cap U_j), \quad (9.6b)$$

$$t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) = t_{ik}(p) \quad (p \in U_i \cap U_j \cap U_k). \quad (9.6c)$$

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, kann man lokale Stücke eines Faserbündels nicht konsistent zusammenkleben. Wenn man für alle Übergangsfunktionen identische Abbildungen wählen kann, heißt das Faserbündel **triviales Bündel**. Ein triviales Bündel ist ein direktes Produkt $M \times F$.

Für ein gegebenes Faserbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ ist die Menge der möglichen Übergangsfunktionen offenkundig alles andere als eindeutig. Seien $\{\mathcal{U}_i\}$ eine Überdeckung von M und $\{\phi_i\}$ und $\{\tilde{\phi}_i\}$ zwei Mengen von lokalen Trivialisierungen, welche zum selben Faserbündel führen. Die Übergangsfunktionen der jeweiligen lokalen Trivialisierungen sind

$$t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}, \quad (9.7a)$$

$$\tilde{t}_{ij}(p) = \tilde{\phi}_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{j,p}. \quad (9.7b)$$

Wir definieren an jedem Punkt $p \in M$ eine Abbildung $g_i(p) : F \rightarrow F$ durch

$$g_i(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{i,p}. \quad (9.8)$$

Wir verlangen, dass $g_i(p)$ ein Homöomorphismus ist, der G angehört. Diese Forderung wird sicherlich erfüllt sein, wenn $\{\phi_i\}$ und $\{\tilde{\phi}_i\}$ dasselbe Faserbündel beschreiben. Man sieht leicht aus (9.7) und (9.8), dass gilt:

$$\tilde{t}_{ij}(p) = g_i(p)^{-1} \circ t_{ij}(p) \circ g_j(p). \quad (9.9)$$

In den praktischen Situationen, in denen wir uns später befinden werden, sind die t_{ij} die Eichtransformationen, welche wir benötigen, um lokale Karten zusammenzufügen, während die g_i mit den Eichfreiheitsgraden innerhalb einer Karte U_i korrespondieren. Wenn das Bündel trivial ist, können wir alle Übergangsfunktionen als identische Abbildungen ansetzen. Dann ist die allgemeinste Form der Übergangsfunktionen

$$t_{ij}(p) = g_i(p)^{-1} g_j(p). \quad (9.10)$$

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Faserbündel. Ein **Schnitt** $s : M \rightarrow E$ ist eine glatte Abbildung, welche die Bedingung $\pi \circ s = \text{id}_M$ genügt. Offensichtlich ist $s(p) = s|_p$ ein Element von $F_p = \pi^{-1}(p)$. Die Menge der Schnitte auf M wird als $\Gamma(M, F)$ bezeichnet. Wenn $U \subset M$ ist, können wir von einem **lokalen Schnitt** reden, der nur auf U definiert ist.

$\Gamma(U, F)$ bezeichnet die Menge der lokalen Schnitte auf U . Beispielsweise identifizieren wir $\Gamma(M, TM)$ mit der Menge der Vektorfelder $\mathcal{X}(M)$. Es sei angemerkt, dass nicht alle Faserbündel globale Schnitte zulassen.

Beispiel 9.1. Sei E ein Faserbündel $E \xrightarrow{\pi} S^1$ mit einer typischen Faser $F = [-1, 1]$. Seien weiterhin $U_1 = (0, 2\pi)$ und $U_2 = (-\pi, \pi)$ eine offene Überdeckung von S^1 sowie $A = (0, \pi)$ und $B = (\pi, 2\pi)$ die Schnittmenge $U_1 \cap U_2$, siehe Abb. 9.3. Die lokalen Trivialisierungen ϕ_1 und ϕ_2 sind für $\theta \in A$ und $t \in F$ durch

$$\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t), \quad \phi_2^{-1}(u) = (\theta, t)$$

gegeben. Die Übergangsfunktion $t_{12}(\theta)$ ist für $\theta \in A$ die identische Abbildung $t_{12}(\theta) : t \mapsto t$. Auf dem Intervall B haben wir zwei Möglichkeiten:

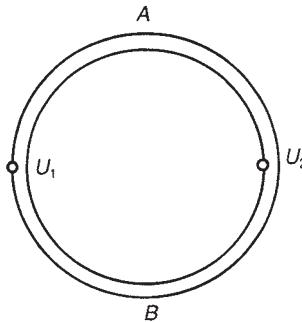


Abb. 9.3. Der Basisraum S^1 und zwei Karten U_1 und U_2 , über denen das Faserbündel trivial ist.

- (I) $\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t), \quad \phi_2^{-1}(u) = (\theta, t),$
- (II) $\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t), \quad \phi_2^{-1}(u) = (\theta, -t).$

Im Fall (I) erkennen wir $t_{12}(\theta)$ als die identische Abbildung; zwei Stücke des lokalen Bündels werden zusammengefügt und formen den Zylinder in Abb. 9.4(a). Fall (II) ergibt $t_{12}(\theta) : t \mapsto -t$ ($\theta \in B$), wir erhalten also das Möbius-Band, Abb. 9.4(b). Somit

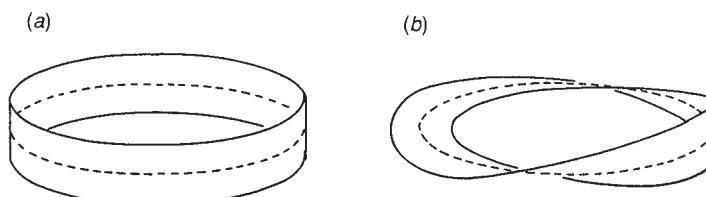


Abb. 9.4. Zwei Faserbündel über S^1 : (a) ist der Zylinder, ein triviales Bündel $S^1 \times I$, (b) das Möbius-Band.

hat ein Zylinder die triviale Strukturgruppe $G = \{e\}$, wobei e die identische Abbildung von F auf F ist, während das Möbius-Band $G = \{e, g\}$ hat, mit $g : t \mapsto -t$. Wegen $g^2 = e$ erhalten wir $G \cong \mathbb{Z}_2$. Ein Zylinder ist ein triviales Bündel $S^1 \times F$, das Möbius-Band dagegen nicht.² \diamond

9.2.2 Rekonstruktion von Faserbündeln

Was ist die minimale Information, die zur Konstruktion eines Faserbündels benötigt wird? Wir zeigen jetzt, dass wir aus gegebenen M , $\{U_i\}, t_{ij}(p), F$ und G das Faserbündel (E, π, M, F, G) rekonstruieren können. Dies läuft darauf hinaus, π, E und ϕ_i aus gegebenen Daten eindeutig zu bestimmen. Wir definieren die (disjunkte) Vereinigung

$$X \equiv \bigcup_i U_i \times F \quad (9.11)$$

und führen eine Äquivalenzrelation \sim zwischen $(p, f) \in U_i \times F$ und $(q, f') \in U_j \times F$ ein, bei der dann und nur dann $(p, f) \sim (q, f')$ gilt, wenn $p = q$ und $f' = t_{ji}(p)f$ ist (die t_{ji} müssen die Konsistenzbedingungen (9.6) erfüllen). Ein Faserbündel E ist dann als

$$E = X / \sim \quad (9.12)$$

definiert. Wir bezeichnen ein Element von E als $[(p, f)]$. Die Projektion ist durch

$$\pi : [(p, f)] \mapsto p \quad (9.13)$$

gegeben, und die lokale Trivialisierung $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ ist

$$\phi_i : (p, f) \mapsto [(p, f)]. \quad (9.14)$$

Sie sollten sich davon überzeugen, dass die so definierten E , π und $\{\phi_i\}$ allen Axiomen für Faserbündel genügen. Damit rekonstruieren die angegebenen Daten ein Faserbündel E eindeutig.

Diese Prozedur kann man einsetzen, um aus einem alten Faserbündel ein neues zu konstruieren. Sei (E, π, M, F, G) ein Faserbündel. Mit diesem Bündel assoziiert ist ein neues Bündel mit Basisraum M , Übergangsfunktion $t_{ij}(p)$, Strukturgruppe G und einer Faser F' , auf die G wirkt. Beispiele für assoziierte Bündel behandeln wir später.

9.2.3 Bündelabbildungen

Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ und $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ Faserbündel. Eine *glatte* Abbildung $\bar{f} : E' \rightarrow E$ wird eine **Bündelabbildung** genannt, wenn sie jede Faser F'_p aus E' auf F_q aus E abbildet.

² Die Gruppe \mathbb{Z}_2 ist keine Lie-Gruppe. Dies ist die einzige Gelegenheit, bei der wir eine diskrete Gruppe als Strukturgruppe verwenden.

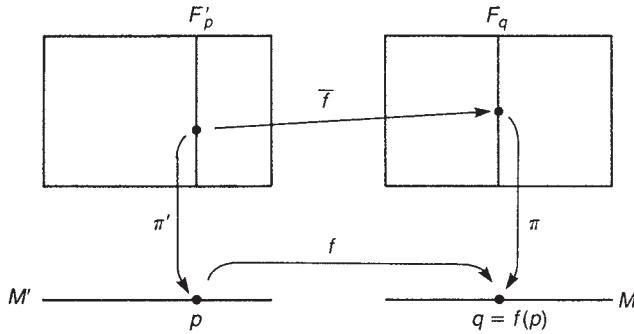


Abb. 9.5. Eine Bündelabbildung $\bar{f} : E' \rightarrow E$ induziert eine Abbildung $f : M' \rightarrow M$.

Dann induziert \bar{f} auf natürliche Weise eine glatte Abbildung $f : M' \rightarrow M$, sodass $f(p) = q$ ist (Abb. 9.5). Beachten Sie das folgende kommutierende Diagramm:³

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{f}(u) \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ p & \xrightarrow{f} & q \end{array} \right) \quad (9.15)$$

9.2.4 Äquivalente Bündel

Zwei Bündel $E' \xrightarrow{\pi'} M$ und $E \xrightarrow{\pi} M$ sind äquivalent, wenn eine Bündelabbildung $\bar{f} : E' \rightarrow E$ existiert, sodass $f : M' \rightarrow M$ die identische Abbildung und \bar{f} ein Diffeomorphismus ist:

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M. \end{array} \quad (9.16)$$

Diese Definition von äquivalenten Bündeln steht in Einklang mit der Fußnote zu Definition 9.1.

9.2.5 Rücktransportbündel

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Faserbündel mit typischer Faser F . Ist eine Abbildung $f : N \rightarrow M$ gegeben, dann definiert das Paar (E, f) ein neues Faserbündel über N mit derselben Faser F (Abb. 9.6). Es sei $f^*E \equiv \{(p, u) \in N \times E | f(p) = \pi(u)\}$ ein Unterraum von $N \times E$, der aus den Punkten (p, u) mit $f(p) = \pi(u)$ besteht. Dieser Raum wird

³ Vorsicht: Eine glatte Abbildung $\bar{f} : E' \rightarrow E$ ist nicht notwendigerweise eine Bündelabbildung. Sie könnte $u, v \in F'_p$ von E' auf $\bar{f}(u)$ und $\bar{f}(v)$ auf verschiedenen Fasern von E abbilden, sodass $\pi(\bar{f}(u)) \neq \pi(\bar{f}(v))$ ist.

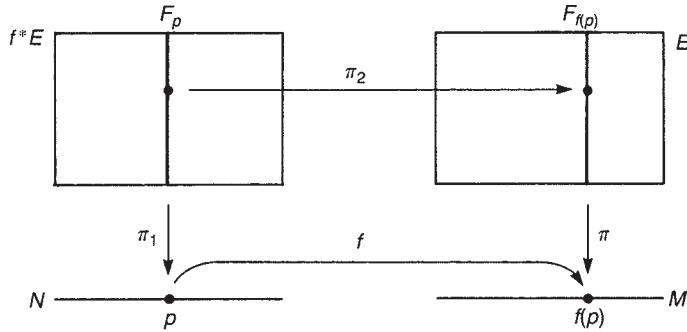


Abb. 9.6. Zu einem gegebenen Faserbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ definiert eine Abbildung $f : N \rightarrow M$ ein Rücktransportbündel f^*E über N .

Rücktransport von E durch f genannt. Die Faser F_p von f^*E ist einfach eine Kopie der Faser $F_{f(p)}$ von E . Wenn wir $f^*E \xrightarrow{\pi_1} N$ durch $\pi_1 : (p, u) \mapsto p$ definieren und $f^*E \xrightarrow{\pi_2} E$ durch $(p, u) \mapsto u$, kann der Rücktransport f^*E mit der Struktur eines Faserbündels versehen werden und heißt dann **Rücktransportbündel** (auch Pullback-Bündel). Wir erhalten die folgende Bündelabbildung:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} (p, u) & \xrightarrow{\pi_2} & u \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ p & \xrightarrow{f} & f(p) \end{array} \right). \quad (9.17)$$

Die Kommutativität dieses Diagramms folgt aus $\pi(\pi_2(p, u)) = \pi(u) = f(p) = f(\pi_1(p, u))$ für $(p, u) \in f^*E$. Insbesondere sind, wenn $N = M$ und $f = \text{id}_M$ ist, die zwei Faserbündel f^*E und E äquivalent.

Seien $\{U_i\}$ eine Überdeckung von M und $\{\phi_i\}$ lokale Trivialisierungen. $\{f^{-1}(U_i)\}$ definiert eine Überdeckung von N , sodass f^*E lokal trivial ist. Wir wählen $u \in E$, sodass $\pi(u) = f(p) \in U_i$ für ein $p \in N$ ist. Wenn $\phi_i^{-1}(u) = (f(p), f_i)$ ist, erhalten wir $\psi_i^{-1}(p, u) = (p, f_i)$, wobei ψ_i die lokale Trivialisierung von f^*E ist. Die Übergangsfunktion t_{ij} bei $f(p) \in U_i \cap U_j$ bildet f_j auf $f_i = t_{ij}(f(p))f_j$ ab. Die korrespondierende Übergangsfunktion t_{ij}^* von f^*E bei $p \in f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j)$ bildet ebenfalls f_j auf f_i ab; siehe Abb. 9.7. Dies zeigt, dass gilt:

$$t_{ij}^*(p) = t_{ij}(f(p)). \quad (9.18)$$

Beispiel 9.2. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit $\dim M = \dim N = m$ und sei $f : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Die Abbildung f induziert

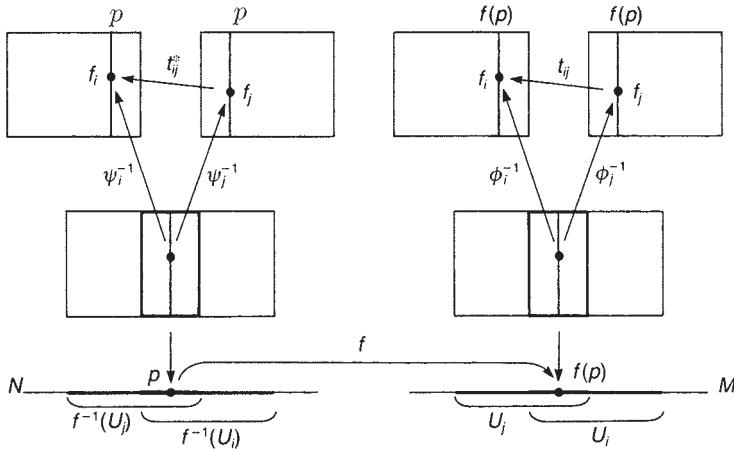


Abb. 9.7. Die Übergangsfunktion t_{ij}^* des Rücktransportbündels f^*E ist ein Rücktransport der Übergangsfunktion t_{ij} von E .

eine Abbildung $\pi_2 : TN \rightarrow TM$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 TN & \xrightarrow{\pi_2} & TM \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 N & \xrightarrow{f} & M.
 \end{array} \tag{9.19}$$

Seien $W = W^\nu \partial/\partial y^\nu$ ein Vektor aus $T_p N$ und $V = V^\mu \partial/\partial x^\mu$ der korrespondierende Vektor aus $T_{f(p)} M$. Wenn TN ein Rücktransportbündel $f^*(TM)$ ist, bildet π_2 den Raum $T_p N$ diffeomorph auf $T_{f(p)} M$ ab. Dies ist dann und nur dann möglich, wenn π_2 an jedem Punkt von TN den maximalen Rang m hat. Seien $\varphi(f(p)) = (f^1(y), \dots, f^m(y))$ die Koordinaten von $f(p)$ in einer Karte (U, φ) von M , wobei die $y = \varphi(p)$ die Koordinaten von p in einer Karte (V, ψ) von N sind. Die Maximalrangbedingung ist hier dann durch $\det(\partial f^\mu(y)/\partial y^\nu) \neq 0$ gegeben für beliebige $p \in N$. \diamond

9.2.6 Das Homotopieaxiom

Seien f und g Abbildungen von M' nach M . Die beiden Abbildungen werden **homotop** genannt, wenn eine glatte Abbildung $F : M' \times [0, 1] \rightarrow M$ existiert, sodass $F(p, 0) = f(p)$ und $F(p, 1) = g(p)$ für beliebige $p \in M'$ ist, siehe Abschnitt 4.2.

Satz 9.1. Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Faserbündel mit Faser F sowie f und g homotope Abbildungen von N nach M . Dann sind f^*E und g^*E äquivalente Bündel über N .

Den Beweis finden Sie in Steenrod (1951). Sei M eine Mannigfaltigkeit, die zu einem Punkt zusammenziehbar ist. Dann existiert eine Homotopie $F : M \times I \rightarrow M$,

sodass gilt:

$$F(p, 0) = p, \quad F(p, 1) = p_0,$$

mit einem Fixpunkt $p_0 \in M$. Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Faserbündel über M und h_0^*E und h_1^*E Rücktransportbündel, mit $h_t(p) \equiv F(p, t)$. Das Faserbündel h_1^*E ist ein Rücktransport von einem Faserbündel $\{p_0\} \times F$ und daher ein triviales Bündel: $h_1^*E \simeq M \times F$. Es ist jedoch $h_0^*E = E$, da h_0 die identische Abbildung ist. Wegen Satz 9.1 ist $h_0^*E = E$ äquivalent zu $h_1^*E = M \times F$, weswegen auch E ein triviales Bündel ist. Beispielsweise ist das Tangentialbündel $T\mathbb{R}^m$ trivial. Wir haben damit das folgende Korollar erhalten:

Korollar 9.1. Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Faserbündel. E ist trivial, wenn M auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.

9.3 Vektorbündel

9.3.1 Definitionen und Beispiele

Ein **Vektorbündel** $E \xrightarrow{\pi} M$ ist ein Faserbündel, dessen Faser ein Vektorraum ist. Seien F der \mathbb{R}^k und M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Üblicherweise nennt man k **Faserdimension** und bezeichnet sie als $\dim E$, obwohl der Totalraum E die Dimension $m+k$ hat. Die Übergangsfunktionen gehören der Gruppe $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ an, da sie einen Vektorraum isomorph auf einen anderen Vektorraum derselben Dimension abbilden. Ist F ein komplexer Vektorraum \mathbb{C}^k , dann ist die Strukturgruppe die $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$.

Beispiel 9.3. Ein Tangentialbündel TM über einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist ein Vektorbündel, dessen typische Faser der \mathbb{R}^m ist, siehe Abschnitt 9.1. Sei u ein Punkt in TM , sodass $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$ ist, wobei $\{U_i\}$ eine Überdeckung von M ist. Sei weiterhin $x^\mu = \varphi_i(p)$ ($y^\mu = \varphi_j(p)$) das Koordinatensystem von U_i (U_j). Der mit u korrespondierende Vektor V wird als $V = V^\mu \partial/\partial x^\mu|_p = \tilde{V}^\mu \partial/\partial y^\mu|_p$ ausgedrückt. Die lokalen Trivialisierungen sind

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, \{V^\mu\}), \quad \phi_j^{-1}(u) = (p, \{\tilde{V}^\mu\}). \quad (9.20)$$

Die Faserkoordinaten $\{V^\mu\}$ und $\{\tilde{V}^\mu\}$ hängen miteinander über

$$V^\mu = G^\mu_\nu(p) \tilde{V}^\nu \quad (9.21)$$

zusammen, mit $\{G^\mu_\nu(p)\} = \{(\partial x^\mu / \partial y^\nu)_p\} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Daher ist ein Tangentialbündel $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^m, \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}))$. Schnitte von TM sind die Vektorfelder auf M : $\mathcal{X}(M) = \Gamma(M, TM)$.

Um etwas konkreter zu sein, betrachten wir TS^2 . Die beiden Mengen $U_N \equiv S^2 \setminus \{\text{Südpol}\}$ und $U_S \equiv S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\}$ seien eine offene Überdeckung der S^2 und (X, Y)

sowie (U, V) die jeweiligen stereografischen Koordinaten (vgl. Beispiel 8.1). Es gilt

$$U = X/(X^2 + Y^2), \quad V = -Y/(X^2 + Y^2). \quad (9.22)$$

Wir betrachten ein $u \in TS^2$, sodass $\pi(u) = p \in U_N \cap U_S$ ist. Seien ϕ_N und ϕ_S die jeweiligen lokalen Trivialisierungen, sodass $\phi_N^{-1}(u) = (p, V_i^\mu)$ und $\phi_S^{-1}(u) = (p, V_j^\mu)$ ist. Die Übergangsfunktion lautet

$$t_{SN}(p) = \frac{\partial(U, V)}{\partial(X, Y)} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (9.23)$$

wobei wir $X = r\cos\theta$ und $Y = r\sin\theta$ gesetzt haben. Der Übergang der Komponenten der Tangentialvektoren besteht in einer Rotation von $\{V_i^\mu\}$ um einen Winkel 2θ , gefolgt von einer Reskalierung. Überprüfen Sie, dass $t_{NS}(p) = t_{SN}(p)^{-1}$ ist. \diamond

Beispiel 9.4. Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, eingebettet in den \mathbb{R}^{m+k} . Sei $N_p M$ der Vektorraum, der im \mathbb{R}^{m+k} normal auf $T_p M$ steht, d. h., sei $U \cdot V = 0$ bezüglich der euklidischen Metrik in \mathbb{R}^{m+k} für beliebige $U \in N_p M$ und $V \in T_p M$. $N_p M$ ist isomorph zu \mathbb{R}^k . Das **Normalbündel**

$$NM \equiv \bigcup_{p \in M} N_p M$$

ist ein Vektorbündel mit der typischen Faser \mathbb{R}^k .

Wir betrachten die in den \mathbb{R}^3 eingebettete Sphäre S^2 . Das Normalbündel NS^2 kann man sich als die S^2 vorstellen, deren Fläche senkrecht von Geraden durchstoßen wird. NS^2 ist ein triviales Bündel $S^2 \times \mathbb{R}$.

Ein Vektorbündel, dessen Faser eindimensional ist ($F = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}), wird ein **Geradenbündel** genannt. Ein Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ ist ein triviales \mathbb{R} -Geradenbündel. Ein Möbius-Band ist ebenfalls ein reelles Geradenbündel. Die Strukturgruppe $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. $GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist Abel'sch.

Im Folgenden werden wir oft das **kanonische Geradenbündel** L betrachten. Erinnern Sie sich daran, dass ein Element p von $\mathbb{C}P^n$ eine komplexe Ursprungsgerade im \mathbb{C}^{n+1} ist (Beispiel 8.3). Die Faser $\pi^{-1}(p)$ von L wird durch die zu p gehörende Gerade im \mathbb{C}^{n+1} definiert. Formaler sei $I^{n+1} \equiv \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ ein triviales Bündel über $\mathbb{C}P^n$. Wenn wir ein Element von I^{n+1} als (p, v) schreiben, $p \in \mathbb{C}P^n, v \in \mathbb{C}^{n+1}$, ist L definiert durch

$$L \equiv \{(p, v) \in I^{n+1} \mid v = ap, a \in \mathbb{C}\}.$$

Die Projektion ist $(p, v) \xrightarrow{\pi} p$. \diamond

Beispiel 9.5. Das (triviale) komplexe Geradenbündel $L = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}$ ist mit der nichtrelativistischen Quantenmechanik auf \mathbb{R}^3 assoziiert, und die Wellenfunktion $\psi(x)$ ist einfach ein Schnitt von L .

Wir betrachten eine Wellenfunktion $\psi(x)$ im Feld eines magnetischen Monopols (siehe Abschnitt 1.9). Für einen Monopol am Ursprung ist $\psi(x)$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiert,

und wir haben ein komplexes Geradenbündel über $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vor uns. Wenn wir uns nur für die Wellenfunktion auf einer Sphäre S^2 um den Monopol interessieren, haben wir ein komplexes Geradenbündel über S^2 vor uns. Beachten Sie, dass die S^2 ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist. \diamond

9.3.2 Rahmen

Auf einem Tangentialbündel TM hat jede Faser eine natürliche Basis $\{\partial/\partial x^\mu\}$, die durch das Koordinatensystem x^μ auf einer Karte U_i gegeben ist. Wenn M mit einer Metrik versehen ist, können wir auch die Orthonormalbasis $\{\hat{e}_\alpha\}$ verwenden. $\partial/\partial x^\mu$ bzw. \hat{e}_α ist ein Vektorfeld auf U_i , und die Mengen $\{\partial/\partial x^\mu\}$ und $\{\hat{e}_\alpha\}$ bilden linear unabhängige Vektorfelder über U_i . Es ist immer möglich, m linear unabhängige Tangentialvektoren über U_i auszuwählen, dies ist aber nicht notwendigerweise auf ganz M der Fall. Per definitionem sind die Komponenten der Basisvektoren

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)_\mu$$

bzw.

$$\hat{e}_\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)_\alpha.$$

Diese Vektoren definieren einen (lokalen) **Rahmen** über U_i , siehe später.

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit der Faser \mathbb{R}^k (oder \mathbb{C}^k) auf einer Karte U_i . Das Stück $\pi^{-1}(U_i)$ ist trivial, $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^k$, und wir können k linear unabhängige Schnitte $\{e_1(p), \dots, e_k(p)\}$ über U_i wählen. Man sagt, dass diese Schnitte einen **Rahmen** über U_i definieren. Zu einem gegebenen Rahmen über U_i liegt eine natürliche Abbildung $F_p : E|_{U_i} \rightarrow \mathbb{R}^k$ (oder \mathbb{C}^k) vor, die durch

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) \longmapsto \{V^\alpha\} \in F \quad (9.24)$$

gegeben ist. Die lokale Trivialisierung ist

$$\phi_i^{-1}(V) = (p, \{V^\alpha(p)\}). \quad (9.25)$$

Definitionsgemäß gilt

$$\phi_i(p, \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}) = e_\alpha(p). \quad (9.26)$$

Wie sieht ein Rahmenwechsel auf $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ aus? Seien $\{e_1(p), \dots, e_k(p)\}$ ein Rahmen auf U_i und $\{\tilde{e}_1(p), \dots, \tilde{e}_k(p)\}$ einer auf U_j ($p \in U_i \cap U_j$). Ein Vektor $\tilde{e}_\beta(p)$ wird ausgedrückt als

$$\tilde{e}_\beta(p) = e_\alpha(p) G(p)^\alpha{}_\beta, \quad (9.27)$$

mit $G(p)^\alpha{}_\beta \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. Jeder Vektor $V \in \pi^{-1}(p)$ lässt sich als

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) = \tilde{V}^\alpha \tilde{e}_\alpha(p) \quad (9.28)$$

schreiben. Mit (9.27) und (9.28) erhalten wir

$$\tilde{V}^\beta = G^{-1}(p)^\beta_\alpha V^\alpha, \quad (9.29)$$

mit $G^{-1}(p)^\beta_\alpha G(p)^\alpha_\gamma = G(p)^\beta_\alpha G^{-1}(p)^\alpha_\gamma = \delta^\beta_\gamma$. Somit stellen wir fest, dass die Übergangsfunktion $t_{ji}(p)$ durch eine Matrix $G^{-1}(p)$ gegeben ist.

9.3.3 Kotangentialbündel und duale Bündel

Das **Kotangentialbündel** $T^*M \equiv \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ wird ähnlich wie das Tangentialbündel definiert. Auf einer Karte U_i mit den Koordinaten x^μ wählen wir die $\{dx^1, \dots, dx^m\}$ als Basis von T_p^*M , dies ist die zu $\{\partial/\partial x^\mu\}$ duale Basis. Seien y^μ die Koordinaten von U_j , sodass $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist. Für einen Punkt $p \in U_i \cap U_j$ lautet die Transformation

$$dy^\mu = dx^\nu \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right)_p. \quad (9.30)$$

Eine 1-Form ω hat in beiden Koordinatensystemen die Form

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\mu dy^\mu,$$

woraus sich ergibt:

$$\tilde{\omega}_\mu = G_\mu^\nu(p) \omega_\nu. \quad (9.31)$$

Dabei entspricht $G_\mu^\nu(p) \equiv (\partial x^\nu / \partial y^\mu)_p$ der Übergangsfunktion $t_{ji}(p)$. Beachten Sie hierbei, dass gilt: $\Gamma(M, T^*M) = \Omega^1(M)$.

Dieses Kotangentialbündel lässt sich leicht auf allgemeinere Fälle übertragen. Zu einem gegebenen Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ mit der Faser F können wir dessen **duales Bündel** $E^* \xrightarrow{\pi^*} M$ definieren. Die Faser F^* von E^* ist die Menge der linearen Abbildungen von F nach \mathbb{R} (oder \mathbb{C}). Sei $\{e_\alpha(p)\}$ eine allgemeine Basis von F_p , dann definieren wir die duale Basis $\{\theta^\alpha(p)\}$ von F_p^* über $\langle \theta^\alpha(p), e_\beta(p) \rangle = \delta^\alpha_\beta$.

9.3.4 Schnitte von Vektorbündeln

Seien s und s' Schnitte eines Vektorbündels $E \xrightarrow{\pi} M$. Vektoraddition und Skalarmultiplikation werden punktweise als

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p), \quad (9.32a)$$

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \quad (9.32b)$$

definiert, mit $p \in M$ und $f \in \mathcal{F}(M)$. Der Nullvektor 0 von jeder Faser bleibt invariant unter $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ (bzw. $\text{GL}(k, \mathbb{C})$) und spielt eine besondere Rolle – jedes Vektorbündel E lässt einen globalen Schnitt zu, den man **Nullschnitt** $s_0 \in \Gamma(M, E)$ nennt, sodass in jeder lokalen Trivialisierung $\phi_i^{-1}(s_0(p)) = (p, 0)$ ist.

Lassen Sie uns z. B. Schnitte des kanonischen Geradenbündels L über $\mathbb{C}P^n$ betrachten. Seien $\xi^v_{(\mu)}$ die inhomogenen und $\{z^\nu\}$ die homogenen Koordinaten auf U_μ . Der lokale Schnitt s_μ über U_μ ist von der Form

$$s_\mu = \{\xi^0_{(\mu)}, \dots, 1, \dots, \xi^n_{(\mu)}\} \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Der Übergang von einem Koordinatensystem zum anderen erfolgt durch eine Skalarmultiplikation: $s_\nu = (z^\mu/z^\nu)s_\mu$. Sei L^* das duale Bündel von L . Korrespondierend mit s_μ können wir einen dualen Schnitt s_μ^* wählen, sodass $s_\mu^*(s_\mu) = 1$ ist. Hieraus ermitteln wir, dass die Übergangsfunktion von s_μ^* eine Multiplikation mit z^ν/z^μ ist: $s_\nu^* = (z^\nu/z^\mu)s_\mu^*$.

Eine Fasermetrik $h_{\mu\nu}(p)$ wird außerdem punktweise definiert. Seien s und s' Schnitte über U_i . Das innere Produkt zwischen s und s' bei p ist durch

$$(s, s')_p = h_{\mu\nu}(p)s^\mu(p)s'^\nu(p) \quad (9.33a)$$

definiert, wenn die Faser der \mathbb{R}^k ist. Ist die Faser der \mathbb{C}^k , dann definieren wir

$$(s, s')_p = h_{\mu\nu}(p)\overline{s^\mu(p)}s'^\nu(p). \quad (9.33b)$$

Mehr zu diesem Thema erfahren Sie in Abschnitt 10.4.

9.3.5 Produktbündel und Whitney-Summen-Bündel

Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ und $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ Vektorbündel mit der Faser F bzw. F' . Das **Produktbündel**

$$E \times E' \xrightarrow{\pi \times \pi'} M \times M' \quad (9.34)$$

ist ein Faserbündel, dessen typische Faser $F \oplus F'$ ist.⁴ Für $\pi(u) = p$ und $\pi'(u') = p'$ wirkt die Projektion $\pi \times \pi'$ auf $(u, u') \in E \times E'$ gemäß

$$\pi \times \pi'(u, u') = (p, p'). \quad (9.35)$$

Die Faser bei (p, p') ist $F_p \oplus F'_{p'}$. Wenn z. B. $M = M_1 \times M_2$ ist, erhalten wir $TM = TM_1 \times TM_2$.

Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ und $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ Vektorbündel mit den Fasern F und F' . Das **Whitney-Summen-Bündel** $E \oplus E'$ ist ein Rücktransportbündel von $E \times E'$ über $f : M \rightarrow M \times M$ mit $f(p) = (p, p)$:

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' & \xrightarrow{\pi_2} & E \times E' \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \times \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M \times M. \end{array} \quad (9.36)$$

⁴ Ein Vektor aus $F \oplus F'$ schreibt sich als

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}, \quad \text{mit } V \in F \text{ und } W \in F'.$$

Vektoraddition und Skalarmultiplikation sind definiert durch

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V' \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V + V' \\ W + W' \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\lambda \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda V \\ \lambda W \end{pmatrix}$$

Seien $\{e_\alpha\}$ und $\{f_\beta\}$ die Basen von F und F' . Dann ist $\{e_\alpha\} \cup \{f_\beta\}$ eine Basis von $F \oplus F'$, und wir erhalten schließlich $\dim(F \oplus F') = \dim F + \dim F'$.

Somit ist $E \oplus E' = \{(u, u') \in E \times E' \mid \pi \times \pi'(u, u') = (p, p)\}$. Die Faser eines Whitney-Summen-Bündels ist $F \oplus F'$. $(\pi \times \pi')^{-1}(p)$ ist isomorph zu $\pi^{-1}(p) \oplus \pi'^{-1}(p) = F_p \oplus F'_p$. Kurz gesagt: $E \oplus E'$ ist ein Bündel über M mit $F_p \oplus F'_p$ als Faser bei p . Seien $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M und $\{t_{ij}^E\}$ sowie $\{t_{ij}^{E'}\}$ die Übergangsfunktionen von E bzw. E' . Dann ist die Übergangsfunktion T_{ij} von $E \oplus E'$ eine von links auf $F \oplus F'$ wirkende $(\dim F + \dim F') \times (\dim F + \dim F')$ -Matrix:

$$T_{ij}(p) = \begin{pmatrix} t_{ij}^E(p) & 0 \\ 0 & t_{ij}^{E'}(p) \end{pmatrix}. \quad (9.37)$$

Beispiel 9.6. Seien $E = TS^2$ und $E' = NS^2$, definiert in \mathbb{R}^3 . Wir betrachten $u \in TS^2$ und $v \in NS^2$ mit den lokalen Trivialisierungen $\phi_i^{-1}(u) = (p, V)$ bzw. $\psi_i^{-1}(v) = (q, W)$, mit $p, q \in S^2, V \in \mathbb{R}^2$ und $W \in \mathbb{R}$. Wenn (u, v) ein Punkt aus dem Produktbündel $E \times E'$ ist, liegt eine Trivialisierung $\Phi_{i,j} = \phi_i \times \psi_j$ vor, sodass gilt:

$$\Phi_{i,j}^{-1}(u, v) = (p, q; V, W). \quad (9.38a)$$

Wenn dagegen $(u, v) \in E \oplus E'$, erfüllen u und v die stärkere Bedingung $\pi(u) = \pi'(v)$ ($= p$, beispielsweise). Damit ergibt sich

$$\Phi_i^{-1}(u, v) = (p; V, W). \quad (9.38b)$$

Die Whitney-Summe $TS^2 \oplus NS^2$ ist ein triviales Bündel über (der in den \mathbb{R}^3 eingebetteten) S^2 , dessen Faser isomorph zum \mathbb{R}^3 ist. \diamond

9.3.6 Tensorproduktbündel

Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ und $E' \xrightarrow{\pi'} M$ Vektorbündel über M . Das **Tensorproduktbündel** $E \otimes E'$ erhält man, indem man jedem Punkt $p \in M$ das Tensorprodukt der beiden Fasern $F_p \otimes F'_p$ zuordnet. Wenn $\{e_\alpha\}$ und $\{f_\beta\}$ Basen von F bzw. F' sind, wird $F \otimes F'$ durch $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}$ aufgespannt, und daher ist $\dim(E \otimes E') = \dim E \times \dim E'$.

Sei $\bigotimes^r E \equiv E \otimes \cdots \otimes E$ das Tensorproduktbündel von rE . Wenn $\{e_\alpha\}$ die Basis der Faser F von E ist, wird die Faser von $\bigotimes^r E$ durch $\{e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_r}\}$ aufgespannt. Wir definieren das äußere Produkt \wedge durch

$$e_\alpha \wedge e_\beta \equiv e_\alpha \otimes e_\beta - e_\beta \otimes e_\alpha \quad (9.39)$$

und erhalten damit ein Bündel $\wedge^r(E)$ von total antisymmetrischen Tensoren, die durch $\{e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_r}\}$ aufgespannt werden. Insbesondere lässt sich der Raum $\Omega^r(M)$ der r -Formen auf M mit der Menge $\Gamma(M, \wedge^r(T^*M))$ identifizieren.

Übung 9.1 Seien E_1, E_2 und E_3 Vektorbündel über M . Zeigen Sie, dass \otimes distributiv ist:

$$E_1 \otimes (E_2 \oplus E_3) = (E_1 \otimes E_2) \oplus (E_1 \otimes E_3). \quad (9.40)$$

Drücken Sie die Übergangsfunktionen von $E_1 \otimes (E_2 \oplus E_3)$ in Abhängigkeit von denen von E_1, E_2 und E_3 aus.

9.4 Prinzipalbündel

9.4.1 Definitionen

Ein Prinzipalbündel hat eine Faser F , welche identisch mit der Strukturgruppe G ist. Ein Prinzipalbündel $P \xrightarrow{\pi} M$ wird auch als $P(M, G)$ geschrieben und dann **G -Bündel** über M genannt.

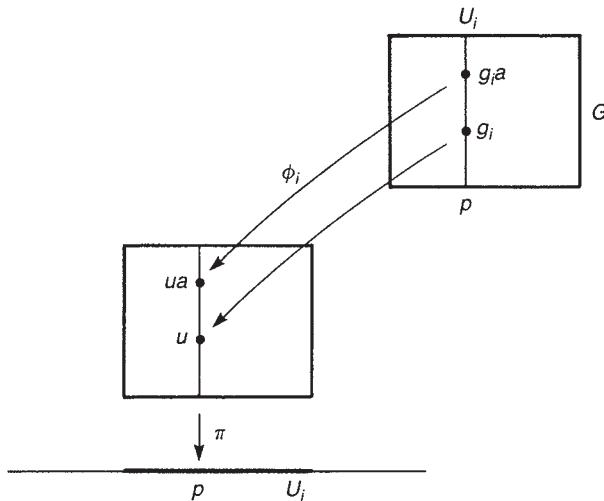


Abb. 9.8. Die Rechtswirkung von G auf P .

Die Übergangsfunktion wirkt wie gehabt von links auf die Faser. Darüber hinaus können wir auch eine *Rechtswirkung* von G auf F definieren. Sei $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ die lokale Trivialisierung, gegeben durch $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$, wobei $u \in \pi^{-1}(U_i)$ und $p = \pi(u)$ ist. Die Rechtswirkung von G auf $\pi^{-1}(U_i)$ wird über $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_ia)$ definiert, d. h., dass

$$ua = \phi_i(p, g_ia) \quad (9.41)$$

für beliebige $a \in G$ und $u \in \pi^{-1}(p)$ gilt (Abb. 9.8). Da die Rechtswirkung mit der Linkswirkung kommutiert, ist diese Definition unabhängig von den lokalen Trivialisierungen. Tatsächlich ergibt sich, wenn $p \in U_i \cap U_j$ ist:

$$ua = \phi_j(p, g_ia) = \phi_j(p, t_{ji}(p)g_ia) = \phi_i(p, g_ia).$$

Somit ist die Rechtsmultiplikation ohne Bezugnahme auf die lokalen Trivialisierungen definiert. Dies symbolisiert man als $P \times G \rightarrow P$ oder $(u, a) \mapsto ua$. Beachten Sie, dass $\pi(ua) = \pi(u)$ ist. Die Rechtswirkung von G auf $\pi^{-1}(p)$ ist *transitiv*, da G auf G transitiv von rechts wirkt und $F_p = \pi^{-1}(p)$ diffeomorph zu G ist. Da-

her existiert für alle $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$ ein Element a von G , sodass $u_1 = u_2a$ ist. Darum können wir, wenn $\pi(u) = p$ ist, die gesamte Faser als $\pi^{-1}(p) = \{ua | a \in G\}$ konstruieren. Die Wirkung ist auch *frei*: Wenn $ua = u$ für irgendein $u \in P$ gilt, dann muss a das neutrale Element e von G sein. Tatsächlich gilt, wenn $u = \phi_i(p, g_i)$ ist, $\phi_i(p, g_i a) = \phi_i(p, g_i) a = ua = u = \phi_i(p, g_i)$. Weil ϕ_i bijektiv ist, muss $g_i a = g_i$ sein, also $a = e$.

Zu einem gegebenen Schnitt $s_1(p)$ über U_i definieren wir eine bevorzugte lokale Trivialisierung $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ wie folgt: Für $u \in \pi^{-1}(p)$ und $p \in U_i$ gibt es ein eindeutiges Element $g_u \in G$, sodass $u = s_i(p)g_u$ ist. Dann definieren wir ϕ_i durch $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_u)$. In dieser lokalen Trivialisierung wird der Schnitt $s_i(p)$ als

$$s_i(p) = \phi_i(p, e) \quad (9.42)$$

ausgedrückt. Diese lokale Trivialisierung wird **kanonische lokale Trivialisierung** genannt. Definitionsgemäß ist $\phi_i(p, g) = \phi_i(p, e)g = s_i(p)g$. Wenn $p \in U_i \cap U_j$ ist, hängen zwei Schnitte $s_i(p)$ und $s_j(p)$ wie folgt über die Übergangsfunktion $t_{ij}(p)$ zusammen:

$$s_i(p) = \phi_i(p, e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)) = \phi_j(p, e)t_{ji}(p) = s_j(p)t_{ji}(p) \quad (9.43)$$

Beispiel 9.7. Sei P ein Prinzipalbündel mit Faser $U(1) = S^1$ und Basisraum S^2 . Dieses Prinzipalbündel ist das topologische Setting des **magnetischen Monopols** in Abschnitt 1.9. Seien $\{U_N, U_S\}$ eine offene Überdeckung der S^2 sowie U_N die Nord- und U_S die Südhemisphäre. Wenn wir die S^2 mit den gewöhnlichen Polarwinkeln parametrisieren, ergibt sich

$$U_N = \{(\theta, \phi) | 0 \leq \theta < \pi/2 + \varepsilon, 0 \leq \phi < 2\pi\},$$

$$U_S = \{(\theta, \phi) | \pi/2 - \varepsilon < \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi\}.$$

Die Schnittmenge $U_N \cap U_S$ ist ein Streifen, der im Wesentlichen den Äquator darstellt. Seien ϕ_N und ϕ_S die lokalen Trivialisierungen, sodass mit $p = \pi(u)$ gilt:

$$\phi_N^{-1}(u) = (p, e^{i\alpha_N}), \quad \phi_S^{-1}(u) = (p, e^{i\alpha_S}). \quad (9.44)$$

Wir betrachten eine Übergangsfunktion $t_{NS}(p)$ von der Form $e^{in\phi}$, wobei n eine ganze Zahl sein muss, sodass $t_{NS}(p)$ auf dem Äquator eindeutig definiert werden kann. Da t_{NS} den Äquator S^1 auf $U(1)$ abbildet, charakterisiert diese ganze Zahl die Homotopiegruppe $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$. Die Faserkoordinaten α_N und α_S hängen auf dem Äquator gemäß

$$e^{i\alpha_N} = e^{in\phi} e^{i\alpha_S} \quad (9.45)$$

zusammen. Für $n = 0$ ist die Übergangsfunktion das neutrale Element von $U(1)$, und wir haben ein triviales Bündel $P_0 = S^2 \times S^1$ vor uns. Wenn $n \neq 0$ ist, ist das $U(1)$ -Bündel P_n verdreht. Es ist bemerkenswert, dass die topologische Struktur eines Faserbündels durch eine ganze Zahl beschrieben werden kann. Diese ganze Zahl

gibt an, wie zwei lokale Schnitte am Äquator zusammengeklebt werden. Dementsprechend korrespondiert die ganze Zahl mit dem Element der Homotopiegruppe $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$.

Da die Gruppe $U(1)$ Abel'sch ist, sind Rechts- und Linkswirkung äquivalent. Unter der Rechtswirkung $g = e^{i\Lambda}$ ergibt sich

$$\phi_N^{-1}(ug) = (p, e^{i(\alpha_N + \Lambda)}), \quad (9.46a)$$

$$\phi_S^{-1}(ug) = (p, e^{i(\alpha_S + \Lambda)}). \quad (9.46b)$$

Die Rechtswirkung korrespondiert mit der $U(1)$ -Eichtransformation. \diamond

Beispiel 9.8. Wenn wir alle unendlichen Punkte des euklidischen Raums \mathbb{R}^m miteinander identifizieren, erhalten wir die Ein-Punkt-Kompaktifizierung $S^m = \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$. Wenn ein triviales G -Bündel über \mathbb{R}^m definiert wird, erhalten wir ein neues G -Bündel über S^m nach der Kompaktifizierung, das nicht notwendigerweise trivial ist. Sei P ein $SU(2)$ -Bündel über S^4 , das man durch Ein-Punkt-Kompaktifizierung des \mathbb{R}^4 erhält. Dieses Prinzipalbündel stellt ein $SU(2)$ -Instanton dar (Abschnitt 1.10). Wir führen eine offene Überdeckung $\{U_N, U_S\}$ der S^4 ein:

$$U_N = \{(x, y, z, t) | x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2 + \varepsilon\},$$

$$U_S = \{(x, y, z, t) | R^2 - \varepsilon \leq x^2 + y^2 + z^2 + t^2\},$$

mit einer positiven Konstante R und einer infinitesimalen positiven Zahl ε . Die dünne Schnittmenge $U_N \cap U_S$ ist im Wesentlichen die S^3 . Sei $t_{NS}(p)$ die bei $p \in U_N \cap U_S$ definierte Übergangsfunktion. Da t_{NS} die S^3 auf $SU(2)$ abbildet, wird sie durch $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$ klassifiziert. Die das Bündel charakterisierende ganze Zahl heißt **Instantonenzahl**. Wenn wir $t_{NS}(p)$ als neutrales Element $e \in SU(2)$ betrachten, haben wir ein triviales Bündel $P_0 = S^3 \times SU(2)$ vor uns, das der Homotopieklassse 0 entspricht. Nichttriviale Bündel erhält man folgendermaßen: Wir bemerken zunächst, dass $SU(2) \cong S^3$ ist (Beispiel 4.12). Ein Element $A \in SU(2)$ schreibt sich als

$$A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix},$$

mit $|u|^2 + |v|^2 = 1$. Indem wir u und v gemäß $u = t + iz$ und $v = y + ix$ separieren, erhalten wir $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Somit lässt sich die Gruppe $SU(2)$ als die Einheitssphäre S^3 ansehen, und $\pi_3(SU(2)) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ klassifiziert Abbildungen aus der S^3 nach $SU(2) \cong S^3$. Die *identische Abbildung* $f: S^3 \rightarrow S^3 \cong SU(2)$ ist

$$f(x, y, z, t) \mapsto \begin{pmatrix} t + iz & y + ix \\ -y + ix & t - iz \end{pmatrix} = tI_2 + i(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z), \quad (9.47)$$

wobei I_2 die (2×2) -Einheitsmatrix ist und die σ_μ die Pauli-Matrizen darstellen. Betrachten wir einen Punkt $p = (x, y, z, t) \in U_N \cap U_S$. Wenn $R = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^{1/2}$

den radialen Abstand von p bezeichnet, hat der Vektor $(x/R, y/R, z/R, t/R)$ die Einheitslänge. Wir weisen dem Punkt p ein Element von $SU(2)$ zu über

$$t_{NS}(p) = \frac{1}{R} \left(tI_2 + i \sum_i x^i \sigma_i \right). \quad (9.48)$$

Seien ϕ_N und ϕ_S die lokalen Trivialisierungen

$$\phi_N^{-1}(u) = (p, g_N), \quad \phi_S^{-1}(u) = (p, g_S), \quad (9.49)$$

mit $p = \pi(u)$ und $g_N, g_S \in SU(2)$. Auf $U_N \cap U_S$ gilt

$$g_N = \frac{1}{R} \left(tI_2 + i \sum_i x^i \sigma_i \right) g_S. \quad (9.50)$$

Während (t, x) einmal die S^3 abscannt, fegt $t_{NS}(p)$ einmal durch die $SU(2)$, also korrespondiert dieses Bündel mit der Homotopieklassse 1 von $\pi_3(SU(2))$. Es ist nicht schwer einzusehen, dass

$$t_{NS}(p) = \frac{1}{R^n} \left(t\mathbf{1} + i \sum_i x^i \sigma_i \right)^n \quad (9.51)$$

die mit der Homotopieklassse n korrespondierende Übergangsfunktion ist.

Um unser Studium von Monopolen und Instantonen fortzuführen, müssen wir Zusammenhänge auf dem Faserbündel einführen – die *Eichpotenziale*. Wir werden hierauf im nächsten Kapitel zurückkommen. \diamond

Beispiel 9.9. Hopf hat gezeigt, dass die S^3 ein $U(1)$ -Bündel über der S^2 ist. Die Einheits-3-Sphäre wird, eingebettet in den \mathbb{R}^4 , als

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1$$

ausgedrückt. Wenn wir $z^0 = x^1 + ix^2$ und $z^1 = x^3 + ix^4$ einführen, wird daraus

$$|z^0|^2 + |z^1|^2 = 1. \quad (9.52)$$

Lassen Sie uns die S^2 mit

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 1$$

parametrisieren. Die **Hopf-Abbildung** $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ ist definiert durch

$$\xi^1 = 2(x^1 x^3 + x^2 x^4), \quad (9.53a)$$

$$\xi^2 = 2(x^2 x^3 - x^1 x^4), \quad (9.53b)$$

$$\xi^3 = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2. \quad (9.53c)$$

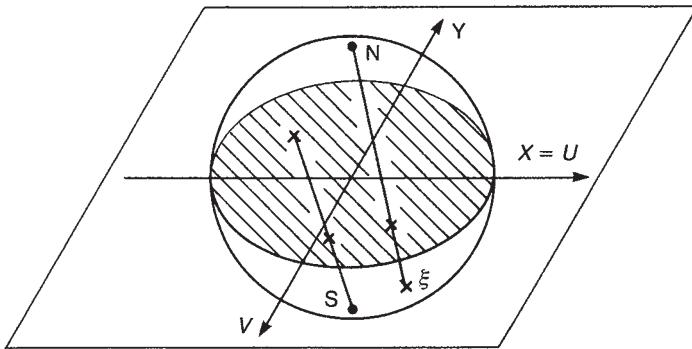


Abb. 9.9. Stereografische Koordinaten der Sphäre S^2 . (X, Y) wird über die Projektion vom Nordpol aus definiert, (U, V) bezüglich der Projektion vom Südpol aus.

Man überprüft leicht, dass π die S^3 auf die S^2 abbildet, wegen

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2]^2 = 1.$$

Seien (X, Y) die (vom Nordpol aus definierten) stereografischen Projektionskoordinaten eines Punkts in der südlichen Hemisphäre U_S der S^2 . Wenn wir eine komplexe Ebene betrachten, welche den Äquator der S^2 enthält, liegt $Z = X + iY$ auf dem Einheitskreis. Wir haben in Beispiel 8.1, gefunden (Abb. 9.9):

$$Z = \frac{\xi^1 + i\xi^2}{1 - \xi^3} = \frac{x^1 + ix^2}{x^3 + ix^4} = \frac{z^0}{z^1} \quad (\xi \in U_S). \quad (9.54a)$$

Beachten Sie, dass Z invariant ist unter

$$(z^0, z^1) \mapsto (\lambda z^0, \lambda z^1),$$

mit $\lambda \in U(1)$. Wegen $|\lambda| = 1$ liegt der Punkt $(\lambda z^0, \lambda z^1)$ auch in der S^3 . Die vom Südpol aus definierten stereografischen Koordinaten (U, V) der Nordhemisphäre U_N sind durch

$$W = U + iV = \frac{\xi^1 - i\xi^2}{1 + \xi^3} = \frac{x^3 + ix^4}{x^1 + ix^2} = \frac{z^1}{z^0} \quad (\xi \in U_N) \quad (9.54b)$$

gegeben. Beachten Sie, dass auf dem Äquator $U_N \cap U_S$ $Z = 1/W$ ist.

Die Faserbündelstruktur erhalten wir folgendermaßen: Zunächst definieren wir die lokalen Trivialisierungen $\phi_S^{-1} : \pi^{-1}(U_S) \rightarrow U_S \times U(1)$ durch

$$(z^0, z^1) \mapsto (z^0/z^1, z^1/|z^1|) \quad (9.55a)$$

und $\phi_N^{-1} : \pi^{-1}(U_N) \rightarrow U_N \times U(1)$ durch

$$(z^0, z^1) \mapsto (z^1/z^0, z^0/|z^0|). \quad (9.55b)$$

Beachten Sie, dass diese lokalen Trivialisierungen auf jeder Karte wohldefiniert sind. Beispielsweise ist $z^0 \neq 0$ auf U_N , und daher sind sowohl $z^1/z^0 = U + iV$ als auch $z^0/|z^0|$ nichtsingulär. Auf dem Äquator ($\xi^3 = 0$) erhalten wir $|z^0| = |z^1| = 1/\sqrt{2}$. Dementsprechend sind die lokalen Trivialisierungen auf dem Äquator

$$\phi_S^{-1} : (z^0, z^1) \mapsto (z^0/z^1, \sqrt{2}z^1) \quad (9.56a)$$

und

$$\phi_N^{-1} : (z^0, z^1) \mapsto (z^1/z^0, \sqrt{2}z^0). \quad (9.56b)$$

Die Übergangsfunktion auf dem Äquator ist

$$t_{NS}(\xi) = \frac{\sqrt{2}z^0}{\sqrt{2}z^1} = \xi^1 + i\xi^2 \in U(1). \quad (9.57)$$

Wenn wir den Äquator umrunden, überquert $t_{NS}(\xi)$ den Einheitskreis in der komplexen Ebene einmal, daher wird das $U(1)$ -Bündel $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ durch die Homotopiekasse 1 von $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ charakterisiert. Trautman (1977), Minami (1979) und Ryder (1980) haben darauf hingewiesen, dass ein magnetischer Monopol von Einheitsstärke durch die Hopf-Abbildung $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ beschrieben wird.

Die Hopf-Abbildung lässt sich auch von einem etwas anderen Blickpunkt aus verstehen. Wir betrachten die S^3 als eine komplexe 1-Sphäre

$$S^1_{\mathbb{C}} = \{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1\}.$$

Wir definieren eine Abbildung $\pi : S^1_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ gemäß

$$(z^0, z^1) \mapsto [(z^0, z^1)] = \{\lambda(z^0, z^1) \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}. \quad (9.58)$$

Unter dieser Abbildung werden Punkte aus der S^3 von der Form $\lambda(z^0, z^1)$, $|\lambda| = 1$ auf einen einzigen Punkt in $\mathbb{C}P^1 = S^2$ abgebildet. Dies ist die Hopf-Abbildung $\pi : S^3 \rightarrow S^2$, die wir oben erhalten haben. Diese Idee lässt sich leicht auf die Menge \mathbb{H} der Quaternionen verallgemeinern. Die Quaternionenalgebra ist über diese Produkttafel definiert:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, & ij = -ji &= k, \\ jk &= -kj = i, & ki &= -ik = j. \end{aligned}$$

Ein beliebiges Element von \mathbb{H} schreibt sich als

$$q = t + ix + jy + kz.$$

Natürlich repräsentieren die Einheitsquaternionen $|q| = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = 1$ die Sphäre $S^3 \cong SU(2)$. Die Quaternionen-1-Sphäre ist durch

$$S^1_{\mathbb{H}} = \{(q^0, q^1) \in \mathbb{H}^2 \mid |q^0|^2 + |q^1|^2 = 1\} \quad (9.59)$$

gegeben und stellt die S^7 dar. Die Hopf-Abbildung nimmt in diesem Fall die Form

$$\pi : S^1_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H}P^1 \quad (9.60)$$

an, wobei $\mathbb{H}P^1$ der projektive Quaternionenraum ist, dessen Elemente Äquivalenzklassen von der Form

$$[(q^0, q^1)] = \{\eta(q^0, q^1) \in \mathbb{H}^2 \mid \eta \in \mathbb{H} \setminus \{0\}\} \quad (9.61)$$

sind. Punkte aus der S^7 mit $|\eta| = 1$ werden unter dieser Abbildung auf einen einzigen Punkt in $\mathbb{H}P^1 = S^4$ abgebildet, und es ergibt sich die Hopf-Abbildung

$$\pi : S^7 \rightarrow S^4. \quad (9.62)$$

Die Faser ist die Einheitsquaternion $S^3 = \mathrm{SU}(2)$. Die durch die Hopf-Abbildung definierte Übergangsfunktion gehört zur Klasse 1 von $\pi_3(\mathrm{SU}(2)) \cong \mathbb{Z}$. Ein Instanton von Einheitsstärke wird mithilfe dieser Hopf-Abbildung beschrieben.

Oktonionen definieren eine Hopf-Abbildung $\pi : S^{15} \rightarrow S^8$. Diese unterscheidet sich insofern von anderen Hopf-Abbildungen, als die Faser S^7 nicht wirklich eine Gruppe ist. Bisher haben wir auch noch keine Anwendung für diese Abbildung in der Physik gefunden.⁵ \diamond

Beispiel 9.10. Sei H eine abgeschlossene Lie-Untergruppe einer Lie-Gruppe G . Wir zeigen, dass G ein Prinzipalbündel mit der Faser H und dem Basisraum $M = G/H$ ist. Wir definieren die Rechtswirkung von H auf G als $g \mapsto ga$ ($g \in G, a \in H$). Die Rechtswirkung ist differenzierbar, da G eine Lie-Gruppe ist. Wir definieren die Projektion $\pi : G \rightarrow M = G/H$ durch die Abbildung $\pi : g \mapsto [g] = \{gh \mid h \in H\}$. Offensichtlich werden $g, ga \in G$ auf denselben Punkt $[g]$ abgebildet, daher ist $\pi(g) = \pi(ga)$ ($= [g]$). Um lokale Trivialisierungen zu definieren, müssen wir auf jeder Karte U_i eine Abbildung $f_i : G \rightarrow H$ definieren. Seien s ein lokaler Schnitt über U_i und $g \in \pi^{-1}([g])$. Wir definieren f_i durch $f_i(g) = s([g])^{-1}g$. Da $s([g])$ ein Schnitt bei $[g]$ ist, lässt er sich für ein $a \in H$ als ga ausdrücken, also ist $s([g])^{-1}g = a^{-1}g^{-1}g = a^{-1} \in H$. Dann definieren wir die lokale Trivialisierung $\phi_i : U_i \times H \rightarrow G$ durch

$$\phi_i^{-1}(g) = ([g], f_i(g)). \quad (9.63)$$

Es ist leicht einzusehen, dass $f_i(ga) = f_i(g)a$ ($a \in H$) und daher $\phi_i^{-1}(ga) = (p, f_i(g)a)$ ist. Nützliche Beispiele sind (vgl. auch Beispiel 5.18):

$$\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) = S^{n-1}, \quad (9.64)$$

$$\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1) = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) = S^{2n-1}. \quad (9.65)$$

\diamond

⁵ Oktonionen sind auch unter dem Namen Cayley-Zahlen bekannt. Die Menge der Oktonionen ist ein Vektorraum über \mathbb{R} , aber kein Feld. Das Produkt ist weder kommutativ noch assoziativ. Lesen Sie hierzu den Review von John C Baez, *The Octonions* math.RA/0105155.

9.4.2 Assoziierte Bündel

Zu einem gegebenen Prinzipalfaserbündel $P(M, G)$ können wir folgendermaßen ein **assoziiertes Faserbündel** konstruieren. Es wirke G von links auf eine Mannigfaltigkeit F . Wir definieren eine Wirkung von $g \in G$ auf $P \times F$ durch

$$(u, f) \rightarrow (ug, g^{-1}f), \quad (9.66)$$

mit $u \in P$ und $f \in F$. Dann ist das assoziierte Faserbündel (E, π, M, G, F, P) eine Äquivalenzklasse $P \times F/G$, in welcher zwei Punkte (u, f) und $(ug, g^{-1}f)$ miteinander identifiziert werden.

Betrachten wir den Fall, dass F ein k -dimensionaler Vektorraum V ist. Sei ρ die k -dimensionale Darstellung von G . Das **assoziierte Vektorbündel** $P \times_{\rho} V$ wird definiert, indem man die Punkte (u, v) und $(ug, \rho(g)^{-1}v)$ von $P \times V$ identifiziert, mit $u \in P$, $g \in G$ und $v \in V$. Beispielsweise wird mit dem Bündel $P(M, \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}))$ ein Vektorbündel über M mit der Faser \mathbb{R}^k assoziiert. Die Faserbündelstruktur eines assozierten Vektorbündels $E = P \times_{\rho} V$ ist gegeben wie folgt. Die Projektion $\pi_E : E \rightarrow M$ ist durch $\pi_E(u, v) = \pi(u)$ definiert. Diese Projektion ist wohldefiniert, da $\pi(u) = \pi(ug)$ impliziert, dass $\pi_E(ug, \rho(g)^{-1}v) = \pi(ug) = \pi_E(u, v)$ ist. Die lokale Trivialisierung ist durch $\psi_i : U_i \times V \rightarrow \pi_E^{-1}(U_i)$ gegeben. Die Übergangsfunktion von E ist $\rho(t_{ij}(p))$, wobei $t_{ij}(p)$ die Übergangsfunktion von P ist.

Umgekehrt induziert ein Vektorbündel auf natürliche Weise ein mit ihm assoziiertes Prinzipalbündel. Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit $\dim E = k$ (d. h., die Faser ist \mathbb{R}^k oder \mathbb{C}^k). Dann induziert E ein Prinzipalbündel $P(E) \equiv P(M, G)$ über M durch Verwenden derselben Übergangsfunktionen. Die Strukturgruppe G ist entweder $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ oder $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. Die explizite Konstruktion von $P(E)$ erfolgt mithilfe des in Abschnitt 9.1 beschriebenen Rekonstruktionsprozesses.

Beispiel 9.11. Mit einem Tangentialbündel TM über einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist ein Prinzipalbündel assoziiert, das man **Rahmenbündel** $LM \equiv \bigcup_{p \in M} L_p M$ nennt, wobei $L_p M$ die Menge der Rahmen bei p ist. Wir führen Koordinaten x^μ auf einer Karte U_i ein. Das Bündel $T_p M$ hat eine natürliche Basis $\{\partial/\partial x^\mu\}$ auf U_i . Ein Rahmen $u = \{X_1, \dots, X_m\}$ bei p wird ausgedrückt als

$$X_\alpha = X^\mu{}_\alpha \partial/\partial x^\mu|_p \quad (1 \leq \alpha \leq m), \quad (9.67)$$

wobei $(X^\mu{}_\alpha)$ ein Element von $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ ist, sodass die $\{X_\alpha\}$ linear unabhängig sind. Wir definieren die lokale Trivialisierung $\phi_i : U_i \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ durch $\phi_i^{-1}(u) = (p, (X^\mu{}_\alpha))$. Die Bündelstruktur von LM wird wie folgt definiert:

- (i) Ist $u = \{X_1, \dots, X_m\}$ ein Rahmen bei p , definieren wir $\pi_L : LM \rightarrow M$ durch $\pi_L(u) = p$.
- (ii) Die Wirkung von $a = (a^i{}_j) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ auf den Rahmen $u = \{X_1, \dots, X_m\}$ ist durch $(u, a) \mapsto ua$ gegeben, wobei ua ein neuer Rahmen bei p ist, definiert durch

$$Y_\beta = X_\alpha a^\alpha{}_\beta. \quad (9.68)$$

Umgekehrt existiert zu zwei beliebigen Rahmen $\{X_\alpha\}$ und $\{Y_\beta\}$ ein Element von $\text{GL}(m, \mathbb{R})$, sodass (9.68) erfüllt ist. Somit wirkt $\text{GL}(m, \mathbb{R})$ auf LM transitiv.

- (iii) Seien U_i und U_j überlappende Karten mit den Koordinaten x^μ bzw. y^μ . Für $p \in U_i \cap U_j$ erhalten wir

$$X_\alpha = X^\mu{}_\alpha \partial/\partial x^\mu|_p = \tilde{X}^\mu{}_\alpha \partial/\partial y^\mu|_p, \quad (9.69)$$

mit $(X^\mu{}_\alpha), (\tilde{X}^\mu{}_\alpha) \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$. Wegen $X^\mu{}_\alpha = (\partial x^\mu/\partial y^\nu)_p \tilde{X}^\mu{}_\alpha$ ergibt sich die Übergangsfunktion $t_{ij}^L(p)$ zu

$$t_{ij}^L(p) = ((\partial x^\mu/\partial y^\nu)_p) \in \text{GL}(m, \mathbb{R}). \quad (9.70)$$

Damit haben wir zu einem gegebenen TM ein Rahmenbündel LM mit denselben Übergangsfunktionen konstruiert.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie entspricht die Rechtswirkung der lokalen Lorentz-Transformation, während die Linkswirkung mit der allgemeinen Koordinatentransformation korrespondiert. Es stellt sich heraus, dass das Rahmenbündel die natürlichste Struktur ist, in welcher man diese Transformationen einbinden kann. Wenn $\{X_\alpha\}$ durch Einführen einer Metrik normiert wird, wird die Matrix $(X^\mu{}_\alpha)$ das Vierbein, und die Strukturgruppe reduziert sich auf $O(m)$; siehe Abschnitt 7.8. \diamond

Beispiel 9.12. Ein Spinorfeld auf M ist ein Schnitt eines **Spinbündels**, welches wir nun definieren wollen. Da $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ keine Spinordarstellung hat, müssen wir ein orthonormales Rahmenbündel einführen, dessen Strukturgruppe die $\text{SO}(k)$ ist. Wie in Beispiel 4.12 erwähnt, ist $\text{Spin}(k)$ die universelle Überlagerungsgruppe von $\text{SO}(k)$.⁶

Um es etwas konkreter zu machen, betrachten wir ein Spinbündel, das mit dem vierdimensionalen Lorentz-Rahmenbündel LM assoziiert ist, wobei M eine vierdimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit ist. Wir interessieren uns für einen Rahmen mit einer definiten Raumzeitorientierung sowie mit einer Zeitorientierung. Die Strukturgruppe reduziert sich dann auf

$$\text{O}_\uparrow^+(3, 1) \equiv \{\Lambda \in O(3, 1) | \det \Lambda = +1, \Lambda_0{}^0 > 0\}. \quad (9.71)$$

Die universelle Überlagerungsgruppe von $\text{O}_\uparrow^+(3, 1)$ ist $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, siehe Beispiel 5.16(c). Der Homomorphismus $\varphi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{O}_\uparrow^+(3, 1)$ ist eine 2:1-Abbildung mit $\ker \varphi = \{I_2, -I_2\}$. Der Weyl-Spinor ist ein Schnitt des Faserbündels $(W, \pi, M, \mathbb{C}^2, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$. Der Dirac-Spinor ist ein Schnitt von

$$(D, \pi, M, \mathbb{C}^4, \text{SL}(2, \mathbb{C})). \quad (9.72)$$

⁶ Damit wir ein Spinbündel definieren können, müssen wir prüfen, ob das $\text{SO}(k)$ -Bündel ein $\text{Spin}(k)$ -Bündel über M liftet. Was dieser Lifting entgegenstehen könnte, wird in Abschnitt 11.6 diskutiert.

Ein Schnitt von W ist eine $(1/2, 0)$ -Darstellung der Gruppe $O_{\uparrow}^+(3, 1)$, ein Schnitt des Bündels $(\bar{W}, \pi, M, \mathbb{C}^2, \overline{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})})$ ist eine $(0, 1/2)$ -Darstellung, siehe z. B. Ramond (1989). Ein Dirac-Spinor gehört zu $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$.

Die allgemeine Struktur des Spinbündels behandeln wir in Abschnitt 11.6. \diamond

9.4.3 Trivialität von Bündeln

Ein Faserbündel ist trivial, wenn es sich als ein direktes Produkt des Basisraums und der Faser ausdrücken lässt. Der folgende Satz liefert uns die Bedingung für die Trivialität eines Faserbündels:

Satz 9.2. Ein Prinzipalbündel ist dann und nur dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt zulässt.

Beweis

Seien (P, π, M, G) ein Prinzipalbündel über M und $s \in \Gamma(M, P)$ ein globaler Schnitt. Man kann den Schnitt verwenden, um zu zeigen, dass ein Homöomorphismus zwischen P und $M \times G$ existiert. Wenn a ein Element von G ist, gehört das Produkt $s(p)a$ zur Faser bei p . Da die Rechtswirkung transitiv und frei ist, lässt sich jedes Element $u \in P$ eindeutig als $s(p)a$ schreiben für ein $p \in M$ und ein $a \in G$. Wir definieren eine Abbildung $\Phi : P \rightarrow M \times G$ durch

$$\Phi : s(p)a \mapsto (p, a). \quad (9.73)$$

Man überprüft leicht, dass Φ in der Tat ein Homöomorphismus ist; und wir haben gezeigt, dass P ein triviales Bündel $M \times G$ ist.

Nehmen wir umgekehrt an, dass $P \cong M \times G$ ist; ferner sei $\phi : M \times G \rightarrow P$ eine Trivialisierung. Wir wählen ein festes Element $g \in G$. Dann ist $s_g : M \rightarrow P$, definiert durch $s_g(p) = \phi(p, g)$, ein globaler Schnitt. \square

Gibt es einen entsprechenden Satz für Vektorbündel? Wir wissen, dass jedes Vektorbündel einen globalen Nullschnitt zulässt. Daher können wir in Satz 9.2 nicht einfach P durch E ersetzen. Betrachten wir das assoziierte Prinzipalbündel $P(E)$ von E . Definitionsgemäß teilen sich E und $P(E)$ denselben Satz von Übergangsfunktionen. Da das Verdrehen eines Bündels allein durch die Übergangsfunktionen beschrieben wird, erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 9.2. Ein Vektorbündel E ist dann und nur dann trivial, wenn sein assoziiertes Prinzipalbündel $P(E)$ einen globalen Schnitt zulässt.

Aufgaben

9.1 Sei L das reelle Geradenbündel über S^1 (d. h., L ist entweder der Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ oder das Möbius-Band). Zeigen Sie, dass die Whitney-Summe $L \oplus L$ ein triviales Bündel ist. Skizzieren Sie $L \oplus L$, um das Resultat zu bestätigen.

9.2 Sei Ω_n das Volumenelement von S^n , normiert als $\int_{S^n} \Omega_n = 1$. Sei $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ eine glatte Abbildung und betrachten Sie den Rücktransport $f^* \Omega_n$.

- (a) Zeigen Sie, dass $f^* \Omega_n$ geschlossen ist und sich als $d\omega_{n-1}$ schreiben lässt, wobei ω_{n-1} eine $(n-1)$ -Form auf S^{2n-1} ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die **Hopf-Invariante**

$$H(f) \equiv \int_{S^{2n-1}} \omega_{n-1} \wedge d\omega_{n-1}$$

unabhängig von der Wahl von ω_{n-1} ist.

- (c) Zeigen Sie, dass, wenn f homotop zu g ist, $H(f) = H(g)$ gilt.
- (d) Zeigen Sie mithilfe der Beziehung $\omega_{n-1} \wedge d\omega_{n-1} = \frac{1}{2} d(\omega_{n-1} \wedge \omega_{n-1})$, dass $H(f) = 0$ ist, wenn n ungerade ist.
- (e) Berechnen Sie die Hopf-Invariante der Abbildung $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ in Beispiel 9.9.

10

Zusammenhänge auf Faserbündeln

In Kapitel 7 haben wir Zusammenhänge in Riemann'schen Mannigfaltigkeiten eingeführt, mit denen man Vektoren in verschiedenen Tangentialräumen vergleichen kann. In diesem Kapitel werden Zusammenhänge auf Faserbündeln definiert – zwar abstrakt, aber geometrisch.

Wir definieren zuerst einen Zusammenhang auf einem Prinzipalbündel. Unsere abstrakte Definition wird konkreter, wenn wir die Zusammenhangs-1-Form einführen, deren lokale Form unter Physikern als Eichpotenzial bestens bekannt ist. Die Yang-Mills-Feldstärke ist als die mit dem Zusammenhang assoziierte Krümmung definiert. Ein Zusammenhang auf einem Prinzipalbündel definiert auf natürliche Weise eine kovariante Ableitung in dem assoziierten Vektorbündel. Wenn wir unseren Ansatz auf Tangentialbündel anwenden, landen wir wieder bei denselben Ergebnissen wie in Kapitel 7.

Am Ende dieses Kapitels stellen wir zwei physikalische Anwendungen von Zusammenhängen vor: Eichtheorien und Berry-Phasen. Wir folgen dabei dem Gedankengang von Choquet-Bruhat *et al.* (1982), Kobayashi (1984) und Nomizu (1981). Details finden Sie in den klassischen Werken von Kobayashi und Nomizu (1963, 1969). Einen schnellen Überblick gibt Daniel und Viallet (1980).

10.1 Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln

Es gibt mehrere äquivalente Definitionen des Zusammenhangs auf einem Prinzipalbündel. Unser Ansatz basiert auf der *Separation* des Tangentialraums $T_u P$ in einen „vertikalen“ und einen „horizontalen“ Unterraum. Obwohl dieses Vorgehen etwas abstrakt wirken mag, hat es gegenüber anderen Ansätzen den Vorzug, dass es die geometrischen Grundlagen verdeutlicht und dazu unabhängig von speziellen lokalen Trivialisierungen ist. Zusammenhänge werden auch als \mathfrak{g} -wertige 1-Formen definiert, welche gewissen Axiomen genügen. Es zeigt sich, dass diese Definitionen (wie kaum anders zu erwarten) äquivalent sind.

Wir wiederholen kurz die wichtigsten Eigenschaften von Lie-Gruppen und Lie-Algebren, da wir ausführlich Gebrauch von ihnen machen werden (siehe Abschnitt 5.6 für Details). Sei G eine Lie-Gruppe. Die Linkswirkung L_g und die Rechtswirkung R_g sind für $g, h \in G$ durch $L_g h = gh$ und $R_g h = hg$ definiert. L_g induziert eine Abbildung $L_{g*} : T_h(G) \rightarrow T_{gh}(G)$. Ein linksinvariantes Vektorfeld X genügt der Be-

dingung $L_{g*}X|_h = X|_{gh}$. Linksinvariante Vektorfelder bilden eine Lie-Algebra von G , die man als \mathfrak{g} bezeichnet. Da $X \in \mathfrak{g}$ durch seinen Wert bei dem neutralen Element e festgelegt wird – und umgekehrt –, existiert ein Vektorraumisomorphismus $\mathfrak{g} \cong T_e G$. Die Lie-Algebra \mathfrak{g} ist geschlossen unter der Lie-Klammer: $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma$, mit $\{T_\alpha\}$ als der Menge der Erzeuger von \mathfrak{g} . Die $f_{\alpha\beta}{}^\gamma$ werden **Strukturkonstanten** genannt. Die adjungierte Wirkung $\text{ad} : G \rightarrow G$ ist durch $\text{ad}_g h \equiv ghg^{-1}$ definiert. Die Tangentialabbildung von ad_g heißt adjungierte Abbildung Ad_g , es ist $\text{Ad}_g : T_h(G) \rightarrow T_{ghg^{-1}}(G)$. Eingeschränkt auf $T_e(G) \simeq \mathfrak{g}$ bildet Ad_g die Lie-Algebra \mathfrak{g} surjektiv auf sich selbst ab, und zwar $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit $A \mapsto gAg^{-1}$ ($A \in \mathfrak{g}$).

10.1.1 Definitionen

Seien u ein Element eines Prinzipalbündels $P(M, G)$ und G_p die Faser bei $p = \pi(u)$. Der **vertikale Unterraum** $V_u P$ ist ein zu G_p bei u tangentialer Unterraum von $T_u P$.¹ Wie wird $V_u P$ konstruiert? Betrachten wir ein Element A aus \mathfrak{g} . Durch die Rechtswirkung

$$R_{\exp(tA)}u = u \exp(tA)$$

wird in P eine Kurve durch u definiert. Wegen $\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p$ liegt diese Kurve innerhalb von G_p . Wir definieren einen Vektor $A^\# \in T_u P$ gemäß

$$A^\# f(u) = \frac{d}{dt} f(u \exp(tA))|_{t=0}, \quad (10.1)$$

wobei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige glatte Funktion ist. Der Vektor $A^\#$ ist tangential zu P bei u , also ist $A^\# \in V_u P$. Auf diese Weise definieren wir bei jedem Punkt von P einen Vektor $A^\#$ und konstruieren so ein Vektorfeld $A^\#$, das man das durch A erzeugte **fundamentale Vektorfeld** nennt. Es gibt einen Vektorraumisomorphismus $\sharp : \mathfrak{g} \rightarrow V_u P$, gegeben durch $A \mapsto A^\#$. Der **horizontale Unterraum** $H_u P$ ist ein Komplement von $V_u P$ in $T_u P$ und ist eindeutig festgelegt, wenn in P ein Zusammenhang definiert ist.

Übung 10.1

- (a) Zeigen Sie, dass $\pi_* X = 0$ für $X \in V_u P$ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass \sharp die Lie-Algebra-Struktur erhält:

$$[A^\#, B^\#] = [A, B]^\#. \quad (10.2)$$

Definition 10.1. Sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel. Ein **Zusammenhang** auf P ist eine eindeutige Zerlegung des Tangentialraums $T_u P$ in den vertikalen Unterraum $V_u P$ und den horizontalen Unterraum $H_u P$, sodass:

¹ Achtung: $T_u P$ ist ein Tangentialraum von P und sollte nicht mit dem Tangentialraum $T_p M$ von M verwechselt werden.

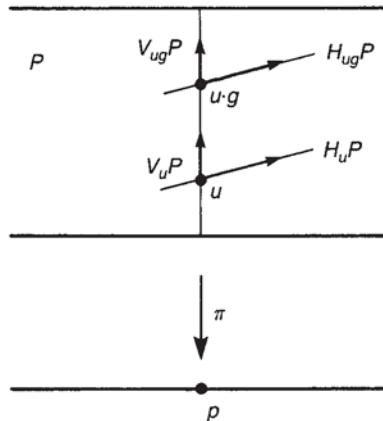


Abb. 10.1. Den horizontalen Unterraum $H_{ug}P$ erhält man aus H_uP über die Rechtswirkung.

- (i) $T_u P = H_u P \oplus V_u P$ ist,
- (ii) ein glattes Vektorfeld X auf P mittels $X = X^H + X^V$ in glatte Vektorfelder $X^H \in H_u P$ und $X^V \in V_u P$ separiert wird und
- (iii) $H_{ug}P = R_{g*}H_u P$ für beliebige $u \in P$ und $g \in G$ ist; siehe Abb. 10.1.

Axiom (iii) besagt, dass horizontale Unterräume $H_u P$ und $H_{ug} P$ auf derselben Faser durch eine lineare Abbildung R_{g*} zusammenhängen, die von der Rechtswirkung induziert wird. Demzufolge erzeugt ein Unterraum $H_u P$ bei u alle horizontalen Unterräume auf derselben Faser. Die Bedingung sorgt dafür, dass, wenn ein Punkt u paralleltransportiert wird, dies auch mit seinen konstanten Vielfachen ug ($g \in G$) geschieht; siehe später. An diesem Punkt könnten Sie sich vielleicht etwas unwohl mit unserer Definition des Zusammenhangs fühlen. Auf den ersten Blick scheint diese Definition nichts mit Eichpotenzialen oder Feldstärken zu tun zu haben. Wir werden diese Punkte klarstellen, nachdem wir die Zusammenhangs-1-Form auf P eingeführt haben. Es sei noch einmal betont, dass diese Definition, die auf der Zerlegung $T_u P = V_u P \oplus H_u P$ beruht, rein geometrisch ist und unabhängig von irgendwelchen Zusatzinformationen definiert ist. Obwohl der Zusammenhang im Folgenden noch etwas handlicher werden wird, sollten Sie dieses geometrische Bild im Hinterkopf behalten, da es in den meisten anderen Darstellungen verschleiert wird.

10.1.2 Die Zusammenhangs-1-Form

In praktischen Berechnungen brauchen wir ein systematisches Verfahren, um $T_u P$ in $V_u P$ und $H_u P$ zu separieren. Dies lässt sich erreichen, indem man eine Lie-Algebra-wertige 1-Form $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^* P$ namens **Zusammenhangs-1-Form** einführt.

Definition 10.2. Eine Zusammenhangs-1-Form $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^* P$ ist eine (surjektive) Projektion von $T_u P$ auf die vertikale Komponente $V_u P \simeq \mathfrak{g}$. Die Eigenschaften einer

Projektion lassen sich durch die folgenden Forderungen zusammenfassen:

$$(i) \quad \omega(A^\#) = A \quad A \in \mathfrak{g}, \quad (10.3a)$$

$$(ii) \quad R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega, \quad (10.3b)$$

d. h., für $X \in T_u P$ ist

$$R_g^* \omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(R_{g*} X) = g^{-1} \omega_u(X) g. \quad (10.3b')$$

Wir definieren den horizontalen Unterraum $H_u P$ über den Kern von ω :

$$H_u P \equiv \{X \in T_u P | \omega(X) = 0\}. \quad (10.4)$$

Um zu zeigen, dass diese Definition konsistent mit Definition 10.1 ist, beweisen wir die folgende Behauptung.

Behauptung 10.1. Die horizontalen Unterräume (10.4) erfüllen die Bedingung

$$R_{g*} H_u P = H_{ug} P. \quad (10.5)$$

Beweis

Wir wählen einen festen Punkt $u \in P$ und definieren $H_u P$ gemäß (10.4). Wir betrachten $X \in H_u P$ und konstruieren $R_{g*} X \in T_{ug} P$ und erhalten dann

$$\omega(R_{g*} X) = R_g^* \omega(X) = g^{-1} \omega(X) g = 0,$$

wegen $\omega(X) = 0$. Dementsprechend ist $R_{g*} X \in H_{ug} P$. Wir erkennen, dass R_{g*} eine invertierbare lineare Abbildung ist. Daher lässt sich ein beliebiger Vektor $Y \in H_{ug} P$ als $Y = R_{g*} X$ ausdrücken, mit einem $X \in H_u P$. Dies beweist Gleichung (10.5). \square

Wir haben gezeigt, dass die Definition der Zusammenhangs-1-Form ω äquivalent zu der des Zusammenhangs ist, da ω den Tangentialraum $T_u P$ in $H_u P \oplus V_u P$ zerlegt, in Einklang mit den Axiomen von Definition 10.1. Die hier definierte Zusammenhangs-1-Form ω ist in der Literatur als **Ehresmann-Zusammenhang** bekannt.

10.1.3 Die lokale Zusammenhangsform und das Eichpotenzial

Seien $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M und σ_i ein lokaler Schnitt, der auf jedem U_i definiert ist. Es ist geschickt, eine Lie-Algebra-wertige 1-Form \mathcal{A}_i auf U_i über

$$\mathcal{A}_i \equiv \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i) \quad (10.6)$$

einzuführen. Umgekehrt können wir aus einer gegebenen Lie-Algebra-wertigen 1-Form \mathcal{A}_i auf U_i eine Zusammenhangs-1-Form ω rekonstruieren, deren Rücktransport über $\sigma_i^* \mathcal{A}_i$ ist.

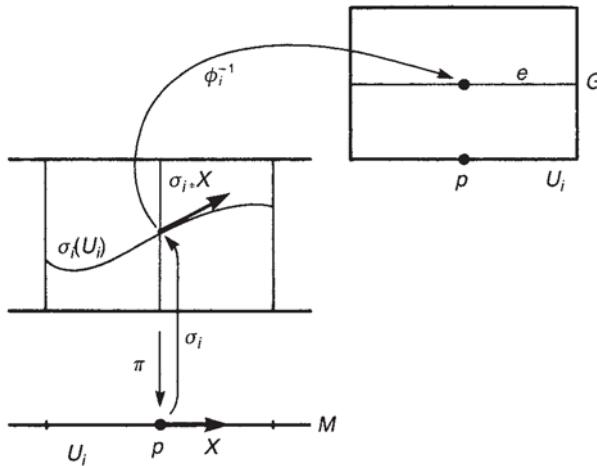


Abb. 10.2. Die durch den lokalen Schnitt σ_i über U_i definierte kanonische lokale Trivialisierung.

Satz 10.1. Zu einer gegebenen \mathfrak{g} -wertigen 1-Form \mathcal{A}_i auf U_i und einem lokalen Schnitt $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ existiert eine Zusammenhangs-1-Form ω , sodass $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ Axiom.

Beweis

Lassen Sie uns eine \mathfrak{g} -wertige 1-Form ω auf P definieren über

$$\omega_i \equiv g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i, \quad (10.7)$$

wobei d_P die äußere Ableitung auf P ist und g_i die **kanonische lokale Trivialisierung**, definiert über $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ für $u = \sigma_i(p)g_i$. Wir zeigen zunächst $\sigma_i^* \omega_i = \mathcal{A}_i$: Für $X \in T_p M$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma_i^* \omega_i(X) &= \omega_i(\sigma_{i*} X) = \pi^* \mathcal{A}_i(\sigma_{i*} X) + d_P g_i \sigma_{i*} X \\ &= \mathcal{A}_i(\pi_* \sigma_{i*} X) + d_P g_i(\sigma_{i*} X), \end{aligned}$$

wobei wir beachtet haben, dass $\sigma_{i*} X \in T_{\sigma_i} P$ und $g_i = e$ bei σ_i ist, siehe Abb. 10.2. Wir erkennen weiterhin, dass $\pi_* \sigma_{i*} = \text{id}_{T_p(M)}$ und $d_P g_i(\sigma_{i*} X) = 0$ ist, wegen $g \equiv e$ entlang $\sigma_{i*} X$. Somit haben wir $\sigma_i^* \omega_i(X) = \mathcal{A}_i(X)$ erhalten.

Als nächstes zeigen wir, dass ω_i die Axiome einer Zusammenhangs-1-Form in Definition 10.2 erfüllt.

- (i) Sei $X = A^\# \in V_u P$ ($A \in \mathfrak{g}$). Aus Übung 10.1(a) folgt $\pi_* X = 0$. Damit erhalten wir

$$\omega_i(A^\#) = g_i^{-1} d_P g_i(A^\#) = g_i(u)^{-1} \left. \frac{dg(u \exp(tA))}{dt} \right|_{t=0} = g_i(u)^{-1} g_i(u) \left. \frac{d \exp(tA)}{dt} \right|_{t=0} = A.$$

- (ii) Wir betrachten $X \in T_u P$ und $h \in G$ und erhalten

$$R_h^* \omega_i(X) = \omega_i(R_{h*} X) = g_{iuh}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* R_{h*} X) g_{iuh} + g_{iuh}^{-1} d_P g_{iuh}(R_{h*} X).$$

Wegen $g_{iu}h = g_{iu}h$ und $\pi_*R_{h*}X = \pi_*X$ (beachten Sie, dass $\pi R_h = \pi$ ist) ergibt sich

$$R_h^*\omega_i(X) = h^{-1}g_{iu}^{-1}\mathcal{A}_i(\pi_*X)g_{iu}h + h^{-1}g_{iu}^{-1}dPg_{iu}(X)h = h^{-1}\omega_i(X)h,$$

wobei wir beachtet haben, dass gilt:

$$g_{iu}^{-1}dPg_{iu}(R_{h*}X) = g_{iu}^{-1}\left.\frac{d}{dt}g_{i\gamma(t)h}\right|_{t=0} = h^{-1}g_{iu}^{-1}\left.\frac{d}{dt}g_{i\gamma(t)}\right|_{t=0}h = h^{-1}g_{iu}^{-1}dPg_{iu}(X)h.$$

Hier ist $\gamma(t)$ eine Kurve durch $u = \gamma(0)$, deren Tangentialvektor bei u der Vektor X ist.

Daher erfüllt die durch (10.7) definierte \mathfrak{g} -wertige 1-Form ω_i tatsächlich $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega_i$ und damit die Axiome einer Zusammenhangs-1-Form. \square

Damit ω auf P eindeutig definiert ist, d. h., die Zerlegung $T_uP = H_uP \oplus V_uP$ eindeutig ist, muss $\omega_i = \omega_j$ auf $U_i \cap U_j$ sein. Eine eindeutige 1-Form ω ist dann auf ganz P durch $\omega|_{U_i} = \omega_i$ definiert. Um diese Bedingung zu erfüllen, müssen die lokalen Formen \mathcal{A}_i eine etwas merkwürdige Transformationseigenschaft haben, die jener der Christoffel-Symbole ähnelt. Wir beweisen zuerst ein formales Lemma.

Lemma 10.1. Seien $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und σ_i (σ_j) ein lokaler Schnitt über U_i (U_j), sodass $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist. Für $X \in T_pM$ ($p \in U_i \cap U_j$) genügen $\sigma_{i*}X$ und $\sigma_{j*}X$ der Identität

$$\sigma_{j*}X = R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + (t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X))^\#, \quad (10.8)$$

mit der Übergangsfunktion $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$.

Beweis

Wir betrachten eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, sodass $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$ ist. Da $\sigma_i(p)$ und $\sigma_j(p)$ über die Übergangsfunktion gemäß $\sigma_j(p) = \sigma_i(p)t_{ij}(p)$ zusammenhängen, siehe (9.43), ist

$$\begin{aligned} \sigma_{j*}X &= \left.\frac{d}{dt}\sigma_j(\gamma(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\{\sigma_i(t)t_{ij}(t)\}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\sigma_i(t) \cdot t_{ij}(p) + \sigma_i(p) \cdot \frac{d}{dt}t_{ij}(t)\right|_{t=0} \\ &= R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + \sigma_j(p)t_{ij}(p)^{-1}\left.\frac{d}{dt}t_{ij}(t)\right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Dabei steht $\sigma_i(t)$ für $\sigma_i(\gamma(t))$, und wir haben angenommen, dass G eine Matrixgruppe ist, für welche $R_g*X = Xg$ gilt. Wir erkennen, dass gilt:

$$\begin{aligned} t_{ij}(p)^{-1}dt_{ij}(X) &= t_{ij}(p)^{-1}\left.\frac{d}{dt}t_{ij}(t)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}[t_{ij}(p)^{-1}t_{ij}(t)]\right|_{t=0} \in T_e(G) \cong \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

(Beachten Sie, dass $t_{ij}(p)^{-1}t_{ij}(\gamma(t)) = e$ bei $t = 0$ ist.) Dies zeigt, dass der zweite Term von $\sigma_{j*}X$ das Vektorfeld $(t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X))^{\#}$ bei $\sigma_j(p)$ darstellt. \square

Die Kompatibilitätsbedingung erhält man leicht durch Anwenden der Zusammenhangs-1-Form ω auf (10.8). Wir erhalten

$$\sigma_j^*\omega(X) = R_{t_{ij}}^*\omega(\sigma_{i*}X) + t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X) = t_{ij}^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X),$$

wobei die Axiome von Definition 10.2 verwendet worden sind. Da dies für beliebige $X \in T_p M$ wahr ist, reduziert sich die Gleichung auf

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}. \quad (10.9)$$

Dies ist die **Kompatibilitätsbedingung**, die wir gesucht haben.

Umgekehrt können wir aus einer gegebenen offenen Überdeckung $\{U_i\}$, den lokalen Schnitten $\{\sigma_i\}$ und den lokalen Formen $\{\mathcal{A}_i\}$, welche (10.9) genügen, die \mathfrak{g} -wertige 1-Form ω über P konstruieren. Da ein nichttriviales Prinzipalbündel keinen globalen Schnitt zulässt, existiert der Rücktransport $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega$ lokal, aber nicht notwendigerweise global. In Eichtheorien wird \mathcal{A}_i mit dem **Eichpotenzial (Yang-Mills-Potenzial)** identifiziert. Wir wir im Fall der Monopole gesehen haben, lässt das Monopolfeld $B = gr/r^3$ kein einzelnes überall gültiges Eichpotenzial zu, und wir benötigen mindestens zwei \mathcal{A}_i , um dieses U(1)-Bündel über der S^2 zu beschreiben.

Übung 10.2 Seien $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel über M sowie U eine Karte von M . Betrachten Sie zwei lokale Schnitte σ_1 und σ_2 über U , sodass $\sigma_2(p) = \sigma_1(p)g(p)$ ist. Zeigen Sie, dass die korrespondierenden lokalen Formen \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 miteinander über

$$\mathcal{A}_2 = g^{-1}\mathcal{A}_1 g + g^{-1}dg \quad (10.10a)$$

zusammenhängen. In Komponenten wird daraus

$$\mathcal{A}_{2\mu} = g^{-1}(p)\mathcal{A}_{1\mu}(p)g(p) + g^{-1}(p)\partial_\mu g(p). \quad (10.10b)$$

Dies ist einfach die in Abschnitt 1.8 definierte **Eichtransformation**.

Beispiel 10.1. Sei P ein U(1)-Bündel über M . Betrachten Sie einander überlappende Karten U_i und U_j , und sei \mathcal{A}_i (\mathcal{A}_j) eine lokale Zusammenhangsform auf U_i (U_j). Die Übergangsfunktion $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{U}(1)$ ist gegeben durch

$$t_{ij}(p) = \exp[i\Lambda(p)] \quad (\Lambda(p) \in \mathbb{R}). \quad (10.11)$$

\mathcal{A}_i und \mathcal{A}_j hängen über

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j(p) &= t_{ij}(p)^{-1}\mathcal{A}_i(p)t_{ij}(p) + t_{ij}(p)^{-1}dt_{ij}(p) \\ &= \mathcal{A}_i(p) + i\partial_\mu\Lambda(p) \end{aligned} \quad (10.12a)$$

zusammen. In Komponenten erhalten wir den vertrauten Ausdruck

$$\mathcal{A}_{j\mu} = \mathcal{A}_{i\mu} + i\partial_\mu \Lambda. \quad (10.12b)$$

Unser Zusammenhang \mathcal{A}_μ unterscheidet sich von dem Standardvektorpotenzial A_μ um den Lie-Algebra-Faktor: $\mathcal{A}_\mu = iA_\mu$. \diamond

Wir erkennen auch hier, dass ω über dem Bündel $P(M, G)$ global definiert ist. Obwohl es viele Zusammenhangs-1-Formen auf $P(M, G)$ gibt, tragen sie dieselbe globale Information über das Bündel. Im Gegensatz dazu ist ein individuelles lokales Stück (Eichpotenzial) \mathcal{A}_i mit dem *trivialen* Bündel $\pi^{-1}(U_i)$ assoziiert und kann keinerlei globale Informationen über P enthalten. Es ist ω oder, äquivalent dazu, die *Gesamtheit* aller $\{\mathcal{A}_i\}$, welche die Kompatibilitätsbedingung (10.9) erfüllt, in welcher die globale Information über das Bündel steckt.

10.1.4 Horizontale Liftung und Paralleltransport

Der Paralleltransport eines Vektors wurde in Kapitel 7 als ein *unveränderter* Transport definiert. Den Paralleltransport eines Elements aus einem Prinzipalbündel entlang einer Kurve in M erhalten wir mithilfe der „horizontalen Liftung“ der Kurve.

Definition 10.3. Seien $P(M, G)$ ein G -Bündel und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve in M . Eine Kurve $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ bezeichnet man als **horizontale Liftung** von γ , wenn $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ ist und der Tangentialvektor zu $\tilde{\gamma}(t)$ immer zu $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$ gehört.

Sei \tilde{X} ein Tangentialvektor von $\tilde{\gamma}$. Dann ist die Bedingung $\omega(\tilde{X}) = 0$ definitionsgemäß erfüllt. Diese Gleichung ist eine gewöhnliche DGL (Differentialgleichung), und der Eindeutigkeitssatz für DGL garantiert uns die lokale Existenz und Eindeutigkeit der horizontalen Liftung.

Satz 10.2. Es seien $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve in M und $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Dann existiert eine eindeutige horizontale Liftung $\tilde{\gamma}(t)$ in P , sodass $\tilde{\gamma}(0) = u_0$ ist.

Lassen Sie uns solch eine Kurve $\tilde{\gamma}$ konstruieren. Sei U_i eine Karte, die γ enthält. Wir betrachten einen Schnitt σ_i über U_i . Wenn eine horizontale Liftung $\tilde{\gamma}$ existiert, kann man sie als $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$ ausdrücken, wobei $g_i(t)$ für $g_i(\gamma(t)) \in G$ steht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir einen Schnitt so wählen, dass $\sigma_i(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$, also $g_i(0) = e$ ist. Sei X ein Tangentialvektor von $\gamma(t)$ bei $\gamma(0)$. Dann ist $\tilde{X} = \tilde{\gamma}_*X$ tangential zu $\tilde{\gamma}$ bei $u_0 = \tilde{\gamma}(0)$. Da der Tangentialvektor \tilde{X} horizontal ist, erfüllt er $\omega(\tilde{X}) = 0$. Eine leichte Modifikation von Lemma 10.1 ergibt

$$\tilde{X} = g_i(t)^{-1}\sigma_{i*}Xg_i(t) + [g_i(t)^{-1}dg_i(X)]^\#.$$

Indem wir ω auf diese Gleichung anwenden, erhalten wir

$$0 = \omega(\tilde{X}) = g_i(t)^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t) + g_i(t)^{-1}\frac{dg_i(X)}{dt}.$$

Linksmultiplikation mit $g_i(t)$ führt auf

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t). \quad (10.13a)$$

Der fundamentale Satz von Picard-Lindelöf garantiert Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (10.13a).

Wegen $\omega(\sigma_{i*}X) = \sigma_i^*\omega(X) = \mathcal{A}_i(X)$ lässt sich Gleichung (10.13a) in einer lokalen Form als

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\mathcal{A}_i(X)g_i(t) \quad (10.13b)$$

ausdrücken. Die formale Lösung mit $g_i(0) = e$ ist

$$\begin{aligned} g_i(t) &= \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^t \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} dt \right) \\ &= \mathcal{P} \exp \left(- \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t)) dx^\mu \right), \end{aligned} \quad (10.14)$$

wobei \mathcal{P} ein Pfadordnungsoperator entlang $\gamma(t)$ ist.² Die horizontale Liftung drückt sich dann als $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$ aus.

Korollar 10.1. Sei $\tilde{\gamma}'$ eine weitere horizontale Liftung von γ , sodass $\tilde{\gamma}'(0) = \gamma(0)g$. Dann gilt $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)g$ für alle $t \in [0, 1]$.

Beweis

Wir bemerken zuerst, dass der horizontale Unterraum rechtsinvariant ist: $R_{g*}H_u P = H_{ug}P$. Sei $\tilde{\gamma}$ eine horizontale Liftung von γ . Dann ist auch $\tilde{\gamma}_g : t \mapsto \tilde{\gamma}(t)g$ eine horizontale Liftung von $\gamma(t)$, da ihr Tangentialvektor zu $H_{\tilde{\gamma}g}P$ gehört. Aus Satz 10.2 stellen wir fest, dass $\tilde{\gamma}'$ die eindeutige horizontale Liftung ist, welche bei $\tilde{\gamma}(0)g$ startet. \square

Beispiel 10.2. Betrachten wir das Bündel $P(M, \mathbb{R}) \cong M \times \mathbb{R}$, mit $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei $\phi : ((x, y), f) \mapsto u \in P$ eine lokale Trivialisierung, wobei (x, y) die Koordinate von M und f die Koordinate einer additiven Gruppe \mathbb{R} ist. Sei

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + df$$

² $\mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t))$ und $\mathcal{A}_{i\nu}(\gamma(s))$ kommutieren im Allgemeinen nicht, und der Exponentialausdruck in (10.14) ist nicht ohne Weiteres wohldefiniert. Seien $A(t)$ und $B(t)$ zwei von t abhängige Matrizen. Dann ist die Wirkung von \mathcal{P}

$$\mathcal{P}[A(t)B(s)] = \begin{cases} A(t)B(s) & (t > s) \\ B(s)A(t) & (s > t). \end{cases}$$

Die Verallgemeinerung auf Produkte von mehr als zwei Matrizen sollte offensichtlich sein.

eine Zusammenhangs-1-Form. Man überprüft leicht, dass ω die Axiome für Zusammenhangs-1-Formen erfüllt. Tatsächlich ergibt sich, mit $A^\# = A\partial/\partial f$ ($A \in \mathbb{R}$) als einem Element der Lie-Algebra der additiven Gruppe, $\omega(A^\#) = A$. Darüber hinaus ist $R_{g*}\omega = \omega = g^{-1}\omega g$, da \mathbb{R} Abel'sch ist. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Lassen Sie uns die horizontale Liftung herausarbeiten, die bei $((1, 0), 0)$ startet. Sei

$$X = \frac{d}{dt} \equiv \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial f}$$

tangential zu $\tilde{\gamma}(t)$. Damit X horizontal ist, muss gelten

$$0 = \omega(X) = \frac{dx}{dt} \frac{y}{r^2} - \frac{dy}{dt} \frac{x}{r^2} + \frac{df}{dt} = -2\pi + \frac{df}{dt}.$$

Die Lösung findet sich leicht als $f = 2\pi t + \text{konstant}$. Schließlich erhalten wir die durch $((1, 0), 0)$ verlaufende horizontale Liftung:

$$\tilde{\gamma}(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t). \quad (10.15)$$

Dies ist eine Schraubenlinie (Helix) über dem Einheitskreis.

Unter der Gruppenoperation (egal, ob von links oder von rechts) wird f nach $f + g$ ($g \in \mathbb{R}$) verschoben. Die entsprechend verschobene horizontale Liftung ist

$$\tilde{\gamma}_g(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t + g). \quad (10.16)$$

◊

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve. Wir betrachten einen Punkt $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Es gibt eine eindeutige horizontale Liftung $\tilde{\gamma}(t)$ von $\gamma(t)$ durch u_0 , und daher existiert ein eindeutig definierter Punkt $u_1 = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$, siehe Abb. 10.3. Der Punkt u_1 heißt **Paralleltransport** von u_0 entlang der Kurve γ . Dies definiert eine Abbildung $\Gamma(\tilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$, sodass $u_0 \mapsto u_1$ ist. Wenn die lokale Form (10.14) verwendet wird, erhalten wir

$$u_1 = \sigma_i(1) \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^1 \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt} dt \right). \quad (10.17)$$

Korollar 10.1 stellt sicher, dass $\Gamma(\tilde{\gamma})$ mit der Rechtswirkung R_g kommutiert. Beachten Sie zunächst, dass $R_g \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = u_1 g$ und $\Gamma(\tilde{\gamma}) R_g(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0 g)$ ist. Wir bemerken auch, dass $\tilde{\gamma}(t)g$ eine horizontale Liftung durch $u_0 g$ und $u_1 g$ ist. Aus der Eindeutigkeit der horizontalen Liftung durch $u_0 g$ ergibt sich $u_1 g = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0 g)$, also $R_g \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma}) R_g(u_0)$. Da dies für beliebige $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ gilt, erhalten wir

$$R_g \Gamma(\tilde{\gamma}) = \Gamma(\tilde{\gamma}) R_g. \quad (10.18)$$

Übung 10.3 Sei $\tilde{\gamma}$ eine horizontale Liftung von $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Betrachten Sie eine Abbildung $\Gamma(\tilde{\gamma}^{-1}) : \pi^{-1}(\gamma(1)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(0))$ mit $\tilde{\gamma}^{-1}(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Gamma(\tilde{\gamma}^{-1}) = \Gamma(\tilde{\gamma})^{-1}. \quad (10.19)$$

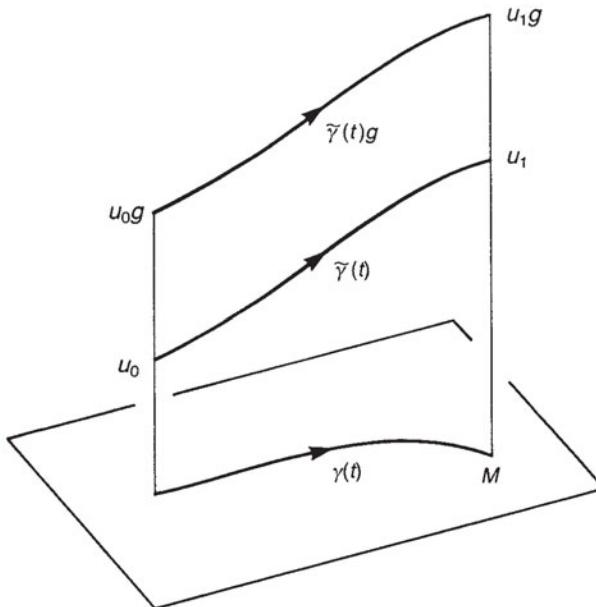


Abb. 10.3. Eine Kurve $\gamma(t)$ in M und ihre horizontalen Liftungen $\tilde{\gamma}(t)$ und $\tilde{\gamma}(t)g$.

Betrachten Sie zwei Kurven $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ und $\beta : [0, 1] \rightarrow M$, sodass $\alpha(1) = \beta(0)$ ist. Definieren Sie das Produkt $\alpha * \beta$ über

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \beta(2t - 1) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1). \end{cases}$$

Seien $\Gamma(\tilde{\alpha}) : \pi^{-1}(\alpha(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\alpha(1))$ und $\Gamma(\tilde{\beta}) : \pi^{-1}(\beta(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\beta(1))$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\widetilde{\Gamma(\alpha * \beta)} = \widetilde{\Gamma(\tilde{\beta})} \circ \widetilde{\Gamma(\tilde{\alpha})}. \quad (10.20)$$

Übung 10.4 Wir schreiben $u \sim v$, wenn $u, v \in P$ sich auf derselben horizontalen Liftung befinden. Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

10.2 Holonomie

10.2.1 Definitionen

Seien $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel, $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve und $\tilde{\gamma}$ deren horizontale Liftung durch $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Im vorigen Abschnitt wurde eine Abbildung $\Gamma(\tilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$ definiert mit $u_0 = \tilde{\gamma}(0) \mapsto u_1 = \tilde{\gamma}(1)$. Betrachten wir jetzt

die Kurven $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = \beta(0) = p_0$ und $\alpha(1) = \beta(1) = p_1$. Wir betrachten horizontale Liftungen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ von α und β mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = u_0$. Dann ist $\tilde{\alpha}(1)$ nicht notwendigerweise gleich $\tilde{\beta}(1)$. Dies zeigt, dass für eine Schleife $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ bei $p = \gamma(0) = \gamma(1)$ im Allgemeinen $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$ ist. Die Schleife γ definiert eine Transformation $\tau_\gamma : \pi^{-1}(p) \rightarrow \pi^{-1}(p)$ auf der Faser. Diese Transformation ist kompatibel mit der Rechtswirkung der Gruppe:

$$\tau_\gamma(ug) = \tau_\gamma(u)g. \quad (10.21)$$

Dies folgt unmittelbar aus (10.18). Es sei bemerkt, dass τ_γ nicht nur von der Schleife γ , sondern auch vom Zusammenhang abhängt.

Beispiel 10.3. Wir betrachten ein \mathbb{R} -Bündel über $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Die Zusammenhangs-1-Form ω und die Schleife γ in Beispiel 10.2 definieren eine Abbildung $\tau_\gamma : \pi^{-1}((1, 0)) \rightarrow \pi^{-1}((1, 0))$, gegeben durch $g \mapsto g + 2\pi$ ($g \in \mathbb{R}$). \diamond

Wir betrachten einen Punkt $u \in P$ mit $\pi(u) = p$ und die Menge der Schleifen $C_p(M)$ bei p : $C_p(M) \equiv \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M | \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$. Die Menge der Elemente

$$\Phi_u \equiv \{g \in G | \tau_\gamma(u) = ug, \gamma \in C_p(M)\} \quad (10.22)$$

ist eine Untergruppe der Strukturgruppe G und wird **Holonomiegruppe** bei u genannt. Die Gruppeneigenschaften von Φ_u lassen sich leicht aus Übung 10.3 ableiten. Wenn α, β und $\gamma = \alpha * \beta$ Schleifen bei p sind, ergibt sich $\tau_\gamma = \tau_\beta \circ \tau_\alpha$ und daher

$$\tau_\gamma(u) = \tau_\beta \circ \tau_\alpha(u) = \tau_\beta(ug_\alpha) = \tau_\beta(u)g_\alpha = ug_\beta g_\alpha,$$

mit $\tau_\alpha(u) = ug_\alpha$ usw. Dies zeigt, dass gilt:

$$g_\gamma = g_\beta g_\alpha. \quad (10.23)$$

Die konstante Schleife $c : [0, 1] \mapsto p$ definiert die identische Transformation $\tau_c : u \mapsto u$. Die inverse Schleife γ^{-1} von γ induziert die inverse Transformation $\tau_{\gamma^{-1}} = \tau_\gamma^{-1}$ und damit $g_{\gamma^{-1}} = g_\gamma^{-1}$.

Übung 10.5 (a) Sei $\tau_\alpha(u) = ug_\alpha$. Zeigen Sie:

$$\tau_\alpha(ug) = ug(\text{ad}_g g_\alpha) = ug(g^{-1}g_\alpha g). \quad (10.24)$$

Überprüfen Sie auch, dass gilt:

$$\Phi_{ua} \cong a^{-1}\Phi_u a. \quad (10.25)$$

(b) Seien $u, u' \in P$ Punkte auf derselben horizontalen Lifting $\tilde{\gamma}$. Zeigen Sie, dass $\Phi_u \cong \Phi_{u'}$ ist.

(c) Nehmen Sie an, M sei zusammenhängend. Zeigen Sie, dass alle Φ_u zueinander isomorph sind.

Übung 10.6 Seien $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu$ ein Eichpotenzial über U_i und γ eine Schleife in U_i , weiterhin sei $\tau_\gamma(u) = ug_\gamma$ ($u \in P$, $g_\gamma \in G$). Verwenden Sie (10.14) um zu zeigen:

$$g_\gamma = \mathcal{P} \exp \left(- \oint_{\gamma} \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu \right). \quad (10.26)$$

Es bezeichne $C_p^0(M)$ die Menge der Schleifen bei p , die homotop zur konstanten Schleife bei p sind. Die Gruppe

$$\Phi_u^0 \equiv \{g \in G | \tau_\gamma(u) = ug, \gamma \in C_p^0(M)\} \quad (10.27)$$

wird **eingeschränkte Holonomiegruppe** genannt.

10.3 Krümmung

10.3.1 Kovariante Ableitungen in Prinzipalbündeln

Wir haben die äußere Ableitung $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ in Kapitel 5 definiert. Eine r -Form η ist eine reellwertige Form, die auf Vektoren wirkt:

$$\eta : TM \wedge \dots \wedge TM \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wir wollen diese Operation so verallgemeinern, dass wir eine vektorwertige r -Form $\phi \in \Omega^r(P) \otimes V$ differenzieren können:

$$\phi : TP \wedge \dots \wedge TP \rightarrow V.$$

Dabei ist V ein k -dimensionaler Vektorraum. Die allgemeinste Form von ϕ ist $\phi = \sum_{\alpha=1}^k \phi^\alpha \otimes e_\alpha$, hier ist $\{e_\alpha\}$ eine Basis von V und $\phi^\alpha \in \Omega^r(P)$.

Ein Zusammenhang ω auf einem Prinzipalbündel $P(M, G)$ separiert $T_u P$ in $H_u P \oplus V_u P$. Dementsprechend wird ein Vektor $X \in T_u P$ gemäß $X = X^H + X^V$ zerlegt, mit $X^H \in H_u P$ und $X^V \in V_u P$.

Definition 10.4. Seien $\phi \in \Omega^r(P) \otimes V$ und $X_1, \dots, X_{r+1} \in T_u P$. Die **kovariante Ableitung** von ϕ wird durch

$$D\phi(X_1, \dots, X_{r+1}) \equiv d_P \phi(X_1^H, \dots, X_{r+1}^H) \quad (10.28)$$

definiert. Dabei ist $d_P \phi \equiv d_P \phi^\alpha \otimes e_\alpha$.

10.3.2 Krümmung

Definition 10.5. Die **Krümmungs-2-Form** Ω ist die kovariante Ableitung der Zusammenhangs-1-Form ω :

$$\Omega \equiv D\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}. \quad (10.29)$$

Behauptung 10.2. Die Krümmungs-2-Form erfüllt die Gleichung – vgl. (10.3b) –

$$R_a^* \Omega = a^{-1} \Omega a \quad (a \in G). \quad (10.30)$$

Beweis

Wir bemerken zunächst, dass $(R_{a*}X)^H = R_{a*}(X^H)$ (R_{a*} erhält die horizontalen Unterräume) und $d_P R_a^* = R_a^* d_P$ ist, siehe (5.75). Per definitionem gilt

$$\begin{aligned} R_a^* \Omega(X, Y) &= \Omega(R_{a*}X, R_{a*}Y) = d_P \omega((R_{a*}X)^H, (R_{a*}Y)^H) \\ &= d_P \omega(R_{a*}X^H, R_{a*}Y^H) = R_a^* d_P \omega(X^H, Y^H) \\ &= d_P R_a^* \omega(X^H, Y^H) \\ &= d_P(a^{-1} \omega a)(X^H, Y^H) = a^{-1} d_P \omega(X^H, Y^H) a \\ &= a^{-1} \Omega(X, Y) a, \end{aligned}$$

wobei wir beachtet haben, dass a ein konstantes Element ist und daher $d_P a = 0$ gilt. \square

Wir betrachten eine \mathfrak{g} -wertige p -Form $\zeta = \zeta^\alpha \otimes T_\alpha$ und eine \mathfrak{g} -wertige q -Form $\eta = \eta^\alpha \otimes T_\alpha$, wobei $\zeta^\alpha, \eta^\alpha \in \Omega^q(P)$ und $\{T_\alpha\}$ eine Basis von \mathfrak{g} ist. Wir definieren den Kommutator von ζ und η :

$$\begin{aligned} [\zeta, \eta] &\equiv \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq} \eta \wedge \zeta \\ &= T_\alpha T_\beta \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta - (-1)^{pq} T_\beta T_\alpha \eta^\beta \wedge \zeta^\alpha \\ &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Wenn wir in (10.31) $\zeta = \eta$ setzen, falls p und q ungerade sind, erhalten wir

$$[\zeta, \zeta] = 2\zeta \wedge \zeta = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \zeta^\beta.$$

Lemma 10.2. Seien $X \in H_u P$ und $Y \in V_u P$. Dann ist $[X, Y] \in H_u P$.

Beweis

Sei Y ein durch $g(t)$ erzeugtes Vektorfeld; dann ist

$$\mathcal{L}_Y X = [Y, X] = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (R_{g(t)*} X - X).$$

Da für einen Zusammenhang $R_{g*} H_u P = H_{ug} P$ gilt, ist der Vektor $R_{g(t)*} X$ horizontal und damit auch $[Y, X]$. \square

Satz 10.3. Seien $X, Y \in T_u P$. Dann genügen Ω und ω der **Cartan-Strukturgleichung**:

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]. \quad (10.32a)$$

Dies schreibt sich auch als

$$\Omega = d_P \omega + \omega \wedge \omega. \quad (10.32b)$$

Beweis

Wir betrachten die folgenden drei Fälle getrennt:

(i) Seien $X, Y \in H_u P$. Dann ist definitionsgemäß $\omega(X) = \omega(Y) = 0$. Aus Definition 10.5 folgt $\Omega(X, Y) = d_P \omega(X^H, Y^H) = d_P \omega(X, Y)$, wegen $X = X^H$ und $Y = Y^H$.

(ii) Seien $X \in H_u P$ und $Y \in V_u P$. Wegen $Y^H = 0$ ist $\Omega(X, Y) = 0$. Außerdem gilt $\omega(X) = 0$. Somit müssen wir beweisen, dass $d_P \omega(X, Y) = 0$ ist. Aus (5.70) erhalten wir

$$d_P \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = X\omega(Y) - \omega([X, Y]).$$

Wegen $Y \in V_u P$ gibt es ein Element $V \in \mathfrak{g}$, sodass $Y = V^\#$ ist. Dann ist $\omega(Y) = V$ konstant und damit $X\omega(Y) = X \cdot V = 0$. Aus Lemma 10.2 erhalten wir $[X, Y] \in H_u P$, sodass $\omega([X, Y]) = 0$ ist, und es ergibt sich $d_P \omega(X, Y) = 0$.

(iii) Für $X, Y \in V_u P$ gilt $\Omega(X, Y) = 0$. In diesem Fall erhalten wir

$$d_P \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]).$$

Wir bemerken, dass X und Y unter der Lie-Klammer geschlossen sind, $[X, Y] \in V_u P$, siehe Übung 10.1(b). Dann existiert ein $A \in \mathfrak{g}$, sodass gilt:

$$\omega([X, Y]) = A,$$

mit $A^\# = [X, Y]$. Seien $B^\# = X$ und $C^\# = Y$. Dann ist $[\omega(X), \omega(Y)] = [B, C] = A$ wegen $[B, C]^\# = [B^\#, C^\#]$. Somit haben wir gezeigt:

$$0 = d_P \omega(X, Y) + \omega([X, Y]) = d_P \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)].$$

Da Ω linear und schiefsymmetrisch ist, reichen diese drei Fälle aus, um zu zeigen, dass (10.32) für beliebige Vektoren wahr ist.

Um (10.32b) aus (10.32a) herzuleiten, beachten wir, dass gilt:

$$\begin{aligned} [\omega, \omega](X, Y) &= [T_\alpha, T_\beta]\omega^\alpha \wedge \omega^\beta(X, Y) \\ &= [T_\alpha, T_\beta][\omega^\alpha(X)\omega^\beta(Y) - \omega^\beta(X)\omega^\alpha(Y)] \\ &= [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] = 2[\omega(X), \omega(Y)]. \end{aligned}$$

Daher ist $\Omega(X, Y) = (d_P \omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega])(X, Y) = (d_P \omega + \omega \wedge \omega)(X, Y)$. □

10.3.3 Geometrische Bedeutung der Krümmung und das Ambrose-Singer-Theorem

Wir haben in Kapitel 7 gezeigt, dass der Riemann'sche Krümmungstensor die Nicht-kommutativität des Paralleltransports von Vektoren beschreibt. Es gibt eine ähnliche Interpretation für die Krümmung auf Prinzipalbündeln. Wir zeigen als erstes, dass $\Omega(X, Y)$ die vertikale Komponente der Lie-Klammer $[X, Y]$ von horizontalen Vektoren $X, Y \in H_u P$ ergibt. Aus $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ folgt

$$d_P \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]).$$

Wegen $X^H = X$ und $Y^H = Y$ erhalten wir

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X, Y) = -\omega([X, Y]). \quad (10.33)$$

Betrachten wir ein Koordinatensystem $\{x^\mu\}$ auf einer Karte U . Seien $V = \partial/\partial x^1$ und $W = \partial/\partial x^2$. Wir betrachten ein infinitesimales Parallelogramm γ mit den Ecken $O = \{0, 0, \dots, 0\}$, $P = \{\varepsilon, 0, \dots, 0\}$, $Q = \{\varepsilon, \delta, 0, \dots, 0\}$ und $R = \{0, \delta, 0, \dots, 0\}$. Nun betrachten wir die horizontale Liftung $\tilde{\gamma}$ von γ . Seien $X, Y \in H_u P$, sodass $\pi_* X = \varepsilon V$ und $\pi_* Y = \delta W$ ist. Dann folgt

$$\pi_*([X, Y]^H) = \epsilon \delta [V, W] = \epsilon \delta \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (10.34)$$

Also ist $[X, Y]$ *vertikal*. Diese Überlegung zeigt, dass die horizontale Liftung $\tilde{\gamma}$ einer Schleife γ sich nicht schließt. Das Ausmaß des Nichtschließens ist proportional zu dem vertikalen Vektor $[X, Y]$, der Anfangs- und Endpunkt auf derselben Faser verbindet. Die Krümmung misst diesen Abstand:

$$\Omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) = A. \quad (10.35)$$

Dabei ist A ein Element von \mathfrak{g} , sodass $[X, Y] = A^\#$ ist.

Da die Abweichung zwischen Anfangs- und Endpunkt der horizontalen Liftung einer geschlossenen Kurve einfach die Holonomie ist, erwarten wir, dass sich die Holonomiegruppe in Abhängigkeit von der Krümmung ausdrücken lässt.

Satz 10.4. (Ambrose-Singer-Theorem) Sei $P(M, G)$ ein G -Bündel über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M . Die Lie-Algebra \mathfrak{h} der Holonomiegruppe Φ_{u_0} eines Punkts $u_0 \in P$ stimmt mit der Unteralgebra von \mathfrak{g} überein, die von den Elementen der Form

$$\Omega_u(X, Y) \quad (X, Y \in H_u P) \quad (10.36)$$

aufgespannt wird, wobei $a \in P$ ein Punkt auf derselben horizontalen Liftung wie u_0 ist. (Den Beweis finden Sie bei Choquet-Bruhat *et al.* (1982).)

10.3.4 Die lokale Form der Krümmung

Die lokale Form \mathcal{F} der Krümmung Ω ist durch

$$\mathcal{F} \equiv \sigma^* \Omega \quad (10.37)$$

definiert, wobei σ ein lokaler Schnitt ist, der auf einer Karte U von M definiert ist (vgl. $\mathcal{A} = \sigma^* \omega$). In Abhängigkeit vom Eichpotenzial \mathcal{A} wird \mathcal{F} als

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \quad (10.38a)$$

ausgedrückt. Dabei ist d die äußere Ableitung auf M . Die Wirkung von \mathcal{F} auf die Vektoren von TM ist gegeben durch

$$\mathcal{F}(X, Y) = d\mathcal{A}(X, Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)]. \quad (10.38b)$$

Um (10.38a) zu beweisen, brauchen wir $\mathcal{A} = \sigma^* \omega$, $\sigma^* d_P \omega = d\sigma^* \omega$ und $\sigma^*(\zeta \wedge \eta) = \sigma^* \zeta \wedge \sigma^* \eta$. Aus der Cartan-Strukturgleichung erhalten wir

$$\mathcal{F} = \sigma^*(d_P \omega + \omega \wedge \omega) = d\sigma^* \omega + \sigma^* \omega \wedge \sigma^* \omega = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}.$$

Als nächstes ermitteln wir den Komponentenausdruck von \mathcal{F} auf einer Karte U mit den Koordinaten $x^\mu = \varphi(p)$. Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$ das Eichpotenzial. Wenn wir $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ schreiben, ergibt direktes Ausrechnen

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \quad (10.39)$$

\mathcal{F} wird auch Krümmungs-2-Form genannt und kann mit der **(Yang-Mills-)Feldstärke** identifiziert werden. Zu Vermeidung von Konfusion nennen wir Ω die Krümmung und \mathcal{F} die (Yang-Mills-)Feldstärke. Da \mathcal{A}_μ und $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ \mathfrak{g} -wertige Funktionen sind, können sie nach der Basis $\{T_\alpha\}$ von \mathfrak{g} entwickelt werden:

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha. \quad (10.40)$$

Die Basisvektoren erfüllen die üblichen Vertauschungsrelationen $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$. Wir erhalten dann den wohlbekannten Ausdruck

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma. \quad (10.41)$$

Satz 10.5. Seien U_i und U_j einander überlappende Karten von M sowie \mathcal{F}_i und \mathcal{F}_j Feldstärken auf den jeweiligen Karten. Auf $U_i \cap U_j$ genügen sie der Kompatibilitätsbedingung

$$\mathcal{F}_j = \text{Ad}_{t_{ij}^{-1}} \mathcal{F}_i = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij}, \quad (10.42)$$

wobei t_{ij} die Übergangsfunktion auf $U_i \cap U_j$ ist.

Beweis

Wir führen die korrespondierenden Eichpotenziale \mathcal{A}_i und \mathcal{A}_j ein:

$$\mathcal{F}_i = d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{F}_j = d\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j \wedge \mathcal{A}_j.$$

Durch Einsetzen von $\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}$ in \mathcal{F}_j bestätigen wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j &= d(t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) + (t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \wedge (t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \\ &= \left[-t_{ij}^{-1} dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} d\mathcal{A}_i t_{ij} - t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \wedge dt_{ij} - t_{ij}^{-1} dt_{ij} t_{ij}^{-1} \wedge dt_{ij} \right] \\ &\quad + \left[t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \wedge dt_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} t_{ij}^{-1} \wedge \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1} dt_{ij} \right] \\ &= t_{ij}^{-1} (d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i) t_{ij} = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Identität $dt^{-1} = -t^{-1} dt t^{-1}$ verwendet. \square

Übung 10.7 Das Eichpotenzial \mathcal{A} nennt man **reine Eichung**, wenn \mathcal{A} lokal als $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass die Feldstärke \mathcal{F} für eine reine Eichung \mathcal{A} verschwindet.³

10.3.5 Die Bianchi-Identität

Da ω und Ω \mathfrak{g} -wertig sind, entwickeln wir sie nach der Basis $\{T_\alpha\}$ von \mathfrak{g} gemäß $\omega = \omega^\alpha T_\alpha$, $\Omega = \Omega^\alpha T_\alpha$. Dann wird (10.32b) zu

$$\Omega^\alpha = d_P \omega^\alpha + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma. \quad (10.43)$$

Äußere Differenziation von (10.43) ergibt

$$d_P \Omega^\alpha = f_{\beta\gamma}{}^\alpha d_P \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \omega^\beta \wedge d_P \omega^\gamma. \quad (10.44)$$

Wenn wir beachten, dass $\omega(X) = 0$ für einen horizontalen Vektor X ist, erhalten wir

$$D\Omega(X, Y, Z) = d_P \Omega(X^H, Y^H, Z^H) = 0,$$

mit $X, Y, Z \in T_u P$. Damit haben wir die **Bianchi-Identität** bewiesen:

$$D\Omega = 0. \quad (10.45)$$

Lassen Sie uns die lokale Form der Bianchi-Identität ermitteln. Wenn wir σ^* auf (10.44) wirken lassen, erhalten wir $\sigma^* d_P \Omega = d \cdot \sigma^* \Omega = d\mathcal{F}$ für die linke Seite der Gleichung und

$$\begin{aligned} \sigma^*(d_P \omega \wedge \omega - \omega \wedge d_P \omega) &= d\sigma^* \omega \wedge \sigma^* \omega - \sigma^* \omega \wedge d\sigma^* \omega \\ &= d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} \end{aligned}$$

für die rechte Seite. Somit haben wir gezeigt:

$$D\mathcal{F} = d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0, \quad (10.46)$$

wobei die Wirkung von D auf eine \mathfrak{g} -wertige p -Form η auf M durch

$$D\eta \equiv d\eta + [\mathcal{A}, \eta] \quad (10.47)$$

definiert ist. Beachten Sie, dass $D\mathcal{F} = d\mathcal{F}$ für $G = U(1)$ ist.

10.4 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Vektorbündeln

Eine Zusammenhangs-1-Form ω auf einem Prinzipalbündel $P(M, G)$ ermöglicht es uns, auf natürliche Weise die kovariante Ableitung auf assoziierten Bündeln von P zu definieren.

³ Es lässt sich zeigen, dass die umgekehrte Richtung ebenfalls wahr ist: Wenn $\mathcal{F} = 0$ auf einer Karte U ist, dann kann das Eichpotenzial *lokal* als $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ ausgedrückt werden.

10.4.1 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Bündeln

In der Physik müssen wir oft Schnitte eines Vektorbündels differenzieren, das mit einem bestimmten Prinzipalbündel assoziiert ist. Beispielsweise fasst man in der Quantenelektrodynamik (QED) ein geladenes Skalarfeld als einen Schnitt eines komplexen Geradenbündels auf, das mit einem $U(1)$ -Bündel $P(M, U(1))$ assoziiert ist. Das kovariante Differenzieren von Schnitten ist äußerst wichtig für die Konstruktion von eichinvarianten Wirkungen.

Sei $P(M, G)$ ein G -Bündel mit der Projektion π_P . Wir betrachten eine Karte U_i von M und einen Schnitt σ_i über U_i . Wir wählen die kanonische Trivialisierung $\phi_i(p, e) = \sigma_i(p)$. Sei $\tilde{\gamma}$ eine horizontale Liftung einer Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_i$. Wir schreiben $\gamma(0) = p_0$ und $\tilde{\gamma}(0) = u_0$. Assoziiert mit P ist ein Vektorbündel $E = P \times_{\rho} V$ mit der Projektion π_E , siehe Abschnitt 9.4. Es seien $X \in T_p M$ ein Tangentialvektor von $\gamma(t)$ bei p_0 und $s \in \Gamma(M, E)$ ein Schnitt, oder ein Vektorfeld, auf M . Wir schreiben ein Element von E als $[(u, v)] = \{(ug, \rho(g)^{-1}v) | u \in P, v \in V, g \in G\}$. Die Auswahl eines Repräsentanten der Äquivalenzklasse läuft auf das Festlegen der Eichung hinaus. Wir wählen als Repräsentanten die Form

$$s(p) = [(\sigma_i(p), \xi(p))]. \quad (10.48)$$

Nun definieren wir den Paralleltransport eines Vektors in E entlang einer Kurve γ in M . Natürlich hat der naive Versuch „ ξ wird paralleltransportiert, wenn $\xi(\gamma(t))$ konstant entlang $\gamma(t)$ ist“ keinen Sinn, da dieses Statement von der Wahl des Schnitts $\sigma_i(p)$ abhängt. Wir definieren, dass ein Vektor paralleltransportiert wird, wenn er konstant in Bezug auf eine *horizontale Liftung* $\tilde{\gamma}$ von γ in P ist. Mit anderen Worten: Ein Schnitt $s(\gamma(t)) = [(\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t)))]$ wird paralleltransportiert, wenn η konstant entlang $\gamma(t)$ bleibt. Diese Definition ist intrinsisch, denn wenn $\tilde{\gamma}'(t)$ eine andere horizontale Liftung von γ ist, dann lässt sie sich als $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)a$ schreiben ($a \in G$), und wir erhalten⁴:

$$[(\tilde{\gamma}(t), \eta(t))] = [(\tilde{\gamma}'(t)a^{-1}, \eta(t))] = [(\tilde{\gamma}'(t), a^{-1}\eta(t))].$$

Hierbei steht $\eta(t)$ für $\eta(\gamma(t))$. Daher ist, wenn $\eta(t)$ konstant entlang $\gamma(t)$ ist, sein Vielfaches $a^{-1}\eta(t)$ ebenfalls konstant.

Jetzt ist die Definition der kovarianten Ableitung an der Reihe. Sei $s(p)$ ein Schnitt von E . Entlang einer Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ erhalten wir $s(t) = [(\tilde{\gamma}(t), \eta(t))]$, wobei $\tilde{\gamma}(t)$ eine beliebige horizontale Liftung von $\gamma(t)$ ist. Die kovariante Ableitung von $s(t)$ entlang $\gamma(t)$ bei $p_0 = \gamma(0)$ ist durch

$$\nabla_X s \equiv \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right] \quad (10.49)$$

definiert, wobei X der Tangentialvektor von $\gamma(t)$ bei p_0 ist. Damit die kovariante Ableitung wirklich intrinsisch ist, sollte sie unabhängig von der Zusatz-Information

⁴ Wir lassen das ρ weg, um die Notation zu vereinfachen.

sein, die in der speziellen horizontalen Liftung steckt. Sei $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)a$ ($a \in G$) eine weitere horizontale Liftung von γ . Wenn $\tilde{\gamma}'(t)$ als die horizontale Liftung gewählt wird, liegt ein Repräsentant $[(\tilde{\gamma}'(t), a^{-1}\eta(t))]$ vor. Die kovariante Ableitung ist jetzt durch

$$\left[\left(\tilde{\gamma}'(0), \frac{d}{dt} \{a^{-1}\eta(t)\} \Big|_{t=0} \right) \right] = \left[\left(\tilde{\gamma}'(0)a^{-1}, \frac{d}{dt} \eta(t) \Big|_{t=0} \right) \right]$$

gegeben, was mit (10.49) übereinstimmt. Daher hängt $\nabla_X s$ nur vom Tangentialvektor X und den Schnitten $s \in \Gamma(M, E)$ ab, nicht aber von der horizontalen Liftung $\tilde{\gamma}(t)$. Unsere Definition beruht nur auf einer Kurve γ und einem Zusammenhang und nicht auf lokalen Trivialisierungen. Die lokale Form der kovarianten Ableitung ist in praktischen Berechnungen nützlich, wir werden sie im nächsten Abschnitt nachliefern.

Bis jetzt haben wir die kovariante Ableitung an einem Punkt $p_0 = \gamma(0)$ definiert. Es ist klar, dass, wenn X ein Vektorfeld ist, ∇_X einen Schnitt s auf einen neuen Schnitt $\nabla_X s$ abbildet. Daher kann man ∇_X als eine Abbildung $\Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ ansehen. Um präziser zu sein: Wir betrachten $X \in \mathcal{X}(M)$, und der Wert bei p sei $X_p \in T_p M$. Es gibt eine Kurve $\gamma(t)$ mit $\gamma(0) = p$ und der Tangente X_p bei p . Dann ermöglicht uns jede horizontale Liftung $\tilde{\gamma}(t)$ von γ die Berechnung der kovarianten Ableitung $\nabla_X s|_p \equiv \nabla_{X_p} s$. Wir definieren auch eine Abbildung $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E) \otimes \Omega^1(M)$ durch

$$\nabla s(X) \equiv \nabla_X s \quad (X \in \mathcal{X}(M), s \in \Gamma(M, E)). \quad (10.50)$$

Übung 10.8 Zeigen Sie, dass gilt:

$$\nabla_X(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla_X s_1 + a_2 \nabla_X s_2, \quad (10.51a)$$

$$\nabla(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla s_1 + a_2 \nabla s_2, \quad (10.51b)$$

$$\nabla_{(a_1 X_1 + a_2 X_2)} s = a_1 \nabla_{X_1} s + a_2 \nabla_{X_2} s, \quad (10.51c)$$

$$\nabla_X(fs) = X[f]s + f\nabla_X s, \quad (10.51d)$$

$$\nabla(f s) = (df)s + f\nabla s, \quad (10.51e)$$

$$\nabla_{fX} s = f\nabla_X s, \quad (10.51f)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $s, s' \in \Gamma(M, E)$ und $f \in \mathcal{F}(M)$.

10.4.2 Ein lokaler Ausdruck für die kovariante Ableitung

In praktischen Berechnungen ist es bequem, über eine lokale Koordinatendarstellung der kovarianten Ableitung zu verfügen. Seien $P(M, V)$ ein V -Bündel und $E = P \times_{\rho} V$ ein assoziiertes Vektorbündel. Wir betrachten einen lokalen Schnitt $\sigma_i \in \Gamma(U_i, P)$ und verwenden die kanonische Trivialisierung $\sigma_i(p) = \phi_i(p, e)$. Seien $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve in U_i und $\tilde{\gamma}$ ihre horizontale Liftung, was sich als

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)g_i(t) \quad (10.52)$$

schreibt, mit $g_i(t) \equiv g_i(\gamma(t)) \in G$. Wir betrachten einen Schnitt $e_{\alpha}(p) \equiv [(\sigma_i(p), e_{\alpha}^0)]$ von E , wobei e_{α}^0 der α -te Basisvektor von V ist: $(e_{\alpha}^0)^{\beta} = (\delta_{\alpha})^{\beta}$. Das ergibt

$$e_{\alpha}(t) = [(\tilde{\gamma}(t)g_i(t)^{-1}, e_{\alpha}^0)] = [(\tilde{\gamma}(t), g_i(t)^{-1}e_{\alpha}^0)]. \quad (10.53)$$

Beachten Sie, dass $g_i(t)^{-1}$ auf e_α^0 wirkt, um den Wechsel der Basis entlang γ zu kompensieren. Die kovariante Ableitung von e_α ist dann durch

$$\begin{aligned}\nabla_X e_\alpha &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \{ g_i(t)^{-1} e_\alpha^0 \} \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), -g_i(t)^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} g_i(t) \right\} g_i(t)^{-1} e_\alpha^0 \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= [(\tilde{\gamma}(0) g_i(0)^{-1}, \mathcal{A}_i(X) e_\alpha^0)]\end{aligned}\quad (10.54)$$

gegeben, wobei (10.13b) verwendet wurde. Aus (10.54) erhalten wir den lokalen Ausdruck

$$\nabla_X e_\alpha = [(\sigma_i(0), \mathcal{A}_i(X) e_\alpha^0)]. \quad (10.55)$$

Sei $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu = \mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta dx^\mu$, mit $\mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta \equiv \mathcal{A}_{i\mu}{}^\gamma (T_\gamma)^\alpha{}_\beta$. Der zweite Eintrag von (10.55) ist

$$\mathcal{A}_i(X) e_\alpha^0 = \frac{dx^\mu}{dt} e_\beta^0 \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\gamma \delta_\alpha{}^\gamma = \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta^0.$$

Indem wir dies in (10.55) einsetzen, erhalten wir schließlich

$$\nabla_X e_\alpha = \left[\left(\sigma_i(0), \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta^0 \right) \right] = \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta \quad (10.56a)$$

oder

$$\nabla e_\alpha = \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha e_\beta. \quad (10.56b)$$

Insbesondere gilt für eine Koordinatenkurve x^μ :

$$\nabla_{\partial/\partial x^\mu} e_\alpha = \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta. \quad (10.57)$$

Es ist bemerkenswert, dass ein Zusammenhang \mathcal{A} auf einem Prinzipalbündel P die kovariante Ableitung auf einem assoziierten Bündel E vollständig festlegt (modulo Darstellungen).

Übung 10.9 Sei $s(p) = [(\sigma_i(p), \xi_i(p))] = \xi_i{}^\alpha(p) e_\alpha$ ein allgemeiner Schnitt von E , mit $\xi_i(p) = \xi_i{}^\alpha(p) e_\alpha^0$. Verwenden Sie die Resultate von Übung 10.8 um zu bestätigen, dass gilt:

$$\nabla_X s = \left[\left(\sigma_i(0), \frac{d\xi_i}{dt} + \mathcal{A}_i(X) \xi_i \Big|_{t=0} \right) \right] = \frac{dx^\mu}{dt} \left\{ \frac{\partial \xi_i{}^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta \xi_i{}^\beta \right\} e_\alpha. \quad (10.58)$$

Aufgrund der Konstruktion ist die kovariante Ableitung unabhängig von der lokalen Trivialisierung. Dies zeigt sich auch an der lokalen Form von $\nabla_X s$. Seien $\sigma_i(p)$ und $\sigma_j(p)$ lokale Schnitte auf einander überlappenden Karten U_i und U_j . Auf $U_i \cap U_j$

erhalten wir $\sigma_j(p) = \sigma_i(p)t_{ij}(p)$. In der i -Trivialisierung ist die kovariante Ableitung

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \left[\left(\sigma_i(0), \frac{d\xi_i}{dt} + \mathcal{A}_i(X)\xi_i \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\sigma_j(0) \cdot t_{ij}^{-1}, \frac{d}{dt}(t_{ij}\xi_j) + \mathcal{A}_i(X)t_{ij}\xi_j \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\sigma_j(0), \frac{d\xi_j}{dt} + \mathcal{A}_j(X)\xi_j \Big|_{t=0} \right) \right],\end{aligned}\quad (10.59)$$

wobei von der Bedingung (10.9) Gebrauch gemacht wurde. Die letzte Zeile von (10.59) ist $\nabla_X s$, ausgedrückt in der j -Trivialisierung.

Wir haben festgestellt, dass die in (10.49) definierte kovariante Ableitung unabhängig von der horizontalen Liftung wie auch vom lokalen Schnitt ist. Das Eichpotenzial \mathcal{A}_i transformiert sich unter einem Wechsel der lokalen Trivialisierung so, dass $\nabla_X s$ ein wohldefinierter Schnitt von E ist. In diesem Sinn ist ∇_X die natürliche Ableitung auf einem assoziierten Vektorbündel, die mit dem Zusammenhang auf dem Prinzipalbündel P kompatibel ist.

Beispiel 10.4. Lassen Sie uns noch einmal die Ergebnisse aus Abschnitt 7.2 herleiten. Seien FM ein Rahmenbündel über M und TM dessen assoziiertes Bündel. Wir bemerken, dass $FM = P(M, GL(m, \mathbb{R}))$ und $TM = FM \times_{\rho} \mathbb{R}^m$, mit $m = \dim M$. ρ ist die $(m \times m)$ -Matrixdarstellung von $GL(m, \mathbb{R})$. Elemente von $gl(m, \mathbb{R})$ sind $(m \times m)$ -Matrizen. Wir schreiben die lokale Zusammenhangsform \mathcal{A}_i um in $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} dx^{\mu}$. Dann ergibt sich

$$\nabla_{\partial/\partial x^{\mu}} e_{\alpha} = [(\sigma_i(0), \Gamma_{\mu}^{\alpha} e_{\alpha}^0)] = \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} e_{\beta}. \quad (10.60)$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit (7.14). Für einen allgemeinen Schnitt (ein Vektorfeld) $s(p) = [(\sigma_i(p), X_i(p))] = X_i^{\alpha}(p)e_{\alpha}$ erhalten wir

$$\nabla_{\partial/\partial x^{\mu}} s = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} X_i^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} X^{\beta} \right) e_{\alpha}. \quad (10.61)$$

Damit haben wir das Resultat aus Abschnitt 7.2 reproduziert. Es ist evident, dass die Indizes α, β und μ in $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ von sehr unterschiedlichem Charakter sind: μ ist der $\Omega^1(M)$ -Index, während α und β die $gl(m, \mathbb{R})$ -Indizes sind. \diamond

Beispiel 10.5. Lassen Sie uns das mit einem komplexen Skalarfeld ϕ gekoppelte U(1)-Eichfeld betrachten. Die relevanten Faserbündel sind die U(1)-Bündel $P(M, U(1))$ und das assoziierte Bündel $E = P \times_{\rho} \mathbb{C}$, wobei ρ die natürliche Identifizierung eines Elements aus U(1) mit einer komplexen Zahl ist. Der lokale Ausdruck für ω ist $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^{\mu}$, wobei $\mathcal{A}_{i\mu} = \mathcal{A}_i(\partial/\partial x^{\mu})$ das Vektorpotenzial in der Maxwell-Theorie ist. Sei γ eine Kurve in M mit dem Tangentialvektor X bei $\gamma(0)$. Wir betrachten einen lokalen Schnitt σ_i und drücken eine horizontale Liftung $\tilde{\gamma}$ von γ als $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)e^{i\varphi(t)}$ aus. Wenn man $1 \in \mathbb{C}$ als den Basisvektor annimmt, ist der Basischnitt

$$e = [(\sigma_i(p), 1)].$$

Sei $\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi(p))] = \Phi(p)e$ ($\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}$) ein Schnitt von E , der mit einem komplexen Skalarfeld identifiziert wird. Bezuglich $\tilde{\gamma}(t)$ ist der Schnitt gegeben durch

$$\phi(t) = \Phi(t)[(\tilde{\gamma}(t), U(t)^{-1})], \quad (10.62)$$

mit $U(t) = e^{i\varphi(t)}$. Die kovariante Ableitung von ϕ entlang γ ist

$$\begin{aligned} \nabla_X \phi &= \frac{d\Phi}{dt}[(\tilde{\gamma}(0), U(0)^{-1})] + \Phi(0)[(\tilde{\gamma}(0), U(0)^{-1}\mathcal{A}_i(X) \cdot 1)] \\ &= \left(\frac{d\Phi}{dt} + \mathcal{A}_{i\mu}\Phi \frac{dx^\mu}{dt} \right) e = X^\mu \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}\Phi \right) e. \end{aligned} \quad (10.63)$$

◊

Beispiel 10.6. Wir betrachten die SU(2)-Yang-Mills-Theorie auf M . Die relevanten Bündel sind das SU(2)-Bündel $P(M, \text{SU}(2))$ und sein assoziiertes Bündel $E = P \times_\rho \mathbb{C}^2$, wobei wir die zweidimensionale Darstellung gewählt haben. Das Eichpotenzial auf einer Karte U_i ist

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu = A_{i\mu}^\alpha \left(\frac{\sigma_\alpha}{2i} \right) dx^\mu, \quad (10.64)$$

wobei die $\sigma_\alpha/2i$ die Erzeuger der SU(2) sind und die σ_α die Pauli-Matrizen bezeichnen. Seien e_α^0 ($\alpha = 1, 2$) Basisvektoren von \mathbb{C}^2 . Wir betrachten Schnitte

$$e_\alpha(p) \equiv [(\sigma_i(p), e_\alpha^0)], \quad (10.65)$$

wobei durch $\sigma_i(p)$ eine kanonische Trivialisierung von P über U_i definiert wird. Sei nun $\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi^\alpha(p)e_\alpha^0)]$ ein Schnitt von E über M . Entlang einer horizontalen Liftung $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(p)U(t)$ ($U(t) \in \text{SU}(2)$) erhalten wir

$$\phi(t) = [(\tilde{\gamma}(t), U(t)^{-1}\Phi^\alpha(t)e_\alpha^0)]. \quad (10.66)$$

Die kovariante Ableitung von ϕ entlang $X = d/dt$ ist

$$\begin{aligned} \nabla_X \phi &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), U(0)^{-1} \frac{d\Phi^\alpha(0)}{dt} e_\alpha^0 \right) \right] + [(\tilde{\gamma}(0), U(0)^{-1}\mathcal{A}_i(X)^\alpha_\beta \Phi^\beta(0)e_\alpha^0)] \\ &= X^\mu \left(\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}^\alpha \Phi^\beta \right) e_\alpha \end{aligned} \quad (10.67)$$

wobei für die letzte Gleichung die Gleichung (10.13b) verwendet wurde. ◊

Übung 10.10 Betrachten Sie ein assoziiertes adjungiertes Bündel $E_g = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$, wobei die Wirkung von G auf \mathfrak{g} die adjungierte Wirkung $V \rightarrow \text{Ad}_g V = g^{-1}Vg$ ist ($V \in \mathfrak{g}$ und $g \in G$). Betrachten Sie einen lokalen Schnitt $\sigma_i \in \Gamma(U_i, P)$, sodass $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)g(t)$ ist. Betrachten Sie des Weiteren einen Schnitt $s(p) = [(\sigma_i(p), V(p))]$ auf E_g , wobei

$V(p) = V^\alpha(p)T_\alpha$ gilt und $\{T_\alpha\}$ die Basis von \mathfrak{g} ist. Definieren Sie die kovariante Ableitung $\mathcal{D}_X s$ durch

$$\mathcal{D}_X s \equiv \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \{ \text{Ad}_{g(t)^{-1}} V(t) \} \Big|_{t=0} \right) \right]. \quad (10.68a)$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X s &= \left[\left(\sigma_i(0), \frac{dV(t)}{dt} + [\mathcal{A}_i(X), V(t)] \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= X^\mu \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu} + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta V^\gamma \right) [(\sigma_i(0), T_\alpha)]. \end{aligned} \quad (10.68b)$$

10.4.3 Krümmung reloaded

Die kovariante Ableitung $\nabla_X s$ definiert einen Operator $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E \otimes \Omega^1(M))$ über Gleichung (10.50). Allgemeiner gesprochen: Die Wirkung von ∇ auf einer vektorwertigen p -Form $s \otimes \eta$ ist mit $\eta \in \Omega^p(M)$ durch

$$\nabla(s \otimes \eta) \equiv (\nabla s) \wedge \eta + s \otimes d\eta \quad (10.69)$$

definiert. Seien U_i eine Karte von M und σ_i ein Schnitt von P über U_i . Wir betrachten die kanonische lokale Trivialisierung über U_i . Nun beweisen wir

$$\nabla \nabla e_\alpha = e_\beta \otimes \mathcal{F}_i{}^\beta{}_\alpha, \quad (10.70)$$

mit $e_\alpha = [(\sigma_i, e_\alpha^0)] \in \Gamma(U_i, E)$. Tatsächlich liefert einfaches und direktes Ausrechnen:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla e_\alpha &= \nabla(e_\beta \otimes \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha) = \nabla e_\beta \wedge \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha + e_\beta \otimes d\mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha \\ &= e_\beta \otimes (d\mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\alpha) = e_\beta \otimes \mathcal{F}_i{}^\beta{}_\alpha. \end{aligned}$$

Übung 10.11 Sei $s(p) = \xi^\alpha(p)e_\alpha(p)$ ein Schnitt von E . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\nabla \nabla s = e_\alpha \otimes \mathcal{F}_i{}^\alpha{}_\beta \xi^\beta. \quad (10.71)$$

10.4.4 Ein Zusammenhang, der das innere Produkt erhält

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit einem positiv definiten symmetrischen inneren Produkt, dessen Wirkung an jedem Punkt $p \in M$ durch

$$g_p : \pi^{-1}(p) \otimes \pi^{-1}(p) \rightarrow \mathbb{R} \quad (10.72)$$

definiert ist. Dann sagt man, g definiere eine **Riemann'sche Struktur** auf E . Ein Zusammenhang ∇ heißt **metrischer Zusammenhang**, wenn er das innere Produkt erhält:

$$d[g(s, s')] = g(\nabla s, s') + g(s, \nabla s'). \quad (10.73)$$

Insbesondere erhalten wir, wenn wir $s = e_\alpha$, $s' = e_\beta$ anwenden und $g(e_\alpha, e_\beta) = g_{\alpha\beta}$ setzen:

$$dg_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\alpha g_{\gamma\beta} + \mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\beta g_{\alpha\gamma}. \quad (10.74)$$

Sie sollten dies mit (7.30b) vergleichen. Ist $E = TM$ und wird dazu Torsionsfreiheit verlangt, reduziert sich unser Zusammenhang auf den Levi-Civita-Zusammenhang der Riemann'schen Geometrie.

Zu einem gegebenen inneren Produkt können wir einen **Orthonormalrahmen** $\{\hat{e}_\alpha\}$ wählen, sodass $g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ ist. Die Strukturgruppe G wird als die $O(k)$ angenommen, mit k als der Dimension der Faser. Die Lie-Algebra $\mathfrak{o}(k)$ ist ein Vektorraum von schiefsymmetrischen Matrizen, und für die Zusammenhangs-1-Form ω gilt

$$\omega^\alpha{}_\beta = -\omega^\beta{}_\alpha. \quad (10.75)$$

Satz 10.6. Seien E ein Vektorbündel mit innerem Produkt g und ∇ die mit dem *Orthonormalrahmen* assoziierte kovariante Ableitung. Dann ist ∇ ein metrischer Zusammenhang.

Beweis

Da g bilinear ist, genügt es zu zeigen, dass

$$d[g(s, s')] = g(\nabla s, s') + g(s, \nabla s')$$

für $s = f\hat{e}_\alpha$ und $s' = f'\hat{e}_\beta$ gilt, mit $f, f' \in \mathcal{F}(M)$. Tatsächlich lautet die linke Seite der Gleichung $d[g(f\hat{e}_\alpha, f'\hat{e}_\beta)] = d[ff'\delta_{\alpha\beta}] = d(ff')\delta_{\alpha\beta}$. Für die rechte Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} g(\nabla f\hat{e}_\alpha, f'\hat{e}_\beta) + g(f\hat{e}_\alpha, \nabla f'\hat{e}_\beta) &= g(df\hat{e}_\alpha + f\hat{e}_\gamma\omega^\gamma{}_\alpha, f'\hat{e}_\beta) + g(f\hat{e}_\alpha, df'\hat{e}_\beta + f'\hat{e}_\gamma\omega^\gamma{}_\beta) \\ &= df'\delta_{\alpha\beta} + ff'\omega^\gamma{}_\alpha\delta_{\gamma\beta} + fd\delta_{\alpha\beta} + ff'\omega^\gamma{}_\beta\delta_{\alpha\gamma} \\ &= d(ff')\delta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

wobei für die letzte Gleichheit die Gleichung (10.75) verwendet wurde. \square

10.4.5 Holomorphe Vektorbündel und Hermite'sche innere Produkte

Definition 10.6. Seien E und M komplexe Mannigfaltigkeiten und $\pi : E \rightarrow M$ eine holomorphe Surjektion. Die Mannigfaltigkeit E ist ein **holomorphes Vektorbündel**, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (i) Die typische Faser ist \mathbb{C}^k , und die Strukturgruppe ist $GL(k, \mathbb{C})$.
- (ii) Die lokale Trivialisierung $\phi_i : U_i \times \mathbb{C}^k \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ ist ein Biholomorphismus.
- (iii) Die Übergangsfunktion $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G = GL(k, \mathbb{C})$ ist eine holomorphe Abbildung.

Sei z. B. M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. Das **holomorphe Tangentialbündel** $TM^+ \equiv \bigcup_{p \in M} T_p M^+$ ist ein holomorphes Vektorbündel. Die typische Faser ist \mathbb{C}^m und $\{\partial/\partial z^\mu\}$ die lokale Basis. Sei h ein inneres Produkt auf einem holomorphen Vektorbündel, das bei $p \in M$ die Wirkung $h_p : \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \rightarrow \mathbb{C}$ hat. Das natürlichste innere Produkt ist eine **Hermite'sche Struktur**, für welche gilt:

- (i) $h_p(u, av + bw) = ah_p(u, v) + bh_p(u, w)$ für $u, v, w \in \pi^{-1}(p)$ und $a, b \in \mathbb{C}$,
- (ii) $h_p(u, v) = \overline{h_p(v, u)}$ ($u, v \in \pi^{-1}(p)$),
- (iii) $h_p(u, u) \geq 0$, $h_p(u, u) = 0$ dann und nur dann, wenn $u = \phi_i(p, 0)$ ist,
- (iv) $h(s_1, s_2) \in \mathcal{F}(M)^{\mathbb{C}}$ für $s_1, s_2 \in \Gamma(M, E)$.

Eine Menge von Schnitten $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k\}$ ist ein **unitärer Rahmen**, wenn gilt:

$$h(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \delta_{ij}. \quad (10.76)$$

Das unitäre Rahmenbündel LM ist kein holomorphes Vektorbündel, da die Strukturgruppe $U(m)$ keine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Zu einer gegebenen Hermite'schen Struktur h definieren wir einen mit dieser Struktur kompatiblen Zusammenhang. Der **Hermite'sche Zusammenhang** ∇ ist eine lineare Abbildung $\Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E \otimes T^*M^{\mathbb{C}})$, für die gilt:

- (i) $\nabla(fs) = (df)s + f\nabla s$, $f \in \mathcal{F}(M)^{\mathbb{C}}$, $s \in \Gamma(M, E)$;
- (ii) $d[h(s_1, s_2)] = h(\nabla s_1, s_2) + h(s_1, \nabla s_2)$;
- (iii) wenn wir die Wirkung von ∇ nach den Zieltermen in $\nabla s = Ds + \bar{D}s$ separieren, wobei Ds bzw. $\bar{D}s$ ein $(1, 0)$ -Form- bzw. $(0, 1)$ -Form-wertiger Schnitt ist, verlangen wir $\bar{D} = \bar{\partial}$.

Es kann gezeigt werden, dass zu gegebenem E und einer Hermite'schen Metrik h ein *eindeutiger* Hermite'scher Zusammenhang ∇ existiert. Die Krümmung wird über den Hermite'schen Zusammenhang definiert. Sei $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k\}$ ein unitärer Rahmen. Wir definieren die lokale Zusammenhangsform $\mathcal{A}^\beta{}_\alpha$ durch

$$\nabla \hat{e}_\alpha = \hat{e}_\beta \mathcal{A}^\beta{}_\alpha. \quad (10.77)$$

Die Feldstärke ist definiert als

$$\mathcal{F} \equiv d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}. \quad (10.78)$$

Wir bestätigen, dass gilt:

$$\nabla \nabla \hat{e}_\alpha = \nabla(\hat{e}_\beta \mathcal{A}^\beta{}_\alpha) = \hat{e}_\beta \mathcal{F}^\beta{}_\alpha. \quad (10.79)$$

Wir beweisen, dass sowohl \mathcal{A} als auch \mathcal{F} schief-Hermite'sch sind:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}^\alpha{}_\beta &= h(\nabla \hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) + h(\hat{e}_\alpha, \nabla \hat{e}_\beta) = dh(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = d\delta_{\alpha\beta} = 0 \\ \mathcal{F}^\beta{}_\alpha + \bar{\mathcal{F}}^\alpha{}_\beta &= d\mathcal{A}^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}^\gamma{}_\alpha + d\bar{\mathcal{A}}^\alpha{}_\beta + \bar{\mathcal{A}}^\alpha{}_\gamma \wedge \bar{\mathcal{A}}^\gamma{}_\alpha \\ &= d(\mathcal{A}^\beta{}_\alpha - \mathcal{A}^\beta{}_\alpha) + \mathcal{A}^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}^\gamma{}_\alpha + \mathcal{A}^\gamma{}_\alpha \wedge \mathcal{A}^\alpha{}_\gamma = 0. \end{aligned}$$

Somit sind

$$\mathcal{A}^\alpha{}_\beta = -\bar{\mathcal{A}}^\beta{}_\alpha, \quad \mathcal{F}^\beta{}_\alpha = -\bar{\mathcal{F}}^\alpha{}_\beta. \quad (10.80)$$

Als nächstes zeigen wir, dass \mathcal{F} eine $(1,1)$ -Form ist. Sei $\{\hat{e}_\alpha\}$ ein unitärer Rahmen. \mathcal{F} kann keine Komponente vom Bigrad $(0,2)$ haben, wegen

$$\hat{e}_\beta \mathcal{F}^\beta{}_\alpha = \nabla \nabla \hat{e}_\alpha = (D + \bar{\partial})(D + \bar{\partial})\hat{e}_\alpha = DD\hat{e}_\alpha + (D\bar{\partial} + \bar{\partial}D)\hat{e}_\alpha.$$

Aus $\mathcal{F}^\beta{}_\alpha = -\bar{\mathcal{F}}^\alpha{}_\beta$ folgt, dass $\bar{\mathcal{F}}$ keine Komponente vom Bigrad $(0,2)$ hat und daher \mathcal{F} keine Komponente vom Bigrad $(2,0)$. Also ist $\mathcal{F}^\beta{}_\alpha$ eine 2-Form vom Bigrad $(1,1)$.

10.5 Eichtheorien

Wie wir bereits mehrmals bemerkt haben, kann man ein Eichpotenzial als einen lokalen Ausdruck für den Zusammenhang in einem Prinzipalbündel ansehen. Die Yang-Mills-Feldstärke wird dann mit der lokalen Form der mit dem Zusammenhang assoziierten Krümmung identifiziert. Wir fassen hier die relevanten Aspekte von Eichtheorien aus geometrischer Sicht zusammen.

10.5.1 U(1)-Eichtheorie

Die Maxwell'sche Theorie des Elektromagnetismus wird durch die U(1)-Eichgruppe beschrieben. U(1) ist Abel'sch und eindimensional, daher lassen wir alle Gruppenindizes α, β, \dots weg und setzen die Strukturkonstanten $f_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$. Nehmen wir an, der Basisraum M sei eine vierdimensionale Minkowski-Raumzeit. Aus Korollar 9.1 folgt, dass das U(1)-Bündel P trivial ist, also $P = \mathbb{R}^4 \times \text{U}(1)$ gilt, und dass nur eine einzige lokale Trivialisierung über M erforderlich ist. Das Eichpotenzial ist einfach

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu. \quad (10.81)$$

Unser Eichpotenzial \mathcal{A} unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Vektorpotenzial A durch den Lie-Algebra-Faktor i : $\mathcal{A}_\mu = iA_\mu$. Die Feldstärke ist

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}. \quad (10.82a)$$

In Komponenten gilt

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial\mathcal{A}_\nu/\partial x^\mu - \partial\mathcal{A}_\mu/\partial x^\nu. \quad (10.82b)$$

\mathcal{F} erfüllt die Bianchi-Identität:

$$d\mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} = 0. \quad (10.83a)$$

Dies war natürlich zu erwarten, da \mathcal{F} exakt ist, $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$, und daher geschlossen: $d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = 0$. In Komponenten erhalten wir

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0. \quad (10.83b)$$

Wenn wir die Komponenten $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv iF_{\mu\nu}$ mit dem elektrischen Feld E und dem Magnetfeld B identifizieren gemäß

$$E_i = F_{i0}, \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (10.84)$$

reduziert sich Gleichung (10.83b) auf die zwei Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot B = 0. \quad (10.83c)$$

Diese Gleichungen sind eher *geometrisch* als *dynamisch*. Um die Dynamik zu ermitteln, müssen wir die Wirkung angeben. Die **Maxwell-Wirkung** $\mathcal{S}_M[\mathcal{A}]$ ist ein Funktional von \mathcal{A} und gegeben durch

$$\mathcal{S}_M[\mathcal{A}] \equiv \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} d^4x = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x. \quad (10.85a)$$

Übung 10.12

- (a) Sei $*\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{F}^{\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ dual zu $\mathcal{F}_{\mu\nu}$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{S}_M[\mathcal{A}] = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F} \wedge * \mathcal{F}. \quad (10.85b)$$

- (b) Verwenden Sie (10.84), um zu zeigen, dass gilt:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2). \quad (10.86)$$

Zeigen Sie außerdem, dass gilt:

$$F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} = B \cdot E. \quad (10.87)$$

Durch Variation von $\mathcal{S}_M[\mathcal{A}]$ nach \mathcal{A}_μ erhalten wir die Bewegungsgleichung:

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (10.88a)$$

Diese Gleichung entpuppt sich als die andere Hälfte der Maxwell-Gleichungen (im Vakuum):

$$\nabla \cdot E = 0, \quad \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (10.88b)$$

10.5.2 Der magnetische Dirac-Monopol

Wir haben uns mit der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus auf dem \mathbb{R}^4 beschäftigt. Die Trivialität des Basisraums macht das U(1)-Bündel trivial. Das Poincaré-Lemma stellt sicher, dass die Feldstärke \mathcal{F} global exakt ist: $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$. Es lohnt sich, unsere Analyse auf U(1)-Bündel über einem nichttrivialen Basisraum auszudehnen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das gesamte System unabhängig von der Zeit ist.

Der Dirac-Monopol ist definiert im \mathbb{R}^3 ohne den Ursprung. $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und S^2 sind vom selben Homotopietyp, und das relevante Bündel ist ein U(1)-Bündel $P(S^2, U(1))$. Die S^2 wird von zwei Karten überdeckt:

$$U_N \equiv \{(\theta, \phi) | 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi + \epsilon\}, \quad U_S \equiv \{(\theta, \phi) | \frac{1}{2}\pi - \epsilon \leq \theta \leq \pi\},$$

mit den Polarkoordinaten θ und ϕ . Sei ω ein Ehresmann-Zusammenhang auf P . Wir betrachten einen lokalen Schnitt σ_N (σ_S) auf U_N (U_S) und definieren die lokalen Eichpotenziale

$$\mathcal{A}_N = \sigma_N^* \omega, \quad \mathcal{A}_S = \sigma_S^* \omega.$$

Wir wählen \mathcal{A}_N und \mathcal{A}_S in der Wu-Yang-Form (Abschnitt 1.9):

$$\mathcal{A}_N = ig(1 - \cos \theta) d\phi, \quad \mathcal{A}_S = -ig(1 + \cos \theta) d\phi. \quad (10.89)$$

Dabei ist g die Stärke Monopols.

Sei t_{NS} die auf dem Äquator $U_N \cap U_S$ definierte Übergangsfunktion. t_{NS} definiert eine Abbildung von S^1 (Äquator) nach U(1) (Strukturgruppe), welche durch $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ klassifiziert wird, siehe Beispiel 9.7. Wir schreiben

$$t_{NS}(\phi) = \exp[i\varphi(\phi)] \quad (\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}). \quad (10.90)$$

Die Eichpotenziale \mathcal{A}_N und \mathcal{A}_S hängen auf $U_N \cap U_S$ gemäß

$$\mathcal{A}_N = t_{NS}^{-1} \mathcal{A}_S t_{NS} + t_{NS}^{-1} dt_{NS} = \mathcal{A}_S + id\varphi \quad (10.91)$$

zusammen. Für die Eichpotenziale (10.89) erhalten wir

$$d\varphi = -i(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_S) = 2g d\phi.$$

Während ϕ von 0 bis 2π um den Äquator läuft, durchläuft $\varphi(\phi)$ den Bereich

$$\Delta\varphi \equiv \int d\varphi = \int_0^{2\pi} 2g d\phi = 4\pi g. \quad (10.92)$$

Damit t_{NS} eindeutig definiert ist, muss $\Delta\varphi$ ein Vielfaches von 2π sein:

$$\Delta\varphi/2\pi = 2g \in \mathbb{Z}. \quad (10.93)$$

Dies ist die Quantisierungsbedingung des magnetischen Monopols. Die ganze Zahl $2g$ repräsentiert die Homotopieklassse, zu der dieses Bündel gehört. Diese Zahl erhält man auch, wenn man sich $F_N = dA_N$ und $F_S = dA_S$ ($\mathcal{F}_N = iF_N$ usw.) anschaut. Der totale Fluss Φ ist

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{U_N} dA_N + \int_{U_S} dA_S \\ &= \int_{S^1} A_N - \int_{S^1} A_S = 2g \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi g. \end{aligned} \quad (10.94)$$

Auf diese Weise kennzeichnet die Krümmung, d. h. das Paar der Feldstärken dA_N und dA_S , die Verdrillung des Bündels. Wir diskutieren dies weiter in Kapitel 11.

10.5.3 Der Aharonov-Bohm-Effekt

In der elementaren Behandlung des Elektromagnetismus sind vor allem die elektrischen und magnetischen Felder (d. h. $F_{\mu\nu}$) von Interesse. Das Vektorpotenzial A und das skalare Potenzial $\phi = A_0$ gelten dagegen eher als zweitrangig. In der Quantenmechanik gibt es jedoch eine Reihe von Situationen, in denen $F_{\mu\nu}$ nicht genügt, um die Phänomene zu beschreiben, und es ist essenziell, $A_\mu = (A, A_0)$ zu verwenden. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist der **Aharonov-Bohm-Effekt**.

Abb. 10.4 skizziert das Aharonov-Bohm-(AB-)Experiment. Ein Strahl von Elektronen mit Ladung e kommt von (weit) links und bildet ein Interferenzmuster auf dem Schirm C . Eine unendlich lange Spule ist in der Mitte des Strahls angebracht. Eine Abschirmung S hält die Elektronen davon ab, in die Spule einzudringen. Demzufolge spüren die Elektronen keinerlei Magnetfeld. Was ist mit dem Eichfeld A_μ ?

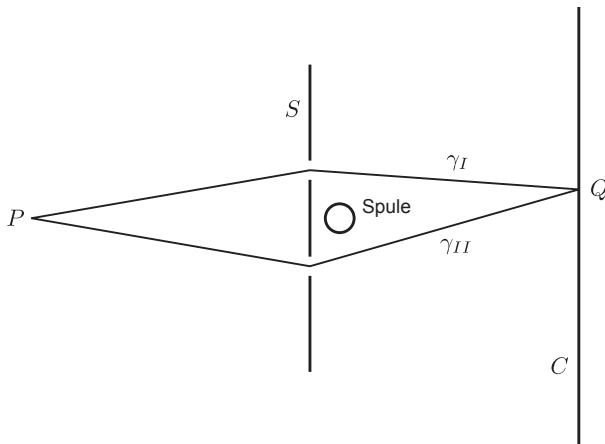


Abb. 10.4. Das Aharonov-Bohm-Experiment. Außerhalb der Spule ist $B = 0$.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Spulenradius infinitesimal klein ist, bei festem Gesamtfluss $\Phi = \int_S B \cdot dS$. Man überzeugt sich leicht, dass die Beziehung

$$A(r) = \left(-\frac{y\Phi}{2\pi r^2}, \frac{x\Phi}{2\pi r^2}, 0 \right), \quad A_0 = 0 \quad (10.95)$$

für $r \neq 0$ die Bedingungen $\int(\nabla \times A) \cdot dS = \Phi$ und $\nabla \times A = \mathbf{0}$ erfüllt. Im Gegensatz zum Magnetfeld verschwindet das Vektorpotenzial außerhalb der Spule nicht. Klassisch kann die Spule die Elektronen nicht beeinflussen, da die Lorentz-Kraft $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ auf dem gesamten Strahl null ist.

Quantenmechanisch ist der Hamilton-Operator H dieses Systems

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right)^2 + V(r), \quad (10.96)$$

wobei $V(r)$ den Effekt des experimentellen Aufbaus repräsentiert. Semiklassisch können wir zwischen den Pfaden γ_I und γ_{II} in Abb. 10.4 unterscheiden. Wir schreiben für die mit γ_I (γ_{II}) korrespondierende Wellenfunktion ψ_I (ψ_{II}), wenn $A = 0$ ist. Für $A \neq 0$ ist die Wellenfunktion gegeben durch die eichtransformierte Form

$$\psi_i^A(r) \equiv \exp\left(ie \int_P^r A(r') \cdot dr'\right) \psi_i(r) \quad (i = I, II). \quad (10.97)$$

P ist dabei ein weit vom experimentellen Aufbau entfernter Bezugspunkt. Betrachten wir eine Superposition $\psi_I^A + \psi_{II}^A$ der Wellenfunktionen ψ_I^A und ψ_{II}^A , sodass $\psi_I^A(P) = \psi_{II}^A(P)$ ist. Die Amplitude an einem Punkt Q auf dem Schirm ist

$$\begin{aligned} \psi_I^A(Q) + \psi_{II}^A(Q) &= \exp\left(ie \int_{\gamma_I} A(r') \cdot dr'\right) \psi_I(Q) + \exp\left(ie \int_{\gamma_{II}} A(r') \cdot dr'\right) \psi_{II}(Q) \\ &= \exp\left(ie \int_{\gamma_{II}} A \cdot dr'\right) \left[\exp\left(ie \oint_{\gamma} A \cdot dr'\right) \psi_I(Q) + \psi_{II}(Q) \right], \end{aligned} \quad (10.98)$$

mit $\gamma \equiv \gamma_I - \gamma_{II}$. Es ist evident, dass die Wellenfunktion an den Punkten im Raum, an denen die Elektronen vorbeifliegen, trotz $B = 0$ vom Vektorpotenzial A abhängt. Aus dem Stokes'schen Satz erhalten wir

$$\oint_{\gamma} A \cdot dr' = \int_S (\nabla \times A) \cdot dS = \int_S B \cdot dS = \Phi. \quad (10.99)$$

S ist dabei eine von γ begrenzte Fläche. Hieraus und aus (10.98) folgern wir, dass das Interferenzmuster für zwei Werte Φ_a und Φ_b des Flusses gleich sein sollte, wenn gilt:

$$e(\Phi_a - \Phi_b) = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (10.100)$$

Welche Geometrie liegt dem Aharonov-Bohm-Effekt zugrunde? Da das Problem im Wesentlichen zweidimensional ist, betrachten wir ein Gebiet $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, wobei die Spule im Ursprung angenommen wird. Die relevanten Bündel sind das Prinzipalbündel $P(M, U(1))$ und sein assoziiertes Bündel $E = P \times_{\rho} \mathbb{C}$, die Wirkung von $U(1)$ auf \mathbb{C} liegt auf der Hand. Das Bündel E ist ein komplexes Geradenbündel über M , dessen Schnitt eine Wellenfunktion ψ ist.

Lassen Sie uns eine Lie-Algebra-wertige 1-Form $\mathcal{A} = iA = iA_{\mu} dx^{\mu}$ definieren. Die mit diesem lokalen Zusammenhang assoziierte kovariante Ableitung ist $\mathcal{D} = d + \mathcal{A}$, wobei \mathcal{A} durch (10.95) gegeben ist. Wegen $d\mathcal{A} = \mathcal{F} = 0$ ist dieser Zusammenhang lokal flach. Betrachten wir den Einheitskreis S^1 um die Spule im Ursprung. Wir parametrisieren S^1 mit $e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) und schreiben den Zusammenhang auf S^1 als

$$\mathcal{A} = i \frac{\Phi}{2\pi} d\theta. \quad (10.101)$$

Dies ergibt sich aus (10.95), wenn man $r = 1$ setzt. Wir fordern, dass die Wellenfunktion ψ entlang S^1 bezüglich dieses lokalen Zusammenhangs paralleltransportiert

wird:

$$\mathcal{D}\psi(\theta) = \left(d + i \frac{\Phi}{2\pi} d\theta \right) \psi(\theta) = 0. \quad (10.102)$$

Die Lösung von (10.102) ist schnell gefunden:

$$\psi(\theta) = e^{-i\Phi\theta/2\pi}. \quad (10.103)$$

Die Wahl dieses Schnitts ψ läuft auf die Vernachlässigung der Elektronengeschwindigkeit hinaus. Für die Holonomie $\Gamma : \pi^{-1}(\theta = 0) \rightarrow \pi^{-1}(\theta = 2\pi) = \pi^{-1}(\theta = 0)$ ergibt sich

$$\Gamma : \psi(0) \mapsto e^{-i\Phi} \psi(0). \quad (10.104)$$

Bei einem realen Experiment wurde ein toroidales Permalloy (20 % Fe und 80 % Ni) verwendet, um die Randeffekte zu eliminieren (Tonomura *et al* 1983). Die Abmessungen des Permalloys betragen einige Mikrometer, und es wurde mit Gold beschichtet, um zu verhindern, dass die Elektronen in das Magnetfeld eindringen.

10.5.4 Die Yang-Mills-Theorie

Lassen Sie uns die auf dem \mathbb{R}^4 definierte SU(2)-Eichtheorie ansehen. Das Bündel, das diese Eichtheorie beschreibt, ist $P(\mathbb{R}^4, \text{SU}(2))$. Da der \mathbb{R}^4 zusammenziehbar ist, gibt es nur ein einziges Eichpotenzial

$$\mathcal{A} = A_\mu{}^\alpha T_\alpha dx^\mu, \quad (10.105)$$

wobei $T_\alpha \equiv \sigma_\alpha/2i$ die Algebra $\mathfrak{su}(2)$ erzeugt:

$$[T_\alpha, T_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma.$$

Die Feldstärke ist

$$\mathcal{F} \equiv d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \text{mit} \quad (10.106a)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] = F_{\mu\nu}{}^\alpha T_\alpha, \quad (10.106b)$$

$$F_{\mu\nu}{}^\alpha = \partial_\mu A_{\nu\alpha} - \partial_\nu A_{\mu\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\mu\beta} A_{\nu\gamma}. \quad (10.106c)$$

Die Bianchi-Identität lautet hier

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0, \quad (10.107)$$

und die Yang-Mills-Wirkung ist

$$\mathcal{S}_{\text{YM}}[\mathcal{A}] \equiv -\frac{1}{4} \int_M \text{sp}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \int_M \text{sp}(\mathcal{F} \wedge * \mathcal{F}). \quad (10.108)$$

Variation nach \mathcal{A}_μ ergibt

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathcal{D} * \mathcal{F} = 0. \quad (10.109)$$

10.5.5 Instantonen

Ein Pfadintegral ist nur auf einem Raum mit einer euklidischen Metrik wohldefiniert. Um dieses Integral zu berechnen, ist es wichtig, dass man die lokalen Minima der *euklidischen* Wirkung findet und dann die Quantenfluktuationen um diese herum bestimmt. Betrachten wir die SU(2)-Eichtheorie auf dem vierdimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^4 . Die lokalen Minima dieser Theorie sind als **Instantonen** (oder *Pseudoteilchen*, Belavin *et al.* 1975) bekannt, siehe Abschnitt 1.10. Man überprüft leicht, dass die euklidische Wirkung

$$\mathcal{S}_{\text{YM}}^{\text{E}}[\mathcal{A}] = \frac{1}{4} \int_M \text{sp}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \int_M \text{sp}(\mathcal{F} \wedge * \mathcal{F}) \quad (10.110)$$

ist, wobei der Hodge-* bezüglich der euklidischen Metrik angenommen wird. Wie in Abschnitt 1.10 gezeigt, ist die mit Instantonen korrespondierende Feldstärke selbst-dual (bzw. antiselbstdual):

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \pm * \mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (10.111)$$

Die Wirkung einer selbstdualen (bzw. antiselbstdualen) Feldkonfiguration ist

$$\mathcal{S}_{\text{YM}}^{\text{E}}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2} \int_M \text{sp}(\mathcal{F} \wedge * \mathcal{F}) = \mp \frac{1}{2} \int_M \text{sp}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}). \quad (10.112)$$

Werfen wir einen Blick auf die topologischen Eigenschaften eines Instantons. Wir fordern

$$\mathcal{A}_\mu(x) \rightarrow g(x)^{-1} \partial_\mu g(x) \quad \text{wie} \quad |x| \rightarrow L, \quad (10.113)$$

damit die Wirkung endlich bleibt, wobei L eine beliebige positive Zahl ist. Da $|x| = L$ die Sphäre S^3 ist, definiert (10.113) eine Abbildung $g : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$, welche durch $\pi_3(\text{SU}(2)) \cong \mathbb{Z}$ klassifiziert wird. Wie spiegelt sich das in der Übergangsfunktion wider? Wir kompaktifizieren den \mathbb{R}^4 durch Hinzufügen der Unendlichkeit. Wir nehmen an, der Südpol der S^4 repräsentiere die Punkte im Unendlichen und der Nordpol den Ursprung. Unter dieser Kompaktifizierung separieren wir den \mathbb{R}^4 in zwei Stücke, die wir mit der südlichen (U_S) bzw. nördlichen (U_N) Hemisphäre der S^4 identifizieren:

$$U_N = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \leq L + \varepsilon\}, \quad (10.114a)$$

$$U_S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \geq L - \varepsilon\} \quad (10.114b)$$

(siehe Abb. 10.5). Wir setzen voraus, dass das Eichpotenzial auf U_S nicht „verdreht“ ist, und wählen

$$\mathcal{A}_S(x) \equiv 0 \quad (x \in U_S). \quad (10.115)$$

Nun ist alle topologische Information über das Bündel in $\mathcal{A}_N(x)$ oder der Übergangsfunktion $t_{NS}(x)$ auf dem „Äquator“ $S^3 (= U_N \cap U_S)$ enthalten. Wegen $\mathcal{A}_S = 0$ erhalten wir für $x \in U_N \cap U_S$:

$$\mathcal{A}_N = t_{NS}^{-1} \mathcal{A}_S t_{NS} + t_{NS}^{-1} dt_{NS} = t_{NS}^{-1} dt_{NS}. \quad (10.116)$$

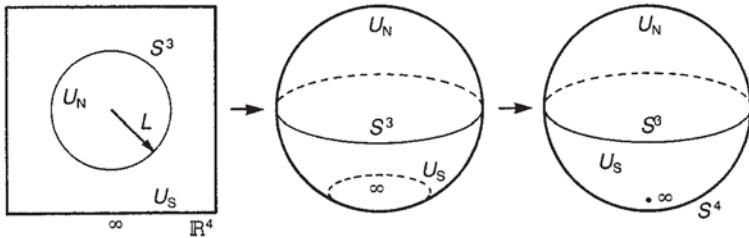


Abb. 10.5. Ein-Punkt-Kompaktifizierung des \mathbb{R}^4 zur S^4 .

Somit wird $g(x)$ in (10.113) mit der Übergangsfunktion $t_{\text{NS}}(x)$ identifiziert, und eine Klassifizierung der Abbildungen $g : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$ läuft auf die Klassifikation der Übergangsfunktion gemäß $\pi_3(\text{SU}(2)) = \mathbb{Z}$ hinaus; siehe Beispiel 9.11.

Wir berechnen jetzt den Grad einer Abbildung $g : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$, wobei wir Coleman (1979) folgen. Beachten Sie zunächst, dass $\text{SU}(2) \simeq S^3$ ist, wegen

$$t^4 I_2 + i t^i \sigma_i \in \text{SU}(2) \leftrightarrow t^2 + (t^4)^2 = 1.$$

Somit werden Abbildungen $g : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$ gemäß $\pi_3(\text{SU}(2)) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ klassifiziert. Wir erhalten leicht das Folgende:

(a) Die konstante Abbildung

$$g_0 : x \in S^3 \mapsto e \in \text{SU}(2) \quad (10.117a)$$

gehört zur Klasse 0 (d. h. keine Windung) von $\pi_3(\text{SU}(2))$.

(b) Die *identische* Abbildung (genauer gesagt, die identische Abbildung $S^3 \rightarrow S^3$)

$$g_1 : x \mapsto \frac{1}{r} [x^4 I_2 + i x^i \sigma_i] \quad (r^2 = x^2 + (x^4)^2) \quad (10.117b)$$

definiert die Klasse 1 von $\pi_3(\text{SU}(2))$. Die explizite Form des mit dieser Homotopieklassie korrespondierenden Eichpotenzials wird in Abschnitt 1.10 angegeben.

(c) Die Abbildung

$$g_n \equiv (g_1)^n : x \mapsto r^{-n} [x^4 I_2 + i x^i \sigma_i]^n \quad (10.117c)$$

definiert die Klasse n von $\pi_3(\text{SU}(2))$.

Erinnern Sie sich daran, dass die Stärke (Ladung) eines magnetischen Monopol durch das Integral der Feldstärke $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ über die Sphäre S^2 gegeben ist? Wir würden eine ähnliche Relation für die Instantonenanzahl erwarten. Da Instantonen über S^4 definiert sind, müssen wir eine 4-Form finden, die wir über S^4 integrieren können. Eine natürliche 4-Form ist $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$. Im Folgenden werden wir das Symbol für das äußere Produkt weglassen, wenn dies keine Konfusion hervorruft (\mathcal{F}^2 steht für $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$). Beachten Sie, dass $\text{sp} \mathcal{F}^2$ geschlossen ist:

$$d \text{sp} \mathcal{F}^2 = \text{sp}[d\mathcal{F}\mathcal{F} + \mathcal{F}d\mathcal{F}] = \text{sp}\{-[\mathcal{A}, \mathcal{F}]\mathcal{F} - \mathcal{F}[\mathcal{A}, \mathcal{F}]\} = 0, \quad (10.118)$$

wobei wir die Bianchi-Identität $d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$ verwendet haben.⁵ Wegen des Poincaré-Lemmas ist die geschlossene Form $\text{sp}\mathcal{F}^2$ lokal exakt:

$$\text{sp}\mathcal{F}^2 = dK, \quad (10.119)$$

mit einer lokalen 3-Form K . Somit ist $\text{sp}\mathcal{F}^2$ ein Element der De-Rham-Kohomologigruppe $H^4(S^4)$. Später wird $\text{sp}\mathcal{F}^2$ mit dem zweiten Chern-Charakter identifiziert, und K ist seine Chern-Simons-Form, siehe Kapitel 11.

Lemma 10.3. Die 3-Form K in (10.119) ist gegeben durch

$$K = \text{sp}[\mathcal{A} d\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3]. \quad (10.120)$$

Beweis

Direktes Ausrechnen ergibt

$$\begin{aligned} dK &= \text{sp}[(d\mathcal{A})^2 + \frac{2}{3}(d\mathcal{A}\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}d\mathcal{A}\mathcal{A} + \mathcal{A}^2d\mathcal{A})] \\ &= \text{sp}[(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2)(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2) + \frac{2}{3}\{(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2)\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2)\mathcal{A} + \mathcal{A}^2(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2)\}] \\ &= \text{sp}[\mathcal{F}^2 - \mathcal{A}^2\mathcal{F} - \mathcal{F}\mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^4 + \frac{2}{3}(\mathcal{F}\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{A} + \mathcal{A}^2\mathcal{F} - \mathcal{A}^4)], \end{aligned}$$

wobei von der Identität $d\mathcal{A} = \mathcal{F} - \mathcal{A}^2$ Gebrauch gemacht wurde. Nun bemerken wir, dass gilt:

$$\text{sp}\mathcal{A}^4 = 0, \quad \text{sp}\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{A} = -\text{sp}\mathcal{A}^2\mathcal{F} = -\text{sp}\mathcal{F}\mathcal{A}^2.$$

Beispielsweise erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{sp}\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\text{sp}\mathcal{A}_\kappa\mathcal{F}_{\lambda\mu}\mathcal{A}_\nu dx^\kappa \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= -\frac{1}{2}\text{sp}\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\kappa\mathcal{F}_{\lambda\mu} dx^\nu \wedge dx^\kappa \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu = -\text{sp}\mathcal{A}^2\mathcal{F}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Zyklizität der Spur und die Antikommutativität von dx^μ verwendet. Dann wird dK zu

$$dK = \text{sp}[\mathcal{F}^2 - \mathcal{A}^2\mathcal{F} - \mathcal{F}\mathcal{A}^2 + \frac{2}{3}\{\mathcal{F}\mathcal{A}^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{F}\mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^2\mathcal{F}) + \mathcal{A}^2\mathcal{F}\}] = \text{sp}\mathcal{F}^2,$$

wie behauptet. \square

Lemma 10.4. Sei \mathcal{A} das Eichpotenzial eines Instantons. Dann folgt

$$\int_{S^4} \text{sp}\mathcal{F}^2 = -\frac{1}{3} \int_{S_3} \text{sp}\mathcal{A}^3. \quad (10.121)$$

⁵ Im vorliegenden Fall scheint (10.118) trivial zu sein, da jede 4-Form auf S^4 geschlossen ist. Beachten Sie jedoch, dass (10.118) auch auf höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten wahr bleibt.

Beweis

Aus dem Stokes'schen Satz erhalten wir

$$\int_{U_N} \text{sp } \mathcal{F}^2 = \int_{U_N} dK = \int_{S^3} K,$$

wobei U_N durch (10.114) definiert ist und $S^3 = \partial U_N$ gilt. Wegen $\mathcal{F} = 0$ auf S^3 erhalten wir

$$K = \text{sp}[\mathcal{A}d\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3] = \text{sp}[\mathcal{A}(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2) + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3] = -\frac{1}{3}\text{sp}\mathcal{A}^3$$

auf S^3 , woraus sich

$$\int_{U_N} \text{sp } \mathcal{F}^2 = \int_{S^4} \text{sp } \mathcal{F}^2 = -\frac{1}{3} \int_{S^3} \text{sp } \mathcal{A}^3$$

ergibt. Bei der letzten Umformung haben wir $\int_{U_S} \text{sp } \mathcal{F}^2 = 0$ addiert, wegen $\mathcal{A}_S \equiv 0$. \square

Beachten Sie, dass $\text{sp } \mathcal{F}^2$ invariant unter der Eichtransformation ist:

$$\text{sp } \mathcal{F}^2 \mapsto \text{sp}[g^{-1}\mathcal{F}^2 g] = \text{sp } \mathcal{F}^2.$$

Darum ist es vernünftig anzunehmen, dass $\text{sp } \mathcal{F}^2$ in der Tat eine gewisse Menge an topologischer Information über das Bündel enthält, die unabhängig von den speziellen Zusammenhängen ist. Betrachten wir die bereits angesprochenen Eichfelder (10.117a–c). Wir erhalten:

- (a) Für $g_0(x) \equiv e$ ergibt sich $\mathcal{A} = 0$ auf S^3 . Da das Bündel trivial ist, können wir auf der ganzen S^4 $\mathcal{A} = 0$ annehmen. Dann ist $\mathcal{F} = 0$ und daher

$$\int_{S^4} \text{sp } \mathcal{F}^2 = -\frac{1}{3} \int_{S^3} \text{sp } \mathcal{A}^3 = 0. \quad (10.122)$$

Beachten Sie, dass diese Relation für ein beliebiges Eichpotenzial gilt, das sich aus $\mathcal{A} = 0$ durch eine glatte Eichtransformation ergibt, d. h. für irgendein Eichpotenzial von der Form $\mathcal{A}(x) = g(x)^{-1} dg(x)$ ($x \in S^4$).

- (b) Als nächstes untersuchen wir ein Eichpotenzial, dessen Wert auf S^3 durch (10.117b) als

$$\mathcal{A} = \frac{1}{r}(x^4 - ix^k\sigma_k)d\left(\frac{1}{r}(x^4 + ix^l\sigma_l)\right) \quad (10.123)$$

gegeben ist. Wir erreichen eine beträchtliche Vereinfachung, wenn wir beachten, dass der Integrand $\text{sp } \mathcal{A}^3$ nicht von dem Punkt auf der S^3 abhängen sollte, an dem er ausgewertet wird, da g_1 die S^3 in gleichförmiger Weise surjektiv auf $SU(2) \cong S^3$ abbildet. Somit können wir am Nordpol ($x^4 = 1, x = \mathbf{0}$) der Einheitsphäre rechnen. Dann ergibt sich $\mathcal{A} = i\sigma_k dx^k$ und

$$\begin{aligned} \text{sp } \mathcal{A}^3 &= i^3 \text{sp}[\sigma_i\sigma_j\sigma_k]dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= 2\varepsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = 12 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned} \quad (10.124)$$

Weiterhin erkennen wir, dass (x^1, x^2, x^3) ein gutes Koordinatensystem auf *jeder* Hemisphäre von S^3 ist. Außerdem ist $\omega \equiv dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ ein Volumenelement am Nordpol. Wir erhalten

$$\int_{S^3} \text{sp} \mathcal{A}^3 = 12 \int_{S^3} \omega = 12(2\pi^2) = 24\pi^2,$$

dabei ist $2\pi^2$ die Fläche der Einheitssphäre S^3 . Wir erhalten schließlich

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{sp} \mathcal{F}^2 = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{sp} \mathcal{A}^3 = 1. \quad (10.125)$$

- (c) Jetzt betrachten wir die Abbildung $g_n : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$, gegeben durch (10.117c). Wir zeigen, dass $g_2 = g_1 g_1$ die Windungszahl 2 hat. Wir teilen die S^3 in die Nordhemisphäre $U_N^{(3)}$ und die Südhemisphäre $U_S^{(3)}$. Es ist immer möglich, eine gegebene Abbildung $g_1 : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$ glatt nach g_{1N} zu transformieren, sodass g_{1N} die Windungszahl eins hat und $g_{1N}(x) = e$ für $x \in U_S^{(3)}$ ist. Die gesamte Variation findet auf $U_N^{(3)}$ statt. Ähnlich kann g_1 deformiert werden zu g_{1S} mit derselben Windungszahl und $g_{1S}(x) = e$ für $x \in U_N^{(3)}$. Unter dieser Deformation wird g_2 zu

$$g_2(x) \mapsto g'_2(x) = \begin{cases} g_{1N}(x) & (x \in U_N^{(3)}) \\ g_{1S}(x) & (x \in U_S^{(3)}). \end{cases}$$

Für $\mathcal{A}(x) = g'_2(x)^{-1} dg'_2(x)$ ($x \in S^3$) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{24\pi^3} \int_{S^3} \text{sp} \mathcal{A}^3 &= \frac{1}{24\pi^2} \left(\int_{U_N^{(3)}} \text{sp}(g_{1N}^{-1} dg_{1N})^3 + \int_{U_S^{(3)}} \text{sp}(g_{1S}^{-1} dg_{1S})^3 \right) \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned} \quad (10.126)$$

Indem wir dieselbe Prozedur wiederholen, ergibt sich für $\mathcal{A}(x) = g_n^{-1} dg_n$:

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{sp} \mathcal{F}^2 = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{sp} \mathcal{A}^3 = n. \quad (10.127)$$

Wir führen all diese Resultate in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 10.7. Der Abbildungsgrad von $g : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$ ist gegeben durch

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{sp}(g^{-1} dg)^3 = \frac{1}{2} \int_{S^4} \text{sp} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^2. \quad (10.128)$$

10.6 Die Berry-Phase

In der Quantenmechanik ist eine Wellenfunktion bis auf ihre Phase festgelegt. In den meisten Fällen kann die Phase als irrelevanter Faktor vernachlässigt werden. Berry (1984) wies jedoch darauf hin, dass die Phase bei einer adiabatischen Zustandsänderung des Systems beobachtbare Konsequenzen haben kann.

10.6.1 Herleitung der Berry-Phase

Sei $H(R)$ ein Hamilton-Operator, der von verschiedenen Parametern abhängt, für die wir kollektiv R schreiben. Nehmen wir an, R ändere sich adiabatisch mit der Zeit: $R = R(t)$. Die Schrödinger-Gleichung ist

$$H(R(t))|\psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle. \quad (10.129)$$

Wir nehmen an, das System sei bei $t = 0$ im n -ten Eigenzustand, $|\psi(0)\rangle = |n, R(0)\rangle$, wobei gilt:

$$H(R(0))|n, R(0)\rangle = E_n(R(0))|n, R(0)\rangle. \quad (10.130)$$

Was ist mit dem Zustand $|\psi(t)\rangle$ zu einer späteren Zeit $t > 0$? Wir setzen voraus, dass sich das System immer im n -ten Zustand befindet, d. h., es findet kein „level crossing“ statt (adiabatischer Grenzfall).

Übung 10.13 Ein erste Vermutung für $|\psi(t)\rangle$ wäre

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[-i \int_0^t ds E_n(R(s)) \right] |n, R(t)\rangle, \quad (10.131)$$

wobei der normierte Zustand $|n, R(t)\rangle$ die Bedingung

$$H(R(t))|n, R(t)\rangle = E_n(R(t))|n, R(t)\rangle \quad (10.132)$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass (10.131) *keine* Lösung von (10.129) ist.

Da (10.131) die Schrödinger-Gleichung nicht löst, müssen wir etwas anderes probieren. Lassen Sie uns eine zusätzliche Phase $\eta_n(t)$ in die Wellenfunktion einführen:

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[i\eta_n(t) - i \int_0^t E_n(R(s)) ds \right] |n, R(t)\rangle. \quad (10.133)$$

Einsetzen von (10.133) in die Schrödinger-Gleichung (10.129) liefert uns

$$H(R(t))|\psi(t)\rangle = E_n(R(t))|\psi(t)\rangle$$

für die linke Seite der Gleichung – siehe (10.132) – und

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left[-\frac{d\eta_n(t)}{dt} + E_n(R(t)) \right] |\psi(t)\rangle + \exp \left[i\eta_n(t) - i \int E_n(R(s)) ds \right] i \frac{d}{dt} |n, R(t)\rangle$$

für die rechte Seite. Durch Gleichsetzen stellen wir fest, dass $\eta_n(t)$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{d\eta_n(t)}{dt} = i \langle n, R(t) | \frac{d}{dt} |n, R(t)\rangle. \quad (10.134)$$

Durch Integrieren von (10.134) erhalten wir

$$\eta_n(t) = i \int_0^t \langle n, R(s) | \frac{d}{ds} |n, R(s)\rangle ds = i \int_{R(0)}^{R(t)} \langle n, R | \nabla_R |n, R\rangle dR, \quad (10.135)$$

wobei ∇_R für den Gradienten im R -Raum steht. Beachten Sie, dass $\eta_n(t)$ reell ist, wegen

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \langle n, R(s) | \frac{d}{ds} |n, R(s)\rangle &= \langle n, R(s) | \frac{d}{ds} |n, R(s)\rangle + \left(\frac{d}{ds} \langle n, R(s) | \right) |n, R(s)\rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle n, R(s) | n, R(s)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, das System führe eine geschlossene Schleife im R -Raum aus: $R(0) = R(T)$ für ein $T > 0$. Wir erhalten dann

$$\eta_n(T) = i \int_0^T \langle n, R(s) | \frac{d}{ds} |n, R(s)\rangle ds = i \int_{R(0)}^{R(T)} \langle n, R | \nabla_R |n, R\rangle dR. \quad (10.136)$$

Wegen $R(T) = R(0)$ scheint der letzte Ausdruck zu verschwinden. Der Integrand ist jedoch nicht notwendigerweise eine totale Ableitung, und $\eta_n(T)$ verschwindet womöglich doch nicht. Die Phase $\eta_n(T)$ heißt **Berry-Phase** (Berry 1984).

Es war Simon (1983), der als erster die tiefere geometrische Bedeutung der Berry-Phase erkannt hat. Er bemerkte, dass der Ursprung der Berry-Phase auf die Holonomie im Parameterraum zurückzuführen ist. Wir werden diesen Gesichtspunkt herausarbeiten, dabei folgen wir Berry (1984), Simon (1983), Aitchison (1987) und Zumino (1987).

10.6.2 Berry-Phase, Berry-Zusammenhang und Berry-Krümmung

Seien M eine den Parameterraum beschreibende Mannigfaltigkeit und $R = (R_1, \dots, R_k)$ die lokale Koordinate. An jedem Punkt R von M betrachten wir den normierten n -ten Eigenzustand des Hamilton-Operators $H(R)$. Da ein Quantenzustand $|n; R\rangle$ nicht von einem Zustand $e^{i\phi}|n; R\rangle$ unterschieden werden kann, wird ein physikalischer Zustand durch eine Äquivalenzklasse

$$[|R\rangle] \equiv \{g|R\rangle | g \in U(1)\} \quad (10.137)$$

beschrieben, wobei wir den Index n weglassen, da wir uns nur für den n -ten Eigenvektor interessieren (Abb. 10.6). An jedem Punkt R von M gibt es einen $U(1)$ -Freiheitsgrad und ein $U(1)$ -Bündel $P(M, U(1))$ über dem Parameterraum M . Die Projektion ist durch $\pi(g|R\rangle) = R$ gegeben.

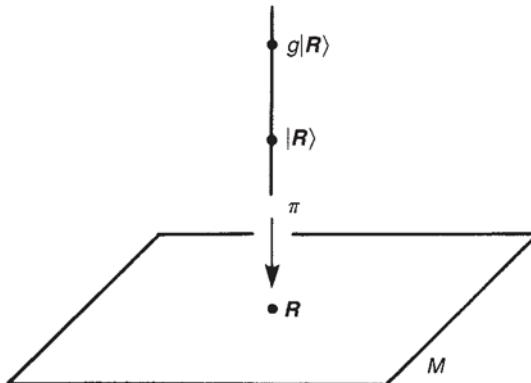


Abb. 10.6. Die Faser eines quantenmechanischen Systems, das von adiabatischen Parametern R abhängt.

Wenn wir die Phase von $|R\rangle$ an jedem Punkt $R \in M$ festlegen, läuft das auf das Auswählen eines Schnitts hinaus. Sei $\sigma(R) = |R\rangle$ ein lokaler Schnitt über einer Karte U von M . Die kanonische lokale Trivialisierung ist durch

$$\phi^{-1}(|R\rangle) = (R, e) \quad (10.138)$$

gegeben. Die „Rechts-“Wirkung ergibt

$$\phi^{-1}(|R\rangle \cdot g) = (R, e)g = (R, g). \quad (10.139)$$

Jetzt, da die Bündelstruktur definiert ist, fügen wir ihr einen Zusammenhang hinzu. Wir definieren den **Berry-Zusammenhang** durch

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dR^\mu \equiv \langle R | (d|R\rangle) = -(d\langle R|) |R\rangle, \quad (10.140)$$

wobei $d = (\partial/\partial R^\mu)dR^\mu$ die äußere Ableitung im R -Raum ist. Beachten Sie, dass \mathcal{A} anti-Hermite'sch ist, wegen

$$0 = d(\langle R|R\rangle) = (d\langle R|) |R\rangle + \langle R | d|R\rangle = \langle R | d|R\rangle^* + \langle R | d|R\rangle.$$

Um zu sehen, dass (10.140) tatsächlich eine lokale Form eines Zusammenhangs ist, müssen wir die Kompatibilitätsbedingung prüfen: Es seien U_i und U_j zwei sich überlappende Karten von M und $\sigma_i(R) = |R\rangle_i$ sowie $\sigma_j(R) = |R\rangle_j$ die jeweiligen lokalen

Schnitte. Sie sind durch die Übergangsfunktion verknüpft gemäß $|R\rangle_j = |R\rangle_i t_{ij}(R)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_j(R) &= {}_j\langle R|d|R\rangle_j = t_{ij}(R)^{-1} {}_i\langle R|[d|R]\rangle_i t_{ij}(R) + |R\rangle d t_{ij}(R) \\ &= \mathcal{A}_i(R) + t_{ij}(R)^{-1} d t_{ij}(R).\end{aligned}\quad (10.141)$$

Die Menge der 1-Formen $\{\mathcal{A}_i\}$, welche (10.141) genügen, definiert einen Ehresmann-Zusammenhang auf $P(M, U(1))$.

Die Feldstärke \mathcal{F} von \mathcal{A} wird **Berry-Krümmung** genannt und ist gegeben durch

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = (d\langle R|) \wedge (d|R\rangle) = \left(\frac{\partial \langle R|}{\partial R^\mu} \right) \left(\frac{\partial |R\rangle}{\partial R^\nu} \right) dR^\mu \wedge dR^\nu.\quad (10.142)$$

Nach einem Beispiel aus der Atomphysik werden wir aufklären, wie sich diese geometrische Struktur in der Berry-Phase widerspiegelt.

Beispiel 10.7. Betrachten wir ein quantenmechanisches System, das die „schnellen“ Freiheitsgrade r und die „langsam“ Freiheitsgrade R hat. Beispielsweise können wir uns ein Elektron vorstellen, das im Potenzial eines langsam vibrierenden Ions herumsaust. Wir nehmen an, der Hamilton-Operator sei durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{P^2}{2M} + V(r; R)\quad (10.143)$$

gegeben, wobei $p(P)$ der kanonisch konjugierte Impuls zu $r(R)$ ist. Als erste Näherung können wir die langsam Freiheitsgrade als bei einem Wert R „eingefroren“ annehmen und einen instantanen Unter-Hamilton-Operator

$$h(R) = \frac{p^2}{2m} + V(r; R)\quad (10.144)$$

betrachten. Das zugehörige Eigenwertproblem ist

$$h(R)|R\rangle = \epsilon_n(R)|R\rangle,\quad (10.145)$$

wobei $|R\rangle$ für den n -ten Eigenvektor $|n; R\rangle$ der schnellen Freiheitsgrade steht. Wir setzen voraus, dass der Eigenwert isoliert und nichtentartet ist. Der Berry-Zusammenhang ist $\mathcal{A}(R) = \langle R|d|R\rangle$, während die Krümmung $\mathcal{F} = (d\langle R|) \wedge (d|R\rangle)$ ist.

Es ist interessant, zu beobachten, wie die schnellen Freiheitsgrade die langsam beeinflussen. Wir schreiben die totale Wellenfunktion in der Form

$$\Psi(r; R) = \Phi(R)|R\rangle\quad (10.146)$$

und erhalten die „effektive“ Schrödinger-Gleichung, welche von der Wellenfunktion $\Phi(R)$ der „langsam“ Freiheitsgrade gelöst wird. Das Eigenwertproblem des Hamilton-Operators (10.143) ist

$$\begin{aligned}H\Psi(r; R) &= -\frac{1}{2M} \left[\nabla_R^2 \Phi(R)|R\rangle + 2\nabla_R \Phi(R) \cdot \nabla_R |R\rangle + \Phi(R) \nabla_R^2 |R\rangle \right] \\ &\quad - \Phi(R) \frac{1}{2m} \nabla_r^2 |R\rangle + \Phi(R) V(r; R)|R\rangle \\ &= E_n(R) \Phi(R)|R\rangle.\end{aligned}$$

Wenn wir von links mit $\langle R |$ multiplizieren und die Schrödinger-Gleichung (10.145) verwenden, wird aus dieser Gleichung

$$-\frac{1}{2M} [\nabla_R^2 \Phi(R) + 2\nabla_R \Phi(R) \cdot \langle R | \nabla_R | R \rangle + \Phi(R)(\langle R | \nabla_R | R \rangle)^2] + \epsilon_n(R)\Phi(R) = E_n(R)\Phi(R). \quad (10.147)$$

Dabei haben wir die Born-Oppenheimer-Approximation verwendet, in der alle Matrixelemente außerhalb der Diagonalen vernachlässigt werden:

$$\langle n; R | \nabla_R | n'; R \rangle = 0 \quad (n' \neq n). \quad (10.148)$$

Nun ist der effektive Hamilton-Operator für $|\Phi(R)\rangle$ durch

$$H_{\text{eff}}(n) \equiv -\frac{1}{2M} \left(\frac{\partial}{\partial R^\mu} + \mathcal{A}_\mu(R) \right)^2 + \epsilon_n(R) \quad (10.149)$$

gegeben, wobei \mathcal{A}_μ eine Komponente des Berry-Zusammenhangs ist:

$$\mathcal{A}_\mu(R) = \langle R | \frac{\partial}{\partial R^\mu} | R \rangle. \quad (10.150)$$

Bemerkenswerterweise haben die schnellen Freiheitsgrade ein *Vektorpotenzial* induziert, das an die langsamsten Freiheitsgrade koppelt. Beachten Sie auch, dass der Eigenwert $\epsilon_n(R)$ sich wie eine potenzielle Energie in H_{eff} verhält. Diese „spontane Erzeugung“ der Eichsymmetrie reflektiert den Phasenfreiheitsgrad der Wellenfunktion $|R\rangle$. \diamond

Die Schrödinger-Gleichung, welche die adiabatische Zustandsänderung beschreibt, ist

$$H(R(t))|R(t), t\rangle = i\frac{d}{dt}|R(t), t\rangle, \quad (10.151a)$$

wobei wir beachten, dass $|R(t), t\rangle$ sowohl eine explizite t -Abhängigkeit als auch eine implizite über $R(t)$ hat. Berry nahm an, dass gilt:

$$|R(t), t\rangle = \exp\left(-i \int_0^t E_n(t') dt'\right) e^{i\eta(t)} |R(t)\rangle, \quad (10.152a)$$

mit einem instantanen *normierten* Eigenzustand $|R\rangle$ von $H(R)$:

$$\mathcal{H}(R)|R\rangle = E_n(R)|R\rangle, \quad \langle R|R\rangle = 1. \quad (10.153)$$

Der erste Exponentialterm ist die gewöhnliche dynamische Phase, während der zweite die Berry-Phase darstellt. Aus Gründen der Bequemlichkeit definieren wir einen Operator

$$\mathcal{H}(R) \equiv H(R) - E_n(R), \quad (10.154)$$

um die dynamische Phase loszuwerden. Der Zustand $|R\rangle$ ist der Eigenzustand von $\mathcal{H}(R)$ mit der Energie null: $\mathcal{H}(R)|R\rangle = 0$. Die Lösung der modifizierten Schrödinger-Gleichung,

$$\mathcal{H}(R)|R(t), t\rangle = i \frac{d}{dt}|R(t), t\rangle, \quad (10.151b)$$

ist dann

$$|R(t), t\rangle = e^{i\eta(t)}|R(t)\rangle. \quad (10.152b)$$

Wir hatten in (10.136) gefunden, dass η gegeben war als

$$\eta(t) = i \int_0^t ds \frac{dR^\mu}{ds} \langle R(s) | \frac{\partial}{\partial R^\mu} |R(s)\rangle = i \int_{R(0)}^{R(t)} \langle R | d|R\rangle. \quad (10.155)$$

Wir zeigen, dass die Berry-Phase eine Holonomie ist, die mit dem Zusammenhang (10.140) auf $P(M, U(1))$ assoziiert ist. Wir betrachten einen Schnitt $\sigma(R) = |R\rangle$ über einer Karte U von M . Sei $R : [0, 1] \rightarrow M$ eine Schleife in U .⁶ Wir schreiben eine horizontale Liftung von $R(t)$ bezüglich des Zusammenhangs (10.140) als

$$\tilde{R}(t) = \sigma(R(t))g(R(t)), \quad (10.156)$$

wobei $g(R(0))$ das neutrale Element von $U(1)$ sein soll. Das Gruppenelement $g(t)$ erfüllt Gleichung (10.13b),

$$\frac{dg(t)}{dt} g(t)^{-1} = -\mathcal{A}\left(\frac{d}{dt}\right) = -\langle R(t) | \frac{d}{dt} |R(t)\rangle. \quad (10.157)$$

Darin steht $g(t)$ für $g(R(t))$. Aus $g(t) = \exp(i\eta(t))$ erhalten wir

$$i \frac{d\eta(t)}{dt} = -\langle R(t) | \frac{d}{dt} |R(t)\rangle,$$

was man leicht integrieren kann:

$$\eta(1) = i \int_0^1 \langle R(s) | \frac{d}{ds} |R(s)\rangle ds = i \oint \langle R | d|R\rangle. \quad (10.158)$$

Es sei bemerkt, dass $R(0) = R(1)$ und daher $|R(0)\rangle = |R(1)\rangle$ ist. Dann wird $\exp[i\eta(1)]$ als eine Holonomie angesehen (Abb. 10.7):

$$\tilde{R}(1) = \exp\left(-\oint \langle R | d|R\rangle\right) \cdot |R(0)\rangle. \quad (10.159a)$$

⁶ Wir werden jetzt ein bisschen unsauber in unserer Notation.

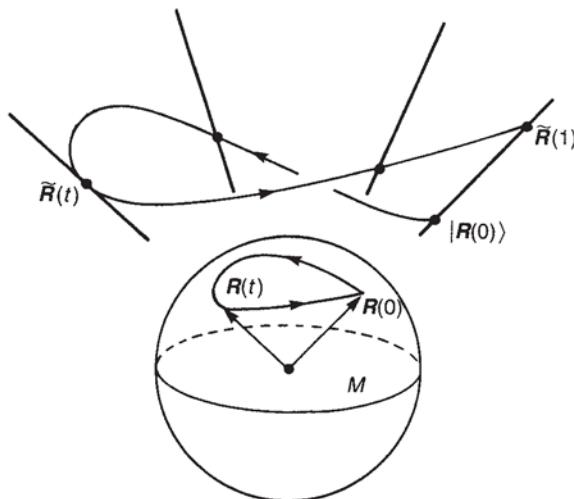


Abb. 10.7. Wenn sich der Parameter adiabatisch entlang einer Schleife $R(t)$ ändert, wird aus dem Zustand mit der Anfangsbedingung $|R(0)\rangle$ ein Zustand $|\tilde{R}(1)\rangle$, der im Allgemeinen verschieden von $|R(0)\rangle$ ist. Der Unterschied ist die Holonomie und wird mit der Berry-Phase identifiziert.

Übung 10.14 Sei S eine Fläche in M , deren Rand eine Schleife $R(t)$ ist. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\tilde{R}(1) = \exp\left(-\oint_S \mathcal{F}\right) \cdot |R(0)\rangle, \quad (10.159b)$$

wobei \mathcal{F} durch (10.142) gegeben ist.

Beispiel 10.8. Betrachten wir ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem Magnetfeld mit dem Hamilton-Operator

$$H(R) = R \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} R_3 & R_1 - iR_2 \\ R_1 + iR_2 & -R_3 \end{pmatrix}. \quad (10.160)$$

Der Parameter R entspricht dem äußeren Magnetfeld. Dieses Zwei-Niveau-System hat die Eigenwerte $\pm|R|$. Betrachten wir den Eigenwert $R = +|R|$. Entsprechend dem gerade vorgestellten Rezept führen wir einen Hamilton-Operator $\mathcal{H}(R) \equiv H(R) - |R|$ ein und untersuchen den Eigenzustand verschwindender Energie von $\mathcal{H}(R)$, gegeben durch

$$|R\rangle_N = [2R(R + R_3)]^{-1/2} \begin{pmatrix} R + R_3 \\ R_1 + iR_2 \end{pmatrix}. \quad (10.161)$$

Das Eichpotenzial erhält man nach einer unkomplizierten, aber nervtötenden Rechnung als

$$\mathcal{A}_N = {}_N\langle R | d|R \rangle_N = -i \frac{R_2 dR_1 - R_1 dR_2}{2R(R + R_3)}. \quad (10.162)$$

Die Feldstärke ist

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = \frac{i}{2} \frac{R_1 dR_2 \wedge dR_3 + R_2 dR_3 \wedge dR_1 + R_3 dR_1 \wedge dR_2}{R^3}. \quad (10.163)$$

Bisher haben wir angenommen, der Zustand $|R\rangle$ sei isoliert. Diese Annahme bricht aber zusammen, wenn $R = 0$ ist, da dann die beiden Eigenzustände entarten. Überraschenderweise benimmt sich diese Singularität wie ein *magnetischer Monopol* im R -Raum. Um dies zu sehen, führen wir Polarkoordinaten θ und ϕ im R -Raum ein:

$$R_1 = R \sin \theta \cos \phi, \quad R_2 = R \sin \theta \sin \phi, \quad R_3 = R \cos \theta.$$

Der Zustand (10.161) sieht dann so aus:

$$|R\rangle_N = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (10.164)$$

Dieser Zustand wird bei $\theta = \pi$ singulär, was widerspiegelt, dass $|R\rangle_N$ für $R_3 = -R$ nicht definiert ist. Betrachten wir einen weiteren Eigenvektor

$$|R\rangle_S \equiv e^{-i\phi} |R\rangle_N = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = [2R(R - R_3)]^{-1/2} \begin{pmatrix} R_1 - iR_2 \\ R - R_3 \end{pmatrix} \quad (10.165)$$

zu demselben Eigenwert. Dieser Eigenvektor wird singulär bei $\theta = 0$, d. h. bei $R_3 = R$. Korrespondierend mit diesen Vektoren erhalten wir die Berry-Eichpotenziale in Polarkoordinaten:

$$\mathcal{A}_N = \frac{1}{2} i(1 - \cos \theta) d\phi \quad (\theta \neq \pi) \quad (10.166a)$$

$$\mathcal{A}_S = -\frac{1}{2} i(1 + \cos \theta) d\phi \quad (\theta \neq 0). \quad (10.166b)$$

Sie hängen über die Eichtransformation

$$\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_N - id\phi = \mathcal{A}_N + e^{i\phi} de^{-i\phi} \quad (10.167)$$

miteinander zusammen, wobei $g(\pi/2, \phi) = \exp(-i\phi)$ mit der Übergangsfunktion t_{NS} identifiziert wird. Gleichung (10.166) ist einfach das Vektorpotenzial des Wu-Yang-Monopols der Stärke $-\frac{1}{2}$, siehe die Abschnitte 1.9 und 10.5. Der totale Fluss des Monopols ist $\Phi = 4\pi(-\frac{1}{2}) = -2\pi$.

Die Analogie zwischen dem vorliegenden Problem und dem magnetischen Monopol ist jetzt evident. Wenn wir die Amplitude R des Magnetfelds fixieren, ist der eingeschränkte Parameterraum die S^2 . An jedem Punkt R der S^2 hat der Zustand einen Phasenfreiheitsgrad. Somit haben wir es mit einem $U(1)$ -Bündel $P(S^2, U(1))$ zu tun, das ebenso auch einen magnetischen Monopol beschreibt. Für jede Wahl der Parameter R gibt es eine mit dem n -ten Eigenzustand $|n; R\rangle$ korrespondierende Faser. Die Faser bei R besteht aus der Äquivalenzklasse $[|R\rangle]$ aus Gleichung (10.137). Die Projektion π bildet einen Zustand auf den Parameter ab, auf dem er definiert ist: $\pi : e^{i\alpha} |R\rangle \rightarrow R \in S^2$. Wie wir gesehen haben, ist dieses Bündel nichttrivial, da es nicht

durch nur einen einzelnen Zusammenhang beschrieben werden kann. Die Nichttrivialität des Bündels impliziert die Existenz eines Monopols am Ursprung. Beachten Sie, dass $R = 0$ (d. h. $B = 0$) ein singulärer Punkt ist, an dem alle Eigenwerte entartet sind.

Als nächstes wenden wir uns noch der Frage der Holonomie zu. Wir betrachten einen Standardpunkt $R(0)$ auf der S^2 und dazu einen Vektor $|R(0)\rangle$. Wir wählen eine Schleife $R(t)$ auf der S^2 und führen einen Paralleltransport von $|R(0)\rangle$ entlang $R(t)$ durch, wonach wir mit einem Vektor $\exp[i\eta(1)]|R(0)\rangle$ wieder zum Ausgangspunkt gelangen. Die zusätzliche Phase η stellt die Holonomie $\pi^{-1}(R) \rightarrow \pi^{-1}(R)$ dar und entspricht der Berry-Phase. Gemäß (10.158) ist $\eta(1)$ als

$$\eta(1) = i \oint_R \mathcal{A} = i \int_S \mathcal{F} \quad (10.168)$$

gegeben. Dabei ist $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ die Feldstärke und S die von der Schleife $R(t)$ begrenzte Fläche. Aus (10.168) folgt, dass die Berry-Phase $\eta(1)$ den „magnetischen Fluss“ durch die Fläche S darstellt. \diamond

Übung 10.15 Verwenden Sie (10.165), um zu zeigen, dass gilt:

$$\mathcal{A}_S = \frac{i}{2} \frac{R_2 dR_1 - R_1 dR_2}{R(R - R_3)}. \quad (10.169)$$

Zeigen Sie außerdem:

$$d\phi = -\frac{R_2 dR_1 - R_1 dR_2}{(R + R_3)(R - R_3)}. \quad (10.170)$$

Beachten Sie, dass $d\phi$ bei $R_3 = \pm R$ singulär ist.

Aufgabe

10.1 Betrachten Sie eine zweidimensionale Ebene M mit der Koordinate R und einer Wellenfunktion ψ , die von R adiabatisch gemäß $\psi = \psi(r, R)$ abhängt. Sei $R : [0, 1] \rightarrow M$ eine Schleife in M , und nehmen Sie an, dass $\psi(r, R(1)) = -\psi(r, R(0))$, d. h., die Phase von ψ ändert sich um π nach einer adiabatischen Zustandsänderung entlang der Schleife. Zeigen Sie, dass es einen Punkt innerhalb der Schleife gibt, an welchem die adiabatische Annahme zusammenbricht. Siehe dazu auch Longuet-Higgins (1975).

11

Charakteristische Klassen

Sind eine Faser F , eine Strukturgruppe G und ein Basisraum M gegeben, können wir – abhängig von den gewählten Übergangsfunktionen – eine Vielzahl von Faserbündeln über M konstruieren. Dabei drängt sich die Frage auf, wie viele Bündel es insgesamt über M gibt, wenn F und G gegeben sind, und wie sehr sie sich jeweils von einem trivialen Bündel $M \times F$ unterscheiden. Beispielsweise haben wir in Abschnitt 10.5 gesehen, dass ein $SU(2)$ -Bündel über S^4 durch die Homotopiegruppe $\pi_3(SU(2)) \cong \mathbb{Z}$ klassifiziert wird. Die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ sagt uns, wie stark lokale Abschnitte des Bündels von den Übergangsfunktionen verdrillt werden, wenn die Bündelabschnitte zusammengefügt werden. Wir haben ebenfalls erkannt, dass wir diese Homotopiegruppe berechnen können, indem wir $\text{sp}\mathcal{F}^2 \in H^4(S^4)$ über die S^4 integrieren, siehe Satz 10.7.

Charakteristische Klassen sind Teilmengen der Kohomologieklassen des Basisraums und messen die *Nichttrivialität* oder *Verdrillung* eines Bündels. In diesem Sinn sind sie „Blockaden“, welche verhindern, dass ein Bündel trivial ist. Die meisten charakteristischen Klassen sind durch die De-Rham-Kohomologieklassen gegeben. Neben ihrer Bedeutung für die Klassifikation von Faserbündeln spielen charakteristische Klassen eine zentrale Rolle bei den Indexsätzen.

Unsere Darstellung folgt Alvarez-Gaumé und Ginsparg (1984), Eguchi *et al.* (1980), Gilkey (1995) und Wells (1980). Noch mehr mathematischen Tiefgang finden Sie bei Bott und Tu (1982) sowie bei Milnor und Stasheff (1974).

11.1 Invariante Polynome und der Chern-Weil-Homomorphismus

Wir fassen an dieser Stelle noch einmal kurz die Diskussion der De-Rham-Kohomologieguppe von Kapitel 6 zusammen. Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine r -Form $\omega \in \Omega^r(M)$ ist *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$ ist, und *exakt*, wenn $\omega = d\eta$ für ein $\eta \in \Omega^{r-1}(M)$ ist. Die Menge der geschlossenen r -Formen bezeichnet man mit $Z^r(M)$ und die Menge der exakten r -Formen als $B^r(M)$. Wegen $d^2 = 0$ folgt $Z^r(M) \supset B^r(M)$. Wir definieren die r -te De-Rham-Kohomologieguppe $H^r(M)$ durch

$$H^r(M) \equiv Z^r(M)/B^r(M).$$

In $H^r(M)$ werden zwei geschlossene r -Formen ω_1 und ω_2 identifiziert, wenn $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$ für ein $\eta \in \Omega^{r-1}(M)$ ist. Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die formale Summe

$$H^*(M) \equiv H^0(M) \oplus H^1(M) \oplus \cdots \oplus H^m(M)$$

ist der Kohomologiering mit dem Produkt $\wedge : H^*(M) \times H^*(M) \rightarrow H^*(M)$. Dieses Produkt wird induziert durch $\wedge : H^p(M) \times H^q(M) \rightarrow H^{p+q}(M)$. Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Der Rücktransport $f^* : \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$ induziert auf natürliche Weise eine lineare Abbildung $f^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$, da f^* mit der äußeren Ableitung kommutiert: $f^* d\omega = df^* \omega$. Der Rücktransport f^* erhält die algebraische Struktur des Kohomologierings wegen $f^*(\omega \wedge \eta) = f^* \omega \wedge f^* \eta$.

11.1.1 Invariante Polynome

Sei $M(k, \mathbb{C})$ die Menge der komplexen $(k \times k)$ -Matrizen. $S^r(M(k, \mathbb{C}))$ bezeichne den Vektorraum der symmetrischen r -linearen \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf $M(k, \mathbb{C})$. Mit anderen Worten: Eine Abbildung

$$\tilde{P} : \bigotimes^r M(k, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

ist ein Element von $S^r(M(k, \mathbb{C}))$, wenn sie nicht nur in jedem Eintrag linear ist, sondern dazu auch noch der Symmetrie

$$\tilde{P}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_r) = \tilde{P}(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_r) \quad (1 \leq i, j \leq r) \quad (11.1)$$

genügt, mit $a_p \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. Es bezeichne

$$S^*(M(k, \mathbb{C})) \equiv \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r(M(k, \mathbb{C}))$$

eine formale Summe von symmetrischen multilinear \mathbb{C} -wertigen Funktionen. Wir definieren ein Produkt von $\tilde{P} \in S^p(M(k, \mathbb{C}))$ und $\tilde{Q} \in S^q(M(k, \mathbb{C}))$ durch

$$\tilde{P}\tilde{Q}(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_P \tilde{P}(X_{P(1)}, \dots, X_{P(p)}) \tilde{Q}(X_{P(p+1)}, \dots, X_{P(p+q)}), \quad (11.2)$$

wobei P für die Permutation von $(1, \dots, p+q)$ steht. $S^*(M(k, \mathbb{C}))$ ist mit dieser Multiplikation eine Algebra.

Seien G eine Matrixgruppe und \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra. In der Praxis ist gewöhnlich $G = \mathrm{GL}(k, \mathbb{C}), \mathrm{U}(k)$ oder $\mathrm{SU}(k)$. Die Lie-Algebra \mathfrak{g} ist ein Unterraum von $M(k, \mathbb{C})$ und wir können uns die Einschränkungen $S^r(\mathfrak{g})$ und $S^*(\mathfrak{g}) \equiv \bigoplus_{r \geq 0} S^r(\mathfrak{g})$ anschauen. Man sagt, $\tilde{P} \in S^r(\mathfrak{g})$ sei invariant, wenn \tilde{P} für beliebige $g \in G$ und $A_i \in \mathfrak{g}$ die Bedingung

$$\tilde{P}(\mathrm{Ad}_g A_1, \dots, \mathrm{Ad}_g A_r) = \tilde{P}(A_1, \dots, A_r) \quad (11.3)$$

erfüllt, mit $\text{Ad}_g A_i = g^{-1} A_i g$. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}\tilde{P}(A_1, A_2, \dots, A_r) &= \text{ssp}(A_1, A_2, \dots, A_r) \\ &\equiv \frac{1}{r!} \sum_P \text{sp}(A_{P(1)}, A_{P(2)}, \dots, A_{P(r)})\end{aligned}\quad (11.4)$$

symmetrisch, r -linear und invariant, wobei „ssp“ für die **symmetrierte Spur** steht, die durch die letzte Gleichung definiert wird. Die Menge der G -invarianten Mitglieder von $S'(\mathfrak{g})$ wird als $I^r(G)$ bezeichnet. Beachten Sie, dass $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ nicht notwendigerweise impliziert, dass $I^r(G_1) = I^r(G_2)$ ist. Das durch (11.2) definierte Produkt induziert auf natürliche Weise eine Multiplikation:

$$I^p(G) \otimes I^q(G) \rightarrow I^{p+q}(G). \quad (11.5)$$

Die Summe $I^*(G) \equiv \bigotimes_{r \geq 0} I^r(G)$ ist mit diesem Produkt eine Algebra.

Wir betrachten $\tilde{P} \in I^r(G)$. Die Kurzschreibweise für die diagonale Kombination lautet

$$P(A) \equiv \tilde{P}(\underbrace{A, A, \dots, A}_r) \quad (A \in \mathfrak{g}). \quad (11.6)$$

Offensichtlich ist P ein Polynom r -ten Grades, man nennt es ein **invariantes Polynom**. P ist auch $\text{Ad } G$ -invariant:

$$P(\text{Ad}_g A) = P(g^{-1} A g) = P(A) \quad (A \in \mathfrak{g}, g \in G). \quad (11.7)$$

Zum Beispiel ist $\text{sp}(A^r)$ ein invariantes Polynom, das man aus (11.4) erhält. Im Allgemeinen lässt sich ein invariantes Polynom als eine Summe aus Produkten von $P_r \equiv \text{sp}(A^r)$ schreiben.

Umgekehrt definiert jedes invasive Polynom P eine invasive und symmetrische r -lineare Form \tilde{P} , indem $P(t_1 A_1 + \dots + t_r A_r)$ als ein Polynom in t_i entwickelt wird. Dann ist das $1/r!$ -Fache des Koeffizienten von $t_1 t_2 \dots t_r$ aufgrund der Konstruktion invariant und symmetrisch und heißt **Polarisierung** von P . Wir betrachten zum Beispiel $P(A) \equiv \text{sp}(A^3)$. Dem obigen Rezept folgend entwickeln wir $\text{sp}(t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3)^3$ in Potenzen von t_1, t_2 und t_3 . Der Koeffizient von $t_1 t_2 t_3$ ist

$$\begin{aligned}\text{sp}(A_1 A_2 A_3 + A_1 A_3 A_2 + A_2 A_1 A_3 + A_2 A_3 A_1 + A_3 A_1 A_2 + A_3 A_2 A_1) \\ = 3 \text{sp}(A_1 A_2 A_3 + A_2 A_1 A_3)\end{aligned}$$

wobei die Zyklizität der Spur ausgenutzt wurde. Die Polarisierung ist

$$\tilde{P}(A_1, A_2, A_3) = \frac{1}{2} \text{sp}(A_1 A_2 A_3 + A_2 A_1 A_3) = \text{ssp}(A_1, A_2, A_3).$$

Im vorigen Kapitel haben wir das lokale Eichpotenzial $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$ und die Feldstärke $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ auf einem Prinzipalbündel eingeführt. Wir haben gezeigt, dass diese geometrischen Objekte außerdem das assoziierte Vektorbündel beschreiben. Da die Menge der Zusammenhänge $\{\mathcal{A}_i\}$ die Verdrillung eines Faserbündel beschreibt, geht die Nichttrivialität eines Prinzipalbündels auch auf ihr assoziiertes

Bündel über. Tatsächlich kann man diese Nichttrivialität, mit (10.57) als Definition des lokalen Zusammenhangs in einem Vektorbündel, sogar ohne Bezugnahme auf das Prinzipalbündel definieren, mit welchem es ursprünglich assoziiert war. Weiter unten werden wir in Situationen kommen, in denen die Verwendung von Vektorbündeln entscheidend sein wird (etwa beim Whitney-Summen-Bündel oder dem Splitting- bzw. Zerfällungsprinzip).

Sei $P(M, \mathbb{C})$ ein Prinzipalbündel. Wir erweitern den Definitionsbereich der invarianten Polynome von \mathfrak{g} auf \mathfrak{g} -wertige p -Formen auf M . Für $A_i \eta_i$ ($A_i \in \mathfrak{g}$, $\eta \in \Omega^{p_i}(M)$; $1 \leq i \leq r$) definieren wir

$$\tilde{P}(A_1 \eta_1, \dots, A_r \eta_r) \equiv \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}(A_1, \dots, A_r). \quad (11.8)$$

Beispielsweise gilt, analog zu (11.4),

$$\text{ssp}(A_1 \eta_1, \dots, A_r \eta_r) = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \text{ssp}(A_1, \dots, A_r).$$

Die diagonale Kombination ist

$$P(A\eta) \equiv \underbrace{\eta \wedge \dots \wedge \eta}_r P(A). \quad (11.9)$$

Die Wirkung von \tilde{P} oder P auf allgemeine Elemente ist durch die r -Linearität gegeben. Insbesondere werden wir uns im Folgenden für das invariante Polynom der Form $P(\mathcal{F})$ interessieren. Die große Bedeutung der invarianten Polynome beruht auf dem fundamentalen Satz von Chern-Weil¹.

Satz 11.1. (Satz von Chern-Weil) Sei P ein invariantes Polynom. Dann gelten für $P(\mathcal{F})$ die folgenden beiden Aussagen:

- (a) $dP(\mathcal{F}) = 0$.
- (b) Seien \mathcal{F} und \mathcal{F}' Krümmungs-2-Formen, die mit zwei verschiedenen Zusammenhängen \mathcal{A} und \mathcal{A}' korrespondieren. Dann ist die Differenz $P(\mathcal{F}') - P(\mathcal{F})$ exakt.

Beweis

(a) Es genügt zu zeigen, dass $dP(\mathcal{F}) = 0$ für ein invariantes Polynom $P_r(\mathcal{F})$ gilt, das homogen vom Grad r ist, da jedes invariante Polynom in homogene Polynome zerlegt werden kann. Wir betrachten zunächst die Identität

$$\tilde{P}_r(g_t^{-1}X_1 g_t, \dots, g_t^{-1}X_r g_t) = \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_r),$$

mit $g_t \equiv \exp(tX)$ und $X, X_i \in \mathfrak{g}$. Indem wir nach t differenzieren und dann $t = 0$ setzen, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(X_1, \dots, [X_i, X], \dots, X_r) = 0. \quad (11.10)$$

¹ Verwechseln Sie nicht André Weil und Hermann Weyl!

Als nächstes seien A eine \mathfrak{g} -wertige p -Form und Ω_i eine \mathfrak{g} -wertige p_i -Form ($1 \leq i \leq r$). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $A = X\eta$ und $\Omega_i = X_i\eta_i$ annehmen, wobei $X, X_i \in \mathfrak{g}$ und η (η_i) eine p -Form (p_i -Form) ist. Wir definieren

$$[\Omega_i, A] \equiv \eta_i \wedge \eta [X_i, X] = X_i X (\eta_i \wedge \eta) - (-1)^{pp_i} X X_i (\eta \wedge \eta_i) \quad (11.11)$$

und beachten, dass gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_r(\Omega_1, \dots, [\Omega_i, A], \dots, \Omega_r) &= \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_i \wedge \eta \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_i X, \dots, X_r) \\ &\quad - (-1)^{pp_i} \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta \wedge \eta_i \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \dots, X X_i, \dots, X_r) \\ &= \eta \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r (-1)^{p(p_1 + \dots + p_i)} \tilde{P}_r(X_1, \dots, [X_i, X], \dots, X_r). \end{aligned}$$

Hieraus und aus (11.10) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^r (-1)^{p(p_1 + \dots + p_i)} \tilde{P}_r(\Omega_1, \dots, [\Omega_i, A], \dots, \Omega_r) = 0. \quad (11.12)$$

Nun betrachten wir die Ableitung

$$\begin{aligned} d\tilde{P}_r(\Omega_1, \dots, \Omega_r) &= d(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r) \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_r) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{(p_1 + \dots + p_{i-1})} (\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_i \wedge \dots \wedge \eta_r) \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_i, \dots, X_r) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{(p_1 + \dots + p_{i-1})} \tilde{P}_r(\Omega_1, \dots, d\Omega_i, \dots, \Omega_r). \end{aligned} \quad (11.13)$$

Nun seien in (11.12) und (11.13) $A = \mathcal{A}$ und $\Omega_i = \mathcal{F}$, wofür $p = 1$ und $p_i = 2$ gilt. Wir addieren 0 in Form von (11.12) zu (11.13) und erhalten

$$\begin{aligned} d\tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^r [\tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, d\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) + \tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, [\mathcal{A}, \mathcal{F}], \dots, \mathcal{F})] \\ &= \sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{D}\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) = 0, \end{aligned} \quad (11.14)$$

wegen $\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$ (Bianchi-Identität). Damit haben wir bewiesen, dass gilt:

$$dP_r(\mathcal{F}) = d\tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) = 0.$$

(b) Seien \mathcal{A} und \mathcal{A}' zwei Zusammenhänge auf E und \mathcal{F} bzw. \mathcal{F}' die jeweiligen Feldstärken. Wir definieren ein interpolierendes Eichpotenzial \mathcal{A}_t durch

$$\mathcal{A}_t \equiv \mathcal{A} + t\theta, \quad \theta \equiv (\mathcal{A}' - \mathcal{A}) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (11.15)$$

sodass $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}'$ ist. Die zugehörige Feldstärke ist

$$\mathcal{F}_t \equiv d\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t \wedge \mathcal{A}_t = \mathcal{F} + t\mathcal{D}\theta + t^2\theta^2, \quad (11.16)$$

mit $\mathcal{D}\theta = d\theta + [\mathcal{A}, \theta] = d\theta + \mathcal{A} \wedge \theta + \theta \wedge \mathcal{A}$. Wir erkennen zunächst:

$$\begin{aligned} P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F}) &= P_r(\mathcal{F}_1) - P_r(\mathcal{F}_0) = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} P_r(\mathcal{F}_t) \\ &= r \int_0^1 dt \tilde{P}_r \left(\frac{d}{dt} \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t \right). \end{aligned} \quad (11.17)$$

Aus (11.16), erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_r(\mathcal{F}_t) &= r \tilde{P}_r(\mathcal{D}\theta + 2t\theta^2, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= r \tilde{P}_r(\mathcal{D}\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + 2rt \tilde{P}_r(\theta^2, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t). \end{aligned} \quad (11.18)$$

Wir beachten außerdem:

$$d\mathcal{F}_t = d\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t] = -[\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] + [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t] = t[\mathcal{F}_t, \theta],$$

wobei die Bianchi-Identität $\mathcal{D}_t \mathcal{F}_t = d\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] = 0$ verwendet wurde.² Es folgt dann

$$\begin{aligned} d[\tilde{P}_r(\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t)] &= \tilde{P}_r(d\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - (r-1)\tilde{P}_r(\theta, d\mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= \tilde{P}_r(\mathcal{D}\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - (r-1)\tilde{P}_r(\theta, \mathcal{D}\mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= \tilde{P}_r(\mathcal{D}\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - (r-1)t\tilde{P}_r(\theta, [\mathcal{F}_t, \theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t), \end{aligned} \quad (11.19)$$

dabei haben wir eine 0 in Form von (11.12) addiert, um d in \mathcal{D} umzuwandeln. Wenn wir in (11.12) $\Omega_1 = A = \theta$, $\Omega_2 = \dots = \Omega_m = \mathcal{F}_t$ setzen, erhalten wir

$$2\tilde{P}_r(\theta^2, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + (r-1)\tilde{P}_r(\theta, [\mathcal{F}_t, \theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = 0.$$

Aus (11.18), (11.19) und der obigen Identität erhalten wir

$$\frac{d}{dt} P_r(\mathcal{F}_t) = r d[\tilde{P}_r(\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t)].$$

Schließlich ergibt sich

$$P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F}) = d \left[r \int_0^1 \tilde{P}_r(\mathcal{A}' - \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) dt \right]. \quad (11.20)$$

Dies zeigt, dass die Differenz zwischen $P_r(\mathcal{F}')$ und $P_r(\mathcal{F})$ eine exakte Form ist. \square

² \mathcal{D} ist die kovariante Ableitung nach \mathcal{A} , während \mathcal{D}_t diejenige nach \mathcal{A}_t ist.

Wir definieren die **Transgression** $TP_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ von P_r durch

$$TP_r(\mathcal{A}', \mathcal{A}) \equiv r \int_0^1 dt \tilde{P}_r(\mathcal{A}' - \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t), \quad (11.21)$$

mit \tilde{P}_r als der Polarisierung von P_r . Transgressionen werden eine wichtige Rolle spielen, wenn wir in Abschnitt 11.5 Chern-Simons-Formen diskutieren. Sei $\dim M = m$. Da die Differenz von $P_m(\mathcal{F}')$ und $P_m(\mathcal{F})$ eine exakte Form ist, sollten ihre Integrale über eine Mannigfaltigkeit M ohne Rand gleich sein:

$$\int_M P_m(\mathcal{F}') - \int_M P_m(\mathcal{F}) = \int_M dTP_m(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = \int_{\partial M} P_m(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = 0. \quad (11.22)$$

Wie gezeigt, ist ein invariantes Polynom geschlossen und, im Allgemeinen, nicht-trivial. Dementsprechend definiert es eine Kohomologieklass von M . Satz 11.1(b) stellt sicher, dass diese Kohomologieklass unabhängig vom gewählten Eichpotenzial ist. Die solchermaßen definierte Kohomologieklass wird **charakteristische Klasse** genannt. Die durch ein invariantes Polynom P definierte charakteristische Klasse bezeichnet man mit $\chi_E(P)$, wobei E ein Faserbündel ist, auf dem Zusammenhänge und Krümmungen definiert sind.³

Satz 11.2. Seien P ein invariantes Polynom in $I^*(G)$ und E ein Faserbündel über M mit der Strukturgruppe G .

(a) Die Abbildung

$$\chi_E : I^*(G) \rightarrow H^*(M) \quad (11.23)$$

mit $P \mapsto \chi_E(P)$ ist ein Homomorphismus, genannt **Weil-Homomorphismus**.

(b) Sei $f : N \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung. Das Rücktransportbündel f^*E von E genügt der sog. „**Natürlichkeit**“ (engl. naturality)

$$\chi_{f^*E} = f^* \chi_E. \quad (11.24)$$

Beweis

(a) Wir betrachten $P_r \in I^r(G)$ und $P_s \in I^s(G)$. Wenn wir $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\alpha T_\alpha$ schreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned} (P_r P_s)(\mathcal{F}) &= \mathcal{F}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{F}^{\alpha_r} \wedge \mathcal{F}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{F}^{\beta_s} \frac{1}{(r+s)!} \tilde{P}_r(T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r}) \tilde{P}_s(T_{\beta_1}, \dots, T_{\beta_s}) \\ &= P_r(\mathcal{F}) \wedge P_s(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Daraus folgt (a) wegen $P_r(\mathcal{F}), P_s(\mathcal{F}) \in H^*(M)$.

³ Da ein Prinzipalbündel und sein assoziiertes Bündel dieselben Eichpotenziale und Feldstärken haben, gilt der Satz von Chern-Weil für beide Bündel gleichermaßen. Demzufolge kann E sowohl ein Prinzipalbündel als auch ein Vektorbündel sein.

(b) Seien \mathcal{A} ein Eichpotenzial von E und $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$. Man überzeugt sich leicht, dass der Rücktransport $f^*\mathcal{A}$ ein Zusammenhang in f^*E ist. Es seien nämlich \mathcal{A}_i und \mathcal{A}_j lokale Zusammenhänge in einander überlappenden Karten U_i und U_j von M . Wenn t_{ij} eine Übergangsfunktion auf $U_i \cap U_j$ ist, ist die Übergangsfunktion auf f^*E durch $f^*t_{ij} = t_{ij} \circ f$ gegeben. Zwischen den Rücktransporten $f^*\mathcal{A}_i$ und $f^*\mathcal{A}_j$ besteht die Beziehung

$$f^*\mathcal{A}_j = f^*(t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) = (f^*t_{ij}^{-1})(f^*\mathcal{A}_i)(f^*t_{ij}) + (f^*t_{ij}^{-1})(df^*t_{ij}).$$

Dies zeigt, dass $f^*\mathcal{A}$ in der Tat ein lokaler Zusammenhang auf f^*E ist. Die korrespondierende Feldstärke auf f^*E ist

$$d(f^*\mathcal{A}_i) + f^*\mathcal{A}_i \wedge f^*\mathcal{A}_i = f^*[d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i] = f^*\mathcal{F}_i.$$

Daher ist $f^*P(\mathcal{F}_i) = P(f^*\mathcal{F}_i)$, also $f^*\chi_E(P) = \chi_{f^*E}(P)$. \square

Korollar 11.1. Charakteristische Klassen eines trivialen Bündels sind trivial.

Beweis

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein triviales Bündel. Da E trivial ist, existiert eine Abbildung $f : M \rightarrow \{p\}$, sodass $E = f^*E_0$ ist, wobei $E_0 \rightarrow \{p\}$ ein Bündel über einem Punkt p ist. Alle De-Rham-Kohomologiegruppen von einem Punkt sind trivial und damit auch die charakteristischen Klassen. Satz 11.2(b) garantiert, dass die charakteristischen Klassen $\chi_E (= f^*\chi_{E_0})$ von E ebenfalls trivial sind. \square

11.2 Chern-Klassen

11.2.1 Definitionen

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein komplexes Vektorbündel mit der Faser \mathbb{C}^k . Die Strukturgruppe G ist eine Untergruppe von $GL(k, \mathbb{C})$, und das Eichpotenzial \mathcal{A} und die Feldstärke \mathcal{F} nehmen ihre Werte in \mathfrak{g} an. Wir definieren die **totale Chern-Klasse** gemäß

$$c(\mathcal{F}) \equiv \det \left(I + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right). \quad (11.25)$$

Da \mathcal{F} eine 2-Form ist, ist $c(\mathcal{F})$ eine direkte Summe von Formen geraden Grades:

$$c(\mathcal{F}) = 1 + c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots, \quad (11.26)$$

wobei $c_j(\mathcal{F}) \in \Omega^{2j}(M)$ die j -te **Chern-Klasse** genannt wird. In einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M verschwindet die Chern-Klasse $c_j(\mathcal{F})$ mit $2j > m$ trivial. Unabhängig von $\dim M$ bricht die Folge bei $c_k(\mathcal{F}) = \det(i\mathcal{F}/2\pi)$ ab, und es ist $c_j(\mathcal{F}) = 0$ für alle $j > k$. Da $c_j(\mathcal{F})$ geschlossen ist, definiert es ein Element $[c_j(\mathcal{F})]$ von $H^{2j}(M)$.

Beispiel 11.1. Sei F ein komplexes Vektorbündel mit Faser \mathbb{C}^2 über M , wobei $G = \mathrm{SU}(2)$ und $\dim M = 4$ ist. Wenn wir das Feld \mathcal{F} in der Form $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\alpha(\sigma_\alpha/2i)$ mit $\mathcal{F}^\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{F}^\alpha_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ schreiben, ist

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F}) &= \det\left(I + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}^\alpha(\sigma_\alpha/2i)\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 + (i/2\pi)(\mathcal{F}^3/2i) & (i/2\pi)(\mathcal{F}^1 - i\mathcal{F}^2)/2i \\ (i/2\pi)(\mathcal{F}^1 + i\mathcal{F}^2)/2i & 1 - (i/2\pi)(\mathcal{F}^3/2i) \end{pmatrix} \\ &= 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 (\mathcal{F}^3 \wedge \mathcal{F}^3 + \mathcal{F}^1 \wedge \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2 \wedge \mathcal{F}^2). \end{aligned} \quad (11.27)$$

Die einzelnen Chern-Klassen sind

$$c_0(\mathcal{F}) = 1, \quad c_1(\mathcal{F}) = 0, \quad c_2(\mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \sum \frac{\mathcal{F}^\alpha \wedge \mathcal{F}^\alpha}{4} = \det\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right). \quad (11.28)$$

Höhere Chern-Klassen verschwinden identisch. \diamond

Für allgemeine Faserbündel ist es ziemlich mühsam, die Chern-Klassen „zu Fuß“ über die Determinanten auszurechnen. Eine Formel, mit der man sie direkt bestimmen kann, wäre also wünschenswert. Solch eine Formel lässt sich tatsächlich aufstellen, wenn man die Krümmungsform diagonalisiert. Die Matrixform \mathcal{F} wird durch eine geeignete Matrix $g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ diagonalisiert, und man erhält $g^{-1}(i\mathcal{F}/2\pi)g = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_k)$, mit einer 2-Form x_i . Diese Diagonalmatrix werden wir mit A bezeichnen. Wenn beispielsweise $G = \mathrm{SU}(k)$ ist, wählen wir die Erzeuger anti-Hermite'sch, und eine Hermite'sche Matrix $i\mathcal{F}/2\pi$ lässt sich durch $g \in \mathrm{SU}(k)$ diagonalisieren. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \det(I + A) &= \det[\mathrm{diag}(1 + x_1, 1 + x_2, \dots, 1 + x_k)] \\ &= \prod_{j=1}^k (1 + x_j) \\ &= 1 + (x_1 + \dots + x_k) + (x_1 x_2 + \dots + x_{k-1} x_k) + \dots + (x_1 x_2 + \dots + x_k) \\ &= 1 + \mathrm{sp}A + \frac{1}{2}\{(\mathrm{sp}A)^2 - \mathrm{sp}A^2\} + \dots + \det A. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Beachten Sie, dass jeder Term in (11.29) eine elementare symmetrische Funktion von $\{x_j\}$ ist:

$$\begin{aligned} S_0(x_j) &\equiv 1 \\ S_1(x_j) &\equiv \sum_{j=1}^k x_j \\ S_2(x_j) &\equiv \sum_{i < j} x_i x_j \\ &\vdots \\ S_k(x_j) &\equiv x_1 x_2 \dots x_k. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Da $\det(I + A)$ ein invariantes Polynom ist, gilt $P(\mathcal{F}) = P(g\mathcal{F}g^{-1}) = P(2\pi A/i)$, siehe (11.7). Dementsprechend gilt für allgemeine \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} c_0(\mathcal{F}) &= 1 \\ c_1(\mathcal{F}) &= \text{sp}A = \text{sp}\left(g\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}g^{-1}\right) = \frac{i}{2\pi}\text{sp}\mathcal{F} \\ c_2(\mathcal{F}) &= \frac{1}{2}[(\text{sp}\mathcal{A})^2 - \text{sp}\mathcal{A}^2] = \frac{1}{2}(i/2\pi)^2[\text{sp}\mathcal{F} \wedge \text{sp}\mathcal{F} - \text{sp}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F})] \\ &\vdots \\ c_k(\mathcal{F}) &= \det A = (i/2\pi)^k \det \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Sie können Beispiel 11.1 leicht mithilfe von (11.31) nachrechnen.⁴

11.2.2 Eigenschaften von Chern-Klassen

Wir werden im Folgenden mit verschiedenen Vektorbündeln zu tun haben. Dabei bezeichnen wir die Chern-Klasse eines Vektorbündels E in der Regel mit $c(E)$. Wenn eine Angabe der Krümmung erforderlich ist, schreiben wir $c(\mathcal{F}_E)$.

Satz 11.3. Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit $G = \text{GL}(k, \mathbb{C})$ und $F = \mathbb{C}^k$.

(a) (Natürlichkeit) Sei $f : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Dann ist

$$c(f^*E) = f^*c(E). \quad (11.32)$$

(b) Sei $F \xrightarrow{\pi'} M$ ein weiteres Vektorbündel mit $F = \mathbb{C}^l$ und $G = \text{GL}(l, \mathbb{C})$. Die totale Chern-Klasse des Whitney-Summen-Bündels $E \oplus F$ ist

$$c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F). \quad (11.33)$$

Beweis

(a) Die Natürlichkeit folgt direkt aus Satz 11.2(a). Da f^*E die Krümmung $\mathcal{F}_{f^*E} = f^*\mathcal{F}_E$ hat, ist die totale Chern-Klasse von f^*E :

$$c(f^*E) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}_{f^*E}\right) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}f^*\mathcal{F}_E\right) = f^*\det\left(I + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}_E\right) = f^*c(E).$$

(b) Betrachten wir das Chern-Polynom einer Matrix⁵

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

⁴ Beachten Sie, dass die Pauli-Matrizen – oder im Allgemeinen beliebige Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(n)$ von $\text{SU}(n)$ – spurfrei sind: $\text{sp}\sigma_\alpha = 0$.

⁵ Beachten Sie, dass die Krümmung eines Whitney-Summen-Bündels blockdiagonal ist: $\mathcal{F}_{E \oplus F} = \text{diag}(\mathcal{F}_E, \mathcal{F}_F)$.

Wir erhalten

$$\det\begin{pmatrix} I + \frac{iA}{2\pi} & \\ & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I + \frac{iB}{2\pi} & 0 \\ 0 & I + \frac{iC}{2\pi} \end{pmatrix} = \det\left(I + \frac{iB}{2\pi}\right) \det\left(I + \frac{iC}{2\pi}\right) = c(B)c(C).$$

Diese Relation bleibt gültig, wenn B und C durch \mathcal{F}_E und \mathcal{F}_F ersetzt werden:

$$c(\mathcal{F}_{E \oplus F}) = c(\mathcal{F}_E) \wedge c(\mathcal{F}_F),$$

womit (11.33) bewiesen ist. \square

Übung 11.1 (a) Sei E ein triviales Bündel. Verwenden Sie Korollar 11.1, um zu zeigen, dass gilt:

$$c(E) = 1. \quad (11.34)$$

(b) Sei E ein Vektorbündel, sodass $E = E_1 \oplus E_2$ ist, wobei E_1 ein Vektorbündel der Dimension k_1 ist und E_2 ein triviales Vektorbündel der Dimension k_2 . Zeigen Sie:

$$c_i(E) = 0 \quad (k_1 + 1 \leq i \leq k_1 + k_2). \quad (11.35)$$

11.2.3 Das Splitting-Prinzip

Sei E eine Whitney-Summe von n komplexen Geradenbündeln:

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n. \quad (11.36)$$

Mit (11.33) erhalten wir

$$c(E) = c(L_1)c(L_2)\dots c(L_n), \quad (11.37)$$

bei diesem Produkt handelt es sich um das äußere Produkt von Differentialformen. Wegen $c_r(L) = 0$ für $r \geq 2$ schreiben wir

$$c(L_i) = 1 + c_1(L_i) \equiv 1 + x_i. \quad (11.38)$$

Dann wird (11.37) zu

$$c(E) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i). \quad (11.39)$$

Der Vergleich mit (11.29) ergibt, dass die Chern-Klasse eines n -dimensionalen Vektorbündels E identisch ist mit derjenigen der Whitney-Summe von n komplexen Geradenbündeln. Obwohl E im Allgemeinen keine Whitney-Summe von komplexen Geradenbündeln ist, können wir in Hinblick auf die Chern-Klassen so tun, als ob die Aussage gültig wäre. Diese Tatsache nennt man **Splitting-Prinzip** (Zerfällungsprinzip), und wir akzeptieren sie ohne Beweis. Den allgemeinen Beweis können Sie z. B. bei Shanahan (1978) oder Hirzebruch (1966) nachlesen.

Intuitiv gesprochen, zerfällt der komplexe Vektorraum, auf dem g wirkt, in k unabhängige Teile, wenn die Krümmung \mathcal{F} diagonalisiert wird: $\mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$. Ein Eigenwert x_i ist in jedem komplexen Geradenbündel eine Krümmung. Da diagonalisierbare Matrizen dicht in $M(n, \mathbb{C})$ sind, kann man jede Matrix so genau, wie man nur möchte, mit einer Diagonalmatrix approximieren. Daher trifft das Splitting-Prinzip auf jede Matrix zu. Beweisen Sie als Übung Gleichung (11.33) mithilfe des Splitting-Prinzips.

11.2.4 Universelle Bündel und Klassifizierung von Räumen

Mittlerweile dürften Ihnen die charakteristischen Klassen schon etwas vertraut sein. Bevor wir diesen Abschnitt abschließen, wollen wir sie noch aus einem etwas anderen Blickwinkel betrachten, indem wir ihre Rolle bei der Klassifizierung von Faserbündeln untersuchen. Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit Faser \mathbb{C}^k . Es ist bekannt, dass wir immer ein Bündel $\bar{E} \xrightarrow{\pi'} M$ finden können, sodass

$$E \oplus \bar{E} \cong M \times \mathbb{C}^n \quad (11.40)$$

für ein $n \geq k$ ist. Die Faser F_p von E bei $p \in M$ ist eine k -Ebene im \mathbb{C}^n . Sei $G_{k,n}(\mathbb{C})$ die in Beispiel 8.4 definierte Graßmann-Mannigfaltigkeit. Die Mannigfaltigkeit $G_{k,n}(\mathbb{C})$ ist die Menge der k -Ebenen in \mathbb{C}^n . Ähnlich wie beim kanonischen Geradenbündel definieren wir das kanonische k -Ebenen-Bündel $L_{k,n}(\mathbb{C})$ über $G_{k,n}(\mathbb{C})$ mit der Faser \mathbb{C}^k . Wir betrachten eine Abbildung $f : M \rightarrow G_{k,n}(\mathbb{C})$, welche einen Punkt p auf die k -Ebene F_p in \mathbb{C}^n abbildet.

Satz 11.4. Seien M eine Mannigfaltigkeit mit $\dim M = m$ und $E \xrightarrow{\pi} M$ ein komplexes Vektorbündel mit der Faser \mathbb{C}^k . Dann existiert eine natürliche Zahl N , sodass für $n > N$

(a) eine Abbildung $f : M \rightarrow G_{k,n}(\mathbb{C})$ existiert, sodass gilt:

$$E \cong f^* L_{k,n}(\mathbb{C}); \quad (11.41)$$

(b) $f^* L_{k,n}(\mathbb{C}) \cong g^* L_{k,n}(\mathbb{C})$ dann und nur dann ist, wenn $f, g : M \rightarrow G_{k,n}(\mathbb{C})$ homotop sind.

Den Beweis finden Sie in Chern (1979). Ist beispielsweise $E \xrightarrow{\pi} M$ ein komplexes Geradenbündel, so gibt es ein Bündel $\bar{E} \xrightarrow{\pi'} M$, sodass $E \oplus \bar{E} \cong M \times \mathbb{C}^n$ ist, und eine Abbildung $f : M \rightarrow G_{1,n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$, sodass $E = f^* L$ ist, mit L als dem kanonischen Geradenbündel über $\mathbb{C}P^{n-1}$. Darüber hinaus ist, wenn $f \sim g$ ist, $f^* L$ äquivalent zu $g^* L$. Satz 11.4 zeigt, dass die Klassifikation von Vektorbündeln sich auf die von Homotopieklassen der Abbildungen $M \rightarrow G_{k,n}(\mathbb{C})$ reduziert.

Es ist praktisch, den **klassifizierenden Raum** $G_k(\mathbb{C})$ zu definieren. Wenn wir eine k -Ebene in \mathbb{C}^n als eine solche in \mathbb{C}^{n+1} ansehen, haben wir natürliche Einbettungen vor uns:

$$G_{k,k}(\mathbb{C}) \hookrightarrow G_{k,k+1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow G_k(\mathbb{C}), \quad (11.42)$$

mit

$$G_k(\mathbb{C}) \equiv \bigcup_{n=k}^{\infty} G_{k,n}(\mathbb{C}). \quad (11.43)$$

Dementsprechend liegen **universelle Bündel** $L_k \rightarrow G_k(\mathbb{C})$ mit der Faser \mathbb{C}^k vor. Für jedes komplexe Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ mit Faser \mathbb{C}^k existiert eine Abbildung $f : M \rightarrow G_k(\mathbb{C})$, sodass $E = f^* L_k(\mathbb{C})$ ist.

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel. Eine charakteristische Klasse χ ist definiert als eine Abbildung $\chi : E \mapsto \chi(E) \in H^*(M)$, sodass gilt:

$$\chi(f^*E) = f^*\chi(E) \quad (\text{Natürlichkeit}) \quad (11.44\text{a})$$

$$\chi(E) = \chi(E'), \quad \text{wenn } E \text{ äquivalent zu } E' \text{ ist.} \quad (11.44\text{b})$$

Die Abbildung f^* auf der linken Seite von (11.44a) ist ein Rücktransport des Bündels, während f^* auf der rechten Seite ein Rücktransport der Kohomologieklassen ist. Da die Homotopieklassen $[f]$ von $f : M \rightarrow G_k(\mathbb{C})$ den Rücktransport

$$f^* : H^*(G_k) \rightarrow H^*(M) \quad (11.45)$$

eindeutig definiert, erweist sich ein Element $\chi(E) = f^*\chi(G_k)$ als nützlich bei der Klassifikation von komplexen Vektorbündeln über M mit $\dim E = k$. Zu jeder Wahl von $\chi(G_k)$ gibt es eine charakteristische Klasse in E .

Die Chern-Klasse $c(E)$ kann man auch axiomatisch definieren:

$$(i) \quad c(f^*E) = f^*c(E) \quad (\text{Natürlichkeit}) \quad (11.46\text{a})$$

$$(ii) \quad c(E) = c_0(E) \oplus c_1(E) \oplus \cdots \oplus c_k(E) \\ c_i(E) \in H^{2i}(M); \quad c_i(E) = 0 \quad (i > k) \quad (11.46\text{b})$$

$$(iii) \quad c(E \oplus F) = c(E)c(F) \quad (\text{Whitney-Summe}) \quad (11.46\text{c})$$

$$(iv) \quad c(L) = 1 + x \quad (\text{Normierung}). \quad (11.46\text{d})$$

L ist dabei das kanonische Geradenbündel über $\mathbb{C}P^n$. Es lässt sich zeigen, dass diese Axiome die Chern-Klasse in (11.25) eindeutig definieren.

11.3 Chern-Charaktere

11.3.1 Definitionen

Von den charakteristischen Klassen haben die Chern-Charaktere eine besondere Bedeutung, da sie im Atiyah-Singer-Indexsatz erscheinen. Der **totale Chern-Charakter** ist definiert über

$$\text{ch}(\mathcal{F}) \equiv \text{sp exp}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) = \sum_{j=1} \frac{1}{j!} \text{sp}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)^j. \quad (11.47)$$

Der j -te **Chern-Charakter** $\text{ch}_j(\mathcal{F})$ ist

$$\text{ch}_j(\mathcal{F}) \equiv \frac{1}{j!} \text{sp}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)^j. \quad (11.48)$$

Wenn $2j > m = \dim M$ ist, verschwindet $\text{ch}_j(\mathcal{F})$. Daher ist $\text{ch}(\mathcal{F})$ ein Polynom endlichen Grades.

Lassen Sie uns \mathcal{F} diagonalisieren:

$$\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \rightarrow g^{-1} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right) g = A \equiv \text{diag}(x_1, \dots, x_k) \quad (g \in \text{GL}(k, \mathbb{C})).$$

Der totale Chern-Charakter lässt sich ausdrücken als

$$\text{sp}[\exp(A)] = \sum_{j=1}^k \exp(x_j). \quad (11.49)$$

Mit den elementaren symmetrischen Funktionen $S_r(x_j)$ wird der totale Chern-Charakter zu

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \exp(x_j) &= \sum_{j=1}^k \left(1 + x_j + \frac{1}{2!} x_j^2 + \frac{1}{3!} x_j^3 + \dots \right) \\ &= k + S_1(x_j) + \frac{1}{2!} [S_1(x_j)^2 - 2S_2(x_j)] + \dots \end{aligned} \quad (11.50)$$

Also kann man jeden Chern-Charakter in Abhängigkeit von den Chern-Klassen schreiben:

$$\text{ch}_0(\mathcal{F}) = k \quad (11.51a)$$

$$\text{ch}_1(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F}) \quad (11.51b)$$

$$\text{ch}_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} [c_1(\mathcal{F})^2 - 2c_2(\mathcal{F})] \quad (11.51c)$$

\vdots

Dabei ist k die Faserdimension des Bündels.

Beispiel 11.2. Sei P ein $U(1)$ -Bündel über der S^2 . Wenn \mathcal{A}_N und \mathcal{A}_S die lokale Zusammenhänge auf U_N und U_S sind (definiert wie in Abschnitt 10.5), ist die Feldstärke gegeben durch $\mathcal{F}_i = d\mathcal{A}_i$ ($i = N, S$). Es ist

$$\text{ch}(\mathcal{F}) = 1 + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}, \quad (11.52)$$

wobei wir beachten, dass $\mathcal{F}^n = 0$ ($n \geq 2$) auf S^2 ist. Dieses Bündel beschreibt den magnetischen Monopol. Die magnetische Ladung $2g$ aus Gleichung (10.94) ist eine ganze Zahl, die sich mit dem Chern-Charakter ausdrücken lässt als

$$N = \frac{i}{2\pi} \int_{S^2} \mathcal{F} = \int_{S^2} \text{ch}_1(\mathcal{F}). \quad (11.53)$$

Sei P ein $SU(2)$ -Bündel über S^4 . Die totale Chern-Klasse von P ist durch (11.27) gegeben. Der totale Chern-Charakter ist

$$\text{ch}(\mathcal{F}) = 2 + \text{sp} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right) + \frac{1}{2} \text{sp} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^2. \quad (11.54)$$

$\text{Ch}(\mathcal{F})$ bricht bei $\text{ch}_2(\mathcal{F})$ ab, wegen $\mathcal{F}^n = 0$ für $n \geq 3$. Darüber hinaus ist $\text{sp } \mathcal{F} = 0$ für $G = \text{SU}(2)$ und $n \geq 2$. Wie wir in Abschnitt 10.5 gesehen haben, ist die Instantonenzahl gegeben durch

$$\frac{1}{2} \int_{S^4} \text{sp} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^2 = \int_{S^4} \text{ch}_2(\mathcal{F}). \quad (11.55)$$

In beiden Fällen misst ch_j , wie stark das Bündel verdrillt wird, wenn lokale Stücke zusammengefügt werden. \diamond

Beispiel 11.3. Sei P ein $\text{U}(1)$ -Bündel über einer $2m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Der m -te Chern-Charakter ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \text{sp} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^m &= \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^m \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right]^m \\ &= \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{4\pi} \right)^m \mathcal{F}_{\mu_1\nu_1} \dots \mathcal{F}_{\mu_m\nu_m} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \wedge dx^{\nu_m} \\ &= \left(\frac{i}{4\pi} \right)^m \epsilon^{\mu_1\nu_1\dots\mu_m\nu_m} \mathcal{F}_{\mu_1\nu_1} \dots \mathcal{F}_{\mu_m\nu_m} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2m}, \end{aligned}$$

was die $\text{U}(1)$ -Anomalie im $2m$ -dimensionalen Raum beschreibt, siehe Kapitel 13. \diamond

Beispiel 11.4. Sei L ein komplexes Geradenbündel. Dann folgt

$$\text{ch}(L) = \text{sp} \exp \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right) = e^x = 1 + x \quad \left(x \equiv \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right). \quad (11.56)$$

Sei beispielsweise $L \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^1$ das kanonische Geradenbündel über $\mathbb{C}P^1 = S^2$. Die Fubini-Study-Metrik ergibt die Krümmung

$$\mathcal{F} = -\partial\bar{\partial} \ln(1 + |z|^2) = -\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}, \quad (11.57)$$

siehe Beispiel 8.8. In den reellen Koordinaten $z = x + iy = r \exp(i\theta)$ erhalten wir

$$\mathcal{F} = 2i \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 2i \frac{r dr \wedge d\theta}{(1 + r^2)^2}. \quad (11.58)$$

Aus $\text{ch}(\mathcal{F}) = 1 + \text{sp}(i\mathcal{F}/2\pi)$ ergibt sich

$$\text{ch}_1(\mathcal{F}) = -\frac{1}{\pi} \frac{r dr \wedge d\theta}{(1 + r^2)^2}, \quad (11.59)$$

und $\text{Ch}_1(L)$, das Integral von $\text{ch}_1(\mathcal{F})$ über S^2 , ist eine ganze Zahl:

$$\text{Ch}_1(L) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{r dr d\theta}{(1 + r^2)^2} = -\int_1^\infty t^{-2} dt = -1. \quad (11.60)$$

\diamond

11.3.2 Eigenschaften von Chern-Charakteren

Satz 11.5.

- (a) (Natürlichkeit) Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit $F = \mathbb{C}^k$. Sei $f : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Dann ist

$$\mathrm{ch}(f^*E) = f^*\mathrm{ch}(E). \quad (11.61)$$

- (b) Seien E und F Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M . Die Chern-Charaktere von $E \otimes F$ und $E \oplus F$ sind gegeben durch

$$\mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E) \wedge \mathrm{ch}(F) \quad (11.62a)$$

$$\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F). \quad (11.62b)$$

Beweis

- (a) folgt aus Satz 11.2(a).

(b) Diese Aussagen resultieren unmittelbar aus der Definition des ch-Polynoms. Sei

$$\mathrm{ch}(A) = \sum \frac{1}{j!} \mathrm{sp}\left(\frac{iA}{2\pi}\right)^j$$

ein Polynom einer Matrix A . Wir nehmen an, A sei ein Tensorprodukt der beiden Matrizen B und C : $A = B \otimes C = B \otimes I + I \otimes C$ (Beachten Sie, dass gilt: $\mathcal{F}_{E \otimes F} = \mathcal{F}_E \otimes I + I \otimes \mathcal{F}_F$). Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(B \otimes C) &= \sum_j \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \mathrm{sp}(B \otimes I + I \otimes C)^j \\ &= \sum_j \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \sum_{m=1}^j \binom{j}{m} \mathrm{sp}(B^m) \mathrm{sp}(C^{j-m}) \\ &= \sum_m \frac{1}{m!} \mathrm{sp}\left(\frac{iB}{2\pi}\right)^m \sum_n \frac{1}{n!} \mathrm{sp}\left(\frac{iC}{2\pi}\right)^n = \mathrm{ch}(B)\mathrm{ch}(C). \end{aligned}$$

Gleichung (11.62a) ist bewiesen, wenn B durch \mathcal{F}_E und C durch \mathcal{F}_F ersetzt wird.

Wenn A blockdiagonal ist,

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = B \oplus C,$$

ergibt sich

$$\mathrm{ch}(B \oplus C) = \sum_j \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \mathrm{sp}(B \oplus C)^j = \sum_j \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^j [\mathrm{sp}(B^j) + \mathrm{sp}(C^j)] = \mathrm{ch}(B) + \mathrm{ch}(C).$$

Diese Relation bleibt wahr, wenn wir A, B und C durch $\mathcal{F}_{E \oplus F}, \mathcal{F}_E$ bzw. \mathcal{F}_F ersetzen. \square

Schauen wir uns an, wie sich das Splitting-Prinzip auf diesen Fall anwenden lässt. Sei L_j ($1 \leq j \leq k$) ein komplexes Geradenbündel. Mit (11.62b) ergibt sich für $E = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$:

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}(L_1) + \mathrm{ch}(L_2) + \dots + \mathrm{ch}(L_k). \quad (11.63)$$

Wegen $\mathrm{ch}(L_i) = \exp(x_i)$ erhalten wir

$$\mathrm{ch}(E) = \prod_{j=1}^k \exp(x_j), \quad (11.64)$$

also einfach Gleichung (11.50). Daher entspricht der Chern-Charakter eines allgemeinen Vektorbündels E demjenigen einer Whitney-Summe von k komplexen Geradenbündeln. Die charakteristischen Klassen selbst können nicht zwischen zwei Vektorbündeln mit demselben Basisraum und derselben Faserdimension unterscheiden. Von Bedeutung ist nur ihr *Integral* über den Basisraum.

11.3.3 Todd-Klassen

Eine weitere nützliche, mit einem komplexen Vektorbündel assoziierte charakteristische Klasse ist die **Todd-Klasse**, definiert durch

$$\mathrm{Td}(\mathcal{F}) = \prod_j \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}}, \quad (11.65)$$

wobei das Splitting-Prinzip vorausgesetzt ist. Wir entwickeln $\mathrm{Td}(\mathcal{F})$ nach Potenzen von x_j und erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{Td}(\mathcal{F}) &= \prod_j \left(1 + \frac{1}{2}x_j + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} x_j^{2k} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_j x_j + \frac{1}{12} \sum_j x_j^2 + \frac{1}{4} \sum_{j < k} x_j x_k + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12} [c_1(\mathcal{F})^2 + c_2(\mathcal{F})] + \dots, \end{aligned} \quad (11.66)$$

mit den **Bernoulli-Zahlen** B_k :

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad \dots$$

Die ersten neuen Terme in (11.66) sind, wobei jeweils c_i für $c_i(\mathcal{F})$ stehen soll:

$$\mathrm{Td}_0(\mathcal{F}) = 1 \quad (11.67a)$$

$$\mathrm{Td}_1(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} c_1 \quad (11.67b)$$

$$\mathrm{Td}_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) \quad (11.67c)$$

$$\mathrm{Td}_3(\mathcal{F}) = \frac{1}{24} c_1 c_2 \quad (11.67d)$$

$$\mathrm{Td}_4(\mathcal{F}) = \frac{1}{720} (-c_1^4 + 4c_1^2 c_2 + 3c_2^2 + c_1 c_3 - c_4) \quad (11.67e)$$

$$\mathrm{Td}_5(\mathcal{F}) = \frac{1}{1440} (-c_1^3 c_2 + 3c_1 c_2^2 + c_1^2 c_3 - c_1 c_4). \quad (11.67f)$$

Übung 11.2 Seien E und F komplexe Vektorbündel über M . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{Td}(E \oplus F) = \mathrm{Td}(E) \wedge \mathrm{Td}(F). \quad (11.68)$$

11.4 Pontrjagin- und Euler-Klassen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit den charakteristischen Klassen beschäftigen, die mit einem reellen Vektorbündel assoziiert sind.

11.4.1 Pontrjagin-Klassen

Sei E ein reelles Vektorbündel über einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ($\dim_{\mathbb{R}} E = k$). Wenn E mit der Fasermetrik versehen ist, können wir bei jeder Faser orthonormale Rahmen einführen. Die Strukturgruppe lässt sich von $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ auf $\mathrm{O}(k)$ reduzieren. Da die Erzeuger von $\mathfrak{o}(k)$ schiefsymmetrisch sind, ist die Feldstärke \mathcal{F} von E ebenfalls schiefsymmetrisch. Eine schiefsymmetrische Matrix A kann zwar nicht durch ein Element einer Untergruppe von $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ diagonalisiert werden. Sie lässt sich aber auf Blockdiagonalform bringen:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & \\ & 0 & \lambda_2 & \\ & & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} i\lambda_1 & & & 0 \\ -i\lambda_1 & i\lambda_2 & & \\ & -i\lambda_2 & & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (11.69)$$

wobei die zweite Diagonalisierung nur durch ein Element von $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ erreicht werden kann. Wenn k ungerade ist, setzen wir das letzte Diagonalelement auf null. Beispielsweise ist der Erzeuger von $\mathfrak{o}(3) = \mathfrak{so}(3)$, welcher Rotationen um die z -Achse erzeugt, gegeben durch

$$T_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die **totale Pontrjagin-Klasse** ist durch

$$p(\mathcal{F}) \equiv \det \left(I + \frac{\mathcal{F}}{2\pi} \right) \quad (11.70)$$

definiert. Aus der Schiefsymmetrie, $\mathcal{F}^t = -\mathcal{F}$, folgt

$$\det \left(I + \frac{\mathcal{F}}{2\pi} \right) = \det \left(I + \frac{\mathcal{F}^t}{2\pi} \right) = \det \left(I - \frac{\mathcal{F}}{2\pi} \right).$$

Daher ist $p(\mathcal{F})$ eine *gerade* Funktion in \mathcal{F} . Die Entwicklung von $p(\mathcal{F})$ ist

$$p(\mathcal{F}) = 1 + p_1(\mathcal{F}) + p_2(\mathcal{F}) + \dots, \quad (11.71)$$

wobei $p_j(\mathcal{F})$ ein Polynom vom Grad $2j$ und ein Element von $H^{4j}(M; \mathbb{R})$ ist. Wir beachten, dass $p_j(\mathcal{F}) = 0$ entweder für $2j > k = \dim E$ oder für $4j > \dim M$ ist.⁶

Wir diagonalisieren $\mathcal{F}/2\pi$:

$$\frac{\mathcal{F}}{2\pi} \rightarrow A \equiv \begin{pmatrix} -ix_1 & & & \\ & ix_1 & 0 & \\ & & -ix_2 & \\ 0 & & ix_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (11.72)$$

mit $x_k \equiv -\lambda_k/2\pi$ und den λ_k als Eigenwerten von \mathcal{F} . Das Vorzeichen wurde so gewählt, um die hier definierte Euler-Klasse zu vereinfachen. Die erzeugende Funktion von $p(\mathcal{F})$ ist durch

$$p(\mathcal{F}) = \det(I + A) = \prod_{i=1}^{[k/2]} (1 + x_i^2) \quad (11.73)$$

gegeben, wobei gilt:

$$[k/2] \rightarrow \begin{cases} k/2, & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ (k-1)/2, & \text{wenn } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

In (11.73) tauchen nur *gerade* Potenzen auf, worin sich die Schiefsymmetrie wider spiegelt. Die einzelnen **Pontrjagin-Klassen** ergeben sich mit (11.73) zu

$$p_j(\mathcal{F}) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j}^{[k/2]} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_j}^2. \quad (11.74)$$

Um $p_j(\mathcal{F})$ in Abhängigkeit von der Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}/2\pi$ zu schreiben, beachten wir:

$$\mathrm{sp} \left(\frac{\mathcal{F}}{2\pi} \right)^{2j} = \mathrm{sp} A^{2j} = 2(-1)^j \sum_{i=1}^{[k/2]} x_i^{2j}.$$

⁶ Obwohl $p_m(\mathcal{F}) = 0$ ist, muss $p_m(B)$ für eine Matrix B nicht verschwinden. Wir werden p_m später bei der Definition der Euler-Klasse verwenden.

Damit ergibt sich

$$p_1(\mathcal{F}) = \sum_i x_i^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \text{sp } \mathcal{F}^2 \quad (11.75a)$$

$$p_2(\mathcal{F}) = \sum_{i < j} x_i^2 x_j^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_i x_i^2 \right)^2 - \sum_i x_i^4 \right] = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 [(\text{sp } \mathcal{F}^2)^2 - 2\text{sp } \mathcal{F}^4] \quad (11.75b)$$

$$p_3(\mathcal{F}) = \sum_{i < j < k} x_i^2 x_j^2 x_k^2 = \frac{1}{48} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^6 [-(\text{sp } \mathcal{F}^2)^3 + 6\text{sp } \mathcal{F}^2 \text{sp } \mathcal{F}^4 - 8\text{sp } \mathcal{F}^6] \quad (11.75c)$$

$$\begin{aligned} p_4(\mathcal{F}) = \sum_{i < j < k < l} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 &= \frac{1}{384} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^8 [(\text{sp } \mathcal{F}^2)^4 - 12(\text{sp } \mathcal{F}^2)^2 \text{sp } \mathcal{F}^4 + 32\text{sp } \mathcal{F}^2 \text{sp } \mathcal{F}^6 \\ &\quad + 12(\text{sp } \mathcal{F}^4)^2 - 48\text{sp } \mathcal{F}^8] \end{aligned} \quad (11.75d)$$

⋮

$$p_{[k/2]}(\mathcal{F}) = x_1^2 x_2^2 \dots x_{[k/2]}^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^k \det \mathcal{F}. \quad (11.75e)$$

Sie sollten sich davon überzeugen, dass gilt:

$$p(E \oplus F) = p(E) \wedge p(F). \quad (11.76)$$

Wie zu erwarten, lassen sich auch die Pontrjagin-Klassen in Abhängigkeit von den Chern-Klassen schreiben. Da Chern-Klassen nur für komplexe Vektorbündel definiert sind, müssen wir die Faser von E komplexifizieren, damit die komplexen Zahlen einen Sinn ergeben. Das resultierende Vektorbündel nennt man $E^{\mathbb{C}}$. Sei A eine schiefsymmetrische reelle Matrix. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \det(I + iA) &= \det \begin{pmatrix} 1+x_1 & & & 0 \\ & 1-x_1 & & \\ & & 1+x_2 & \\ 0 & & & 1-x_2 \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{[k/2]} (1-x_i^2) = 1 - p_1(A) + p_2(A) - \dots, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E^{\mathbb{C}}). \quad (11.77)$$

Beispiel 11.5. Sei M eine vierdimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Mit dem orthonormalen Rahmen $\{\hat{e}_\alpha\}$ kann die Strukturgruppe des Tangentialbündels TM auf die $O(4)$ reduziert werden. Sei $\mathcal{R} = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ die Krümmungs-2-Form.⁷

⁷ Verwechseln Sie \mathcal{R} nicht mit der skalaren Krümmung!

Es ist üblich, für das Tangentialbündel $p(M)$ anstelle von $p(\mathcal{R})$ zu schreiben. Dann ergibt sich

$$\det\left(I + \frac{\mathcal{R}}{2\pi}\right) = 1 - \frac{1}{8\pi^2} \text{sp} \mathcal{R}^2 + \frac{1}{128\pi^4} [(\text{sp} \mathcal{R}^2)^2 - 2\text{sp} \mathcal{R}^4]. \quad (11.78)$$

Die **Pontrjagin-Klassen** sind durch

$$p_0(M) = 1 \quad (11.79a)$$

$$p_1(M) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{sp} \mathcal{R}^2 = -\frac{1}{8\pi^2} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{R}^{\alpha\beta} \quad (11.79b)$$

$$p_2(M) = \frac{1}{128\pi^4} [(\text{sp} \mathcal{R}^2)^2 - 2\text{sp} \mathcal{R}^4] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \det \mathcal{R} \quad (11.79c)$$

gegeben. Obwohl $p_2(M)$ als eine Differentialform verschwindet, brauchen wir sie im nächsten Unterabschnitt, um die Euler-Klasse auszurechnen. \diamond

11.4.2 Euler-Klassen

Seien M eine $2l$ -dimensionale orientierbare Riemann'sche Mannigfaltigkeit und TM das Tangentialbündel von M . Wir bezeichnen die Krümmung mit \mathcal{R} . Es ist immer möglich, durch Verwendung eines orthonormalen Rahmens die Strukturgruppe von TM auf die $\text{SO}(2l)$ zu reduzieren. Die **Euler-Klasse** e von M ist definiert als die Quadratwurzel der $4l$ -Form p_l :

$$e(A)e(A) = p_l(A). \quad (11.80)$$

Beide Seiten sind als Funktionen einer $(2l \times 2l)$ -Matrix A zu verstehen und nicht der Krümmung \mathcal{R} , da $p_l(\mathcal{R})$ identisch verschwindet. Es ist jedoch $e(M) \equiv e(\mathcal{R})$ mit der angegebenen Definition eine $2l$ -Form und liefert in der Tat ein Volumenelement von M . Wenn M eine Mannigfaltigkeit mit ungerader Dimension ist, definieren wir $e(M) = 0$, siehe unten.

Beispiel 11.6. Sei $M = S^2$ und betrachten wir das Tangentialbündel TS^2 . Aus Beispiel 7.14 erhalten wir die Krümmungs-2-Form

$$\mathcal{R}_{\theta\phi} = -\mathcal{R}_{\phi\theta} = \sin^2 \theta \frac{d\theta \wedge d\phi}{\sin \theta} = \sin \theta d\theta \wedge d\phi,$$

wobei wir beachtet haben, dass $g_{\theta\theta} = \sin^2 \theta$ ist. Obwohl $p_1(S^2) = 0$ eine Differentialform ist, berechnen wir sie, um auf die Euler-Form zu kommen. Das ergibt

$$p_1(S^2) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{sp} \mathcal{R}^2 = -\frac{1}{8\pi^2} [\mathcal{R}_{\theta\phi} \mathcal{R}_{\phi\theta} + \mathcal{R}_{\phi\theta} \mathcal{R}_{\theta\phi}] = \left(\frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi\right)^2,$$

woraus wir ablesen:

$$e(S^2) = \frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi. \quad (11.81)$$

Interessanterweise ist

$$\int_{S^2} e(S^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = 2, \quad (11.82)$$

was die Euler-Charakteristik der S^2 darstellt, siehe Abschnitt 2.4. Dies ist kein Zufall. Betrachten wir als ein weiteres erhellendes Beispiel einen Torus T^2 . Da der T^2 einen flachen Zusammenhang zulässt, verschwindet die Krümmung identisch. Hieraus folgen $e(T^2) \equiv 0$ und $\chi(T^2) = 0$. Dies sind Spezialfälle des **Satzes von Gauß-Bonnet**,

$$\int_M e(M) = \chi(M), \quad (11.83)$$

für eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit M . Wenn M eine ungerade Dimension hat, verschwindet sowohl e also auch χ , siehe (6.39). \diamond

Im Allgemeinen ist die Determinante einer schiefsymmetrischen $(2l \times 2l)$ -Matrix A das Quadrat eines Polynoms, welches **Pfaff'sche Determinante**⁸ $\text{Pf}(A)$ genannt wird:

$$\det A = \text{Pf}(A)^2. \quad (11.84)$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Pfaff'sche Determinante durch

$$\text{Pf}(A) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sum_P \text{sgn}(P) A_{P(1)P(2)} A_{P(3)P(4)} \dots A_{P(2l-1)P(2l)} \quad (11.85)$$

gegeben ist, wobei die Wahl der Phase weiter unten klar werden wird. Wir bemerken zuerst, dass eine schiefsymmetrische Matrix A durch ein Element von $O(2l)$ in Blockdiagonalform gebracht werden kann:

$$S^t A S = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & \\ & & -\lambda_2 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 & \lambda_l \\ & & & & -\lambda_l & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.86)$$

Es ist leicht zu sehen, dass gilt:

$$\det A = \det \Lambda = \prod_{i=1}^l \lambda_i^2.$$

⁸ Siehe Behauptung 1.3. Die Definition hier unterscheidet sich in der Phase von jener in Abschnitt 1.5. Es stellt sich heraus, dass diese Phasenkonvention für die Definition der Euler-Klasse geschickter ist.

Um $\text{Pf}(\Lambda)$ auszurechnen, beachten wir, dass die nichtverschwindenden Terme in (11.85) von der Form $A_{12}A_{34}\dots A_{2l-1,2l}$ sind. Darüber hinaus gibt es 2^l Möglichkeiten, die Indizes wie $A_{ij} \rightarrow A_{ji}$ zu tauschen, etwa

$$A_{12}A_{34}\dots A_{2l-1,2l} \rightarrow A_{21}A_{34}\dots A_{2l-1,2l},$$

und $l!$ Permutationen von Paaren von Indizes, z. B.

$$A_{12}A_{34}\dots A_{2l-1,2l} \rightarrow A_{34}A_{12}\dots A_{2l-1,2l}.$$

Daher erhalten wir

$$\text{Pf}(\Lambda) = (-1)^l A_{12}A_{34}\dots A_{2l-1,2l} = (-1)^l \prod_{i=1}^l \lambda_i.$$

Somit können wir schließen, dass für eine Blockdiagonalmatrix Λ

$$\det \Lambda = \text{Pf}(\Lambda)^2$$

ist. Um zu zeigen, dass (11.84) für beliebige schiefsymmetrische Matrizen gilt (und nicht bloß für Blockdiagonalmatrizen), verwenden wir das folgende Lemma⁹:

$$\text{Pf}(X^t AX) = \text{Pf}(A) \det X. \quad (11.87)$$

Ist $S^t AS = \Lambda$ für $S \in O(2l)$, so ergibt sich $A = S\Lambda S^t$ und daher

$$\text{Pf}(S\Lambda S^t) = \text{Pf}(\Lambda) \det S = (-1)^l \prod_{i=1}^l \lambda_i \det S.$$

Schließlich erhalten wir $\det A = \text{Pf}(A)^2$ für eine beliebige schiefsymmetrische Matrix A .

Beachten Sie, dass $\text{Pf}(A)$ zwar $SO(2l)$ -invariant ist, aber ihr Vorzeichen unter einer uneigentlichen Rotation S aus $O(2l)$ mit $\det S = -1$ wechselt.

Übung 11.3 Zeigen Sie, dass die Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix mit ungerader Dimension verschwindet. Dies ist der Grund dafür, dass wir für ungeradimensionale Mannigfaltigkeiten $e(M) = 0$ gesetzt haben.

Wir definieren die **Euler-Klasse** in Abhängigkeit von der Krümmung \mathcal{R} als

$$\begin{aligned} e(M) &= \text{Pf}(\mathcal{R}/2\pi) \\ &= \frac{(-1)^l}{(4\pi)^l l!} \sum_P \text{sgn}(P) \mathcal{R}_{P(1)P(2)} \dots \mathcal{R}_{P(2l-1)P(2l)}. \end{aligned} \quad (11.88)$$

⁹ Weil $\det(X^t AX) = (\det X)^2 \det A$ ist, gilt $\text{Pf}(X^t AX) = \pm \text{Pf}(A) \det X$. Hier sollte das Pluszeichen gewählt werden, da $\text{Pf}(I^t AI) = \text{Pf}(A)$ ist.

Die erzeugende Funktion erhält man, wenn man $x_j = -\lambda_i/2\pi$ setzt:

$$e(x) = x_1 x_2 \dots x_l = \prod_{i=1}^l x_i. \quad (11.89)$$

Die Phase $(-1)^l$ wurde gewählt, um die rechte Seite zu vereinfachen.

Beispiel 11.7. Sei M eine vierdimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit. Die Strukturgruppe von TM ist die $\mathrm{SO}(4)$, siehe Beispiel 11.5. Die Euler-Klasse erhalten wir aus (11.88) als

$$e(M) = \frac{1}{2(4\pi)^2} \epsilon^{ijkl} \mathcal{R}_{ij} \wedge \mathcal{R}_{kl}, \quad (11.90)$$

in Einklang mit dem Ergebnis von Beispiel 11.5. Die relevante Pontrjagin-Klasse ist

$$p_2(M) = \frac{1}{128\pi^4} [(\mathrm{sp}\mathcal{R}^2)^2 - 2\mathrm{sp}\mathcal{R}^4] = x_1^2 x_2^2.$$

Wegen $e(M) = x_1 x_2$ gilt $p_2(M) = e(M) \wedge e(M)$. Dies kann man auch als Matrixidentität schreiben:

$$\frac{1}{128\pi^4} [(\mathrm{sp}A^2)^2 - 2\mathrm{sp}A^4] = \left(\frac{1}{2(4\pi)^4} \epsilon^{ijkl} A_{ij} A_{kl} \right)^2.$$

◊

11.4.3 Hirzebruch'sches L-Polynom und \hat{A} -Geschlecht

Das **Hirzebruch'sche L-Polynom** ist definiert als

$$\begin{aligned} L(x) &= \prod_{j=1}^k \frac{x_j}{\tanh x_j} \\ &= \prod_{j=1}^k \left(1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_n x_j^{2n} \right), \end{aligned} \quad (11.91)$$

wobei die B_n die Bernoulli-Zahlen sind, siehe (11.66). Die Funktion $L(x)$ ist gerade in x_j und lässt sich durch die Pontrjagin-Klassen ausdrücken:

$$L(\mathcal{F}) = 1 + \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{45} (-p_1^2 + 7p_2) + \frac{1}{945} (2p_1^3 - 13p_1 p_2 + 62p_3) + \dots, \quad (11.92)$$

dabei steht p_j für $p_j(\mathcal{F})$. Mit dem Splitting-Prinzip gilt

$$L(E \oplus F) = L(E) \wedge L(F). \quad (11.93)$$

Das \hat{A} -**Geschlecht** („A-Dach-Geschlecht“) $\hat{A}(\mathcal{F})$ ist als

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathcal{F}) &= \prod_{j=1}^k \frac{x_j/2}{\sinh(x_j/2)} \\ &= \prod_{j=1}^k \left(1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(2^{2n}-2)}{(2n)!} B_n x_j^{2n} \right). \end{aligned} \quad (11.94)$$

definiert. In der Physik wird \hat{A} auch **Dirac-Geschlecht** genannt. Es ist eine gerade Funktion von x_j und kann nach den p_j entwickelt werden. Darüber hinaus ist

$$\hat{A}(E \oplus F) = \hat{A}(E) \wedge \hat{A}(F). \quad (11.95)$$

\hat{A} lässt sich in Abhängigkeit von den Pontrjagin-Klassen folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathcal{F}) &= 1 - \frac{1}{24}p_1 + \frac{1}{5760}(7p_1^2 - 4p_2) \\ &+ \frac{1}{967680}(-31p_1^3 + 44p_1p_2 - 16p_3) + \dots \end{aligned} \quad (11.96)$$

Beispiel 11.8. Sei M eine kompakte zusammenhängende und orientierbare vierdimensionale Mannigfaltigkeit. Betrachten wir die symmetrische Bilinearform $\sigma : H^2(M; \mathbb{R}) \times H^2(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\sigma([\alpha], [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta. \quad (11.97)$$

σ ist eine symmetrische $(b^2 \times b^2)$ -Matrix, wobei $b^2 = \dim H^2(M; \mathbb{R})$ die Betti-Zahl ist. Offensichtlich ist σ nichtentartet, da $\sigma([\alpha], [\beta]) = 0$ für beliebige $[\alpha] \in H^2(M; \mathbb{R})$ impliziert, dass $[\beta] = 0$. Sei p (q) die Zahl der positiven (negativen) Eigenwerte von σ . Die **Hirzebruch-Signatur** von M ist

$$\tau(M) \equiv p - q. \quad (11.98)$$

Nach dem **Signatursatz von Hirzebruch** (siehe Abschnitt 12.5), erhält man diese Zahl in Abhängigkeit vom L -Polynom als

$$\tau(M) = \int_M L_1(M) = \frac{1}{3} \int_M p_1(M). \quad (11.99)$$

◊

11.5 Chern-Simons-Formen

11.5.1 Definition

Sei $P_j(\mathcal{F})$ eine beliebige charakteristische Klasse von $2j$ -Formen. Da $P_j(\mathcal{F})$ geschlossen ist, kann sie mithilfe des Poincaré-Lemmas lokal als eine exakte Form ausgedrückt werden. Lassen Sie uns

$$P_j(\mathcal{F}) = dQ_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \quad (11.100)$$

schreiben, wobei $Q_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^{2j-1}(M)$ ist.¹⁰ Die $(2j-1)$ -Form $Q_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ heißt **Chern-Simons-Form** von $P_j(\mathcal{F})$. Aus dem Beweis von Satz 11.2(b) stellen wir fest, dass Q durch die Transgression von P_j gegeben ist:

$$Q_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = TP_j(\mathcal{A}, 0) = j \int_0^1 \tilde{P}_j(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) dt. \quad (11.101)$$

Dabei ist \tilde{P}_j die Polarisierung von P_j ; es gilt $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2$, und wir setzen $\mathcal{A}' = \mathcal{F}' = 0$. Da Q_{2j-1} von \mathcal{F} und \mathcal{A} abhängt, führen wir die \mathcal{A} -Abhängigkeit explizit an. Natürlich kann man \mathcal{A}' nur auf einer lokalen Karte gleich null setzen, über welcher das Bündel trivial ist.

Sei M eine geraddimensionale Mannigfaltigkeit ($\dim M = m = 2l$), sodass $\partial M \neq \emptyset$ ist. Dann folgt aus dem Stokes'schen Satz

$$\int_M P_l(\mathcal{F}) = \int_M dQ_{m-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \int_{\partial M} Q_{m-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}). \quad (11.102)$$

Die linke Seite der Gleichung nimmt ganze Zahlen als Werte an, ebenso die rechte Seite. Daher ist Q_{m-1} selbst eine charakteristische Klasse, und sie beschreibt die Topologie des Rands ∂M .

11.5.2 Die Chern-Simons-Form des Chern-Charakters

Als ein Beispiel wollen wir die Chern-Simons-Form eines Chern-Charakters $\text{ch}_j(\mathcal{F})$ herausarbeiten. Der Zusammenhang \mathcal{A}_t , der zwischen 0 und \mathcal{A} interpoliert, ist

$$\mathcal{A}_t = t\mathcal{A}, \quad (11.103)$$

und die zugehörige Krümmung ist

$$\mathcal{F}_t = t d\mathcal{A} + t^2 \mathcal{A}^2 = t\mathcal{F} + (t^2 - t)\mathcal{A}^2. \quad (11.104)$$

Mit (11.21) erhalten wir

$$Q_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \int_0^1 dt \text{ssp}(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t^{j-1}). \quad (11.105)$$

¹⁰ Achtung: Dies kann nicht global gelten. Wäre global $P_j = dQ_{2j-1}$ auf einer Mannigfaltigkeit M ohne Rand, dann gäbe mit $m = \dim M$:

$$\int_M P_{m/2} = \int_M dQ_{m-1} = \int_{\partial M} Q_{m-1} = 0.$$

Beispielsweise gilt

$$Q_1(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \frac{i}{2\pi} \int_0^1 dt \operatorname{sp} \mathcal{A} = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sp} \mathcal{A} \quad (11.106a)$$

$$\begin{aligned} Q_3(\mathcal{A}, \mathcal{F}) &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 dt \operatorname{ssp}(\mathcal{A}, t d\mathcal{A} + t^2 \mathcal{A}^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \operatorname{sp} \left(\mathcal{A} d\mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A}^3 \right) \end{aligned} \quad (11.106b)$$

$$\begin{aligned} Q_5(\mathcal{A}, \mathcal{F}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^3 \int_0^1 dt \operatorname{ssp}[\mathcal{A}, (t d\mathcal{A} + t^2 \mathcal{A}^2)^2] \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^3 \operatorname{sp} \left[\mathcal{A} (d\mathcal{A})^2 + \frac{3}{2} \mathcal{A}^3 d\mathcal{A} + \frac{3}{5} \mathcal{A}^5 \right]. \end{aligned} \quad (11.106c)$$

Übung 11.4 Sei \mathcal{F} die Feldstärke der SU(2)-Eichtheorie. Schreiben Sie den Komponentenausdruck der Identität $\operatorname{ch}_2(\mathcal{F}) = dQ_3(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ auf, um zu bestätigen, dass gilt (vgl. Lemma 10.3):

$$\operatorname{sp}[\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \mathcal{F}_{\kappa\lambda} \mathcal{F}_{\mu\nu}] = \partial_\kappa [2\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \operatorname{sp}(\mathcal{A}_\lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{2}{3} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu)]. \quad (11.107)$$

11.5.3 Der Cartan'sche Homotopieoperator und Anwendungen

Für spätere Zwecke definieren wir die Cartan'sche Homotopieformel, wobei wir uns an Zumino (1985) sowie Alvarez-Gaumé und Ginsparg (1985) orientieren. Seien wie gehabt

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_0 + t(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_t = d\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t^2. \quad (11.108)$$

Wir definieren einen Operator l_t durch

$$l_t \mathcal{A}_t = 0, \quad l_t \mathcal{F}_t = \delta t (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0). \quad (11.109)$$

Wir verlangen, dass l_t eine Stammfunktion ist,

$$l_t(\eta_p \omega_q) = (l_t \eta_p) \omega_q + (-1)^p \eta_p (l_t \omega_q), \quad (11.110)$$

für $\eta_p \in \Omega^p(M)$ und $\omega_q \in \Omega^q(M)$. Wir bestätigen, dass gilt:

$$(dl_t + l_t d)\mathcal{A}_t = l_t(\mathcal{F}_t - \mathcal{A}_t^2) = \delta t (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) = \delta t \frac{\partial \mathcal{A}_t}{\partial t}$$

und

$$\begin{aligned} (dl_t + l_t d)\mathcal{F}_t &= d[\delta t (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0)] + l_t [\mathcal{D}_t \mathcal{F}_t - \mathcal{A}_t \mathcal{F}_t + \mathcal{F}_t \mathcal{A}_t] \\ &= \delta t [d(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) + \mathcal{A}_t (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) + (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) \mathcal{A}_t] \\ &= \delta t \mathcal{D}_t (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) = \delta t \frac{\partial \mathcal{F}_t}{\partial t}, \end{aligned}$$

wobei wir die Bianchi-Identität $\mathcal{D}_t \mathcal{F}_t = 0$ verwendet haben. Dies zeigt, dass wir für jedes Polynom $S(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ von \mathcal{A} und \mathcal{F} die Beziehung

$$(dl_t + l_t d)S(\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t) = \delta t \frac{\partial}{\partial t} S(\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t) \quad (11.111)$$

erhalten. Auf der rechten Seite der Gleichung sollte S ein Polynom *nur* von \mathcal{A} und \mathcal{F} und nicht von $d\mathcal{A}$ oder $d\mathcal{F}$ sein: Wenn S diese enthält, sollte $d\mathcal{A}$ durch $\mathcal{F} - \mathcal{A}^2$ und $d\mathcal{F}$ durch $\mathcal{D}\mathcal{F} - [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = -[\mathcal{A}, \mathcal{F}]$ ersetzt werden. Integration von (11.111) über $[0, 1]$ ergibt die **Cartan'sche Homotopieformel**:

$$S(\mathcal{A}_1, \mathcal{F}_1) - S(\mathcal{A}_0, \mathcal{F}_0) = (dk_{01} + k_{01}d)S(\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t), \quad (11.112)$$

dabei ist der **Homotopieoperator** k_{01} über

$$k_{01}S(\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t) \equiv \int_0^1 \delta t \, l_t S(\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t) \quad (11.113)$$

definiert. Um k_{01} auf $S(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ anzuwenden, ersetzen wir zunächst \mathcal{A} und \mathcal{F} durch \mathcal{A}_t bzw. \mathcal{F}_t . Dann wenden wir l_t auf $S(\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t)$ an und integrieren über t .

Beispiel 11.9. Lassen Sie uns die Chern-Simons-Form des Chern-Charakters mit der Homotopieformel ausrechnen. Seien $S(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \text{ch}_{j+1}(\mathcal{F})$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0 = 0$. Wegen $d\text{ch}_{j+1}(\mathcal{F}) = 0$ gilt

$$\text{ch}_{j+1}(\mathcal{F}) = (dk_{01} + k_{01}d)\text{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t) = d[k_{01}\text{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t)].$$

Somit wird $k_{01}\text{ch}_{j+1}(\mathcal{F})$ mit der Chern-Simons-Form $Q_{2j+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ identifiziert, und wir erhalten

$$\begin{aligned} k_{01}\text{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t) &= \frac{1}{(j+1)!} k_{01} \text{sp} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^{j+1} \\ &= \frac{1}{(j+1)!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{j+1} \int_0^1 \delta t \, l_t \text{sp}(\mathcal{F}_t^{j+1}) \\ &= \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{j+1} \int_0^1 \delta t \, \text{ssp}(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t^j), \end{aligned} \quad (11.114)$$

in Übereinstimmung mit (11.105). \diamond

Obwohl eine charakteristische Klasse eichinvariant ist, muss dies nicht unbedingt auch für eine Chern-Simons-Form gelten. Als Anwendung der Cartan'schen Homotopieformel berechnen wir, wie sich $Q_{2j+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ unter der Transformation

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^g = g^{-1}(\mathcal{A} + d)g$, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^g = g^{-1}\mathcal{F}g$ ändert. Wir betrachten die interpolierenden Familien \mathcal{A}_t^g und \mathcal{F}_t^g , definiert gemäß

$$\mathcal{A}_t^g \equiv tg^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}dg \quad (11.115a)$$

$$\mathcal{F}_t^g \equiv d\mathcal{A}_t^g + (\mathcal{A}_t^g)^2 = g^{-1}\mathcal{F}_tg, \quad (11.115b)$$

mit $\mathcal{F}_t \equiv t\mathcal{F} + (t^2 - t)\mathcal{A}^2$. Beachten Sie, dass $\mathcal{A}_0^g = g^{-1}dg$, $\mathcal{A}_1^g = \mathcal{A}^g$, $\mathcal{F}_0^g = 0$ und $\mathcal{F}_1^g = \mathcal{F}^g$. Gleichung (11.112) führt auf

$$Q_{2j+1}(\mathcal{A}^g, \mathcal{F}^g) - Q_{2j+1}(g^{-1}dg, 0) = (dk_{01} + k_{01}d)Q_{2j+1}(\mathcal{A}_t^g, \mathcal{F}_t^g). \quad (11.116)$$

Sei z. B. Q_{2j+1} die Chern-Simons-Form des Chern-Charakters $\text{ch}_{j+1}(\mathcal{F})$. Wegen $dQ_{2j+1}(\mathcal{A}_t^g, \mathcal{F}_t^g) = \text{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t^g) = \text{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t)$ ergibt sich

$$k_{01}dQ_{2j+1}(\mathcal{A}_t^g, \mathcal{F}_t^g) = k_{01}\text{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t^g) = k_{01}\text{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t) = Q_{2j+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}), \quad (11.117)$$

wobei das Ergebnis von Beispiel 11.9 verwendet wurde, um das letzte Gleichheitszeichen zu erhalten. Wenn wir die Resultate zusammenfassen, können wir (11.116) als

$$Q_{2j+1}(\mathcal{A}^g, \mathcal{F}^g) - Q_{2j+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = Q_{2j+1}(g^{-1}dg, 0) + d\alpha_{2j} \quad (11.118)$$

schreiben, mit einer $2j$ -Form α_{2j} , definiert durch:

$$\alpha_{2j}(\mathcal{A}, \mathcal{F}, v) \equiv k_{01}Q_{2j+1}(\mathcal{A}_t^g, \mathcal{F}_t^g) = k_{01}Q_{2j+1}(\mathcal{A}_t + v, \mathcal{F}_t) \quad (11.119)$$

und $v \equiv dg \cdot g^{-1}$ (beachten Sie, dass $Q_{2j+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = Q_{2j+1}(g\mathcal{A}g^{-1}, g\mathcal{F}g^{-1})$ ist). Der erste Term auf der rechten Seite von (11.118) ist

$$\begin{aligned} Q_{2j+1}(g^{-1}dg, 0) &= \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{j+1} \int_0^1 \delta t \text{spsp}[g^{-1}dg \{(t^2 - t)(g^{-1}dg)^2\}^j] \\ &= \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{j+1} \text{sp}[(g^{-1}dg)^{2j+1}] \int_0^1 \delta t (t^2 - t)^j \\ &= (-1)^j \frac{j!}{(2j+1)!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{j+1} \text{sp}[(g^{-1}dg)^{2j+1}], \end{aligned} \quad (11.120)$$

wobei wir beachtet haben, dass gilt: $\mathcal{F}_t = (t^2 - t)(g^{-1}dg)^2$ und

$$\int_0^1 \delta t (t^2 - t)^j = (-1)^j B(j+1, j+1) = (-1)^j \frac{(j!)^2}{(2j+1)!},$$

mit der Beta-Funktion B . Die $(2j+1)$ -Form $Q_{2j+1}(gdg, 0)$ ist geschlossen und daher lokal exakt: $dQ_{2j+1}(g^{-1}dg, 0) = \text{ch}_{j+1}(0) = 0$.

Für α_{2j} erhalten wir z. B.

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 l_t \text{sp}[(\mathcal{A}_t + v)\mathcal{F}_t - \frac{1}{3}(\mathcal{A}_t + v)^3] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 \delta t \text{sp}(-t\mathcal{A}^2 - v\mathcal{A}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \text{sp}(v\mathcal{A});\end{aligned}\tag{11.121}$$

dabei haben wir berücksichtigt, dass gilt:

$$\text{sp}\mathcal{A}^2 = dx^\mu \wedge dx^\nu \text{sp}(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu) = -dx^\nu \wedge dx^\mu \text{sp}(\mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu) = 0.$$

Beispiel 11.10. In der dreidimensionalen Raumzeit kann eine Eichtheorie einen eichinvarianten Massenterm haben, der durch die Chern-Simons-3-Form gegeben ist (Jackiw und Templeton 1981, Deser *et al.* 1982a, b). Da die Chern-Simons-Form sich unter einer Eichtransformation um eine lokal exakte Form ändert, bleibt die Wirkung invariant. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die U(1)-Eichtheorie. Wir betrachten die Lagrange-Funktion (wobei wir $\mathcal{A} = iA$ und $\mathcal{F} = iF$ setzen):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}m\epsilon^{\lambda\mu\nu}F_{\lambda\mu}A_\nu,\tag{11.122}$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Beachten Sie, dass der zweite Term (bis auf einen konstanten Faktor) die Chern-Simons-Form des zweiten Chern-Charakters F^2 des U(1)-Bündels ist. Die Feldgleichung lautet

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m * F^\nu = 0,\tag{11.123}$$

mit

$$*F^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}, \quad F^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\lambda}*F_\lambda.$$

Die Bianchi-Identität

$$\partial_\mu *F^\mu = 0\tag{11.124}$$

folgt aus (11.123) als eine Konsequenz der Schiefsymmetrie von $F^{\mu\nu}$. Man überprüft leicht, dass die Feldgleichung invariant unter einer Eichtransformation ist,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta,\tag{11.125}$$

während sich die Lagrange-Funktion um eine totale Ableitung ändert:

$$\mathcal{L} \rightarrow -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}m\epsilon^{\lambda\mu\nu}F_{\lambda\mu}(A_\nu + \partial_\nu \theta) = \mathcal{L} + \frac{1}{2}m\partial_\nu(*F^\nu \theta).\tag{11.126}$$

Gleichung (11.106b) zeigt, dass der letzte Term auf der rechten Seite mit

$$Q_3(A^\theta, F^\theta) - Q_3(A, F) \sim (A + d\theta)dA - A dA \sim d(\theta dA)$$

identifiziert werden kann. Wenn wir annehmen, dass F auf große Raumzeitabstände abfällt, trägt dieser Term nicht zur Wirkung bei:

$$\int d^3x \mathcal{L} \rightarrow \int d^3x \mathcal{L} + \frac{m}{2} \int d^3x \partial_\nu (*F^\nu \theta) = \int d^3x \mathcal{L}. \quad (11.127)$$

Jetzt zeigen wir noch, dass (11.122) ein *massives* Feld beschreibt. Als erstes schreiben wir (11.123) als

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\mu *F_\alpha = -m *F^\nu.$$

Multiplikation mit $\epsilon_{\kappa\lambda\nu}$ auf beiden Seiten ergibt

$$\partial_\lambda *F_\kappa - \partial_\kappa *F_\lambda = -m F_{\kappa\lambda}.$$

Wir bilden die ∂^λ -Ableitung und verwenden (11.124), um zu erhalten:

$$(\partial^\lambda \partial_\lambda + m^2) *F_\kappa = 0. \quad (11.128)$$

Dies zeigt, dass $*F_\kappa$ ein massives Vektorfeld der Masse m ist. \diamond

11.6 Stiefel-Whitney-Klassen

Das letzte Beispiel einer charakteristischen Klasse ist die Stiefel-Whitney-Klasse. Im Gegensatz zu den übrigen charakteristischen Klassen lässt sich die Stiefel-Whitney-Klasse nicht in Abhängigkeit von der Krümmung des Bündels ausdrücken. Die Stiefel-Whitney-Klasse ist wichtig für die Physik, da sie uns sagt, ob eine Mannigfaltigkeit einen Spin zulässt oder nicht. Beginnen wir mit einer kurzen Rückschau auf Spinbündel.

11.6.1 Spinbündel

Sei $TM \xrightarrow{\pi} M$ ein Tangentialbündel mit $\dim M = m$. Das Bündel TM möge eine Fasermetrik haben, und die Strukturgruppe G sei die $O(m)$. Wenn außerdem M orientierbar ist, kann man G auf die $SO(m)$ herunterreduzieren. Seien LM das mit TM assoziierte Rahmenbündel und t_{ij} die Übergangsfunktion von LM , welche die Konsistenzbedingung (9.6) erfüllt:

$$t_{ij} t_{jk} t_{ki} = I, \quad t_{ii} = I.$$

Die Übergangsfunktion $\tilde{t}_{ij} \in \text{Spin}(m)$ definiert eine Spinstruktur auf M , sodass gilt:

$$\varphi(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij}, \quad \tilde{t}_{ij} \tilde{t}_{jk} \tilde{t}_{ki} = I, \quad \tilde{t}_{ii} = I, \quad (11.129)$$

wobei φ die zweifache Überlagerung $\text{Spin}(m) \rightarrow SO(m)$ ist. Die Menge der \tilde{t}_{ij} definiert ein **Spinbündel** $PS(M)$ über M , und man sagt, M lasse eine **Spinstruktur** zu (natürlich kann M viele verschiedene Spinstrukturen zulassen, je nach Wahl von \tilde{t}_{ij}).

Interessanterweise lassen nicht alle Mannigfaltigkeiten Spinstrukturen zu. Die „Nichtzulässigkeit“ von Spinstrukturen wird durch die zweite Stiefel-Whitney-Klasse gemessen, welche ihre Werte in der Čech-Kohomologiegruppe $H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ annimmt.

11.6.2 Čech-Kohomologiegruppen

Sei \mathbb{Z}_2 die multiplikative Gruppe $\{-1, +1\}$. Unter einer **Čech- r -Kokette** versteht man eine auf $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r} \neq \emptyset$ definierte Funktion $f(i_0, i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{Z}_2$, welche unter einer beliebigen Permutation P total symmetrisch ist:

$$f(i_{P(0)}, \dots, i_{P(r)}) = f(i_0, \dots, i_r).$$

Sei $C^r(M; \mathbb{Z}_2)$ die multiplikative Gruppe der Čech- r -Koketten. Wir definieren den Korandoperator $\delta : C^r(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C^{r+1}(M; \mathbb{Z}_2)$ über

$$(\delta f)(i_0, \dots, i_{r+1}) = \prod_{j=0}^{r+1} f(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{r+1}), \quad (11.130)$$

wobei die Variable unter dem „ $\hat{\cdot}$ “ weggelassen wurde. Beispielsweise sind

$$(\delta f_0)(i_0, i_1) = f_0(i_1)f_0(i_0) \quad (f_0 \in C^0(M; \mathbb{Z}_2)),$$

$$(\delta f_1)(i_0, i_1, i_2) = f_1(i_1, i_2)f_1(i_0, i_2)f_1(i_0, i_1) \quad (f_1 \in C^1(M; \mathbb{Z}_2)).$$

Da wir uns der multiplikativen Notation bedienen, bezeichnen wir das neutrale Element der Gruppe $C^r(M; \mathbb{Z}_2)$ mit 1. Wir bestätigen, dass δ nilpotent ist:

$$(\delta^2 f)(i_0, \dots, i_{r+2}) = \prod_{j,k=1}^{r+1} f(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{r+2}) = 1,$$

da die -1 immer eine gerade Anzahl von Malen im mittleren Ausdruck erscheint (es ist beispielsweise, wegen $f(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{r+2}) = -1$ und weil f symmetrisch ist: $f(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{r+2}) = -1$). Damit haben wir gezeigt, dass für eine beliebige Čech- r -Kokette f

$$\delta^2 f = 1 \quad (11.131)$$

ist. Die **Kozykelgruppe** $Z^r(M; \mathbb{Z}_2)$ und die **Korandgruppe** $B^r(M; \mathbb{Z}_2)$ sind definiert gemäß

$$Z^r(M; \mathbb{Z}_2) = \{f \in C^r(M; \mathbb{Z}_2) | \delta f = 1\} \quad (11.132)$$

bzw.

$$B^r(M; \mathbb{Z}_2) = \{f \in C^r(M; \mathbb{Z}_2) | f = \delta f', f' \in C^{r-1}(M; \mathbb{Z}_2)\}. \quad (11.133)$$

Damit können wir die r -te **Čech-Kohomologiegruppe** $H^r(M; \mathbb{Z}_2)$ definieren:

$$H^r(M; \mathbb{Z}_2) = \ker \delta_r / \text{im } \delta_{r-1} = Z^r(M; \mathbb{Z}_2) / B^r(M; \mathbb{Z}_2). \quad (11.134)$$

11.6.3 Stiefel-Whitney-Klassen

Die **Stiefel-Whitney-Klasse** w_r ist eine charakteristische Klasse, die ihre Werte in $H^r(M; \mathbb{Z}_2)$ annimmt. Sei $TM \xrightarrow{\pi} M$ ein Tangentialbündel mit einer Riemann'schen Metrik. Die Strukturgruppe ist $O(m)$, $m = \dim M$. Wir nehmen an, $\{U_i\}$ sei eine einfache offene Überdeckung von M , was bedeutet, dass die Schnittmenge von einer beliebigen Anzahl von Karten entweder leer oder zusammenziehbar ist. Sei $\{e_{i\alpha}\}$ ($1 \leq \alpha \leq m$) ein lokaler orthonormaler Rahmen von TM über U_i . Es ist $e_{i\alpha} = t_{ij} e_{j\alpha}$, mit der Übergangsfunktion $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow O(m)$. Wir definieren die Čech-1-Kokette $f(i, j)$ durch

$$f(i, j) \equiv \det(t_{ij}) = \pm 1. \quad (11.135)$$

Dies ist in der Tat ein Element von $C^1(M; \mathbb{Z}_2)$ wegen $f(i, j) = f(j, i)$. Mit der Kozykelbedingung $t_{ij}t_{jk}t_{ki} = I$ bestätigen wir, dass gilt:

$$\delta f(i, j, k) = \det(t_{ij}) \det(t_{jk}) \det(t_{ki}) = \det(t_{ij}t_{jk}t_{ki}) = 1. \quad (11.136)$$

Daher ist $f \in Z^1(M, \mathbb{Z}_2)$; dies definiert ein Element $[f]$ von $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$. Nun zeigen wir, dass dieses Element unabhängig vom gewählten lokalen Rahmen ist: Sei $\{\bar{e}_{i\alpha}\}$ ein weiterer Rahmen über U_i , sodass $\bar{e}_{i\alpha} = h_i e_{i\alpha}$ ($h_i \in O(m)$) ist. Aus $\bar{e}_{i\alpha} = \bar{t}_{ij} \bar{e}_{j\alpha}$ folgt $\bar{t}_{ij} = h_i t_{ij} h_j^{-1}$. Wenn wir die 0-Kokette f_0 durch $f_0(i) \equiv \det h_i$ definieren, erhalten wir:

$$\tilde{f}(i, j) = \det(h_i t_{ij} h_j^{-1}) = \det(h_i) \det(h_j) \det(t_{ij}) = \delta f_0(i, j) f(i, j),$$

wobei für $h_j \in O(m)$ die Identität $\det h_j^{-1} = \det h_j$ verwendet wurde. Somit ändert sich f um einen exakten Betrag und definiert immer noch dieselbe Kohomologieklasse $[f]$.¹¹ Dieses spezielle Element $w_1(M) \equiv [f] \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$ heißt **erste Stiefel-Whitney-Klasse**.

Satz 11.6. Sei $TM \xrightarrow{\pi} M$ ein Tangentialbündel mit Fasermetrik. M ist dann und nur dann orientierbar, wenn $w_1(M)$ trivial ist.

Beweis

Wenn M orientierbar ist, kann die Strukturgruppe auf die $SO(m)$ reduziert werden, und es ist $f(i, j) = \det(t_{ij}) = 1$ und daher $w_1(M) = 1$, das neutrale Element von \mathbb{Z}_2 . Ist umgekehrt $w_1(M)$ trivial, ist f ein Korand: $f = \delta f_0$. Wegen $f_0(i) = \pm 1$ können wir immer $h_i \in O(m)$ so wählen, dass $\det(h_i) = f_0(i)$ für jedes i ist. Wenn wir den neuen Rahmen $\bar{e}_{i\alpha} = h_i e_{i\alpha}$ definieren, haben wir Übergangsfunktionen \tilde{t}_{ij} , sodass $\det(\tilde{t}_{ij}) = 1$ für jedes sich überlappende Paar (i, j) und M orientierbar ist.¹² \square

Satz 11.6 zeigt, dass die erste Stiefel-Whitney-Klasse die Orientierbarkeit verhindert. Als nächstes definieren wir die zweite Stiefel-Whitney-Klasse. Seien M eine m -

¹¹ Beachten Sie, dass wir hier die multiplikative Notation verwenden.

¹² Nehmen wir an, es sei $f(i, j) = \det t_{ij} = -1$ für irgendein Paar (i, j) . Dann können wir $f_0(i) = -1$ und $f_0(j) = +1$ ansetzen, und es ist $\det \tilde{t}_{ij} = -\det t_{ij} = +1$.

dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit und TM ihr Tangentialbündel. Für die Übergangsfunktion $t_{ij} \in SO(m)$ betrachten wir eine „Liftung“ $\tilde{t}_{ij} \in \text{Spin}(m)$, sodass gilt:

$$\varphi(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij}, \quad \tilde{t}_{ji} = \tilde{t}_{ij}^{-1}. \quad (11.137)$$

Dabei ist $\varphi : \text{Spin}(m) \rightarrow SO(m)$ der $2 : 1$ -Homomorphismus (beachten Sie, dass wir die Auswahl zwischen $t_{ij} \leftrightarrow \tilde{t}_{ij}$ und $-\tilde{t}_{ij}$ haben). Diese Liftung existiert immer lokal. Wegen

$$\varphi(\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki}) = t_{ij}t_{jk}t_{ki} = I$$

erhalten wir $\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} \in \ker \varphi = \{\pm I\}$. Damit die \tilde{t}_{ij} ein Spinbündel über M definieren, müssen sie der Kozykelbedingung genügen:

$$\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = I. \quad (11.138)$$

Wir definieren die Čech-2-Kokette $f : U_i \cap U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ durch

$$\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = f(i, j, k)I. \quad (11.139)$$

Man sieht leicht, dass f symmetrisch und geschlossen ist. Somit definiert die Kokette f ein Element $w_2(M) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, die sog. **zweite Stiefel-Whitney-Klasse**. Es lässt sich zeigen, dass $w_2(M)$ unabhängig vom gewählten lokalen Rahmen ist.

Übung 11.5 Betrachten Sie eine andere Liftung $-\tilde{t}_{ij}$ von t_{ij} . Zeigen Sie, dass f sich unter dieser Transformation um einen exakten Betrag ändert. Dementsprechend ist $[f]$ unabhängig von der Liftung. (*Tipp:* Zeigen Sie, dass $f(i, j, k) \mapsto f(i, j, k)\delta f_1(i, j, k)$ ist, wobei $f_1(i, j)$ das Vorzeichen von $\pm \tilde{t}_{ij}$ bezeichnet.)

Satz 11.7. Sei TM das Tangentialbündel über einer orientierbaren Mannigfaltigkeit M . Es existiert ein Spinbündel über M dann und nur dann, wenn $w_2(M)$ trivial ist.

Beweis

Nehmen wir an, es existiere ein Spinbündel über M . Dann definieren wir eine Menge von Übergangsfunktionen \tilde{t}_{ij} , sodass $\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = I$ über beliebigen einander überlappenden Karten U_i, U_j und U_k ist, weswegen $w_2(M)$ trivial ist. Sei umgekehrt $w_2(M)$ trivial, gelte also:

$$f(i, j, k) = \delta f_1(i, j, k) = f_1(j, k)f_1(i, k)f_1(k, i),$$

mit der 1-Kokette f_1 . Wir betrachten die in Übung 11.5 definierte 1-Kokette $f_1(i, j)$. Wenn wir neue Übergangsfunktionen $\tilde{t}'_{ij} \equiv \tilde{t}_{ij}f_1(i, j)$ wählen, erhalten wir

$$\tilde{t}'_{ij}\tilde{t}'_{jk}\tilde{t}'_{ki} = [\delta f_1(i, j, k)]^2 = I.$$

Damit definiert $\{\tilde{t}'_{ij}\}$ ein Spinbündel über M .

□

Wir skizzieren zum Schluss noch einige nützliche Resultate:

(a)

$$w_1(\mathbb{C}P^m) = 1, \quad w_2(\mathbb{C}P^m) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } m \text{ ungerade ist} \\ x, & \text{wenn } m \text{ gerade ist,} \end{cases} \quad (11.140)$$

mit x als dem Erzeuger von $H^2(\mathbb{C}P^m; \mathbb{Z}_2)$.

(b)

$$w_1(S^m) = w_2(S^m) = 1. \quad (11.141)$$

(c)

$$w_1(\Sigma_g) = w_2(\Sigma_g) = 1, \quad (11.142)$$

mit Σ_g als Riemann'scher Fläche mit Geschlecht g .

12

Indexsätze

In der Physik haben wir es oft mit auf einer Mannigfaltigkeit M definierten Differentialoperatoren zu tun. Typische Beispiele sind etwa der Laplace-, der D'Alembert- und der Dirac-Operator. Mathematisch gesehen sind diese Operatoren Abbildungen von Schnitten

$$D : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, F),$$

mit Vektorbündeln E und F über M . So ist der Dirac-Operator eine Abbildung $F(M, E) \rightarrow F(M, E)$, mit einem Spinbündel E über M . Wenn auf E und F innere Produkte definiert sind, kann man den zu D adjungierten Operator definieren:

$$D^\dagger : \Gamma(M, F) \rightarrow \Gamma(M, E).$$

Da D ein Differentialoperator ist, enthält er analytische Information über das Spektrum und dessen etwaige Entartung. In der Folge interessieren uns die Null-Eigenvektoren von D und D^\dagger :

$$\begin{aligned} \ker D &\equiv \{s \in \Gamma(M, E) | Ds = 0\}, \\ \ker D^\dagger &\equiv \{s \in \Gamma(M, F) | D^\dagger s = 0\}. \end{aligned}$$

Der **analytische Index** ist definiert durch

$$\text{ind } D = \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger.$$

Überraschenderweise ist diese analytische Größe eine topologische Invariante, die sich als ein Integral einer geeigneten charakteristischen Klasse über M ausdrücken lässt, welche ihrerseits rein topologische Informationen über M trägt. Dieses Wechselspiel zwischen Analysis und Topologie ist die Quintessenz des Indexsatzes.

Unsere Darstellung folgt Eguchi *et al.* (1980), Gilkey (1995), Shanahan (1978), Kulkarni (1975) sowie Booss und Bleecker (1985). Konsultieren Sie diese Referenzwerke für weitere Einzelheiten. Alvarez (1985) enthält eine kurze Zusammenfassung des Themas, zusammen mit Anwendungen auf Anomalien und Strings.

12.1 Elliptische Operatoren und Fredholm-Operatoren

Im Folgenden werden wir uns mit Differentialoperatoren beschäftigen, die auf Vektorbündeln über einer kompakten Mannigfaltigkeit M ohne Rand definiert sind. Es

wird sich dabei ausschließlich um Differentialoperatoren aus der gutartigen Klasse der Fredholm-Operatoren handeln.

12.1.1 Elliptische Operatoren

Seien E und F komplexe Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M . Ein Differentialoperator D ist eine lineare Abbildung

$$D : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, F). \quad (12.1)$$

Wir betrachten eine Karte U von M , über der E und F trivial sind. Wir bezeichnen die lokalen Koordinaten von U mit x^μ und führen die folgende Multiindexnotation ein:

$$\begin{aligned} M &\equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \quad (\mu_j \in \mathbb{Z}, \mu_j \geq 0) \\ |M| &\equiv \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m \\ D_M &\equiv \frac{\partial^{|M|}}{\partial x^M} \equiv \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_m}}{\partial (x^1)^{\mu_1} \dots \partial (x^m)^{\mu_m}}. \end{aligned}$$

Wenn $\dim E = k$ und $\dim F = k'$ ist, lautet die allgemeinste Form von D :

$$[Ds(x)]^\alpha = \sum_{\substack{|M| \leq N \\ 1 \leq a \leq k}} A^{M\alpha}_a(x) D_M s^a(x) \quad (1 \leq \alpha \leq k'), \quad (12.2)$$

wobei $s(x)$ ein Schnitt von E ist. Beachten Sie, dass x für einen Punkt mit den Koordinaten x^μ steht. Diese leichte Nachlässigkeit vereinfacht die Notation. $A^M \equiv (A^M)_a^a$ ist eine $(k \times k')$ -Matrix, die von der Position x abhängen kann. Die positive ganze Zahl N in (12.2) heißt **Ordnung** von D . Wir interessieren uns für die Fälle $N = 1$ (Dirac-Operator) und $N = 2$ (Laplace-Operator). Wenn beispielsweise F ein Spinbündel über M ist, wirkt der Dirac-Operator $D \equiv i\gamma^\mu \partial_\mu + m : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ auf einen Schnitt $\psi(x)$ von E wie

$$[D\psi(x)]^\alpha = i(\gamma^\mu)_\beta^\alpha \partial_\mu \psi^\beta(x) + m\psi^\alpha(x).$$

Das **Symbol** von D ist eine $(k \times k')$ -Matrix

$$\sigma(D, \xi) \equiv \sum_{|M|=N} A^{M\alpha}_a(x) \xi_M, \quad (12.3)$$

wobei ξ ein reelles m -Tupel $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ ist. Das Symbol kann auch koordinatenunabhängig definiert werden: Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel sowie $p \in M$, $\xi \in T_p^*M$ und $s \in \pi_E^{-1}(p)$. Wir betrachten einen Schnitt $\tilde{s} \in \Gamma(M, E)$, sodass $\tilde{s}(p) = s$ ist, und eine Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$, sodass $f(p) = 0$ und $df(p) = \xi \in T_p^*M$ ist. Dann können wir das Symbol über

$$\sigma(D, \xi)s = \frac{1}{N!} D(f^N \tilde{s})|_p \quad (12.4)$$

definieren. Der Faktor f^N greift aufgrund der Bedingung $f(p) = 0$ automatisch den Term N -ter Ordnung heraus. Gleichung (12.4) ergibt dasselbe Symbol wie (12.3).

Wenn die Matrix $\sigma(D, \xi)$ für jedes $x \in M$ und jedes $\xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ invertierbar ist, nennt man den Operator D **elliptischen Operator**. Natürlich ist diese Definition nur für $k = k'$ sinnvoll. Es sei angemerkt, dass das Symbol für einen verketteten Operator $D = D_1 \circ D_2$ die Verkettung von deren Symbolen ist, also $\sigma(D, \xi) = \sigma(D_1, \xi)\sigma(D_2, \xi)$. Dies zeigt, dass Verkettungen von elliptischen Operatoren auch elliptisch sind. Im Allgemeinen sind Potenzen und Wurzeln von elliptischen Operatoren ebenfalls elliptisch.

Beispiel 12.1. Seien x^μ die natürlichen Koordinaten im \mathbb{R}^m . Wenn E und F reelle Geradenbündel über \mathbb{R}^m sind, definieren wir den Laplace-Operator $\Delta : \Gamma(\mathbb{R}^m, E) \rightarrow \Gamma(\mathbb{R}^m, F)$ durch

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial(x^m)^2}. \quad (12.5)$$

Gemäß Gleichung (12.3) ist sein Symbol

$$\sigma(\Delta, \xi) = \sum_{\mu} (\xi_{\mu})^2.$$

Dies steht in Einklang mit dem Ergebnis, dass man aus (12.4) erhält:

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta, \xi)s &= \frac{1}{2}\Delta(f^2\tilde{s})|_p = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial(x^\mu)^2}(f^2\tilde{s})|_p \\ &= \frac{1}{2}\left(f^2\Delta\tilde{s} + 2f\Delta f\tilde{s} + 2f\sum \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x^\mu} + 2\sum \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\tilde{s}\right)|_p \\ &= \sum (\xi_\mu)^2 s. \end{aligned}$$

Dieses Symbol ist offensichtlich invertierbar für $\xi \neq 0$ und damit Δ elliptisch.

Im Gegensatz dazu ist der D'Alembert-Operator

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial(x^{m-1})^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^m)^2} \quad (12.6)$$

nicht elliptisch, da das Symbol

$$\sigma(\square, \xi) = (\xi^1)^2 + \cdots + (\xi^{m-1})^2 - (\xi^m)^2$$

überall auf dem Lichtkegel verschwindet:

$$(\xi^m)^2 = (\xi^1)^2 + \cdots + (\xi^{m-1})^2.$$

◇

Übung 12.1 Sei $M = \mathbb{R}^2$ und betrachten wir einen Differentialoperator zweiter Ordnung D . Das Symbol von D ist von der Form

$$\sigma(D, \xi) = A_{11}\xi^1\xi^1 + 2A_{12}\xi^1\xi^2 + A_{22}\xi^2\xi^2.$$

Zeigen Sie, dass D dann und nur dann elliptisch ist, wenn $\sigma(D, \xi) = 1$ eine Ellipse im ξ -Raum ist.

12.1.2 Fredholm-Operatoren

Sei $D : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, F)$ ein elliptischer Operator. Der **Kern** von D ist die Menge der Null-Eigenvektoren

$$\ker D \equiv \{s \in \Gamma(M, E) | Ds = 0\}. \quad (12.7)$$

Nehmen wir an, E und F seien mit Fasermetriken versehen, welche wir als $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ schreiben. Der zu D **adjungierte Operator** $D^\dagger : \Gamma(M, F) \rightarrow \Gamma(M, E)$ ist definiert als

$$\langle s', Ds \rangle_F \equiv \langle D^\dagger s', s \rangle_E, \quad (12.8)$$

mit $s \in \Gamma(M, E)$ und $s' \in \Gamma(M, F)$. Wir definieren den **Kokern** von D als

$$\text{koker } D \equiv \Gamma(M, F)/\text{im } D. \quad (12.9)$$

Unter den elliptischen Operatoren interessieren uns insbesondere diejenigen Operatoren, deren Kern und Kokern beide endlichdimensional sind. Ein elliptischer Operator D , der dieser Bedingung genügt, wird **Fredholm-Operator** genannt. Der **analytische Index**

$$\text{ind } D \equiv \dim \ker D - \dim \text{koker } D \quad (12.10)$$

ist für einen Fredholm-Operator wohldefiniert. Von nun an werden wir uns nur noch mit Fredholm-Operatoren beschäftigen. Aus der allgemeinen Theorie der Operatoren ist bekannt, dass elliptische Operatoren auf einer *kompakten* Mannigfaltigkeit Fredholm-Operatoren sind. Satz 12.1 zeigt, dass $\text{ind } D$ auch als

$$\text{ind } D = \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger \quad (12.11)$$

ausgedrückt werden kann.

Satz 12.1. Sei $D : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, F)$ ein Fredholm-Operator. Dann ist

$$\text{koker } D \cong \ker D^\dagger \equiv \{s \in \Gamma(M, F) | D^\dagger s = 0\}. \quad (12.12)$$

Beweis

Sei $[s] \in \text{koker } D$ gegeben durch

$$[s] = \{s' \in \Gamma(M, F) | s' = s + Du, u \in \Gamma(M, E)\}.$$

Wir zeigen, dass eine Surjektion $\ker D^\dagger \rightarrow \text{koker } D$ existiert, d. h., jedes $[s] \in \text{koker } D$ einen Repräsentanten $s_0 \in \ker D^\dagger$ hat. Wir definieren s_0 durch

$$s_0 \equiv s - D \frac{1}{D^\dagger D} D^\dagger s. \quad (12.13)$$

Wegen $D^\dagger s_0 = D^\dagger s - D^\dagger D(D^\dagger D)^{-1} D^\dagger s = D^\dagger s - D^\dagger s = 0$ ist $s_0 \in \ker D^\dagger$. Als nächstes seien $s_0, s'_0 \in \ker D^\dagger$ und $s_0 \neq s'_0$. Wir zeigen, dass $[s_0] \neq [s'_0]$ in $\Gamma(M, F)/\text{im } D$ ist. Wenn $[s_0] = [s'_0]$ ist, gibt es ein Element $u \in \Gamma(M, E)$, sodass $s_0 - s'_0 = Du$ ist. Dann ist $0 = \langle u, D^\dagger(s_0 - s'_0) \rangle_E = \langle u, D^\dagger Du \rangle_E = \langle Du, Du \rangle_F \geq 0$ und daher $Du = 0$, in Widerspruch zu unserer Annahme $s_0 \neq s'_0$. Somit ist die Abbildung $s_0 \mapsto [s]$ eine Bijektion, und wir haben bestätigt, dass $\text{koker } D \cong \ker D^\dagger$ ist. \square

12.1.3 Elliptische Komplexe

Betrachten wir eine Folge von Fredholm-Operatoren,

$$\cdots \rightarrow \Gamma(M, E_{i-1}) \xrightarrow{D_{i-1}} \Gamma(M, E_i) \xrightarrow{D_i} \Gamma(M, E_{i+1}) \xrightarrow{D_{i+1}} \cdots, \quad (12.14)$$

wobei $\{E_i\}$ eine Folge von Vektorbündeln über einer kompakten Mannigfaltigkeit M ist. Die Folge (E_i, D_i) heißt **elliptischer Komplex**, wenn D_i für alle i nilpotent ist (also $D_i \circ D_{i-1} = 0$). Wir können uns als Beispiele $\Gamma(M, E_i) = \Omega_i(M)$ und $D_i = d$ (die äußere Ableitung) denken. Der zu $D_i : \Gamma(M, E_i) \rightarrow \Gamma(M, E_{i+1})$ adjungierte Operator ist

$$D_i^\dagger : \Gamma(M, E_{i+1}) \rightarrow \Gamma(M, E_i).$$

Der **Laplace-Operator** $\Delta_i : \Gamma(M, E_i) \rightarrow \Gamma(M, E_i)$ ist

$$\Delta_i \equiv D_{i-1} D_{i-1}^\dagger + D_i^\dagger D_i. \quad (12.15)$$

Die Hodge-Zerlegung kann auch hier angewendet werden:

$$s_i = D_{i-1} s_{i-1} + D_{i-1}^\dagger s_{i+1} + h_i. \quad (12.16)$$

Dabei ist $s_{i\pm 1} \in \Gamma(M, E_{i\pm 1})$, und h_i liegt im Kern von Δ_i ($\Delta_i h_i = 0$).

Analog zu den De-Rham-Kohomologiegruppen definieren wir

$$H^i(E, D) \equiv \ker D_i / \text{im } D_{i-1}. \quad (12.17)$$

Wie im Fall der De-Rham-Theorie lässt sich zeigen, dass $H^i(E, D)$ isomorph zum Kern von Δ_i ist. Dementsprechend erhalten wir

$$\dim H^i(E, D) = \dim \text{Harm}^i(E, D), \quad (12.18)$$

wobei $\text{Harm}^i(E, D)$ der von den $\{h_i\}$ aufgespannte Vektorraum ist. Der **Index** dieses elliptischen Komplexes ist durch

$$\text{ind } D \equiv \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim H^i(E, D) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim \ker \Delta_i \quad (12.19)$$

definiert. Dieser Index ist eine Verallgemeinerung der Euler-Charakteristik, siehe Beispiel 12.2.

Wie hängt dies mit Gleichung (12.10) zusammen? Wir können formal auf beiden Seiten null zu dem Komplex $\Gamma(M, E) \xrightarrow{D} \Gamma(M, F)$ hinzufügen, also

$$0 \xrightarrow{i} \Gamma(M, E) \xrightarrow{D} \Gamma(M, F) \xrightarrow{\varphi} 0, \quad (12.20)$$

mit der Einbettung (Inklusion) i . Mit (12.19) erhalten wir für den Index

$$\dim \ker D - (\dim \Gamma(M, F) - \dim \text{im } D) = \dim \ker D - \dim \text{koker } D,$$

wobei wir beachtet haben, dass $\dim \ker \varphi = \Gamma(M, F)$ und $\text{koker } D = \ker \varphi / \text{im } D$ ist. Damit ergibt (12.19) denselben Index wie (12.10).

Es ist oft praktisch, mit einem elliptischen 2-Term-Komplex zu arbeiten, welcher denselben Index hat wie der ursprüngliche elliptische Komplex (E, D) . Dieses „Aufrollen“ erreicht man, indem man die beiden Bündel

$$E_+ \equiv \bigoplus_r E_{2r} \quad \text{und} \quad E_- \equiv \bigoplus_r E_{2r+1} \quad (12.21)$$

definiert, genannt **gerades** bzw. **ungerades Bündel**. Entsprechend sind die Operatoren

$$A \equiv \bigoplus_r (D_{2r} + D^\dagger_{2r-1}) \quad \text{und} \quad A^\dagger \equiv \bigoplus_r (D_{2r+1} + D^\dagger_{2r}). \quad (12.22)$$

Man überprüft sofort, dass $A : \Gamma(M, E_+) \rightarrow \Gamma(M, E_-)$ und $A^\dagger : \Gamma(M, E_-) \rightarrow \Gamma(M, E_+)$ ist. Mit A und A^\dagger konstruieren wir die zwei Laplace-Operatoren

$$\begin{aligned} \Delta_+ &\equiv A^\dagger A = \bigoplus_{r,s} (D_{2r+1} + D^\dagger_{2r})(D_{2s} + D^\dagger_{2s-1}) \\ &= \bigoplus_r (D_{2r-1} D^\dagger_{2r-1} + D^\dagger_{2r} D_{2r}) = \bigoplus_r \Delta_{2r} \end{aligned} \quad (12.23a)$$

$$\Delta_- \equiv AA^\dagger = \bigoplus_r \Delta_{2r+1}. \quad (12.23b)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \text{ind}(E_\pm, A) &= \dim \ker \Delta_+ - \dim \ker \Delta_- \\ &= \sum (-1)^r \dim \ker \Delta_r = \text{ind}(E, D). \end{aligned} \quad (12.24)$$

Beispiel 12.2. Wir betrachten den De-Rham-Komplex $\Omega(M)$ über einer kompakten Mannigfaltigkeit M ohne Rand,

$$0 \xrightarrow{i} \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \xrightarrow{d} 0, \quad (12.25)$$

wobei $m = \dim M$ ist und d für $d_r : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ steht. Die durch (12.25) definierte Gruppe $H^r(E, D)$ stimmt mit der De-Rham-Kohomologiegruppe $H_r(M, \mathbb{R})$ überein. Den Index identifizieren wir mit der Euler-Charakteristik:

$$\text{ind}(\Omega^*(M), d) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim H^r(M, \mathbb{R}) = \chi(M). \quad (12.26)$$

Wir haben in Kapitel 7 festgestellt, dass $b^r \equiv \dim H^r(M, \mathbb{R})$ mit der Zahl der linear unabhängigen harmonischen r -Formen übereinstimmt: $\dim H^r(M, \mathbb{R}) = \dim \text{Harm}^r(M) = \dim \ker \Delta_r$. Dabei ist Δ_r der Laplace-Operator

$$\Delta_r = (d + d^\dagger)^2 = d_{r-1} d_{r-1}^\dagger + d_r^\dagger d_r, \quad (12.27)$$

mit $d_r^\dagger : \Omega^{r+1}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ als dem zu d_r adjungierten Operator. Nun erhalten wir

$$\chi(M) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim \ker \Delta_r. \quad (12.28)$$

Diese Beziehung ist sehr interessant, weil auf der linken Seite der Gleichung eine rein topologische Größe steht, während die rechte Seite durch die Lösung der analytischen Gleichung $\Delta_r u = 0$ gegeben ist. Wir haben bereits in Beispiel 11.6 gesehen, dass man $\chi(M)$ durch Integrieren der Euler-Klasse über M erhält: $\chi(M) = \int_M e(TM)$. Nun liest sich (12.28) als

$$\sum_{r=1}^m (-1)^r \dim \ker \Delta_r = \int_M e(TM). \quad (12.29)$$

Dies ist eine typische Form des Indexsatzes. Die rechte Seite der Gleichung ist ein analytischer Index, während die linke Seite ein topologischer Index ist, der durch das Integral von gewissen charakteristischen Klassen gegeben ist. In Abschnitt 12.3 werden wir (12.29) aus dem Atiyah-Singer-Indexsatz herleiten.

Der 2-Term-Komplex ist durch

$$\Omega^+(M) \equiv \bigoplus_r \Omega^{2r}(M), \quad \Omega^-(M) \equiv \bigoplus_r \Omega^{2r+1}(M) \quad (12.30)$$

gegeben, und die korrespondierenden Operatoren sind

$$A \equiv \bigoplus_r (d_{2r} + d_{2r-1}^\dagger), \quad A^\dagger \equiv \bigoplus_r (d_{2r-1} + d_{2r}^\dagger). \quad (12.31)$$

Es sei Ihnen als Übung überlassen zu zeigen, dass gilt:

$$\text{ind}(\Omega^\pm(M), A) = \dim \ker A_+ - \dim \ker A_- = \chi(M). \quad (12.32)$$

◊

12.2 Der Atiyah-Singer-Indexsatz

12.2.1 Die Aussage des Satzes

Satz 12.2. (Atiyah-Singer-Indexsatz) Sei (E, D) ein elliptischer Komplex über einer m -dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit M ohne Rand. Der Index dieses Komplexes ist durch

$$\text{ind}(E, D) = (-1)^{m(m+1)/2} \int_M \text{ch}\left(\bigoplus_r (-1)^r E_r\right) \frac{\text{Td}(TM^\mathbb{C})}{e(TM)} \Big|_{\text{vol}} \quad (12.33)$$

gegeben. Dabei (und im Folgenden) bedeutet der Index „vol“, dass wir Differentialformen im Integranden behalten, deren Dimension dieselbe wie die der Mannigfaltigkeit M ist. Im Integranden auf der rechten Seite der Gleichung werden nur m -Formen herausgegriffen, sodass die Integration sinnvoll ist.¹

Den Beweis von Satz 12.2 finden Sie bei Shanahan (1978), Palais (1965) und Gilkey (1995). Der Beweis basiert dort entweder auf der K -Theorie oder auf dem Wärmeleitungskern-Formalismus. In Abschnitt 13.2 werden wir einen Beweis der einfachsten Version des Atiyah-Singer-(AS-)Indexsatzes für einen Spinkomplex betrachten. In jüngerer Zeit haben Physiker einen anderen Beweis des Satzes gefunden, der sich der Supersymmetrie bedient. Dieser Beweis wird in den Abschnitten 12.9 und 12.10 skizziert. Interessierte Leser seien für weitere Einzelheiten auf Alvarez-Gaumé (1983) sowie Friedan und Windey (1984, 1985) verwiesen.

Das folgende Korollar ist eine direkte Konsequenz von Satz 12.2:

Korollar 12.1. Sei $\Gamma(M, E) \xrightarrow{D} \Gamma(M, F)$ ein elliptischer 2-Term-Komplex. Der Index von D ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{ind } D &= \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger \\ &= (-1)^{m(m+1)/2} \int_M (\text{ch}E - \text{ch}F) \frac{\text{Td}(TM^\mathbb{C})}{e(TM)} \Big|_{\text{vol}}. \end{aligned} \quad (12.34)$$

12.3 Der De-Rham-Komplex

Sei M eine m -dimensionale kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand. Mittlerweile sind wir mit dem De-Rham-Komplex bestens vertraut,

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega^{r-1}(M)^\mathbb{C} \xrightarrow{d} \Omega^r(M)^\mathbb{C} \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(M)^\mathbb{C} \xrightarrow{d} \dots, \quad (12.35)$$

dabei ist $\Omega^r(M)^\mathbb{C} = \Gamma(M, \wedge^r T^* M^\mathbb{C})$. Wir haben die Formen komplexifiziert, sodass wir den AS-Indexsatz anwenden können. Für die äußeren Ableitungen gilt $d^2 = 0$. Für den Nachweis, dass (12.35) ein elliptischer Komplex ist, müssen wir zeigen, dass d elliptisch ist. Um das Symbol von d zu ermitteln, beachten wir

$$\sigma(d, \xi)\omega = d(f\tilde{s})|_p = df \wedge \tilde{s} + f d\tilde{s}|_p = \xi \wedge \omega,$$

mit $p \in M$, $\omega \in \Omega_p^r(M)^\mathbb{C}$, $f(p) = 0$, $df(p) = \xi$, $\tilde{s} \in \Omega^r(M)^\mathbb{C}$ und $\tilde{s}(p) = \omega$; siehe (12.4). Wir erhalten

$$\sigma(d, \xi) = \xi \wedge. \quad (12.36)$$

¹ Die Division durch $e(TM)$ lässt sich formal tatsächlich ausführen. Wenn m eine ungerade ganze Zahl ist, verschwindet der Index identisch, siehe unten. Originalarbeiten hierzu sind Atiyah und Singer (1968a, b) sowie Atiyah und Segal (1968).

Dies definiert eine Abbildung $\Omega^r(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{r+1}(M)^{\mathbb{C}}$ und ist nichtsingulär, wenn $\xi \neq 0$ ist. Somit haben wir bewiesen, dass $d : \Omega^r(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{r+1}(M)^{\mathbb{C}}$ elliptisch ist und damit (12.35) ein elliptischer Komplex. Beachten Sie jedoch, dass der Operator $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ kein Fredholm-Operator ist, da $\ker d$ unendlichdimensional ist. Damit wir den Indexsatz auf diesen Komplex anwenden können, müssen wir stattdessen die De-Rham-Kohomologiegruppe $H^r(M)$ betrachten. Der Operator d ist auf diesem Raum sicherlich ein Fredholm-Operator.

Lassen Sie uns den Indexsatz für diesen Komplex aufstellen. Wir bemerken, dass $\dim_{\mathbb{C}} H^r(M; \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}} H^r(M; \mathbb{R})$. Daher ist der analytische Index

$$\text{ind } d = \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim_{\mathbb{C}} H^r(M; \mathbb{C}) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim_{\mathbb{R}} H^r(M; \mathbb{R}) = \chi(M), \quad (12.37)$$

mit $\chi(M)$ als der Euler-Charakteristik von M . Wir nehmen an, M sei geraddimensional ($m = 2l$). Die rechte Seite von Gleichung (12.33) liefert den topologischen Index

$$(-1)^{l(2l+1)} \int_M \text{ch}\left(\bigoplus_{r=0}^m (-1)^r \wedge^r T^* M^{\mathbb{C}}\right) \frac{\text{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)} \Big|_{\text{vol}}. \quad (12.38)$$

Das Splitting-Prinzip ergibt

$$\begin{aligned} & \text{ch}\left(\bigoplus_{r=0}^m (-1)^r \wedge^r T^* M^{\mathbb{C}}\right) \\ &= 1 - \text{ch}(T^* M^{\mathbb{C}}) + \text{ch}(\wedge^2 T^* M^{\mathbb{C}}) + \dots + (-1)^m \text{ch}(\wedge^m T^* M^{\mathbb{C}}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^m e^{-x_i}(TM^{\mathbb{C}}) + \sum_{i < j} e^{-x_i} e^{-x_j}(TM^{\mathbb{C}}) + (-1)^m e^{-x_1} e^{-x_2} \dots e^{-x_m}(TM^{\mathbb{C}}) \\ &= \prod_{i=1}^m (1 - e^{-x_i})(TM^{\mathbb{C}}), \end{aligned}$$

wobei wir beachtet haben, dass $x_i(T^* M^{\mathbb{C}}) = -x_i(TM^{\mathbb{C}})$ ist.² Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} \text{Td}(TM^{\mathbb{C}}) &= \prod_{i=1}^m \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}(TM^{\mathbb{C}}), \\ e(TM) &= \prod_{i=1}^l x_i(TM^{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Einsetzen in (12.38) führt auf

$$\text{ind } d = \int_M (-1)^{l(2l+1)} (-1)^l \left(\prod_{i=1}^l x_i(TM^{\mathbb{C}}) \right) = \int_M e(TM). \quad (12.39)$$

² Seien L ein komplexes Geradenbündel und L^* sein duales Bündel. $L \otimes L^*$ ist ein Bündel, dessen Schnitt an jeder Faser von L eine Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist. $L \otimes L^*$ hat einen globalen Schnitt, der nirgendwo verschwindet (z. B. die identische Abbildung). Daraus können wir zeigen, dass $L \otimes L^*$ ein triviales Bündel ist. Wir erhalten $c_1(L \otimes L^*) = c_1(L) + c_1(L^*) = 0$ und daher $x(L^*) = -x(L)$. Mit dem Splitting-Prinzip ist dann $x_i(T^* M^{\mathbb{C}}) = -x_i(TM^{\mathbb{C}})$.

Wenn m ungerade ist, kann man zeigen, dass

$$\text{ind } d = 0 \quad (12.40)$$

gilt, was in Einklang mit der Tatsache steht, dass $e(TM) = 0$ ist, wenn $\dim M$ ungerade ist, siehe Shanahan (1978), S. 22. In jedem Fall lautet der Indexsatz für den De-Rham-Komplex

$$\chi(M) = \int_M e(TM). \quad (12.41)$$

Beispiel 12.3. Sei M eine zweidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand. Gleichung (12.41) wird dann zu

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_M \epsilon^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_M \mathcal{R}_{12}. \quad (12.42a)$$

Dies ist der berühmte Satz von Gauß-Bonnet. Für $\dim M = 4$ ergibt sich

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \wedge \mathcal{R}_{\gamma\delta}. \quad (12.42b)$$

◊

12.4 Der Dolbeault-Komplex

Wir erinnern an einige elementare Tatsachen über komplexe Mannigfaltigkeiten (vgl. Kapitel 8). Sei M eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ohne Rand mit der komplexen Dimension m . Seien $z^\mu = x^\mu + iy^\mu$ die lokalen Koordinaten und $\bar{z}^\mu = x^\mu - iy^\mu$ ihre komplex Konjugierten. TM^+ bezeichne das von $\{\partial/\partial z^\mu\}$ aufgespannte Tangentialbündel und $TM^- = \overline{TM^+}$ das von $\{\partial/\partial \bar{z}^\mu\}$ aufgespannte komplexe konjugierte Bündel. Den Dualraum von TM^+ nennen wir T^*M^+ , er wird von $\{dz^\mu\}$ aufgespannt, während $T^*M^- = \overline{T^*M^+}$ der Dualraum von TM^- ist und durch $\{d\bar{z}^\mu\}$ aufgespannt wird. Der Raum $\Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$ der komplexifizierten r -Formen wird gemäß

$$\Omega^r(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M)$$

zerlegt, wobei $\Omega^{p,q}(M)$ der Raum der (p,q) -Formen ist, der von einer Basis von der Form

$$dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_p} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\nu_q}$$

aufgespannt wird.

Die äußere Ableitung wird gemäß $d \equiv \partial + \bar{\partial}$ zerlegt, wobei gilt:

$$\partial = dz^\mu \wedge \partial/\partial z^\mu \quad \text{und} \quad \bar{\partial} = d\bar{z}^\mu \wedge \partial/\partial \bar{z}^\mu.$$

Diese Operatoren genügen der Bedingung $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$. Damit ergeben sich die Folgen

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,q+1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \quad (12.43a)$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \Omega^{p,q}(M) \xrightarrow{\partial} \Omega^{p+1,q}(M) \xrightarrow{\partial} \cdots \quad (12.43b)$$

Den Fall mit $p = 0$ nennt man **Dolbeault-Komplex**:

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,q}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,q+1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots. \quad (12.44)$$

Um zu zeigen, dass (12.44) ein elliptischer Komplex ist, berechnen wir das Symbol für $\bar{\partial}$. Sei $\xi = \xi^{0,1} + \xi^{1,0}$ eine reelle 1-Form bei $p \in M$, mit $\xi^{0,1} \in \Omega_p^{0,1}(M)$ und

$$\xi^{1,0} = \overline{\xi^{0,1}} \in \Omega_p^{1,0}(M).$$

Wir betrachten eine antiholomorphe r -Form $\omega \in \Omega^{0,r}(M)$ und erhalten

$$\sigma(\bar{\partial}, \xi)\omega = \bar{\partial}(f\tilde{s}) = \bar{\partial}f \wedge \tilde{s} + f\bar{\partial}\tilde{s}|_p = \xi^{0,1} \wedge \omega,$$

mit $f(p) = 0$, $\bar{\partial}f(p) = \xi^{0,1}$, $\tilde{s} \in \Omega^{0,r}(M)$ und $\tilde{s}(p) = \omega$. Dann ergibt sich

$$\sigma(\bar{\partial}, \xi) = \xi^{0,1} \wedge. \quad (12.45)$$

Mit einer ähnlichen Argumentation wie im vorigen Abschnitt folgt, dass das Symbol (12.45) elliptisch ist. Somit ist der Dolbeault-Komplex (12.44) ein elliptischer Komplex.

Der AS-Indexesatz nimmt hier die folgende Form an:

$$\text{ind } \bar{\partial} = \int_M \text{ch}\left(\sum_r (-1)^r \wedge^r T^*M^-\right) \frac{\text{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)} \Big|_{\text{vol}}. \quad (12.46)$$

Die linke Seite der Gleichung berechnet sich folgendermaßen: Wir bemerken zuerst, dass gilt:

$$\ker \bar{\partial}_r / \text{im } \bar{\partial}_{r-1} = H^{0,r}(M),$$

wobei $H^{0,r}(M)$ die $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppe ist. Dann wird die linke Seite zu

$$\text{ind } \bar{\partial} = \sum_{r=0}^n (-1)^r b^{0,r}, \quad (12.47)$$

wobei $b^{0,r} \equiv \dim_{\mathbb{C}} H^{0,r}(M)$ die Hodge-Zahl ist. Dieser Index heißt **arithmetisches Geschlecht** von M .

Die Vereinfachung des topologischen Indexes geschieht so wie beim De-Rham-Komplex. Für die technischen Details sei auf Shanahan (1978) verwiesen. Wir erhalten

$$\sum_{r=1}^n (-1)^r b^{0,r} = \int_M \text{Td}(TM^+), \quad (12.48)$$

wobei $\text{Td}(TM^+)$ die Todd-Klasse von TM^+ ist.

12.4.1 Der verdrillte Dolbeault-Komplex und der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch

Im Dolbeault-Komplex können wir $\Omega^{0,r}(M)$ durch das Tensorproduktbündel $\Omega^{0,r}(M) \otimes V$ ersetzen, wobei V ein holomorphes Vektorbündel über M ist:

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_V} \Omega^{0,r-1}(M) \otimes V \xrightarrow{\bar{\partial}_V} \Omega^{0,r}(M) \otimes V \xrightarrow{\bar{\partial}_V} \cdots. \quad (12.49)$$

Der AS-Indexsatz dieses Komplexes reduziert sich auf den **Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch**:

$$\text{ind } \bar{\partial}_V = \int_M \text{Td}(TM^+) \text{ch}(V). \quad (12.50)$$

Wenn beispielsweise $m = \dim_{\mathbb{C}} M = 1$ ist, ergibt sich

$$\text{ind } \bar{\partial}_V = \frac{1}{2} \dim V \int_M c_1(TM^+) + \int_M c_1(V) = (2-g) \dim V + \int_M \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}, \quad (12.51)$$

da sich zeigen lässt, dass gilt:

$$\int_M c_1(TM^+) = \int_M e(TM) = 2 - g,$$

mit dem Geschlecht g von M .

12.5 Der Signaturkomplex

12.5.1 Die Hirzebruch-Signatur

Sei M eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit von gerader Dimension, $m = 2l$. Seien $[\omega]$ und $[\eta]$ die Elemente der „mittleren“ Kohomologiegruppe $H^l(M; \mathbb{R})$. Wir betrachten eine Bilinearform $H^l(M; \mathbb{R}) \times H^l(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert gemäß

$$\sigma([\omega], [\eta]) \equiv \int_M \omega \wedge \eta, \quad (12.52)$$

vgl. Beispiel 11.8. Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von $[\omega]$ und $[\eta]$. Die Form σ ist symmetrisch, wenn l gerade ist ($m \equiv 0 \pmod{4}$), und antisymmetrisch für ungerade l ($m \equiv 2 \pmod{4}$). Aus der Poincaré-Dualität ergibt sich, dass die Bilinearform σ den maximalen Rang $b^l = \dim H^l(M; \mathbb{R})$ hat und daher nichtentartet ist. Wenn $l \equiv 2k$ gerade ist, hat die symmetrische Form σ reelle Eigenwerte, von denen b^+ positiv und b^- negativ sind ($b^+ + b^- = b^l$). Die **Hirzebruch-Signatur** ist durch

$$\tau(M) \equiv b^+ - b^- \quad (12.53)$$

definiert. Ist l ungerade, verschwindet $\tau(M)$ definitionsgemäß (eine antisymmetrische Form hat rein imaginäre Eigenwerte). Im Folgenden setzen wir $l = 2k$.

Wenn der Hodge-Stern in einer $4k$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit M auf eine $2k$ -Form angewendet wird, ist $*^2 = 1$, demzufolge hat dann $*$ die Eigenwerte ± 1 . Sei $\text{Harm}^{2k}(M)$ die Menge der harmonischen $2k$ -Formen auf M . Wir beachten, dass $\text{Harm}^{2k}(M) \cong H^{2k}(M; \mathbb{R})$ ist und dass jedes Element von $H^{2k}(M; \mathbb{R})$ einen eindeutigen harmonischen Repräsentanten hat. $\text{Harm}^{2k}(M)$ zerfällt in zwei disjunkte Unterräume,

$$\text{Harm}^{2k}(M) = \text{Harm}_+^{2k}(M) \oplus \text{Harm}_-^{2k}(M), \quad (12.54)$$

entsprechend den beiden Eigenwerten von $*$. Durch diese Zerlegung wird die Bilinearform σ blockdiagonalisiert. Tatsächlich erhalten wir für $\omega^\pm \in \text{Harm}_\pm^{2k}(M)$:

$$\sigma(\omega^+, \omega^+) = \int_M \omega^+ \wedge \omega^+ = \int_M \omega^+ \wedge * \omega^+ = (\omega^+, \omega^+) > 0,$$

wobei (ω^+, ω^+) das gewöhnliche positiv definite innere Produkt aus (7.181) ist. Wir erhalten außerdem

$$\begin{aligned} \sigma(\omega^-, \omega^-) &= - \int_M \omega^- \wedge * \omega^- = -(\omega^-, \omega^-) < 0, \\ \sigma(\omega^+, \omega^-) &= - \int_M \omega^+ \wedge * \omega^- = - \int_M \omega^- \wedge * \omega^+ = -\sigma(\omega^+, \omega^-) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir beachtet, dass $\alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha$ für beliebige Formen α und β ist. Daher ist σ blockdiagonal bezüglich $\text{Harm}_+^{2k}(M) \oplus \text{Harm}_-^{2k}(M)$, und darüber hinaus ist $b^\pm = \dim_{\mathbb{R}} \text{Harm}_\pm^{2k}(M)$. Damit schreibt sich $\tau(M)$ als

$$\tau(M) = \dim \text{Harm}_+^{2k}(M) - \dim \text{Harm}_-^{2k}(M). \quad (12.55)$$

Übung 12.2 Sei $\dim M = 4k$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\tau(M) = \chi(M) \bmod 2. \quad (12.56)$$

(Tipp: Verwenden Sie die Poincaré-Dualität, um zu zeigen, dass $\chi(M) = b^{2k} \bmod 2$ ist.)

12.5.2 Der Signaturkomplex und der Signatursatz von Hirzebruch

Seien M eine m -dimensionale kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit ohne Rand und g die gegebene Metrik. Wir betrachten einen Operator

$$\mathfrak{D} \equiv d + d^\dagger. \quad (12.57)$$

\mathfrak{D} ist eine Quadratwurzel des Laplace-Operators: $\mathfrak{D}^2 = dd^\dagger + d^\dagger d = \Delta$. Um zu zeigen, dass \mathfrak{D} elliptisch ist, genügt es zu bestätigen, dass Δ elliptisch ist, da das Symbol eines

Produkts von Operatoren das Produkt der Symbole ist. Lassen Sie uns das Symbol von Δ ausrechnen. Für d ist $\sigma(d, \xi)\omega = \xi \wedge \omega$, und was d^\dagger anbelangt, lässt sich zeigen (Palais 1965, S. 77f.), dass gilt:

$$\sigma(d^\dagger, \xi) = -i_\xi. \quad (12.58)$$

Hier ist $i_\xi : \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{r-1}(M)$ ein inneres Produkt, definiert wie in Gleichung (5.79):

$$i_\xi(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) \equiv \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} g^{\mu_j \mu} \xi_\mu dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}^{\mu_j} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.$$

Wir haben dabei die 1-Form unter dem „“ ausgelassen und $\xi = \xi_\mu dx^\mu$ gesetzt. Das Symbol des Laplace-Operators erhält man jetzt mit (12.58) als

$$\sigma(\Delta, \xi)\omega = \sigma(dd^\dagger + d^\dagger d, \xi)\omega = -[\xi \wedge i_\xi(\omega) + i_\xi(\xi \wedge \omega)] = -i_\xi(\xi) \wedge \omega = -\|\xi\|^2 \omega,$$

wobei ω eine beliebige r -Form ist und die Norm $\| \cdot \|$ bezüglich der gegebenen Riemann'schen Metrik verwendet wird. Schließlich gelangen wir zu

$$\sigma(\Delta, \xi) = -\|\xi\|^2. \quad (12.59)$$

Somit ist der Laplace-Operator Δ elliptisch und ebenso $\mathfrak{D} = d + d^\dagger$.

Da der Laplace-Operator $\Delta = \mathfrak{D}^2$ auf $\Omega^*(M)$ selbstdual ist, verschwindet der Index von Δ trivial. Man beachte auch, dass $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\dagger$ auf $\Omega^*(M)$ und daher $\text{ind } \mathfrak{D} = 0$ ist. Wenn wir einen nichttrivialen Indexsatz konstruieren wollen, müssen wir einen Komplex finden, auf dem $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}^\dagger$ ist.

Übung 12.3 Betrachten Sie die folgende Einschränkung \mathfrak{D}^g des Operators \mathfrak{D} auf gerade Formen: $\mathfrak{D}^g : \Omega^g(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^u(M)^\mathbb{C}$, mit $\Omega^g(M)^\mathbb{C} \equiv \bigoplus \Omega^{2i}(M)^\mathbb{C}$ und $\Omega^u(M)^\mathbb{C} \equiv \bigoplus \Omega^{2i+1}(M)^\mathbb{C}$. Der zu \mathfrak{D}^g adjungierte Operator ist $\mathfrak{D}^u \equiv \mathfrak{D}^{g\dagger} : \Omega^u(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^g(M)^\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\text{ind } \mathfrak{D}^g = \dim \ker \mathfrak{D}^g - \dim \ker \mathfrak{D}^u = \chi(M).$$

(*Tipp:* Beweisen Sie: $\ker \mathfrak{D}^g = \bigoplus \text{Harm}^{2i}(M)$ und $\ker \mathfrak{D}^u = \bigoplus \text{Harm}^{2i+1}(M)$. Dieser Komplex ist zwar nichttrivial, fügt aber nichts Neues hinzu.)

Wenn $\dim M = m = 2l$ ist, gilt $* * \eta = (-1)^r \eta$ für $\eta \in \Omega^r(M)^\mathbb{C}$. Wir definieren einen Operator $\pi : \Omega^r(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^{m-r}(M)^\mathbb{C}$ durch

$$\pi \equiv i^{r(r-1)+l} *. \quad (12.60)$$

Beachten Sie, dass π eine „Quadratwurzel“ von $(-1)^r * * = 1$ ist. Tatsächlich ist für $\omega \in \Omega^r(M)^\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \pi^2 \omega &= i^{r(r-1)+l} \pi(*\omega) = i^{r(r-1)+l+(2l-r)(2l-r-1)+l} * *\omega \\ &= i^{2r^2} * *\omega = (-1)^r * *\omega = \omega, \end{aligned} \quad (12.61)$$

wobei wir beachtet haben, dass $r \equiv r^2 \pmod{2}$ ist. Wir bestätigen leicht (als Übung), dass gilt:

$$\{\pi, \mathfrak{D}\} = \pi\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\pi = 0. \quad (12.62)$$

Es wirke π auf $\Omega^*(M)^\mathbb{C} = \bigoplus \Omega^r(M)^\mathbb{C}$. Wegen $\pi^2 = 1$ hat π die Eigenwerte ± 1 . Damit erhalten wir eine Zerlegung von $\Omega^*(M)^\mathbb{C}$ in die ± 1 -Eigenräume $\Omega^\pm(M)$ von π gemäß

$$\Omega^*(M)^\mathbb{C} = \Omega^+(M) \oplus \Omega^-(M). \quad (12.63)$$

Da \mathfrak{D} und π antikommuten, definiert die Einschränkung von \mathfrak{D} auf $\Omega^+(M)$ einen elliptischen Komplex, den man **Signaturkomplex** nennt:

$$\mathfrak{D}_+ : \Omega^+(M) \rightarrow \Omega^-(M). \quad (12.64)$$

Hierbei ist $\mathfrak{D}_+ \equiv \mathfrak{D}|_{\Omega^+(M)}$. Der Index des Signaturkomplexes ist

$$\text{ind } \mathfrak{D}_+ = \dim \ker \mathfrak{D}_+ - \dim \ker \mathfrak{D}_- = \dim \text{Harm}(M)^+ - \dim \text{Harm}(M)^-. \quad (12.65)$$

mit $\mathfrak{D}_- \equiv \mathfrak{D}_+^\dagger : \Omega^-(M) \rightarrow \Omega^+(M)$ und $\text{Harm}(M)^\pm \equiv \{\omega \in \Omega^\pm(M) | \mathfrak{D}_\pm \omega = 0\}$. Auf der rechten Seite von (12.65), heben sich alle Beiträge mit Ausnahme den von den harmonischen l -Formen herührenden weg. Um dies zu sehen, separieren wir $\ker \mathfrak{D}_+$ bzw. $\ker \mathfrak{D}_-$ gemäß

$$\ker \mathfrak{D}_\pm = \text{Harm}^l(M)^\pm \oplus \sum_{0 \leq r < l} [\text{Harm}^r(M)^\pm \oplus \text{Harm}^{m-r}(M)^\pm].$$

Dabei ist $\text{Harm}^r(M)^\pm \equiv \text{Harm}(M)^\pm \cap \Omega^r(M)$. Wenn $\omega \in \text{Harm}^r(M)$ ist, erhalten wir $\omega \pm \pi\omega \in \text{Harm}^r(M)^\pm \oplus \text{Harm}^{m-r}(M)^\pm$. Dann definiert eine Abbildung $\omega + \pi\omega \mapsto \omega - \pi\omega$ einen Isomorphismus zwischen $\text{Harm}^r(M)^+ \oplus \text{Harm}^{m-r}(M)^+$ und $\text{Harm}^r(M)^- \oplus \text{Harm}^{m-r}(M)^-$. Damit vereinfacht sich der Index zu

$$\text{ind } \mathfrak{D}_+ = \dim \text{Harm}^{2k}(M)^+ - \dim \text{Harm}^{2k}(M)^-, \quad (12.66)$$

wobei wir, wie gehabt, $l = 2k$ gesetzt haben (der Index verschwindet, wenn l ungerade ist). Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass $\text{Harm}^{2k}(M)^\pm = \text{Harm}_{\pm}^{2k}(M)$ ist, wegen $\pi = *$ in $\text{Harm}^{2k}(M)$, siehe (12.54). Nun reduziert sich der Index (12.66) auf die **Hirzebruch-Signatur**

$$\text{ind } \mathfrak{D}_+ = \tau(M). \quad (12.67)$$

Die Herleitung des topologischen Indexes ist ziemlich aufwendig, weswegen wir hier lediglich das Ergebnis von Shanahan (1978) zitieren. Sei $\wedge^\pm T^* M^\mathbb{C}$ der Unterraum von $\wedge T^* M^\mathbb{C}$, sodass $\Omega^\pm(M) = \Gamma(M, \wedge^\pm T^* M^\mathbb{C})$ ist. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{topologischer Index} &= (-1)^l \int_M \text{ch}(\wedge^+ T^* M^\mathbb{C} - \wedge^- T^* M^\mathbb{C}) \left. \frac{\text{Td}(TM^\mathbb{C})}{e(TM)} \right|_{\text{vol}} \\ &= 2^l \int_M \prod_{i=1}^l \left. \frac{x_i/2}{\tanh x_i/2} \right|_{\text{vol}} = \int_M \prod_{i=1}^l \left. \frac{x_i}{\tanh x_i} \right|_{\text{vol}}, \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen nur für die $2l$ -Formen in der Entwicklung gilt, und es ist $x_i = x_i(TM^{\mathbb{C}})$. Hiermit haben wir den **Signatursatz von Hirzebruch** erhalten:

$$\tau(M) = \int_M L(TM)|_{\text{vol}}. \quad (12.68)$$

Dabei ist L das Hirzebruch'sche L -Polynom in (11.91). Da L gerade in x_i ist, verschwindet $\tau(M)$, wenn $m = 2 \bmod 4$ ist. Beispielsweise gilt $\tau(M) = 0$ für $m = 2$. Für $m = 4$ ergibt sich

$$\tau(M) = \int_M \frac{1}{3} p_1(TM) = -\frac{1}{24\pi^2} \int \text{sp} \mathcal{R}^2. \quad (12.69)$$

Wie beim Fall des Dolbeault-Komplexes können wir den Signaturkomplex auch verdrillen, siehe z. B. Eguchi *et al.* (1980).

12.6 Spinkomplexe

Das letzte Beispiel eines klassischen Komplexes ist der Spinkomplex. Dieser Komplex ist sehr wichtig für die Physik, da er Dirac-Felder beschreibt, die mit Eichfeldern und/oder Gravitationsfeldern wechselwirken.

12.6.1 Der Dirac-Operator

Lassen Sie uns ein Spinbündel $S(M)$ über einer m -dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit M betrachten. Wir wollen die Menge der Schnitte dieses Bündels mit $\Delta(M) = \Gamma(M, S(M))$ bezeichnen, und es sei $m = 2l$ eine gerade ganze Zahl. Die Spingruppe $\text{Spin}(m)$ wird durch m Dirac-Matrizen $\{\gamma^\alpha\}$ erzeugt, für die gilt:

$$\gamma^{\alpha\dagger} = \gamma^\alpha, \quad (12.70a)$$

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\delta^{\alpha\beta}. \quad (12.70b)$$

In diesem Kapitel gehen wir durchgängig davon aus, dass die Metrik die euklidische Signatur hat. Die Clifford-Algebra wird durch

$$1; \gamma^\alpha; \gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2} (\alpha_1 < \alpha_2); \dots; \gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_k} (\alpha_1 < \dots < \alpha_k); \dots; \gamma^1 \dots \gamma^{2l}$$

erzeugt. Der letzte Erzeuger ist von besonderer Bedeutung, und wir definieren

$$\gamma^{m+1} \equiv i^l \gamma^1 \dots \gamma^m. \quad (12.71)$$

Wir verwenden die Konvention $(\gamma^{m+1})^2 = I$ und $(\gamma^{m+1})^\dagger = \gamma^{m+1}$. Mit der allgemeinen Theorie der Clifford-Algebren lässt sich zeigen, dass die γ^x durch die $(2^l \times 2^l)$ -Matrizen mit komplexen Einträgen dargestellt werden. Praktischerweise wählt man

eine Darstellung von $\{\gamma^x\}$, in der γ^{m+1} diagonal ist:

$$\gamma^{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (12.72)$$

Hier ist $\mathbf{1}$ die $(2^{l-1} \times 2^{l-1})$ -Einheitsmatrix.

Beispiel 12.4. Für $m = 2$ setzen wir

$$\gamma^0 = \sigma_2, \quad \gamma^1 = \sigma_1, \quad \gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1 = \sigma_3.$$

Die σ_α sind die Pauli-Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $m = 4$ gilt z. B.

$$\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha^\beta \\ -i\bar{\alpha}^\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^\beta = (I_2, -i\sigma), \quad \bar{\alpha}^\beta = (I_2, i\sigma). \quad \gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}.$$

◊

Ein Dirac-Spinor $\psi \in \Delta(M)$ ist eine irreduzible Darstellung der Clifford-Algebra, aber *nicht* der Spingruppe $\text{Spin}(2l)$. Irreduzible Darstellungen von $\text{Spin}(2l)$ erhält man, indem $\Delta(M)$ entsprechend den Eigenwerten von γ^{m+1} separiert wird. Wegen $(\gamma^{m+1})^2 = I$ müssen die Eigenwerte von γ^{m+1} , **Chiralität** genannt, ± 1 sein. Dann wird $\Delta(M)$ in zwei Eigenräume separiert:

$$\Delta(M) = \Delta^+(M) \oplus \Delta^-(M), \quad (12.73)$$

mit $\gamma^{m+1}\psi^\pm = \pm\psi^\pm$ für $\psi^\pm \in \Delta^\pm(M)$. Die Projektionsoperatoren \mathcal{P}^\pm auf Δ^\pm sind durch

$$\mathcal{P}^+ \equiv \frac{1}{2}(I + \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.74a)$$

$$\mathcal{P}^- \equiv \frac{1}{2}(I - \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (12.74b)$$

gegeben. Somit können wir schreiben³

$$\psi^+ = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta^+(M), \quad \psi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix} \in \Delta^-(M). \quad (12.75)$$

Überzeugen Sie sich davon, dass gilt: $\mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^- = \mathbf{1}$, $(\mathcal{P}^\pm)^2 = \mathcal{P}^\pm$, $\mathcal{P}^+\mathcal{P}^- = 0$, $\mathcal{P}^\pm\psi^\pm = \psi^\pm$ und $\mathcal{P}^\pm\psi^\mp = 0$.

³ Es sei auf die leichte Nachlässigkeit in der Notation hingewiesen.

In einem gekrümmten Raum ist der **Dirac-Operator** durch

$$i\nabla\psi \equiv i\gamma^\mu \nabla_{\partial/\partial x^\mu} \psi = i\gamma^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu) \psi \quad (12.76)$$

gegeben (Abschnitt 7.10), wobei $\omega_\mu = \frac{1}{2}i\omega_\mu^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}$ der Spin-Zusammenhang ist und $\gamma^\mu = \gamma^\alpha e_\alpha^\mu$. Lassen Sie uns beweisen, dass $i\nabla$ elliptisch ist. Sei f eine Funktion, die in der Nähe von $p \in M$ definiert ist, sodass $f(p) = 0$ und $i\gamma^\mu \partial_\mu f(p) = i\gamma^\mu \xi_\mu \equiv i\xi$.⁴ Wir betrachten einen Schnitt $\tilde{\psi} \in \Delta(M)$, sodass $\tilde{\psi}(p) = \psi$ ist. Aus (12.4) folgt

$$\sigma(i\nabla, \xi)\psi = i\nabla(f\tilde{\psi})|_p = (i\nabla f)\tilde{\psi}|_p = i\xi\psi,$$

was zeigt, dass gilt:

$$\sigma(i\nabla, \xi) = i\xi. \quad (12.77)$$

Wenn wir beachten, dass $\xi\xi = \xi_\alpha \xi_\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta = \xi^\mu \xi_\mu$ ist, stellen wir fest, dass (12.77) für $i\xi \neq 0$ invertierbar ist, weswegen $i\nabla$ ein elliptischer Operator ist.

Es lässt sich zeigen, dass $\{\gamma^\alpha\}$ die Form

$$\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha_\beta \\ -i\bar{\alpha}_\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^\dagger_\beta = \bar{\alpha}_\beta \quad (12.78)$$

annehmen kann, siehe Beispiel 12.4 für $m = 2$ bzw. 4. Dann wird (12.76) zu

$$i\nabla = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.79)$$

mit

$$D \equiv \bar{\alpha}^\beta e_\beta^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu), \quad D^\dagger \equiv -\alpha^\beta e_\beta^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu). \quad (12.80)$$

Daher ist in der Tat D^\dagger der zu D adjungierte Operator (beachten Sie, dass $\partial_\mu + \omega_\mu$ anti-Hermite'sch ist). Für

$$\begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta^+(M)$$

ergibt sich

$$i\nabla \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ D\psi^+ \end{pmatrix}$$

und für

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix} \in \Delta^-(M)$$

entsprechend

$$i\nabla \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^\dagger \psi^- \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⁴ Bei einem Vektor $A = A^\mu e_\mu$ steht \mathcal{A} für $\gamma^\mu A_\mu$.

Hieraus erhalten wir $D = i\bar{\Psi}\mathcal{P}^+ : \Delta^+(M) \rightarrow \Delta^-(M)$ und $D^\dagger = i\bar{\Psi}\mathcal{P}^- : \Delta^-(M) \rightarrow \Delta^+(M)$. Nun haben wir einen 2-Term-Komplex

$$\begin{array}{ccc} \Delta^+(M) & \xrightarrow{D} & \Delta^-(M) \\ & \xleftarrow{D^\dagger} & \end{array} \quad (12.81)$$

vor uns, den man **Spinkomplex** nennt. Der analytische Index dieses Komplexes ist

$$\text{ind } D = \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger = \nu_+ - \nu_-, \quad (12.82)$$

wobei ν_+ (ν_-) die Zahl der Nullenergiemoden mit Chiralität + (-) ist.

Wenden wir den AS-Indexsatz auf diesen Fall an. Um nicht zu tief in die Details von Clifford-Algebra und Spinkomplex einzusteigen, führen wir hier einfach das Ergebnis auf. Der AS-Indexsatz für den Spinkomplex (12.81) lautet

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \text{ch}(\Delta^+(M) - \Delta^-(M)) \frac{\text{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)} \Big|_{\text{vol}} = \int_M \hat{A}(TM)|_{\text{vol}}, \quad (12.83)$$

wobei \hat{A} das durch (11.94) definierte **Dirac-Geschlecht** ist. Da \hat{A} nur $4j$ -Formen enthält, verschwindet $\nu_+ - \nu_-$ außer für $m = 0 \bmod 4$. Natürlich impliziert dies nicht notwendigerweise, dass $\nu_+ = \nu_- = 0$ ist. Den Beweis von (12.83) werden wir in den Abschnitten 12.9 und 12.10 nachreichen.

12.6.2 Verdrillte Spinkomplexe

In der Physik kann ein Spinorfeld zur Darstellung einer Gruppe G gehören. Beispielsweise gehört das Quarkfeld der QCD zu der $\mathbf{3}$ der $SU(3)$. Ein Spinor, der einer Darstellung von G angehört, ist ein Schnitt des Produktbündels $S(M) \otimes E$, wobei E in einer geeigneten Darstellung ein assoziiertes Vektorbündel von $P(M, G)$ ist. Der Dirac-Operator $D_E : \Delta^+(M) \otimes E \rightarrow \Delta^-(M) \otimes E$ ist hier

$$D_E = i\gamma^\alpha e_\alpha^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu + \mathcal{A}_\mu) \mathcal{D}_+, \quad (12.84)$$

mit \mathcal{A}_μ als dem Eichpotenzial auf E . Der AS-Indexsatz für diesen verdrillten Spinkomplex besagt:

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \hat{A}(TM) \text{ch}(E)|_{\text{vol}}. \quad (12.85)$$

Für $\dim M = 2$ erhalten wir

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \text{ch}_1(E) = \frac{i}{2\pi} \int_M \text{sp } \mathcal{F}, \quad (12.86)$$

während für $\dim M = 4$ gilt:

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M [\text{ch}_2(E) + \hat{A}_1(TM) \text{ch}_0(E)] = \frac{-1}{8\pi^2} \int_M \text{sp } \mathcal{F}^2 + \frac{\dim E}{192\pi^2} \int_M \text{sp } \mathcal{R}^2. \quad (12.87)$$

Beispiel 12.5. Sei

$$M = T^{2l} = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{2l-\text{mal}}.$$

Dann ergibt sich

$$\hat{A}(TM) = \hat{A}\left(\bigoplus_1^{2l} TS^1\right) = \prod_1^{2l} \hat{A}(TS^1) = 1.$$

Außerdem erhalten wir $\hat{A}(TS^{2l}) = 1$. Demzufolge ist der Index dieser Bündel

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \text{ch}(E)|_{\text{vol.}} \quad (12.88)$$

◇

Beispiel 12.6. Betrachten wir das Monopolbündel $P(S^2, U(1))$. Für das lokale Eichpotenzial \mathcal{A} ist die Feldstärke $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$. Der Indexsatz lautet

$$\nu_+ - \nu_- = \frac{i}{2\pi} \int_{S^2} \mathcal{F} = -\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} F, \quad (12.89)$$

mit $\mathcal{F} = iF$. Wie wir in Abschnitt 10.5 gezeigt haben, stellt die rechte Seite der Gleichung die Windungszahl $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ dar. Die analytische Information auf der linken Seite der Gleichung wird wiederum auf der rechten Seite topologisch ausgedrückt.

Sei $P(S^4, SU(2))$ das Instantonenbündel. Der Ausdruck (12.88) lautet jetzt

$$\nu_+ - \nu_- = \int_{S^4} \text{ch}_2(\mathcal{F}) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{sp } \mathcal{F}^2. \quad (12.90)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist die Instantonenzahl $k \in \pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$. Beachten Sie, dass $k > 0$ ist, wenn $\mathcal{F} = * \mathcal{F}$ ist. Ist dagegen $\mathcal{F} = -* \mathcal{F}$, so wird $k < 0$. Man kann zeigen, dass $\nu_- = 0$ ($\nu_+ = 0$) ist, wenn $k > 0$ ($k < 0$) ist, siehe Jackiw und Rebbi (1977). Sei beispielsweise \mathcal{F} selbstdual. Wir nehmen dazu an: $\psi^- \in \ker D^\dagger = \ker DD^\dagger$. Aus (12.80) erhalten wir dann

$$DD^\dagger \psi^- = [(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu)^2 + 2i\bar{\sigma}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}] \psi^- = 0,$$

mit $\bar{\sigma}_{\mu\nu} \equiv (1/4i)(\alpha^\mu \bar{\alpha}^\nu - \alpha^\nu \bar{\alpha}^\mu)$. Man kann leicht nachprüfen, dass $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ antiselbstdual ist ($\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -*\bar{\sigma}^{\nu\mu}$) und daher $\bar{\sigma}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$. Da $(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu)^2$ ein positiv definiter Operator ist, hat er keine normierbaren gebundenen Zustände. Dies bestätigt, dass $\ker D^\dagger = \emptyset$ ist. ◇

12.7 Der Wärmeleitungskern und verallgemeinerte ζ -Funktionen

Wie in Abschnitt 12.2 erwähnt, gibt es verschiedene Wege, den AS-Indexsatz zu beweisen. Der Wärmeleitungskern bietet einen relativ anschaulichen Zugang für Physiker und hat außerdem viele Anwendungen in anderen Gebieten der Physik. Die verallgemeinerte ζ -Funktion ist mit dem Wärmeleitungskern verwandt und hat ebenfalls einige physikalische Relevanz.

12.7.1 Wärmeleitungskern und Indexsatz

Sei E ein komplexes Vektorbündel über einer m -dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit M . Sei $\Delta : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ ein elliptischer Operator mit Eigenvektoren $|n\rangle$, sodass gilt:

$$\Delta|n\rangle = \lambda_n|n\rangle. \quad (12.91)$$

Wir bezeichnen die Menge der Eigenwerte von Δ als $\sigma(\Delta)$ und nehmen an, dass Δ nichtnegativ ist, d. h. alle Eigenwerte nichtnegativ sind. Wir nehmen an, es gebe n_0 Moden $|0, i\rangle$ mit verschwindendem Eigenwert ($1 \leq i \leq n_0$); anders ausgedrückt:

$$\dim \ker \Delta = n_0. \quad (12.92)$$

Diese Moden nennt man **Nullmoden**. Wir definieren jetzt den **Wärmeleitungskern** $h(t)$ durch

$$h(t) \equiv e^{-t\Delta}. \quad (12.93)$$

Es empfiehlt sich, $h(t)$ in der Koordinatenbasis darzustellen:

$$h(x, y; t) \equiv \langle x | h(t) | y \rangle = \langle x | \sum_n e^{-t\Delta} |n\rangle \langle n | y \rangle = \sum_n e^{-t\lambda_n} \langle x | n \rangle \langle n | y \rangle. \quad (12.94)$$

Mehrfache Eigenzustände sollten so oft gezählt werden, wie sie auftauchen. Wir nehmen an, $\langle x | n \rangle$ sei orthonormal: $\int \langle n | x \rangle \langle x | m \rangle dx = \delta_{mn}$. Die Konvergenz von (12.93) ist für $t > 0$ garantiert, da Δ nichtnegativ ist. Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x, y; t) = \sum_{i=1}^{n_0} \langle x | 0, i \rangle \langle 0, i | y \rangle, \quad (12.95)$$

wobei die Summation nur über die Nullmoden $|0, i\rangle$ durchgeführt wird. Somit geht $h = e^{-t\Delta}$ gegen den Projektionsoperator auf den Raum der Nullmoden:

$$e^{-t\Delta} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_0} |0, i\rangle \langle 0, i|. \quad (12.96)$$

Wir definieren

$$\tilde{h}(t) \equiv \int h(x, x; t) dx = \sum_n e^{-t\lambda_n}. \quad (12.97)$$

Damit folgt aus (12.95):

$$n_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{h}(t). \quad (12.98)$$

Man überprüft leicht, dass h der **Wärmeleitungsgleichung** genügt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x \right) h(x, y; t) = 0. \quad (12.99)$$

Wenn Δ der konventionelle Laplace-Operator ist, reduziert sich (12.99) auf die gewöhnliche Wärmeleitungsgleichung. Die Anfangsbedingung ist

$$h(x, y; 0) = \sum_n \langle x | n \rangle \langle n | y \rangle = \delta(x - y), \quad (12.100)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Vollständigkeit der Eigenvektoren folgt.

Übung 12.4 Sei $u(x, t)$ eine Lösung von (12.99), sodass $u(x, 0) = u(x)$ ist. Zeigen Sie, dass gilt:

$$u(x, t) = \int h(x, y; t) u(y) dy. \quad (12.101)$$

(*Tipp:* Beweisen Sie zuerst, dass (12.101) die Anfangsbedingung erfüllt, und dann, dass es eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.)

Es ist bekannt, dass die Lösung von (12.99) für $t \rightarrow \varepsilon$ eine asymptotische Entwicklung gemäß

$$h(x, x; \varepsilon) = \sum_i a_i(x) \varepsilon^i \quad (12.102)$$

hat, siehe Gilkey (1995). Ähnlich wird $h(t)$ entwickelt als

$$\tilde{h}(\varepsilon) \equiv \sum_i a_i \varepsilon^i, \quad (12.103)$$

mit $a_i = \int a_i(x) dx$.

Seien E und F komplexe Vektorbündel über M und $D : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, F)$ ein elliptischer Operator. Wir definieren zwei Laplace-Operatoren

$$\Delta_E \equiv D^\dagger D : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E), \quad (12.104a)$$

$$\Delta_F \equiv DD^\dagger : \Gamma(M, F) \rightarrow \Gamma(M, F). \quad (12.104b)$$

Es ist wichtig, zu beachten, dass diese Operatoren dieselben nichtverschwindenden Eigenwerte inklusive Entartung haben. Um dies zu sehen, setzen wir $\Delta_E |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$. Dann gibt es einen Vektor $D|\lambda\rangle \in \Gamma(M, F)$, sodass gilt:

$$\Delta_F(D|\lambda\rangle) = DD^\dagger D|\lambda\rangle = D\Delta_E|\lambda\rangle = \lambda(D|\lambda\rangle).$$

Beachten Sie, dass $D|\lambda\rangle \neq 0$ ist, wegen $\ker \Delta_E = \ker D$. Umgekehrt ist, wenn $|\mu\rangle \in \Gamma(M, F)$ die Bedingung $\Delta_F |\mu\rangle = \mu |\mu\rangle$ erfüllt, $D^\dagger |\mu\rangle \in \Gamma(M, E)$ ein Eigenvektor von Δ_E

zu demselben Eigenwert μ . Damit haben wir die Symmetrie⁵

$$\sigma'(\Delta_E) = \sigma'(\Delta_F) \quad (12.105)$$

gefunden. Der Strich ('') steht dabei dafür, dass die Nulleigenmoden weggelassen wurden.

Wir definieren zwei Wärmeleitungskerne h_E und h_F gemäß

$$h_E(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \langle x | n \rangle \langle n | y \rangle, \quad (12.106a)$$

$$h_F(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\mu_m t} \langle x | m \rangle \langle m | y \rangle \quad (12.106b)$$

und erhalten damit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{h}_E(t) = \dim \ker \Delta_E = \dim \ker D, \quad (12.107a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{h}_F(t) = \dim \ker \Delta_F = \dim \ker D^\dagger. \quad (12.107b)$$

Interessanter ist der Index von D . Wegen $\ker D = \ker \Delta_E$ und $\ker D^\dagger = \ker \Delta_F$ ist

$$\begin{aligned} \text{ind } D &= \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger = \dim \ker \Delta_E - \dim \ker \Delta_F \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{h}_E(t) - \tilde{h}_F(t)] = \tilde{h}_E(t) - \tilde{h}_F(t). \end{aligned} \quad (12.108)$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt daraus, dass sich der t -abhängige Anteil von $\tilde{h}_E(t) - \tilde{h}_F(t)$ wegen der Symmetrie (12.105) weghebt. Wir entwickeln $\tilde{h}_E(t)$ und $\tilde{h}_F(t)$ als

$$\tilde{h}_E(t) = \sum_i a_i^E t^i, \quad \tilde{h}_F(t) = \sum_i a_i^F t^i.$$

Wenn wir die t -unabhängigen Terme herausgreifen, ergibt sich

$$\text{ind } D = a_0^E - a_0^F = \int [a_0^E(x) - a_0^F(x)] dx, \quad (12.109)$$

wobei die $a_0^{E,F}(x)$ wie in (12.102) definiert sind.

Im Allgemeinen sind die $a_0^{E,F}(x)$ lokale Invarianten, geschrieben in Abhängigkeit von Krümmungs-2-Formen. In Abschnitt 13.2 werden wir den Wärmeleitungskern verwenden, um den Indexsatz

$$\text{ind } D = \nu_+ - \nu_- = \int_M \text{ch}(\mathcal{F})|_{\text{vol}}$$

für den verdrillten Spinkomplex über einer Mannigfaltigkeit mit $\hat{A}(TM) = 1$ zu beweisen.

Übung 12.5 Seien D , D^\dagger , Δ_E und Δ_F wie gehabt. Zeigen Sie, dass

$$I(s) \equiv \text{sp} \left[\frac{s}{\Delta_E + s} - \frac{s}{\Delta_F + s} \right] \quad (\text{Re } s > 0) \quad (12.110)$$

unabhängig von s ist. Zeigen Sie außerdem, dass $I(s) = \text{ind } D$ ist.

⁵ Dies ist eine Art von „Supersymmetrie“, siehe Abschnitt 12.10.

12.7.2 Spektrale ζ -Funktionen

Seien E und F Vektorbündel über M . Wir definieren eine neue Funktion

$$\zeta_E(x, y; s) \equiv \sum_n' \langle x|n\rangle \langle n|y\rangle \lambda_n^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 0), \quad (12.111)$$

wobei $\Delta_E|n\rangle = \lambda_n|n\rangle$ ist und der Strich ('') wieder für das Auslassen der Nullmoden ($\lambda_0 = 0$) steht. Auf ähnliche Weise kann man eine Funktion $\zeta_F(x, y; s)$ für Δ_F definieren. Die Funktionen h_E und ζ_E hängen über die **Mellin-Transformation** zusammen. Um dies zu sehen, erinnern wir uns an die Definition der Γ -Funktion:

$$\Gamma(s) \equiv \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt = \lambda^s \int_0^\infty t^{s-1} e^{-\lambda t} dt,$$

mit streng positivem λ . Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(x, y; s) &= \sum_n' \int_0^\infty t^{s-1} e^{-\lambda_n t} \langle x|n\rangle \langle n|y\rangle dt \\ &= \int_0^\infty t^{s-1} \left[h(x, y; t) - \sum_i \langle x|0, i\rangle \langle 0, i|y\rangle \right] dt. \end{aligned} \quad (12.112)$$

Wir erkennen außerdem, dass

$$\zeta_\Delta(s) \equiv \int_M \zeta(x, x; s) dx = \sum_n' \lambda_n^{-s} \quad (12.113)$$

die spektrale ζ -Funktion ist, die wir in (1.158) definiert hatten.

Übung 12.6 Bestätigen Sie, dass gilt:

$$\Delta^{-s} f(x) = \int \zeta(x, y; s) f(y) dy, \quad (12.114)$$

wobei die allgemeine Potenz eines Operators im Sinn eines Eigenwerts definiert wird, d. h., wir setzen $\Delta^{-s}|n\rangle = \lambda_n^{-s}|n\rangle$. Wir nehmen dabei $\operatorname{Re} s$ hinreichend groß an, sodass (12.114) wohldefiniert ist. (Tipp: Verwenden Sie die Vollständigkeit der Eigenvektoren.)

Beispiel 12.7. Das folgende Beispiel wurde Kulkarni (1975) entnommen. Es seien $M = S^1 = \{e^{i\theta}\}$ und $E = F =$ ein triviales Geradenbündel über S^1 (d. h. ein Zylinder). Wir betrachten einen Operator $\Delta \equiv -\partial^2/\partial\theta^2$. Aus der Eigenwertgleichung

$$-\frac{\partial^2 e^{in\theta}}{\partial\theta^2} = n^2 e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ergibt sich

$$\lambda_n = n^2, \quad \langle \theta | n \rangle = (2\pi)^{-1/2} e^{in\theta}.$$

Der Wärmeleitungskern ist

$$h(\theta_1, \theta_2; t) = \sum e^{-n^2 t} \langle \theta_1 | n \rangle \langle n | \theta_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sum' e^{-n^2 t} e^{in(\theta_1 - \theta_2)} \right), \quad (12.115)$$

während gilt:

$$\zeta(\theta_1, \theta_2; s) = \sum' n^{-2s} \langle \theta_1 | n \rangle \langle n | \theta_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum' n^{-2s} e^{in(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (12.116)$$

Wir bestätigen leicht, dass $\tilde{h}(t) = 1 + \sum' e^{-n^2 t}$ die Ungleichung

$$1 + 2 \int_1^\infty e^{-x^2 t} dx < \tilde{h}(t) < 1 + 2 \int_0^\infty e^{-x^2 t} dx$$

erfüllt, was uns auf

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 t} dx - 1 < \tilde{h}(t) < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 t} dx + 1$$

führt. Mit

$$\int e^{-x^2 t} dx = \sqrt{\pi} t^{-1/2}$$

erhalten wir schließlich

$$\sqrt{\pi} t^{-1/2} - 1 < \tilde{h}(t) < \sqrt{\pi} t^{-1/2} + 1.$$

Dies zeigt, dass gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{h}(t) \sim \sqrt{\pi} t^{-1/2}. \quad (12.117)$$

Im Allgemeinen beginnt die asymptotische Reihe mit $t^{-\dim M/2}$. ◊

12.8 Der Atiyah-Patodi-Singer-Indexesatz

Bisher haben wir uns mit Indexsätzen auf kompakten Mannigfaltigkeiten ohne Rand befasst. In praktischen physikalischen Situationen muss man aber auch oft den Index eines Operators finden, der über einem Basisraum M mit einem Rand definiert ist. Wir wollen jetzt die Erweiterungen des AS-Indexesatzes auf diese Fälle diskutieren. Unsere Diskussion beschränkt sich dabei auf Spinbündel über M , da dies diejenige Situation ist, mit der wir uns in Kapitel 13 näher beschäftigen werden.

12.8.1 η -Invariante und spektraler Fluss

Sei $i\nabla$ ein Hermite'scher Dirac-Operator, definiert auf einer ungeraddimensionalen Mannigfaltigkeit M ($\dim M = 2l + 1$). Da $i\nabla$ Hermite'sch ist, sind seine Eigenwerte λ_k reell. Wir definieren die **η -Invariante** von $i\nabla$ über die spektrale Asymmetrie von $i\nabla$:

$$\eta \equiv \sum_{\lambda_k > 0} 1 - \sum_{\lambda_k < 0} 1. \quad (12.118)$$

Dies ist nicht wohldefiniert und erfordert daher eine geeignete Regularisierung. Beispielsweise können wir η durch $\lim_{s \rightarrow 0} \eta(s)$ definieren, mit

$$\eta(s) \equiv \sum'_k \operatorname{sgn}(\lambda_k) |\lambda_k|^{-2s} \quad (\operatorname{Re} s > 0). \quad (12.119)$$

Es lässt sich zeigen, dass unter geeigneten Randbedingungen $\eta(s)$ keine Polstelle bei $s = 0$ hat.

Übung 12.7 Betrachten Sie die Mellin-Transformation

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) a^{-(s+1)/2} = \int_0^\infty dx x^s e^{-ax^2} \quad (a > 0)$$

und bestätigen Sie, dass gilt:

$$\eta(s) = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+1))} \int_0^\infty dx x^s \operatorname{sp} i\nabla e^{-x^2(i\nabla)^2}. \quad (12.120)$$

Es trete jetzt ein Dirac-Feld in Wechselwirkung mit einem äußeren Eichpotenzial \mathcal{A}_t ($t \in [0, 1]$). Der Dirac-Operator $i\nabla(\mathcal{A}_t)$ hat ein t -abhängiges Eigenwertproblem. Wenn ein Eigenwert von $i\nabla(\mathcal{A}_t)$ die Null kreuzt, macht die η -Invariante einen Sprung um ± 2 . Dieser Sprung gibt den **spektralen Fluss** von Moden mit $\lambda \geq 0$ zu solchen mit $\lambda \leq 0$ an. Springt η um $+2$ (-2), gibt es einen Fluss eines Zustands von $\lambda < 0$ nach $\lambda > 0$ ($\lambda > 0$ nach $\lambda < 0$), siehe Abb. 12.1. Außer dieser unstetigen, mit dem spektralen Fluss assoziierten Änderung hat $i\nabla$ auch eine stetige Variation η_c . Wir erhalten

$$\eta(t=1) - \eta(t=0) = \int_0^1 dt \frac{d\eta_c}{dt} + 2 \cdot (\text{spektraler Fluss}). \quad (12.121)$$

12.8.2 Der Atiyah-Patodi-Singer-(APS)-Indexsatz

Betrachten wir einen $(2l+2)$ -dimensionalen Dirac-Operator

$$i\hat{D}_{2l+2} = i\sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2 \otimes i\nabla(\mathcal{A}_t) = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.122a)$$

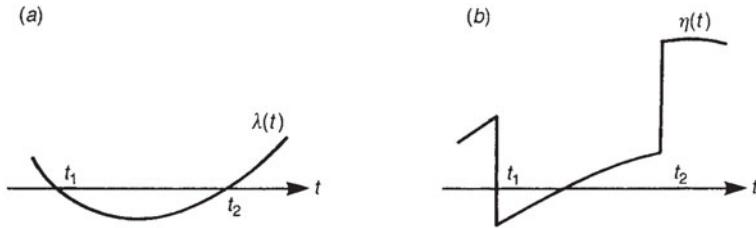


Abb. 12.1. Immer wenn ein Eigenwert λ die Nulllinie kreuzt (a), springt die η -Invariante um ± 2 (b). Das Vorzeichen hängt davon ab, in welche Richtung λ die Nulllinie kreuzt.

mit⁶

$$D = i\partial_t - \nabla(\mathcal{A}_t), \quad D^\dagger = i\partial_t + \nabla(\mathcal{A}_t). \quad (12.122b)$$

Satz 12.3. (Atiyah-Patodi-Singer-Indexesatz) Seien M eine ungeraddimensionale Mannigfaltigkeit und $i\nabla(\mathcal{A}_t)$ ein mit dem äußeren Eichfeld \mathcal{A}_t wechselwirkender Dirac-Operator auf M . Dann ist

$$\begin{aligned} \text{ind } D &= \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger \\ &= \int_{M \times I} \hat{A}(\mathcal{R}) \text{ch}(\mathcal{F})|_{\text{vol}} - \frac{1}{2} [\eta(i\nabla(\mathcal{A}_1)) - \eta(i\nabla(\mathcal{A}_0))]. \end{aligned} \quad (12.123)$$

Das allgemeine Argument zeigt, dass für den stetigen Anteil η_c der η -Invarianten gilt:

$$\int_0^1 dt \frac{d\eta_c}{dt} = 2 \int_{M \times I} \hat{A}(\mathcal{R}) \text{ch}(\mathcal{F})|_{\text{vol}}. \quad (12.124)$$

Dann ist die rechte Seite von Gleichung von (12.123) einfach der spektrale Fluss:

$$-\frac{1}{2} [\eta(t=1) - \eta(t=0)] + \frac{1}{2} \int_0^1 dt \frac{d\eta_c}{dt} = -(\text{spektraler Fluss}).$$

Daraus erhalten wir eine weitere Form des Atiyah-Patodi-Singer-Indexesatzes:

$$\text{ind } i\hat{D}_{2l+2} = -(\text{spektraler Fluss}). \quad (12.125)$$

Den Beweis des Atiyah-Patodi-Singer-Indexesatzes finden Sie in seiner allgemeinsten Form bei Atiyah *et al.* (1975a, b, 1976). Einen Physiker-Beweis lesen Sie bei Alvarez-Gaumé *et al.* (1985). Wir werden den APS-Indexesatz in Abschnitt 13.6 verwenden, um die ungeraddimensionale Paritätsanomalie zu untersuchen.

⁶ Die Positionen von D und D^\dagger sind vertauscht, da für unsere Wahl der γ -Matrizen $\gamma^{2l+3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt, vgl. (12.79).

Beispiel 12.8. Um zu verstehen, warum der spektrale Fluss im Indexsatz auftaucht, betrachten wir ein Beispiel aus Atiyah (1985). Seien $M = S^1$ und θ deren Koordinate. Wir betrachten einen Hermite'schen Operator

$$i\nabla_t \equiv i\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - it\right) = i\partial_\theta + t \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (12.126)$$

Den Term $-it$ interpretieren wir als ein $U(1)$ -Eichpotenzial. Eigenvektor und Eigenwert von $i\nabla_t$ sind

$$\psi_{n,t}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\theta} (n \in \mathbb{Z}), \quad \lambda_n(t) = n + t.$$

Wegen $\sigma(i\nabla_t) = \sigma(i\nabla_{t+1})$ ist die Operatorenfamilie $i\nabla_t$ periodisch in t mit der Periode 1, siehe Abb. 12.2. Diese Periodizität manifestiert sich in der Eichäquivalenz von $i\nabla_t$ und $i\nabla_{t+1}$:

$$i\nabla_{t+1} = e^{it} i\nabla_t e^{-it}.$$

Der spektrale Fluss von $\lambda < 0$ nach $\lambda > 0$ bei $t = 0$ ist exakt eins, während t von $-\varepsilon$ nach $1 - \varepsilon$ läuft, mit einer kleinen positiven Zahl ε . Aus $i\nabla_t$ konstruieren wir einen zweidimensionalen Dirac-Operator

$$iD_2 \equiv i\sigma_1 \otimes \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2 \otimes i\nabla_t = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.127a)$$

mit

$$D \equiv i\partial_t + \partial_\theta - it, \quad D^\dagger \equiv i\partial_t - \partial_\theta + it. \quad (12.127b)$$

Diese Operatoren wirken auf Funktionen, welche die folgenden Randbedingungen erfüllen:

$$\phi(\theta + 2\pi, t) = \phi(\theta, t), \quad \phi(\theta, t + 1) = e^{it} \phi(\theta, t). \quad (12.128)$$

Sei $\phi_0 \in \ker D^\dagger$. Die Fourier-Entwicklung ist

$$\phi_0(\theta, t) = \sum a_n(t) e^{-in\theta}.$$

Aus $D^\dagger \phi_0 = 0$ folgt:

$$a'_n(t) + (n + t)a_n(t) = 0,$$

wofür sich leicht die Lösung

$$a_n(t) = c_n \exp\left(-\frac{(n + t)^2}{2}\right)$$

ergibt. Die Randbedingungen (12.128) erfordern:

$$\sum_n c_n \exp\left(-\frac{(n + t + 1)^2}{2}\right) e^{-in\theta} = \sum_n c_n \exp\left(-\frac{(n + t)^2}{2}\right) e^{-i(n-1)\theta},$$

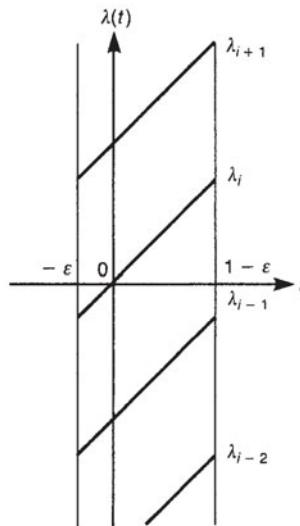


Abb. 12.2. Zeitliche Entwicklung der Eigenwerte von $i\nabla_t$. Hier hat $\sigma(i\nabla_t)$ die Periode 1. Der i -te Eigenwert kreuzt die Nulllinie bei $t = 0$, weswegen hier der spektrale Fluss eins vorliegt.

woraus sich ergibt, dass c_n unabhängig von n ist. Daher ist $\ker D^\dagger$ eindimensional und wird durch die theta-Funktion aufgespannt:

$$\phi_0(\theta, t) = \sum \exp\left(-\frac{(n+t)^2}{2} - in\theta\right). \quad (12.129)$$

Nehmen wir an, es sei $\tilde{\phi}_0(\theta, t) \in \ker D$. Wenn wir $\tilde{\phi}_0(\theta, t) = \sum b_n(t)e^{-in\theta}$ setzen, erfüllt $b_n(t)$ die Gleichung

$$b'_n(t) - (n+t)b_n(t) = 0.$$

Die Lösung hiervon ist

$$b_n(t) = b_n(0) \exp \frac{(n+t)^2}{2},$$

weswegen $\tilde{\phi}_0$ nicht normiert werden kann. Dies zeigt, dass

$$\text{ind } D = \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger = -1$$

ist, also gerade das Negative des spektralen Flusses. \diamond

12.9 Supersymmetrische Quantenmechanik

Im nächsten Abschnitt werden wir den *Physiker*-Beweis des Indexsatzes in seiner einfachsten Form vorstellen. Dieser Beweis wird sich stark an die Pfadintegralfor-

mulierung der supersymmetrischen Quantenmechanik (SUSYQM) anlehnen, welche wir deshalb in diesem Abschnitt umreißen wollen.

Wir haben bereits die Pfadintegralquantisierung von Bosonen und Fermionen kennengelernt. Werden diese beiden Teilchenarten kombiniert, tritt eine neue Symmetrie auf den Plan, welche man **Supersymmetrie** nennt. Wir werden später eine spezielle Klasse von SUSYQM einführen. Es wird sich herausstellen, dass dies wesentlich für den Beweis eines Indexsatzes ist.

Dieser und der nächste Abschnitt können auch getrennt von den übrigen Teilen dieses Kapitels gelesen werden, da wir die nötigen Hilfsmittel aufführen werden, womit dieser Teil zu einer in sich abgeschlossenen Einheit wird. Unsere Darstellung folgt Alvarez (1995) und Nakahara (1998). Originalarbeiten sind Alvarez-Gaumé (1983) sowie Friedan und Windey (1984, 1985).

12.9.1 Clifford-Algebra und Fermionen

Wir beschränken uns für den Anfang auf ein Teilchen, das sich durch den \mathbb{R}^3 bewegt. Allgemeinere Settings werden wir uns später vornehmen. Seien $\{\psi_i\} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ reelle Graßmann-Variablen, wobei $i = 1, 2, 3$ den Koordinatenindex bezeichnet. Die $\{\psi_i\}$ genügen der Algebra

$$\{\psi_i, \psi_j\} = 0.$$

Betrachten wir die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{i}{2}\psi_i \dot{\psi}_i - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}B_i\psi_j\psi_k, \quad (12.130)$$

mit einer reellen Zahl B_i . Der kanonisch konjugierte Impuls für ψ_i ist

$$\pi_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} = -\frac{i}{2}\psi_i.$$

Die Hamilton-Funktion ist dann

$$H = -\dot{\psi}_i \frac{i}{2}\psi_i - L = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}B_i\psi_j\psi_k, \quad (12.131)$$

und die Poincaré-1-Form dieses Systems lautet

$$\theta = \frac{i}{2}\psi_i d\psi_i. \quad (12.132)$$

Die korrespondierende symplektische 2-Form ist

$$\omega = d\theta = \frac{i}{2}d\psi_i \wedge d\psi_i, \quad (12.133)$$

woraus wir die Poisson-Klammer

$$[\psi_j, i\psi_k]_{PK} = i\delta_{jk} \quad (12.134)$$

erhalten. Das System wird quantisiert, indem die Poisson-Klammer durch die Antikommutatorrelation

$$\{\psi_j, \psi_k\} = \delta_{jk} \quad (12.135)$$

ersetzt wird. Diese Antikommutatorrelation wird **Clifford-Algebra** im \mathbb{R}^3 genannt. Sei σ_i die i -te Komponente der Pauli-Matrizen. Mithilfe von

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}$$

überprüft man leicht, dass $\psi_i = \sigma_i/\sqrt{2}$ die zweidimensionale Darstellung der Clifford-Algebra ist. Es ist bekannt, dass die endlichdimensionale irreduzible Darstellung der Clifford-Algebra eindeutig ist (modulo Konjugationstransformationen). Somit entpuppt sich der Hilbert-Raum dieses Systems als $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Der Hamilton-Operator schreibt sich in Abhängigkeit von den Pauli-Matrizen als

$$H = -\frac{1}{2}B \cdot \sigma. \quad (12.136)$$

Dieser Operator ist als **Pauli-Hamilton-Operator** bekannt, er beschreibt einen Spin in einem Magnetfeld.

Auf ähnliche Weise wirkt eine in \mathbb{R}^{2n} und \mathbb{R}^{2n+1} definierte Clifford-Algebra auf den Hilbert-Raum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^n}$.

12.9.2 Supersymmetrische Quantenmechanik im flachen Raum

Der Pauli-Hamilton-Operator enthält nur die Spinkoordinaten ψ_i , ist also unabhängig von den Raumkoordinaten x_k . Dementsprechend kann er keinen bewegten Spin beschreiben. Nun modifizieren wir den Hamilton-Operator so, dass der Spin auch im Raum umherwandern kann. Dies kann man durch Addition eines kinetischen Terms zum Hamilton-Operator erreichen. Lassen Sie uns einen Spin im \mathbb{R}^d betrachten. Wir setzen $B = 0$ und erhalten

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}_k \dot{x}_k + \frac{i}{2}\psi_k \dot{\psi}_k. \quad (12.137)$$

Die Koeffizienten dieser Lagrange-Funktion wurden so gewählt, dass das System eine Supersymmetrie hat (deren genaue Definition wir nachreichen werden). Die kanonisch konjugierten Impulse sind $p_k = \dot{x}_k$ und $\pi_k = -i\psi_k/2$, woraus sich die folgenden Poisson-Klammern für dieses System ergeben:

$$[x_j, x_k]_{PK} = [p_j, p_k]_{PK} = 0, \quad [x_j, p_k]_{PK} = [\psi_j, \psi_k]_{PK} = \delta_{jk}.$$

Hieraus lassen sich leicht (Anti-)Kommutatorrelationen ableiten. Die kanonischen (Anti-)Kommutatorrelationen sind

$$[x_j, x_k] = [p_j, p_k] = 0, \quad [x_j, p_k] = \{\psi_j, \psi_k\} = \delta_{jk}. \quad (12.138)$$

Der Hamilton-Operator lautet

$$H = \dot{x}_j p_j - \dot{\psi}_j \frac{i}{2} \psi_j - L = \frac{1}{2} p^2 = -\frac{1}{2} \Delta, \quad (12.139)$$

wobei $\Delta = \sum_{k=1}^d \partial_k^2$ den d -dimensionalen Laplace-Operator darstellt. Der Hilbert-Raum, auf welchem H wirkt, ist $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^{2^n}$, wobei $L^2(\mathbb{R}^d)$ für die Menge der quadratintegrablen Funktionen im \mathbb{R}^d steht und $n \equiv [d/2]$ der ganzzahlige Anteil⁷ von $d/2$ ist.

Variation der Lagrange-Funktion führt auf

$$\delta L = \dot{x}_j \frac{d}{dt} \delta x_j + \frac{i}{2} \delta \psi_j \dot{\psi}_j + \frac{i}{2} \psi_j \frac{d}{dt} \delta \psi_j.$$

Lassen Sie uns nachprüfen, dass die Lagrange-Funktion invariant unter der **Supersymmetrietransformation**

$$\delta x_j = i\epsilon \psi_j, \quad \delta \psi_j = -\epsilon \dot{x}_j \quad (12.140)$$

ist. Dabei ist ϵ eine „infinitesimale“ reelle Graßmann-Konstante. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} \delta L &= i\dot{x}_j \epsilon \dot{\psi}_j - \frac{i}{2} \epsilon \dot{x}_j \dot{\psi}_j - \frac{i}{2} \psi_j \epsilon \ddot{x}_j \\ &= i\dot{x}_j \epsilon \dot{\psi}_j - \frac{i}{2} \epsilon \dot{x}_j \dot{\psi}_j - \frac{i}{2} \frac{d}{dt} (\psi_j \epsilon \dot{x}_j) + \frac{i}{2} \dot{\psi}_j \epsilon \dot{x}_j \\ &= -\frac{i}{2} \frac{d}{dt} (\psi_j \epsilon \dot{x}_j), \end{aligned} \quad (12.141)$$

und die Wirkung $S = \int L dt$ bleibt invariant. Die zugehörige Ladung (der Erzeuger) heißt **Superladung** und wird über das Noether-Theorem definiert:⁸

$$\epsilon Q \equiv i\epsilon p_j \psi_j = i\epsilon \psi_j p_j = i\epsilon \psi_j \dot{x}_j. \quad (12.142)$$

Übung 12.8 Zeigen Sie, dass gilt:

$$\delta x_j = [x_j, \epsilon Q], \quad (12.143)$$

$$\delta \psi_j = \{\psi_j, \epsilon Q\}. \quad (12.144)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass Q der Erzeuger der SUSY-Transformationen ist.

Wir wählen nun eine gerade ganze Zahl $d = 2n$ und quantisieren das System. Dazu führen wir die Matrixdarstellung $\psi_j = \gamma_j / \sqrt{2}$ ein, was die im vorigen Unterabschnitt beschriebene zweidimensionale Darstellung verallgemeinert. Hierbei sind die γ_j die d -dimensionalen Dirac-Matrizen, welche die Clifford-Algebra

$$\{\gamma_j, \gamma_k\} = 2\delta_{ij} \quad (12.145)$$

erfüllen. Der Hamilton-Operator wirkt auf den Hilbert-Raum

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathbb{C}^{2^n},$$

⁷ die Gauß-Klammer (Anm. d. Ü.)

⁸ Beachten Sie, dass die Masse des Teilchens auf eins gesetzt wurde und daher $p_j = \dot{x}_j$ ist.

und die Superladung nimmt, nach Diagonalisierung der Koordinate, die Form

$$Q = i\psi_j p_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (12.146)$$

an. Der Operator

$$\not{d} \equiv \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (12.147)$$

ist nichts anderes als der Dirac-Operator im euklidischen Raum \mathbb{R}^{2n} und wird eine bedeutende Rolle beim Beweis des Indexatzes spielen.

Die Superladung Q zeigt unter der SUSY-Transformation (12.140) ein interessantes Verhalten:

$$\begin{aligned} \delta Q &= i(\delta\psi_j)\dot{x}_j + i\psi_j \frac{d}{dt}\delta x_j = i(-\epsilon\dot{x}_j)\dot{x}_j + i\psi_j(i\epsilon\dot{\psi}_j) \\ &= -i\epsilon\dot{x}_j\dot{x}_j + \epsilon\psi_j\dot{\psi}_j = -2i\epsilon \left(\frac{1}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j + \frac{i}{2}\psi_j\dot{\psi}_j \right) \\ &= -2i\epsilon L. \end{aligned} \quad (12.148)$$

Die Variation der Superladung unter einer infinitesimalen SUSY-Transformation ist also die Lagrange-Funktion!

Wir betrachten als nächstes die Beziehung zwischen der Superladung und dem Hamilton-Operator des Systems, indem wir zwei aufeinanderfolgende SUSY-Transformationen mit den Grassmann-Parametern ϵ_1 und ϵ_2 untersuchen. Wenn die Transformation mit ϵ_1 zuerst angewandt wird und dann die mit ϵ_2 , erhalten wir

$$\begin{aligned} x_j &\xrightarrow{\epsilon_1} x_j + i\epsilon_1\psi_j \xrightarrow{\epsilon_2} x_j + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)\psi_j - i\epsilon_1\epsilon_2\dot{x}_j, \\ \psi_j &\xrightarrow{\epsilon_1} \psi_j - \epsilon_1\dot{x}_j \xrightarrow{\epsilon_2} \psi_j - (\epsilon_1 + \epsilon_2)\dot{x}_j - i\epsilon_1\epsilon_2\dot{\psi}_j. \end{aligned}$$

Mit der umgekehrten Reihenfolge der SUSY-Transformationen ergibt sich dagegen

$$\begin{aligned} x_j &\rightarrow x_j + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)\psi_j - i\epsilon_2\epsilon_1\dot{x}_j, \\ \psi_j &\rightarrow \psi_j - (\epsilon_1 + \epsilon_2)\dot{x}_j - i\epsilon_2\epsilon_1\dot{\psi}_j. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die Kommutatorrelation der SUSY-Variationen:

$$[\delta_{\epsilon_2}, \delta_{\epsilon_1}] = \delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2} = -2i\epsilon_1\epsilon_2 \frac{\partial}{\partial t}. \quad (12.149)$$

Die Beobachtung, dass die Kommutatorrelation zweier SUSY-Transformationen eine zeitliche Ableitung, d. h. der Hamilton-Operator ist, legt die Vermutung nahe, dass die Antikommutatorrelation der Superladung, also der Erzeuger der SUSY-Transformation, ebenfalls auf den Hamilton-Operator führt. In der Tat erhalten wir

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} &= 2Q^2 = 2(ip_j\psi_j)(ip_k\psi_k) \\ &= -p_j p_k (\psi_j\psi_k + \psi_k\psi_j) = -p_j p_k \delta_{jk} = -2H. \end{aligned}$$

Letzten Endes reduziert sich die SUSY-Algebra auf

$$Q^2 = -H. \quad (12.150)$$

Da Q anti-Hermite'sch ist, ist der Hamilton-Operator ein Hermite'scher Operator mit nichtnegativem Spektrum.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass wir mit den Gleichungen (12.148) und (12.141) die Relationen

$$\delta Q = -2i\epsilon L, \quad \delta L = \frac{1}{2}\epsilon \frac{dQ}{dt} \quad (12.151)$$

bewiesen haben. Vergleichen wir dies mit den SUSY-Transformationen der Koordinaten x_j und ψ_j in (12.140), so fällt sofort ins Auge, dass die bosonischen Größen (x_j und L) ihre Rollen mit den fermionischen (ψ_j und Q) getauscht haben. Beachten Sie, dass die Variation der Superladung Q in (12.151) immer eine zeitliche Ableitung der Lagrange-Funktion L ist. Dies ist entscheidend für die Konstruktion einer SUSY-invarianten Lagrange-Funktion aus der Superladung Q .

12.9.3 Supersymmetrische Quantenmechanik in allgemeinen Mannigfaltigkeiten

Sei M eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit $\dim M = 2n$. Die Riemann'sche Metrik ist

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

und das innere Produkt von zwei Vektoren X und Y bezüglich dieser Metrik schreibt sich als

$$\langle X, Y \rangle = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu.$$

Der Vektor $\psi^\mu(t)$ gehört an jedem Zeitpunkt t zu $TM_{x(t)}$. Daher gehorcht $\psi^\mu(t)$ der gewöhnlichen Transformationsregel für Vektoren unter der Koordinatentransformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu(x^\nu)$:

$$\psi^\mu \rightarrow \psi'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \psi^\nu. \quad (12.152)$$

Damit transformieren sich die Koordinaten unter der SUSY-Transformation $\delta \equiv \delta_\epsilon$ wie

$$\delta x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} i\epsilon \psi^\nu = i\epsilon \psi'^\mu$$

und

$$\begin{aligned} \delta \psi'^\mu &= \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \delta x^\lambda \psi^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \delta \psi^\nu \\ &= \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} i\epsilon \psi^\lambda \psi^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} (-i\epsilon \dot{x}^\nu) = -\epsilon \dot{x}'^\mu. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Antikommutativität der Grassmann-Zahlen ausgenutzt, um das letzte Gleichheitszeichen zu erhalten. Diese Transformationsregeln zeigen, dass die SUSY-Transformation kovariant unter der Koordinatentransformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ ist.

Die im vorigen Unterabschnitt eingeführte Superladung Q sollte sich folgendermaßen auf die Mannigfaltigkeit M verallgemeinern lassen:

$$Q = i\langle \dot{x}, \psi \rangle = ig_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\psi^\nu. \quad (12.153)$$

Die SUSY-invariante Lagrange-Funktion auf M wird aus der SUSY-Variation dieser Superladung Q konstruiert gemäß

$$\begin{aligned} \delta Q &= i\partial_\lambda g_{\mu\nu}\delta x^\lambda \dot{x}^\mu \psi^\nu + ig_{\mu\nu}\delta \dot{x}^\mu \psi^\nu + ig_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \delta \psi^\nu \\ &= i\partial_\lambda g_{\mu\nu}i\epsilon \psi^\lambda \dot{x}^\mu \psi^\nu + ig_{\mu\nu}(i\epsilon \dot{\psi}^\mu) \psi^\nu + ig_{\mu\nu}\dot{x}^\mu (-\epsilon \dot{x}^\nu) \\ &= -2i\epsilon \left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{i}{2}g_{\mu\nu}\psi^\nu \dot{\psi}^\mu - \frac{i}{2}\dot{x}^\mu \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\nu})\psi^\lambda \psi^\nu \right] \\ &= -2i\epsilon \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{i}{2}g_{\mu\nu}\psi^\nu \dot{\psi}^\mu + \frac{i}{2}\dot{x}^\mu g_{\lambda\rho} \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \psi^\lambda \psi^\nu \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\lambda g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\rho} - \partial_\rho g_{\lambda\mu})$$

das mit dem Levi-Civita-Zusammenhang assoziierte Christoffel-Symbol ist – beachten Sie die Symmetrie $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$. Aus dem Vergleich dieses δQ mit (12.151) lesen wir die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{i}{2}g_{\mu\nu}(x)\psi^\mu \left(\frac{d\psi^\nu}{dt} + \dot{x}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\kappa}(x)\psi^\kappa \right) \\ &= \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{i}{2}\left\langle \psi, \frac{D\psi}{Dt} \right\rangle \end{aligned} \quad (12.154)$$

ab. Hier ist $D\psi/Dt$ die kovariante Ableitung von ψ entlang der Kurve $x(t)$.

Übung 12.9 Zeigen Sie, dass die SUSY-Variation der Lagrange-Funktion proportional zur zeitlichen Ableitung der Superladung ist:

$$\delta L = \frac{1}{2}\epsilon \frac{dQ}{dt}. \quad (12.155)$$

Die Quantenversion der Superladung ist

$$Q \sim g_{\mu\nu}p^\mu \gamma^\nu, \quad (12.156)$$

d. h. der Dirac-Operator \not{D} auf M .

Lassen Sie uns noch ein paar Symbole definieren, die wir im nächsten Abschnitt verwenden werden. Die Zusammenhangs-1-Form ist

$$\Gamma^\mu{}_\nu = dx^\lambda \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}, \quad (12.157)$$

während die Riemann'sche Krümmungs-2-Form

$$\mathcal{R}^\mu{}_\nu = d\Gamma^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_\sigma \wedge \Gamma^\sigma{}_\nu \quad (12.158)$$

ist. Die Riemann'sche Krümmungs-2-Form können wir nach $dx^\rho \wedge dx^\sigma$ entwickeln und erhalten

$$\mathcal{R}_\nu^\mu = \frac{1}{2} R_{\nu\rho\sigma}^\mu dx^\rho \wedge dx^\sigma, \quad (12.159)$$

wobei die Koeffizienten $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$ die Komponenten des gewöhnlichen Riemann'schen Krümmungstensors sind. Diese Komponenten kann man auch mit dem Zusammenhang ∇_μ ausdrücken:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu}^\kappa &= \left\langle dx^\kappa, \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - \nabla_\nu \nabla_\mu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right\rangle \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa. \end{aligned} \quad (12.160)$$

12.10 Supersymmetrischer Beweis des Indexsatzes

In diesem Abschnitt präsentieren wir den Beweis des Indexsatzes in seiner einfachsten Form, wobei wir uns der supersymmetrischen Quantenmechanik bedienen, die wir im vorigen Abschnitt entwickelt haben.

12.10.1 Der Index

Betrachten wir zwei Vektorbündel $E_\pm \xrightarrow{\pi} M$ mit $E = E_+ \oplus E_-$. Es sei \mathcal{D} ein elliptischer Differentialoperator, der gemäß

$$\mathcal{D} : \Gamma(M, E^+) \rightarrow \Gamma(M, E^-)$$

wirkt. Es ist möglich, mithilfe der Fasernorm den zu \mathcal{D} adjungierten Operator zu definieren, über

$$\mathcal{D}^\dagger : \Gamma(M, E^-) \rightarrow \Gamma(M, E^+).$$

Unter der Annahme, dass \mathcal{D} ein Fredholm-Operator ist, ist der Index

$$\text{ind } \mathcal{D} = \dim \ker \mathcal{D} - \dim \ker \mathcal{D}^\dagger \quad (12.161)$$

wohldefiniert.

Satz 12.4. Die Zahl $\text{ind } \mathcal{D}$ ist invariant unter einer „kleinen“ Deformation von \mathcal{D} .

Beweis

Beachten Sie zunächst, dass $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger$ und $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ nichtnegativ sind, woraus folgt:

$$\ker \mathcal{D} = \ker \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} \quad \text{und} \quad \ker \mathcal{D}^\dagger = \ker \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger.$$

Sei $\{\phi_n\}$ die Menge der orthonormalen Eigenschnitte von $\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} : \Gamma(M, E^+) \rightarrow \Gamma(M, E^+)$:

$$(\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D})\phi_n = \lambda_n \phi_n.$$

Wir definieren $\psi_n \equiv \mathcal{D}\phi_n/\sqrt{\lambda_n}$ für $\lambda_n > 0$, also $\phi_n \in (\ker \mathcal{D})^\perp$. Dann stellen wir fest, dass ψ_n ein Eigenschnitt mit demselben Eigenwert λ_n ist, und zwar $\psi_n \in (\ker \mathcal{D}^\dagger)^\perp$, wegen

$$(\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger)\psi_n = \mathcal{D}(\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}\phi_n)/\sqrt{\lambda_n} = \lambda_n\mathcal{D}\phi_n/\sqrt{\lambda_n} = \lambda_n\psi_n.$$

Beachten Sie auch, dass $\{\psi_n\}$ ein orthonormaler Eigenschnitt ist:

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \langle \phi_n | \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} | \phi_m \rangle = \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \delta_{nm} = \delta_{nm}.$$

Somit folgt, dass es einen natürlichen Isomorphismus zwischen $(\ker \mathcal{D})^\perp$ und $(\ker \mathcal{D}^\dagger)^\perp$ gibt. Allerdings existiert kein solcher Isomorphismus zwischen $\ker \mathcal{D}$ und $\ker \mathcal{D}^\dagger$. Nehmen wir an, dass N Zustände in $\ker \mathcal{D}$ als Resultat einer kleinen Störung des Operators \mathcal{D} nichtverschwindende Eigenwerte erhalten und $\dim \ker \mathcal{D}$ sich um N vermindert. Dann folgt hieraus, dass dieselbe Zahl von Zuständen auch aus $\ker \mathcal{D}^\dagger$ verschwinden muss. Sonst wäre $(\ker \mathcal{D})^\perp$ nicht länger isomorph zu $(\ker \mathcal{D}^\dagger)^\perp$. Ähnlich muss sich, wenn $\dim \ker \mathcal{D}$ um N zunimmt, auch $\dim \ker \mathcal{D}^\dagger$ um N erhöhen, um die gepaarten Eigenschaften von $(\ker \mathcal{D})^\perp$ und $(\ker \mathcal{D}^\dagger)^\perp$ zu erhalten. Darum ist $\text{ind } \mathcal{D}$ invariant unter kleinen Störungen von \mathcal{D} . \square

Satz 12.5. Sei \mathcal{D} ein Fredholm-Differentialoperator. Dann ist sein Index durch

$$\text{ind } \mathcal{D} = \text{sp } e^{-\beta \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}} - \text{Sp } e^{-\beta \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger} \quad (12.162)$$

gegeben, mit einer reellen Konstanten $\beta > 0$. Tatsächlich ist der Index unabhängig β .

Beweis

Die Spuren in (12.162) werden über $\{\phi_n\}$ bzw. $\{\psi_n\}$ gebildet. Seien nun $\{\phi_i^0\}$ und $\{\psi_j^0\}$ Orthonormalbasen von Schnitten von $\ker \mathcal{D}$ bzw. $\ker \mathcal{D}^\dagger$, ferner seien $1 \leq i \leq \dim \ker \mathcal{D}$ und $1 \leq j \leq \dim \ker \mathcal{D}^\dagger$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \text{Sp } e^{-\beta \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}} - \text{Sp } e^{-\beta \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger} \\ &= \sum_{\lambda_n \neq 0} \langle \phi_n | e^{-\beta \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}} | \phi_n \rangle - \sum_{\lambda_n \neq 0} \langle \psi_n | e^{-\beta \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger} | \psi_n \rangle + \sum_i \langle \phi_i^0 | \phi_i^0 \rangle - \sum_j \langle \psi_j^0 | \psi_j^0 \rangle \\ &= \sum_{\lambda_n \neq 0} e^{-\beta \lambda_n} (\langle \phi_n | \phi_n \rangle - \langle \psi_n | \psi_n \rangle) + \sum_i 1 - \sum_j 1 \\ &= \dim \ker \mathcal{D} - \dim \ker \mathcal{D}^\dagger = \text{ind } \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Da die Summationen über i und j unabhängig von β sind, ist auch der auf diese Weise definierte Index $\text{ind } \mathcal{D}$ unabhängig von β . \square

Die Spur in Satz 12.5 lässt sich mit dem Wärmeleitungskern identifizieren. Sei $E = E_+ \oplus E_-$; dann definieren wir einen Differentialoperator Q ,⁹ der auf E gemäß

$$iQ \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^\dagger \\ \mathcal{D} & 0 \end{pmatrix} : E \rightarrow E \quad (12.163)$$

wirkt, vgl. Gleichung (12.79). Weiterhin definieren wir einen „Hamilton-Operator“ und eine Matrix Γ über

$$H = (iQ)^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} & 0 \\ 0 & \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12.164)$$

Da Q so definiert anti-Hermite'sch ist, ist der Operator H Hermite'sch und nichtnegativ. Den Index von \mathcal{D} können wir mithilfe von Γ in eine kompakte Form bringen:

$$\text{ind } \mathcal{D} = \text{Sp} \Gamma e^{-\beta H}. \quad (12.165)$$

Sei M eine Spinmannigfaltigkeit, deren zweite Stiefel-Whitney-Klasse $w_2(M)$ trivial ist. Dementsprechend kann das $\text{SO}(k)$ -Prinzipalbündel über M zu dem $\text{Spin}(k)$ -Prinzipalbündel geliftet werden:

$$\begin{array}{ccc} \text{SO}(k) & \rightarrow & \text{Spin}(k) \\ \downarrow \pi & & \\ M & & \end{array}$$

Sei $E = \Delta(M)$ nun dieses Spinbündel. Dann liegt eine mit $\Delta(M)$ assozierte Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$ vor. Wir definieren den **Chiralitätsoperator**

$$\gamma_{2n+1} \equiv i^n \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n}. \quad (12.166)$$

Aus $\gamma_{2n+1}^2 = 1$ folgt, dass die Eigenwerte von γ_{2n+1} nur ± 1 sein können, was wir **Chiralität** nennen.

Übung 12.10 Verwenden Sie die Clifford-Algebra, um zu zeigen, dass gilt:

$$\gamma_{2n+1}^2 = 1, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_{2n+1}\} = 0.$$

Die Menge der Schnitte $\Gamma(M, \Delta)$ ist für gerade k keine irreduzible Darstellung von $\text{Spin}(k)$, sondern kann mittels der Chiralität in zwei Unterräume zerlegt werden,

$$\Gamma(M, \Delta) = \Gamma(M, \Delta^+) \oplus \Gamma(M, \Delta^-), \quad (12.167)$$

wobei $\psi_\pm \in \Gamma(M, \Delta^\pm)$ die Bedingung $\gamma_{2n+1} \psi_\pm = \pm \psi_\pm$ erfüllt. Wir weisen die **Fermionenzahl** $F = 0$ den Schnitten in $\Gamma(M, \Delta^+)$ zu, während $F = 1$ für diejenigen in $\Gamma(M, \Delta^-)$ gelten soll. Dann kann man Γ , definiert in Gleichung (12.164), als

$$\Gamma = (-1)^F \quad (12.168)$$

⁹ Diesen Operator Q werden wir später mit der Superladung identifizieren.

schreiben. Es ist klar, dass der Operator Q die Chiralität umkehrt und daher $\{Q, \Gamma\} = 0$ ist.

Seien Q der Dirac-Operator auf M und $\Gamma = \gamma_{2n+1}$. Tatsächlich erhalten wir aus Übung 12.11 $\{Q, \gamma_{2n+1}\} = 0$ und können daher γ_{2n+1} mit $(-1)^F$ identifizieren. Wenn Γ wie in (12.164) diagonalisiert ist, werden die Chiralitätseigenschnitte als¹⁰

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (12.169)$$

ausgedrückt. Es sollte nun klar sein, dass $\mathcal{D}: \Gamma(M, \Delta^+) \rightarrow \Gamma(M, \Delta^-)$ und $\mathcal{D}^\dagger: \Gamma(M, \Delta^-) \rightarrow \Gamma(M, \Delta^+)$ mit D bzw. D^\dagger in (12.79) identifiziert werden können. Demzufolge ist der Index des Dirac-Operators als

$$\text{ind } Q = \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger \quad (12.170)$$

definiert. Physiker nennen die Schnitte in $\ker D$ und $\ker D^\dagger$ oft **Nullmoden**. In diesem Sinn ist der Index des Dirac-Operators die Differenz zwischen den Anzahlen der positiven und der negativen Chiralitätsnullmoden. Für diesen Index gibt es auch einen Pfadintegralausdruck, wie wir im nächsten Unterabschnitt sehen werden.

12.10.2 Pfadintegral und Indexsatz

Betrachten wir einen Dirac-Operator Q auf einer $2n$ -dimensionalen Spinmannigfaltigkeit M . Wir verwenden ab jetzt die euklidische Zeit ($t \rightarrow -it$).

Sei $H = (iQ)^2 = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ der zu Q gehörende Hamilton-Operator. Dann hat der Index des Dirac-Operators den Pfadintegralausdruck

$$\text{ind } Q = \text{Sp } \Gamma e^{-\beta H} = \text{Sp}(-1)^F e^{-\beta H} = \int_{\text{PRb}} \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi e^{-\int_0^\beta dt L}, \quad (12.171)$$

wobei die Lagrange-Funktion L in (12.154) eingeführt wurde,

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{Dt}, \quad (12.172)$$

und „PRb“ bedeuten soll, dass das Pfadintegral über Funktionen gebildet wird, welche eine periodische Randbedingung über $[0, \beta]$ erfüllen. Der Faktor $(-1)^F$ verschwindet, wenn die antiperiodische Randbedingung für die fermionischen Variablen in eine periodische geändert wird. Dies sieht man mit der folgenden Überlegung. Im Pfadintegralformalismus ist die Spur mit $(-1)^F$ (siehe Abschnitt 1.5)

$$\begin{aligned} \text{Sp}(-1)^F e^{-\beta H} &= \sum_n \langle n | (-1)^F e^{-\beta H} | n \rangle \\ &= \int d\theta^* d\theta \langle -\theta | (-1)^F e^{-\beta H} | \theta \rangle e^{-\theta^* \theta}, \end{aligned} \quad (12.173)$$

¹⁰ Beachten Sie die etwas ungenaue Notation. Die Symbole ψ_\pm wurden sowohl verwendet, um die Schnitte in $\Gamma(M, S)$ zu bezeichnen, als auch für die in $\Gamma(M, \Delta^\pm)$.

wobei $F = c^\dagger c$ der Fermionenzahloperator ist. Indem wir berücksichtigen, dass gilt:

$$|\theta\rangle = |0\rangle + |1\rangle\theta, \quad (-1)^F|\theta\rangle = |0\rangle - |1\rangle\theta = |- \theta\rangle,$$

nimmt dieses Integral die Form

$$\int d\theta^* d\theta \langle \theta | e^{-\beta H} |\theta \rangle e^{-\theta^* \theta} \quad (12.174)$$

an. Somit müssen wir, indem wir $(-1)^F$ eliminieren, die Randbedingung periodisch machen.

Im Rest dieses Abschnitts werden wir dieses Pfadintegral auswerten, um zu zeigen, dass es sich auf einen topologischen Index reduziert, der sich aus dem Dirac- \hat{A} -Geschlecht ergibt.

Die SUSY-Transformation in euklidischer Zeit erhalten wir, indem wir in (12.140) die Substitution $t \rightarrow -it$ vornehmen:

$$\delta x^\mu = i\epsilon\psi^\mu, \quad \delta\psi^\mu = -i\epsilon\dot{x}^\mu.$$

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, ist der Index unabhängig von β , und wir können daher den Grenzübergang $\beta \downarrow 0$ beim Berechnen der Spur betrachten. Indem wir den Zeitparameter als $t = \beta s$ reskalieren, bringen wir die Wirkung in die Form

$$\begin{aligned} & \int_0^\beta dt \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{Dt} \right] \\ &= \int_0^1 ds \left[\frac{1}{\beta} \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{1}{\beta} g_{\mu\nu}(x) \psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{Ds} \right]. \end{aligned} \quad (12.175)$$

Damit hat jeder Pfad mit $\dot{x} \neq 0$ einen exponentiell kleinen Beitrag zum Pfadintegral im Limes $\beta \downarrow 0$. Demzufolge kommen in diesem Grenzfall die Beiträge zum Pfadintegral nur von Pfaden, für welche $x(t) = \text{konstant}$ gilt. Offensichtlich erfüllen diese Pfade die periodische Randbedingung.

Die periodische Randbedingung zwingt uns dazu, als Konfigurationsraum der bosonischen Koordinaten die Menge $L(M)$ der Schleifen in M anzusetzen. Um die Sattelpunktmethode (siehe unten) zur Berechnung des Pfadintegrals verwenden zu können, müssen wir die Menge \mathcal{M} der Extrema der Wirkung ermitteln, d.h. die Lösungen der klassischen Euler-Lagrange-Gleichungen

$$-g_{\lambda\mu}(x) \frac{D\dot{x}^\mu}{Dt} + \frac{1}{2} R_{\mu\nu,\lambda\rho} \psi^\mu \psi^\nu \dot{x}^\rho = 0, \quad (12.176)$$

$$\frac{D\psi^\mu}{Dt} = \frac{d\psi^\mu}{dt} + \dot{x}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \psi^\nu = 0. \quad (12.177)$$

Es ist instruktiv, die Herleitung dieser Gleichungen zu skizzieren, da sie die Antikommutativität der Grassmann-Zahlen und die Symmetrien des Riemann-Tensors

voll ausnutzt. Die Euler-Lagrange-Gleichung für ψ^μ lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \psi^\rho} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\rho} \right) \\ &= \frac{1}{2} g_{\rho\nu} \frac{D\psi^\nu}{Dt} - \frac{1}{2} g_{\kappa\nu} \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\nu + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g_{\rho\nu} \psi^\nu) \\ &= \frac{1}{2} \left[g_{\rho\nu} \frac{D\psi^\nu}{Dt} - g_{\kappa\nu} \dot{x}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\nu \psi^\kappa + (\partial_\lambda g_{\rho\nu}) \dot{x}^\lambda \psi^\nu + g_{\rho\nu} \dot{\psi}^\nu \right]. \end{aligned}$$

Durch Multiplizieren beider Seiten mit $g^{\mu\rho}$ und Summieren über ρ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D\psi^\mu}{Dt} - g^{\mu\rho} g_{\kappa\nu} \dot{x}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\nu \psi^\kappa + g^{\mu\rho} (\partial_\lambda g_{\rho\nu}) \dot{x}^\lambda \psi^\nu + \dot{\psi}^\mu \\ &= \frac{D\psi^\mu}{Dt} + \dot{\psi}^\mu + \dot{x}^\lambda [g^{\mu\rho} (\partial_\lambda g_{\rho\nu}) - g^{\mu\rho} g_{\nu\kappa} \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa] \psi^\nu = 2 \frac{D\psi^\mu}{Dt}, \end{aligned}$$

womit Gleichung (12.177) bewiesen ist. Hier haben wir die Identität

$$g^{\mu\rho} [(\partial_\lambda g_{\rho\nu}) - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\nu\rho} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\rho})] = g^{\mu\rho} \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\rho} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}) = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu$$

in den eckigen Klammern in der zweiten Zeile verwendet.

Lassen Sie uns jetzt die Bewegungsgleichung für x^μ beweisen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \psi^\alpha \frac{D\psi^\beta}{Dt} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \psi^\alpha \dot{x}^\lambda \partial_\mu \Gamma_{\lambda\kappa}^\beta \psi^\kappa \\ &\quad - \frac{d}{dt} \left(g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \psi^\alpha \Gamma_{\mu\kappa}^\beta \psi^\kappa \right) \\ &= -[g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}) \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda] \\ &\quad + \frac{1}{2} [g_{\alpha\beta} \partial_\mu \Gamma_{\lambda\kappa}^\beta - \partial_\lambda g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\kappa}^\beta - g_{\alpha\beta} \partial_\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\beta] \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha \psi^\gamma \Gamma_{\mu\kappa}^\beta \psi^\kappa + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \psi^\alpha \Gamma_{\mu\kappa}^\beta \dot{x}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \psi^\nu \\ &= -g_{\mu\nu} \frac{D\dot{x}^\nu}{Dt} + \frac{1}{2} [g_{\alpha\beta} \partial_\mu \Gamma_{\lambda\kappa}^\beta - g_{\alpha\beta} \partial_\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\beta - \partial_\lambda g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\kappa}^\beta] \\ &\quad + g_{\gamma\beta} \Gamma_{\lambda\alpha}^\gamma \Gamma_{\mu\kappa}^\beta + g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\gamma}^\beta \Gamma_{\lambda\kappa}^\gamma] \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \\ &= -g_{\mu\nu} \frac{D\dot{x}^\nu}{Dt} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Gamma_{\lambda\kappa}^\beta - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\beta + \Gamma_{\mu\kappa}^\beta \Gamma_{\lambda\kappa}^\gamma) \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_{\gamma\beta} \Gamma_{\lambda\alpha}^\gamma - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) \Gamma_{\mu\kappa}^\beta \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda. \end{aligned}$$

Der letzte Term in der letzten Zeile dieser Gleichung schreibt sich als

$$\begin{aligned} &[g_{\gamma\beta} \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\alpha}) - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}] \Gamma_{\mu\nu}^\beta \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\lambda\alpha} - \partial_\alpha g_{\lambda\beta}) \Gamma_{\mu\nu}^\beta \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \\ &= -\Gamma_{\alpha\lambda\beta} \Gamma_{\mu\kappa}^\beta \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \\ &= -g_{\alpha\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^\beta \Gamma_{\mu\kappa}^\beta \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda, \end{aligned}$$

woraus wir erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= -g_{\mu\nu} \frac{D\dot{x}^\nu}{Dt} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Gamma_{\lambda\kappa}^\beta - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\beta + \Gamma_{\mu\gamma}^\beta \Gamma_{\lambda\kappa}^\gamma - \Gamma_{\lambda\gamma}^\beta \Gamma_{\mu\kappa}^\gamma) \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \\ &= -g_{\mu\nu} \frac{D\dot{x}^\nu}{Dt} + \frac{1}{2} R_{\alpha\kappa\mu\lambda} \psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \end{aligned}$$

Gleichung (12.176) folgt durch Umbenennen der Dummy-Indizes.

Kommen wir zurück zur Untersuchung der Lösungen der Bewegungsgleichungen (12.176) und (12.177). Offensichtlich ist das Paar $x = \text{konstant}$ und $\psi = \text{konstant}$ eine der Lösungen. Darum ist $x_p : t \mapsto p \in M$ immer in den Lösungen enthalten, was wir in der Form $M \subset \mathcal{M}$ formulieren können. Gleichung (12.176) reduziert sich auf die Geodätengleichung, wenn $\psi = 0$ ist, aber nicht notwendigerweise auch im Allgemeinen. Wenn die fundamentale Gruppe $\pi_1(M)$ nichtrivial ist, existieren im Allgemeinen nichtzusammenziehbare Geodäten. Deren Beiträge zum Pfadintegral verschwinden allerdings, wenn $\beta \downarrow 0$ ist, exponentiell wie $\exp(-c/\beta)$ und können daher vernachlässigt werden.

Bevor wir mit dem Beweis des Indexsatzes weitermachen, müssen wir noch die **Sattelpunktmethode** erklären. Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel – wir betrachten das Integral

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-f(x)/\hbar}.$$

Die Funktion $f(x)$ habe nur ein Minimum bei $x = x_0$, und es soll $f(x) \rightarrow \infty$ gehen für $x \rightarrow \pm\infty$. Wir untersuchen nun die asymptotische Entwicklung des Integrals Z , wenn der Grenzübergang $\hbar \rightarrow 0$ ausgeführt wird. Wir setzen $x = x_0 + \sqrt{\hbar}y$ und entwickeln $f(x)$ bei x_0 . Unter Berücksichtigung von $f'(x_0) = 0$ erhalten wir den Ausdruck

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2!} \hbar y^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \hbar^{3/2} y^3 f^{(3)}(x_0) + \frac{1}{4!} \hbar^2 y^4 f^{(4)}(x_0) + \dots$$

Wenn wir dies in Z einsetzen, erhalten wir

$$Z = e^{-f(x_0)/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} y^2 f''(x_0) - \left(\frac{1}{3!} \hbar^{1/2} y^3 f^{(3)}(x_0) + \frac{1}{4!} \hbar y^4 f^{(4)}(x_0) + \dots \right) \right].$$

Wir definieren das Moment von y durch

$$\langle y^n \rangle = \frac{\int \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} y^n e^{-y^2 f''(x_0)/2}}{\int \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2 f''(x_0)/2}}.$$

Damit ergibt sich schließlich als Entwicklung von Z :

$$Z = \frac{e^{-f(x_0)/\hbar}}{\sqrt{f''(x_0)}} \left\langle \exp \left[-\frac{1}{3!} \hbar^{1/2} y^3 f^{(3)}(x_0) - \frac{1}{4!} \hbar y^4 f^{(4)}(x_0) + \dots \right] \right\rangle.$$

Man könnte jetzt meinen, dass Terme der Ordnung $O(\hbar^{1/2})$ auftreten, wenn $\langle \dots \rangle$ entwickelt wird. Dies ist jedoch nicht der Fall, da $\langle y^3 \rangle = 0$ ist, und es folgt in Wirklichkeit $\langle \dots \rangle = 1 + O(\hbar)$. Beim Beweis des folgenden Indexatzes wird der Parameter \hbar durch β ersetzt. Der Index ist aber unabhängig von β , und wir schließen, dass Terme der Ordnung $O(\beta)$ verschwinden, und brauchen daher nur die Extrema der Wirkung sowie deren Fluktuationen zweiter Ordnung zu berücksichtigen.

Übung 12.11 Verwenden Sie die obige Entwicklung, um für $n \gg 1$ die **Stirling-Formel**

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n \quad (12.178)$$

zu beweisen.

Kommen wir zur SUSYQM zurück. Wir wenden uns für die Auswertung des Integrals Z der Fluktuation zweiter Ordnung um die Lösungen der klassischen Bewegungsgleichung zu. Der Hauptbeitrag zum Pfadintegral kommt von der Lösung $x = x_0$ und $\psi = \psi_0$. Um uns das Leben einfacher zu machen, verwenden wir **Riemann'sche Normalkoordinaten** bei $x = x_0$. Damit haben wir ein Koordinatensystem, in dem der metrische Tensor die Bedingungen¹¹

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \delta_{\mu\nu}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu}(x_0) = 0$$

erfüllt. Auf diese Weise erhalten wir $g \equiv \det g = 1$. Wir definieren die Fluktuationen in diesem Koordinatensystem als

$$\begin{aligned} x^\mu(t) &= x_0^\mu + \xi^\mu(t), \\ \psi^\mu(t) &= \psi_0^\mu + \eta^\mu(t). \end{aligned}$$

Beachten Sie hier, dass $dx^\mu = d\xi^\mu$, $d\psi^\mu = d\eta^\mu$ ist. Die Entwicklung der Wirkung in zweiter Ordnung schreibt sich nun als

$$S_2 = \int_0^\beta dt \left[\frac{1}{2} \frac{d\xi^\mu}{dt} \frac{d\xi^\mu}{dt} + \frac{1}{2} \eta^\mu \frac{d\eta^\mu}{dt} + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(x_0) \xi^\mu \frac{d\xi^\nu}{dt} \right], \quad (12.179)$$

wobei wir

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(x_0) = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0) \psi_0^\rho \psi_0^\sigma$$

gesetzt haben. Es braucht wohl kaum mehr erwähnt zu werden, dass die Wirkung nullter Ordnung, $S_0 = S(x_0, \psi_0)$, identisch verschwindet.

Berechnen wir jetzt den Index

$$\text{ind } Q = \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\eta e^{-S_2} \quad (12.180)$$

¹¹ Natürlich bedeutet diese Wahl nicht, dass der Riemann-Tensor im Allgemeinen verschwinden würde.

mithilfe der Wirkung zweiter Ordnung, S_2 . Hier haben wir die Translationsinvarianz des Pfadintegralmaßes $\mathcal{D}x\mathcal{D}\psi = \mathcal{D}\xi\mathcal{D}\eta$ verwendet. Wenn wir die periodische Randbedingung von ξ, η berücksichtigen, sind deren Fourier-Entwicklungen gegeben durch

$$\begin{aligned}\xi^\mu &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^\mu e^{2\pi i n t / \beta}, \\ \eta^\mu &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n^\mu e^{2\pi i n t / \beta}.\end{aligned}$$

Der Fluktuationsoperator für ξ in S_2 lautet

$$-\delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{dt^2} + \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu} \frac{d}{dt},$$

und der für η ist

$$\delta_{\mu\nu} \frac{d}{dt}.$$

Wir müssen die Nullmoden ξ_0^μ und η_0^μ , für die $n = 0$ ist, in den folgenden Gauß-Integralen separat behandeln.¹² Wenn wir dies berücksichtigen, können wir schreiben:

$$\begin{aligned}\text{ind } Q &= \mathcal{N} \int \prod_{\mu=1}^d \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\eta_0^\mu \left[\text{Det}_{\text{PRB}}' \left(\delta_{\mu\nu} \frac{d}{dt} \right) \right]^{1/2} \left[\text{Det}_{\text{PRB}}' \left(-\delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{dt^2} + \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{dt} \right) \right]^{-1/2} \\ &= \mathcal{N} \int \prod_{\mu=1}^d \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\eta_0^\mu \left[\text{Det}_{\text{PRB}}' \left(-\delta_{\mu\nu} \frac{d}{dt} + \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(x_0) \right) \right]^{-1/2},\end{aligned}\quad (12.181)$$

wobei der Strich anzeigt, dass die Nullmoden weggelassen wurden. \mathcal{N} ist der Normierungsfaktor, der die mit der Anordnung der Graßmann-Zahlen einhergehenden Mehrdeutigkeiten berücksichtigt. Lassen Sie uns jetzt diesen Faktor bestimmen.

Da $\text{ind } Q$ unabhängig von β ist, setzen wir der Einfachheit halber $\beta = 1$. Wir vereinfachen die Berechnung weiterhin dadurch, dass wir als Metrik $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ wählen. Dann sind der fermionische und der bosonische Anteil vollständig separiert. Der fermionische Anteil berechnet sich, unter Berücksichtigung von $H_{\text{Fermionen}} = 0$, zu

$$\begin{aligned}\text{Sp } \gamma_{2n+1} &= \int_{\text{PRB}} \mathcal{D}\psi e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 \psi \cdot \dot{\psi} dt} \\ &= \mathcal{N}_f \text{Det}'_{\text{PRB}}(\delta_{\mu\nu} \partial_t)^{1/2} \int d\psi_0^1 \cdots d\psi_0^{2n},\end{aligned}$$

dabei ist ψ_0^μ die Nullmode. Die Determinante bestimmt man wie folgt. Erinnern Sie sich zunächst an unsere Argumentation in Abschnitt 1.5, nach der die Determinante

$$\text{Det}'_{\text{PRB}}(\partial_t + \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Det}'((1 - \varepsilon\omega)\partial_t + \omega)$$

¹² Die Integrationen über ξ_0 und η_0 sind äquivalent zu denen über x_0 und ψ_0 .

war, wobei wir die harmonische Oszillatorkoeffizienten ω eingeführt hatten, welche am Ende der Rechnung auf null gesetzt wurde. Die „Verteilungsfunktion“ war

$$\mathrm{sp}(-1)^F e^{-\beta H} = 2 \sinh(\beta \omega/2) = e^{\beta \omega/2} \mathrm{Det}'_{\mathrm{PRB}}((1 - \varepsilon \omega) \partial_t + \omega). \quad (12.182)$$

Im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ hatten wir für die Determinante

$$\mathrm{Det}'_{\mathrm{PRB}}(\partial_t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} e^{-\beta \omega/2} 2 \sinh(\beta \omega/2) = 1 \quad (12.183)$$

erhalten. Schließlich ergab sich

$$\mathrm{Sp} \gamma_{2n+1} = \mathcal{N}_f \int d\psi_0^1 \dots d\psi_0^{2n}. \quad (12.184)$$

Jetzt setzen wir

$$\gamma_{2n+1} = i^n \gamma_0^1 \dots \gamma_0^{2n} = (2i)^n \psi_0^1 \dots \psi_0^{2n}$$

in die Spur ein. Wegen $\mathrm{Sp} \gamma_{2n+1}^2 = \mathrm{Sp} I = 2^n$ erhalten wir

$$\mathrm{Sp} \gamma_{2n+1}^2 = 2^n = \mathcal{N}_f \int d\psi_0^1 \dots d\psi_0^{2n} (2i)^n \psi_0^1 \dots \psi_0^{2n} = \mathcal{N}_f (-2i)^n,$$

was auf

$$\mathcal{N}_f = i^n$$

führt. Als nächstes berechnen wir den Normierungsfaktor \mathcal{N}_b des bosonischen Anteils. Wenn wir in (1.101) die imaginäre Zeit verwenden, erhalten wir $\langle x, 1 | x, 0 \rangle = (2\pi)^{-1/2}$ und damit

$$\int \mathcal{D}x^\mu e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^\mu \dot{x}^\mu} = \mathcal{N}_b \frac{1}{\mathrm{Det}^{1/2}(-\delta_{\mu\nu} \partial_t^2)} \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{dx^\mu}{\sqrt{2\pi}} = (2\pi)^{-n} \int \prod_{\mu=1}^{2n} dx^\mu.$$

Die Determinante wird bestimmt mithilfe der ζ -Funktion-Regularisierung in Abschnitt 1.4. Der Eigenwert von $-d^2/dt^2$ ist mit der periodischen Randbedingung $\lambda_n = (2n\pi/\beta)^2$, und wir erhalten

$$\mathrm{Det}'_{\mathrm{PRB}}\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) = \prod_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2.$$

Die spektrale ζ -Funktion ist

$$\zeta_{-d^2/dt^2}(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 \right]^{-s} = 2 \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{2s} \zeta(2s),$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} \zeta'_{-d^2/dt^2}(0) &= 4 \log(\beta/2\pi) e^{2s \log(\beta/2\pi)} \zeta(2s) + 4 e^{2s \log(\beta/2\pi)} \zeta'(2s)|_{s=0} \\ &= 4[\log(\beta/2\pi) \zeta(0) + \zeta'(0)] = -2 \log \beta. \end{aligned}$$

Daher ist die Determinante

$$\text{Det}'_{\text{PRB}} \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) = \exp[-\zeta'_{-d^2/dt^2}(0)] = \beta^2. \quad (12.185)$$

Wenn wir $\beta = 1$ setzen, erhalten wir $\text{Det}'_{\text{PRB}}(-d^2/dt^2) = 1$. Damit ist der Normierungsfaktor

$$\mathcal{N}_b = 1.$$

Wir setzen alle Resultate zusammen und haben auf diese Weise gezeigt, dass $\mathcal{N} = \mathcal{N}_f \mathcal{N}_b = i^n$ ist. Demzufolge ist der gesuchte Index

$$\text{ind } Q = i^n \int \prod_{\mu=1}^d \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\eta_0^\mu \left[\text{Det}_{\text{PRB}}' \left(-\delta_{\mu\nu} \frac{d}{dt} + \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(x_0) \right) \right]^{-1/2}. \quad (12.186)$$

Lassen Sie uns noch die Funktionaldeterminante in (12.186) ausrechnen. Da die Fermi-Variablen nur in $\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(x_0)$ enthalten sind und dies Grassmann-gerade ist, können wir im Moment so tun, als ob dieser Anteil eine kommutierende Zahl wäre. Die Antisymmetrie des Riemann-Tensors impliziert, dass $\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(x_0)$ die Bedingung $\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = -\tilde{\mathcal{R}}_{\nu\mu}$ erfüllt. Darum ist es in einer geraddimensionalen Mannigfaltigkeit M möglich, $\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}$ zu blockdiagonalisieren:

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & & \\ -y_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & y_n \\ & & & -y_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.187)$$

Konzentrieren wir uns auf den ersten Block. Der Operator

$$-\delta_{\mu\nu} \frac{d}{dt} + \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(x_0)$$

ist reell, weswegen seine Eigenwerte aus komplex konjugierten Paaren bestehen. Lassen Sie uns die Determinante dieses Blocks in Abhängigkeit vom Produkt dieser komplexen Eigenwerte ausdrücken:

$$\begin{aligned} \det' \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} & y_1 \\ -y_1 & -\frac{d}{dt} \end{pmatrix} &= \text{Det}' \left(\frac{d^2}{dt^2} + y_1^2 \right) = \prod_{n \neq 0} (y_1^2 - (2\pi n/\beta)^2) \\ &= \left[\prod_{n \geq 1} \left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 \prod_{n \geq 1} \left[1 - \left(\frac{y_1 \beta}{2\pi n} \right)^2 \right] \right]^2 \\ &= \left(\frac{\sin \beta y_1 / 2}{y_1 / 2} \right)^2. \end{aligned} \quad (12.188)$$

Damit erhalten wir für den Index den Ausdruck

$$\text{ind } Q = i^n \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\eta_0^\mu \prod_{j=1}^n \frac{y_j/2}{\sin \beta y_j/2}. \quad (12.189)$$

Das Produkt über die j schreibt sich als

$$\frac{1}{\beta^{d/2}} \det \left(\frac{\beta \tilde{\mathcal{R}}/2}{\sin \beta \tilde{\mathcal{R}}/2} \right)^{1/2}.$$

Beachten Sie, dass jede Taylor-Entwicklung nach $\tilde{\mathcal{R}}$ bei endlicher Ordnung abbricht, wegen $\tilde{\mathcal{R}}^p = 0$ für $p > d/2$.

Wir haben bis jetzt die Beiträge der Fluktuationen zweiter Ordnung um ein bestimmtes Paar x_0, ψ_0 ermittelt. Nun müssen wir noch die Beiträge berücksichtigen, die von den Lösungen der klassischen Bewegungsgleichungen herrühren. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die Menge \mathcal{M} der Lösungen der Bewegungsgleichungen die konstante Lösung (x_0, ψ_0) als eine Teilmenge enthält und dass die Beiträge der nichtkonstanten Lösungen exponentiell klein sind, wenn $\beta \downarrow 0$ ist. Darum vernachlässigen wir alle periodischen Lösungen mit Ausnahme der konstanten Lösungen. Mit der Entwicklung

$$x^\mu = x_0^\mu + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \xi_0^\mu + \dots$$

erhalten wir, dass das Integral über x_0 äquivalent zu dem über $\xi_0/\sqrt{\beta}$ ist, also $dx_0^\mu = d\xi_0^\mu/\sqrt{\beta}$ gilt. Dieses Argument gilt genauso für die Grassmann'sche Nullmode und es folgt $d\psi_0^\mu = \sqrt{\beta} d\eta_0^\mu$. Insgesamt schreibt sich der Index jetzt als

$$\text{ind } Q = i^n \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\psi_0^\mu \frac{1}{\beta^{d/2}} \det \left(\frac{\beta \tilde{\mathcal{R}}/2}{\sin \beta \tilde{\mathcal{R}}/2} \right)^{1/2}. \quad (12.190)$$

Nun machen wir eine Variablensubstitution, um die scheinbare β -Abhängigkeit des Index zu eliminieren:

$$\psi_0^\mu = \frac{\chi_0^\mu}{\sqrt{2\pi\beta}}, \quad d\psi_0^\mu = \sqrt{2\pi\beta} d\chi_0^\mu.$$

Einsetzen von

$$\beta \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \chi_0^\rho \chi_0^\sigma$$

in den Integranden ergibt

$$\text{ind } Q = i^n \int \prod_{\mu=1}^{2n} dx_0^\mu d\chi_0^\mu \det \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0) \chi_0^\rho \chi_0^\sigma}{\sin \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0) \chi_0^\rho \chi_0^\sigma} \right)^{1/2}. \quad (12.191)$$

Dies ist der Atiyah-Singer-Indexsatz für den Dirac-Operator.

Lassen Sie uns den vorherigen Satz in einer bekannteren Form ausdrücken. Beachten Sie, dass nur Terme der Ordnung $2n$ in χ im Integranden nichtverschwindende Beiträge ergeben, wenn über $\prod dx_0^\mu$ integriert wird. Beachten Sie ferner, dass $\prod dx_0^\mu$ nur ein gewöhnliches Volumenelement ist. Dann definieren wir die Krümmungs-2-Form

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (12.192)$$

Wir erkennen, dass $\mathcal{R}/\sin\mathcal{R}$ gerade in \mathcal{R} ist und daher das Integral nur dann nicht verschwindet, wenn n gerade ist, d. h. nur wenn d ein Vielfaches von 4 ist. Wenn dies der Fall ist, kann der Faktor i^n nur die Werte ± 1 annehmen, und wir können den Integranden formal ersetzen gemäß

$$i^n \frac{\mathcal{R}}{\sin\mathcal{R}} \rightarrow \frac{\mathcal{R}}{\sinh\mathcal{R}}.$$

Sie sollten die ersten paar Terme überprüfen. Der Index nimmt jetzt die folgende wohlbekannte Form an:

$$\text{ind } Q = \int_M \det \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \mathcal{R}}{\sinh \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \mathcal{R}} \right)^{1/2}.$$

Wir definieren schließlich noch das \hat{A} -Geschlecht. Da \mathcal{R} antisymmetrisch ist, kann es blockdiagonalisiert werden und wird dann zu

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{R}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & \\ -x_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & x_n \\ & & & -x_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren nun das \hat{A} -Geschlecht von M durch

$$\hat{A}(M) = \prod_{j=1}^n \frac{x_j/2}{\sinh x_j/2}, \quad (12.193)$$

wobei die rechte Seite der Gleichung durch ihre formale Entwicklung nach x_j definiert ist.

Insgesamt haben wir damit den Atiyah-Singer-Indexsatz in seiner einfachsten Form (der des Spinkomplexes) bewiesen.

Satz 12.6. (Indexsatz für einen Spinkomplex) Der Index eines in M definierten Dirac-Operators ist

$$\text{ind } Q = \int_M \hat{A}(M). \quad (12.194)$$

Aufgabe

12.1 In diesem Kapitel haben wir uns nur mit kompakten Mannigfaltigkeiten beschäftigt. Die Erweiterung des AS-Indexsatzes auf nichtkompakte Mannigfaltigkeiten ist der Callias-Bott-Seely-Indexsatz (Callias 1978, Bott und Seely 1978). Hier wollen wir den einfachsten Fall behandeln, der von Hirayama (1983) untersucht wurde. Betrachten Sie ein Paar von Operatoren

$$L \equiv \frac{1}{i} \frac{d}{dx} - iW(x), \quad L^\dagger \equiv \frac{1}{i} \frac{d}{dx} + iW(x),$$

mit $W(+\infty) = \mu$ und $W(-\infty) = \lambda$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\sigma'(L^\dagger L) = \sigma'(LL^\dagger)$ ist. wobei der Strich dafür steht, dass die nullten Eigenwerte weggelassen wurden.
- (b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$J(z) \equiv \text{sp} \left(\frac{z}{L^\dagger L + z} - \frac{z}{LL^\dagger + z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{(\mu^2 + z)^{1/2}} - \frac{\lambda}{(\lambda^2 + z)^{1/2}} \right).$$

13

Anomalien in Eichtheorien

In der Teilchenphysik sind Symmetrieprinzipien grundlegend für das Aufstellen von physikalischen Modellen. Symmetrien spielen sowohl für die Renormierbarkeit als auch für die Unitarität einer Theorie eine entscheidende Rolle, und die Lagrange-Funktion der Theorie muss so gewählt werden, dass sie die beobachteten Symmetrien des zu beschreibenden Systems erfüllt. Beachten Sie jedoch, dass die Symmetrie der Lagrange-Funktion *klassisch* ist. Es gibt keine Garantie dafür, dass sich die Symmetrie der Lagrange-Funktion in eine *Quantensymmetrie* überführen lässt, d. h. in eine Symmetrie der effektiven Wirkung. Wenn die klassische Symmetrie der Lagrange-Funktion beim Prozess der Quantisierung verloren geht, spricht man von einer *Anomalie* der Theorie. Es gibt viele Arten von Anomalien: chirale Anomalien, Eichanomalien, Gravitationsanomalien, supersymmetrische Anomalien usw. Die Namen spiegeln jeweils die betrachtete Symmetrie wider. In diesem Kapitel sehen wir uns die geometrischen und topologischen Strukturen von in Eichtheorien auftretenden Anomalien an.

Wir folgen dabei Alvarez-Gaumé (1986), Alvarez-Gaumé und Ginsparg (1985) sowie Sumitani (1985). Eine vollständige Diskussion des Themas finden Sie bei Rennie (1990) und Bartlmann (1996). Mickelsson (1989) und Nash (1991) enthalten jeweils einen Abschnitt über die eher mathematischen Aspekte von Anomalien.

13.1 Einführung

Bevor wir den Anomalien mit topologischen und geometrischen Methoden zu Leibe rücken, geben wir zunächst einen kurzen Überblick über das Thema. Sei ψ ein masseloses Dirac-Feld im vierdimensionalen Raum, das mit einem äußeren Eichfeld $\mathcal{A}_\mu = A_\mu{}^\alpha T_\alpha$ wechselwirkt, wobei $\{T_\alpha\}$ die Menge der anti-Hermite'schen Erzeuger der Eichgruppe G bezeichnet. Diese Menge – z. B. die $SU(N)$ – ist kompakt und halbeinfach. Die Theorie des Modells hat die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu)\psi. \quad (13.1)$$

Diese Lagrange-Funktion ist invariant unter der üblichen (lokalen) Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow g^{-1}\psi(x), \quad \mathcal{A}_\mu(x) \rightarrow g^{-1}[\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu]g. \quad (13.2)$$

Sie hat auch eine *globale* Symmetrie,

$$\psi(x) \rightarrow e^{iy_5\alpha} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{iy_5\alpha}, \quad (13.3)$$

die sog. **chirale Symmetrie**. Der aus dieser Symmetrie abgeleitete chirale Strom j_5 ist

$$j_5^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi. \quad (13.4)$$

Im Allgemeinen ist die Frage, ob die Symmetrie einer Lagrange-Funktion unter der Quantisierung erhalten bleibt, alles andere als trivial. Tatsächlich wurde gezeigt, dass die chirale Symmetrie von \mathcal{L} auf der Quantenebene zerstört wird. Adler (1969) sowie Bell und Jackiw (1969) haben ein Dreiecksdiagramm mit einem äußeren axialen Strom und zwei inneren Vektorströmen berechnet und dadurch gezeigt, dass der naive Erhaltungssatz $\partial_\mu j_5^\mu = 0$ verletzt ist:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_5^\mu &= \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \text{sp} \mathcal{F}_{\kappa\lambda} \mathcal{F}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \text{sp} \left[\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \partial_\kappa \left(\mathcal{A}_\lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{2}{3} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \right) \right], \end{aligned} \quad (13.5)$$

wobei „sp“ die Spur über die Gruppenindizes sein soll. Der Strom j_5^μ in (13.5) hat keinen Gruppenindex, weswegen (13.5) als **Abel'sche Anomalie** bezeichnet wird.

Es ist interessant, das Verhalten eines Stroms zu untersuchen, welcher den Gruppenindex trägt. Betrachten wir ein Weyl-Fermion ψ , das an ein äußeres Eichfeld koppelt. Der nicht-Abel'sche Eichstrom der Theorie erfüllt auch ein anomales Erhaltungsgesetz, das durch die **nicht-Abel'sche Anomalie** definiert ist. Die Wirkung ist durch

$$\mathcal{L} \equiv \psi^\dagger (i \nabla) \mathcal{P}_+ \psi, \quad \mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2} (I \pm \gamma^5) \quad (13.6)$$

gegeben. Die Lagrange-Funktion hat die Eichsymmetrie

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow g^{-1} (\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu) g, \quad \psi \rightarrow g^{-1} \psi. \quad (13.7)$$

Der korrespondierende nicht-Abel'sche Strom ist

$$j^{\mu\alpha} \equiv \psi^\dagger \gamma^\mu T^\alpha \mathcal{P}_+ \psi. \quad (13.8)$$

Bardeen (1969) sowie Gross und Jackiw (1972) haben gezeigt, dass der Strom bis hinauf zum Einschleifen-Level nicht erhalten bleibt:

$$(\mathcal{D}_\mu j_\delta^\mu)^\alpha = \frac{1}{24\pi^2} \text{sp} \left[T^\alpha \partial_\kappa \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \left(\mathcal{A}_\lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{1}{2} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \right) \right]. \quad (13.9)$$

Auf den ersten Blick sehen die rechten Seiten der Gleichungen (13.5) und (13.9) sehr ähnlich aus. Der Unterschied in der Normierung sowie zwischen den numerischen Faktoren $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ hat jedoch eine tiefere topologische Bewandtnis. Wir werden am Ende dieses Kapitels sehen, dass die Abel'sche Anomalie in $2l+2$ Dimensionen und die nicht-Abel'sche Anomalie in $2l$ Dimensionen eng miteinander verknüpft sind – aber auf unerwartete Art und Weise.

13.2 Abel'sche Anomalien

Ab jetzt werden wir in einer geraddimensionalen Mannigfaltigkeit M ($\dim M = m = 2l$) mit euklidischer Signatur arbeiten. Vierdimensionale Ergebnisse erhält man leicht durch Setzen von $m = 4$. Wir nehmen an, unser System sei nichtchiral, d. h., das Eichfeld soll an die rechts- und die linkshändigen Komponenten auf gleiche Weise koppeln. Unsere Konvention ist

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^\mu, & \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\delta^{\mu\nu}, & \gamma^{m+1} &= (\mathrm{i})^l \gamma^1 \dots \gamma^m, \\ (\gamma^{m+1})^\dagger &= \gamma^{m+1}, & (\gamma^{m+1})^2 &= +I.\end{aligned}$$

Die Lie-Gruppenerzeuger $\{T_\alpha\}$ erfüllen die Bedingungen

$$T^\dagger_\alpha = -T_\alpha, \quad [T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma, \quad \mathrm{sp}(T^\alpha T^\beta) = -\frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}.$$

13.2.1 Die Fujikawa-Methode

Unter den verschiedenen Möglichkeiten, Anomalien herzuleiten, verdeutlicht der Ansatz von Fujikawa (Fujikawa 1979, 1980, 1986) die topologische und die geometrische Natur des Problems am besten. Diese Methode ist äquivalent zum Wärmeleitungskern-Beweis des relevanten Indexsatzes.

Sei ψ ein masseloses Dirac-Feld, das mit einem äußeren nicht-Abel'schen Eichfeld \mathcal{A}_μ wechselwirkt. Die effektive Wirkung $W[\mathcal{A}]$ ist durch

$$e^{-W[\mathcal{A}]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int dx \bar{\psi} i\bar{\nabla}\psi} \quad (13.10)$$

gegeben, wobei $i\bar{\nabla} = i\gamma^\mu \nabla_\mu = i\gamma^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu + \mathcal{A}_\mu)$ ist, mit $\omega_\mu = \frac{1}{2} \omega_{\mu\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta}$ als dem Spinzusammenhang des Hintergrundraums. Wir kompaktifizieren den Raum derart, dass die Geometrie (der Spinzusammenhang) keine Rolle spielt. Dies kann man z. B. durch Kompaktifizieren des \mathbb{R}^4 zu $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ erreichen, wofür das Dirac-Geschlecht $\hat{A}(TM)$ trivial ist, siehe Beispiel 12.5. In diesem Fall ist der Spinzusammenhang irrelevant und kann in $i\bar{\nabla}$ weggelassen werden. Die klassische Wirkung $\int dx \bar{\psi} i\bar{\nabla}\psi$ ist invariant bezüglich der chiralen Rotation:

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma^{m+1}\alpha} \psi \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\gamma^{m+1}\alpha}. \quad (13.11)$$

Wir entwickeln ψ und $\bar{\psi}$ als

$$\psi = \sum_i a_i \psi_i, \quad \bar{\psi} = \sum_i \bar{b}_i \psi^\dagger_i, \quad (13.12)$$

wobei a_i und \bar{b}_i antikommunizierende Grassmann-Variablen sind,

$$\{a_i, a_j\} = 0, \quad \{\bar{b}_i, \bar{b}_j\} = 0, \quad \{a_i, \bar{b}_j\} = 0,$$

und ψ_i ein Eigenvektor des Dirac-Operators

$$i\nabla\psi_i = \lambda_i\psi_i \quad (13.13)$$

ist. Da $i\nabla$ Hermite'sch ist, ist λ_i reell und wegen der Kompaktheit von M kann ψ_i normiert werden gemäß

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \int dx \psi_i^\dagger(x) \psi_j(x) = \delta_{ij}.$$

Damit sind die Pfadintegrale über ψ und $\bar{\psi}$ ersetzt durch jene über a_i und \bar{b}_i .

Wir betrachten eine infinitesimale chirale Transformation

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) + i\alpha(x)\gamma^{m+1}\psi(x), \quad (13.14a)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) + i\bar{\psi}(x)\alpha(x)\gamma^{m+1}. \quad (13.14b)$$

Wie gewöhnlich nehmen wir $\alpha = \alpha(x)$ als x -abhängig an. Unter diesem Wechsel transformiert sich die klassische Wirkung wie

$$\begin{aligned} \int dx \bar{\psi} i\nabla \psi &\rightarrow \int dx (\bar{\psi} + i\bar{\psi}\alpha\gamma^{m+1}) i\nabla (\psi + i\alpha\gamma^{m+1}\psi) \\ &= \int dx \bar{\psi} i\nabla \psi + i \int dx [\alpha \bar{\psi} \gamma^{m+1} i\nabla \psi + \bar{\psi} i\nabla (\alpha \gamma^{m+1} \psi)] \\ &= \int dx \bar{\psi} i\nabla \psi - \int dx [\alpha \bar{\psi} \gamma^{m+1} \gamma^\mu (\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu) \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu) (\alpha \gamma^{m+1} \psi)] \\ &= \int dx \bar{\psi} i\nabla \psi + \int dx \alpha(x) \partial_\mu j_{m+1}^\mu(x), \end{aligned} \quad (13.15)$$

wobei wir die Antikommatorrelationen $\{\gamma^\mu, \gamma^{m+1}\} = 0$ verwendet haben:

$$j_{m+1}^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^{m+1} \psi(x) \quad (13.16)$$

ist der **chirale Strom**. Dies ist das höherdimensionale Analogon des zuvor definierter j_5^μ . Wäre (13.15) die einzige von der Transformation (13.14) bewirkte Änderung, würde eine naive Anwendung der Ward-Takahashi-Relation die Erhaltung des axialen Stroms $\partial_\mu j_{m+1}^\mu = 0$ implizieren. In der Quantentheorie haben wir jedoch eine weitere Auswirkung von (13.14), nämlich die Änderung des Pfadintegralmaßes. Wir definieren die chiral rotierten Felder durch

$$\psi' = \psi + i\alpha\gamma^{m+1}\psi = \sum a'_i \psi_i, \quad (13.17a)$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} + i\bar{\psi}\alpha\gamma^{m+1} = \sum \bar{b}'_i \psi_i^\dagger. \quad (13.17b)$$

Nun ändert sich das Maß wie

$$\int \prod_i da_i d\bar{b}_i \rightarrow \int \prod_i da'_i d\bar{b}'_i. \quad (13.18)$$

Aus der Orthonormalität der $\{\psi_i\}$ folgt, dass

$$\begin{aligned} a'_i &= \langle \psi_i | \psi' \rangle = \langle \psi_i | (1 + i\alpha\gamma^{m+1})\psi \rangle \\ &= \sum_j \langle \psi_i | (1 + i\alpha\gamma^{m+1})\psi_j \rangle a_j \equiv \sum_j C_{ij} a_j, \end{aligned} \quad (13.19a)$$

wobei

$$C_{ij} = \langle \psi_i | (1 + i\alpha\gamma^{m+1})\psi_j \rangle = \delta_{ij} + i\alpha \langle \psi_i | \gamma^{m+1} \psi_j \rangle. \quad (13.20)$$

In den neuen Variablen hat das Maß die Form

$$\begin{aligned} \prod da'_j &= [\det C_{ij}]^{-1} \prod da_i = \exp(-sp \ln C_{ij}) \prod da_i \\ &= \exp[-sp \ln(I + i\alpha \langle \psi_i | \gamma^{m+1} \psi_j \rangle)] \prod da_i \\ &\approx \exp(-sp i\alpha \langle \psi_i | \gamma^{m+1} \psi_j \rangle) \prod da_i \\ &= \exp\left(-i\alpha \sum_i \langle \psi_i | \gamma^{m+1} \psi_i \rangle\right) \prod da_i, \end{aligned} \quad (13.21)$$

wobei hier die Inverse der Determinanten auftaucht, weil a_i und a'_i Grassmann-Variablen sind, vgl. Berezin (1966).¹ Für $\bar{b}_i \rightarrow \bar{b}'_i$ gilt

$$\bar{b}'_i = \sum_j \bar{b}_j \langle \psi_j | (1 + i\alpha\gamma^{m+1}) | \psi_i \rangle = \sum_j C_{ji} \bar{b}_j. \quad (13.19b)$$

Die Jacobi-Determinante für die Transformation $\bar{b}_i \rightarrow \bar{b}'_i$ stimmt mit (13.21) überein. Damit transformiert sich das Maß unter der chiralen Rotation (13.17) wie

$$\prod_i da_i d\bar{b}_i \rightarrow \prod_i da'_i d\bar{b}'_i \exp\left(-2i \int dx \alpha(x) \sum \psi_n^\dagger(x) \gamma^{m+1} \psi_n(x)\right). \quad (13.22)$$

Nun haben wir zwei Ausdrücke für die effektive Wirkung:

$$\begin{aligned} e^{-W[\mathcal{A}]} &= \int \prod_i da_i d\bar{b}_i \exp\left(-\int dx \bar{\psi} i \nabla \psi\right) \\ &= \int \prod_i da_i d\bar{b}_i \exp\left(-\int dx \bar{\psi} i \nabla \psi - \int dx \alpha(x) \partial_\mu j_{m+1}^\mu(x) - 2i \int dx \alpha(x) A(x)\right), \end{aligned} \quad (13.23)$$

mit

$$A(x) \equiv \sum_i \psi_i^\dagger(x) \gamma^{m+1} \psi_i(x). \quad (13.24)$$

Da $\alpha(x)$ beliebig ist, gilt:

$$\partial_\mu j_{m+1}^\mu(x) = -2iA(x). \quad (13.25)$$

¹ Siehe auch Abschnitt 1.5. Es ist beispielsweise $\int a da = \int c a d(ca) = 1$, mit $c \in \mathbb{R}$ und einer reellen Grassmann-Zahl a . Dies zeigt, dass $d(ca) = da/c$ ist.

Somit gilt die naive Erhaltung eines axialen Stroms nicht in der Quantentheorie. Die Nichterhaltung des Stroms j_{m+1}^μ nennt man **Abel'sche Anomalie**, **chirale Anomalie** oder **axiale Anomalie**.

Was hat dies mit der Topologie zu tun? Betrachten wir die Jacobi-Determinante (13.22) und nehmen wir an, dass $\alpha(x)$ unabhängig von x sei.² Das Integral in (13.22) ist nicht wohldefiniert und muss regularisiert werden. Wir führen den Gauß-Cut-off (die Wärmeleitungskern-Regularisierung) ein als

$$\begin{aligned}\int dx A(x) &= \int dx \sum_i \psi_i^\dagger(x) \gamma^{m+1} \psi_i(x) \exp[-(\lambda_i/M)^2] \Big|_{M \rightarrow \infty} \\ &= \sum_i \langle \psi_i | \gamma^{m+1} \exp[-(i\Psi/M)^2] | \psi_i \rangle \Big|_{M \rightarrow \infty}.\end{aligned}\quad (13.26)$$

In dieser Gleichung entspricht $1/M^2$ dem „Zeit“-Parameter t aus dem vorigen Kapitel, und $M \rightarrow \infty$ impliziert $t \rightarrow \varepsilon$. Sei nun $|\psi_i\rangle$ ein Eigenzustand von $i\Psi$ mit *nicht-verschwindendem* Eigenwert λ_i . Unter den Eigenzuständen gibt es einen Zustand $|\psi_i\rangle^\chi \equiv \gamma^{m+1} |\psi_i\rangle$ mit Eigenwert $-\lambda_i$:

$$i\Psi |\psi_i\rangle^\chi = i\Psi \gamma^{m+1} |\psi_i\rangle = -\gamma^{m+1} i\Psi |\psi_i\rangle = -\lambda_i \gamma^{m+1} |\psi_i\rangle = -\lambda_i |\psi_i\rangle^\chi.$$

Hier wurde die Antikommatorrelation $\{\gamma^{m+1}, i\Psi\} = 0$ ausgenutzt. Da $i\Psi$ ein Hermite'scher Operator ist, sind Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal, und folglich erhalten wir $\langle \psi_i | \psi_i \rangle^\chi = \langle \psi_i | \gamma^{m+1} | \psi_i \rangle = 0$. Also gilt

$$\langle \psi_i | \gamma^{m+1} \exp[-(i\Psi/M)^2] | \psi_i \rangle = \langle \psi_i | \gamma^{m+1} | \psi_i \rangle \exp[-(\lambda_i/M)^2] = 0.$$

Somit tragen zur rechten Seite der Gleichung (13.26) nur die Nullenergiemoden bei. Seien $|0, i\rangle$ die Nullenergiemoden von $i\Psi$ ($1 \leq i \leq n_0$). Sie sind in keiner irreduziblen Darstellung der Spinalgebra und sollten nach dem Eigenwert von γ^{m+1} klassifiziert werden. Wir schreiben

$$\gamma^{m+1} |0, i\rangle_\pm = \pm |0, i\rangle_\pm, \quad (13.27)$$

womit (13.26) zu

$$\begin{aligned}\int dx A(x) &= \sum_i \langle \psi_i | \gamma^{m+1} \exp[-(i\Psi/M)^2] | \psi_i \rangle \Big|_{M \rightarrow \infty} \\ &= \sum_i^+ \langle 0, i | 0, i \rangle_+ - \sum_i^- \langle 0, i | 0, i \rangle_- \\ &= \nu_+ - \nu_- = \text{ind } i\Psi_+\end{aligned}\quad (13.28)$$

wird. Dabei ist ν_+ (ν_-) die Zahl der Nullenergiemoden mit positiver (negativer) Chiralität ($\nu_+ + \nu_- = n_0$), und $i\Psi_+$ ist durch

$$i\Psi = \begin{pmatrix} 0 & i\Psi_- \\ i\Psi_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad i\Psi_- = (i\Psi_+)^{\dagger}$$

² Dies ist die impulsfreie Ward-Takahashi-Relation.

definiert. An dieser Stelle kommt der Atiyah-Singer-Indexsatz ins Spiel.

Um zu zeigen, dass (13.28) tatsächlich ein Integral des relevanten Chern-Charakters darstellt, berücksichtigen wir zunächst:

$$\begin{aligned} (i\Psi)^2 &= -\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu = -\{\delta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\} \frac{1}{2} [\{\nabla_\mu, \nabla_\nu\} + \mathcal{F}_{\mu\nu}] \\ &= -\nabla_\mu \nabla^\mu - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \mathcal{F}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (13.29)$$

wobei die Relation $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \mathcal{F}_{\mu\nu}$ verwendet wurde. Dann gilt

$$A(x) = \sum_i \langle \psi_i | x \rangle \langle x | \gamma^{m+1} \exp[(\nabla^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \mathcal{F}_{\mu\nu})/M^2] |\psi_i\rangle \Big|_{M \rightarrow \infty}. \quad (13.30)$$

Wählen wir der Deutlichkeit halber $m = 4$. Wir führen die Basis der ebenen Wellen

$$\langle x | \psi_i \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \langle x | k \rangle \langle k | \psi_i \rangle$$

ein. Damit wird (13.30) zu

$$\begin{aligned} A(x) &= \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \sum_i \langle \psi_i | k' \rangle \langle k' | x \rangle \gamma^{m+1} \\ &\quad \cdot \exp \left[\left(\nabla^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \mathcal{F}_{\mu\nu} \right) / M^2 \right] \langle x | k \rangle \langle k | \psi_i \rangle \Big|_{M \rightarrow \infty} \\ &= \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \text{sp} \gamma^{m+1} \exp \left[(-k^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \mathcal{F}_{\mu\nu}) / M^2 \right] \Big|_{M \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Hier haben wir die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_i \langle k | \psi_i \rangle \langle \psi_i | k' \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k - k')$$

verwendet. Weiterhin haben wir in (13.31) ∇^2 durch das Symbol $-k^2$ ersetzt, da die übrigen Terme mit \mathcal{A} den Grenzfall $M \rightarrow \infty$ nicht überleben. Wenn wir $\tilde{k}^\mu \equiv k^\mu/M$ setzen, wird aus (13.31)

$$A(x) = \text{sp} \left[\gamma^5 \exp \left(\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \mathcal{F}_{\mu\nu} / M^2 \right) \right] M^4 \int \frac{d\tilde{k}}{(2\pi)^4} \exp(-\tilde{k}^2).$$

Wir entwickeln den ersten Exponentialterm und verwenden die Beziehungen

$$\text{sp} \gamma^5 = \text{sp} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu = 0, \quad \text{sp} \gamma^5 \gamma^\kappa \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu = -4\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}, \quad \int d\tilde{k} \exp(-\tilde{k}^2) = \pi^2,$$

womit

$$A(x) = \frac{1}{2} \text{sp} \left[\gamma^5 \frac{1}{4^2} \{[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \mathcal{F}_{\mu\nu}\}^2 \right] \frac{1}{16\pi^2} = \frac{-1}{32\pi^2} \text{sp} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \mathcal{F}_{\kappa\lambda}(x) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \quad (13.32)$$

folgt. Beachten Sie, dass die Terme höherer Ordnung in der Entwicklung des Exponentialausdrucks im Limes $M \rightarrow \infty$ verschwinden. Der anomale Erhaltungssatz (13.25) wird nun zu

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{1}{16\pi^2} \text{sp} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \mathcal{F}_{\kappa\lambda} \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2} \text{sp} \left[\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \partial_\kappa \left(\mathcal{A}_\lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{2}{3} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \right) \right]. \quad (13.33)$$

Dies kann man als eine lokale Version des AS-Indexsatzes ansehen. Lassen Sie uns diese Gleichung in Abhängigkeit von der Feldstärke $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ formulieren. Wir bestätigen leicht, dass gilt:

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M dx \partial_\mu j_{m+1}^\mu = \int_M \text{ch}_2(\mathcal{F}). \quad (13.34)$$

Dies ist der Indexsatz für einen verdrillten Spinorkomplex mit trivialer Hintergrundgeometrie, d. h., $\hat{A}(TM) = 1$.

Für $\dim M = m = 2l$ ergibt sich die folgende Identität:

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M dx \partial_\mu j_{m+1}^\mu = \int_M \text{ch}_l(\mathcal{F}) = \int_M \frac{1}{l!} \text{sp} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^l. \quad (13.35)$$

13.3 Nicht-Abel'sche Anomalien

Im vorigen Abschnitt haben wir einen chiralen Strom behandelt, der ein Eichsingulett (ohne Eichindizes) darstellt. Nun wenden wir uns dem Studium des Eichstroms j^μ_α mit dem Eichindex α zu. An dieser Stelle betrachten wir eine chirale Theorie, in welcher das Eichfeld \mathcal{A} nur an linkshändige Weyl-Fermionen ψ koppelt. Nehmen wir an, ψ werde in einer komplexen Darstellung r der Eichgruppe G transformiert. Beispielsweise gehöre ψ zu einer $\mathbf{3}$ von $SU(3)$. Die effektive Wirkung $W_r[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$e^{-W_r[\mathcal{A}]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(- \int dx \bar{\psi} i\bar{\nabla}_+ \psi \right), \quad (13.36)$$

mit

$$i\bar{\nabla}_+ = i\gamma^\mu (\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu) \mathcal{P}_+ \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^{m+1}). \quad (13.37)$$

Der Eichstrom ist

$$j^\mu_\alpha = i\bar{\psi} \gamma^\mu T_\alpha \mathcal{P}_+ \psi. \quad (13.38)$$

Sei $v = v^\alpha T_\alpha$ ein infinitesimaler Eichtransformationssparameter mit $g = 1 - v$, unter dem gilt:

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow (1+v)(\mathcal{A}_\mu + d)(1-v) = \mathcal{A}_\mu - \mathcal{D}_\mu v. \quad (13.39)$$

Dabei ist $\mathcal{D}_\mu v \equiv \partial_\mu v + [\mathcal{A}_\mu, v]$ die kovariante Ableitung für ein Feld in der adjungierten Darstellung. Die effektive Wirkung transformiert sich wie

$$\begin{aligned} W_r[\mathcal{A}] \rightarrow W_r[\mathcal{A} - \mathcal{D}v] &= W_r[\mathcal{A}] - \int dx \text{sp} \left(\mathcal{D}v \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}} W_r[\mathcal{A}] \right) \\ &= W_r[\mathcal{A}] - \int dx \text{sp} (\partial_\mu v^\alpha + f_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta v^\gamma) \frac{\delta}{\delta A_\mu^\alpha} W_r[\mathcal{A}] \\ &= W_r[\mathcal{A}] + \int dx \text{sp} \left(v^\alpha \mathcal{D} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}} W_r[\mathcal{A}]_\alpha \right). \end{aligned} \quad (13.40)$$

Wegen

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^\alpha} W_r[\mathcal{A}] = \langle i\bar{\psi} \gamma^\mu T_\alpha \frac{1}{2} (1 + \gamma^{m+1}) \psi \rangle_{\mathcal{A}} = \langle j^\mu_\alpha \rangle$$

erhalten wir

$$W_r[\mathcal{A} - \mathcal{D}v] - W_r[\mathcal{A}] = \int dx \text{sp} (v^\alpha \mathcal{D}_\mu \langle j^\mu \rangle_\alpha). \quad (13.41)$$

Es liegt nun die naive Interpretation nahe, (13.36) als $\det(i\Psi) = \prod \lambda'_i$ aufzufassen, mit λ_i als „Eigenwert“ von $i\Psi$. Hier müssen wir jedoch die folgende Feinheit berücksichtigen: $i\Psi_+$ bildet Schnitte von $S_+ \otimes E$ auf solche von $S_- \otimes E$ ab, wobei E das mit dem G -Bündel assoziierte Vektorbündel ist und die S_\pm Spinbündel mit Chiralität \pm darstellen. Demzufolge ist die Gleichung $i\Psi_+ \psi = \lambda \psi$ bedeutungslos. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, führen wir formal einen Dirac-Spinor ψ ein und definieren

$$e^{-W_r[\mathcal{A}]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(- \int dx \bar{\psi} i\hat{D} \psi \right). \quad (13.42)$$

Dabei ist $i\hat{D}$ definiert durch

$$i\hat{D} \equiv i\gamma^\mu (\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu \mathcal{P}_+) = \begin{pmatrix} 0 & i\cancel{\partial}_- \\ i\Psi_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (13.43)$$

und wir haben γ^{m+1} diagonalisiert. In (13.43) koppelt das Eichfeld \mathcal{A} nur an das positive Chiralitätsfeld. Nun ist das Eigenwertproblem $i\hat{D}\psi_i = \lambda_i \psi_i$ wohldefiniert. Beachten Sie, dass $i\hat{D}$ nicht Hermite'sche ist; λ_i ist im Allgemeinen eine komplexe Zahl. Weiterhin müssen wir rechte und linke Eigenfunktionen separat definieren:

$$i\hat{D}\psi_i = \lambda_i \psi_i \quad (13.44a)$$

$$\chi^\dagger_i (i \overset{\leftarrow}{\hat{D}}) = \lambda_i \chi^\dagger_i, \quad (i \hat{D})^\dagger \chi_i = \bar{\lambda}_i \chi_i. \quad (13.44b)$$

Wegen $\int \chi^\dagger_i \psi_j dx = 0$ für $i \neq j$ können wir eine Orthonormalbasis wählen:

$$\int \chi^\dagger_i \psi_j dx = \delta_{ij}. \quad (13.45)$$

Es sei bemerkt, dass der Eigenwert λ_i nicht eichinvariant ist. Dies folgt aus der Beobachtung, dass gilt:

$$\begin{aligned} g(i\hat{D}(\mathcal{A}^g))g^{-1} &= gi\gamma^\mu [\partial_\mu + g^{-1}(\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu)g\mathcal{P}_+]g^{-1} \\ &= i\hat{D}(\mathcal{A}) - i\cancel{\partial} gg^{-1} + i\cancel{\partial} gg^{-1}\mathcal{P}_+ \neq i\hat{D}(\mathcal{A}). \end{aligned} \quad (13.46)$$

Wenn im letzten Schritt von (13.46) das Gleichheitszeichen gälte, so würde $g^{-1}\psi_i$ die Bedingung $i\hat{D}(\mathcal{A}^g)g^{-1}\psi_i = \lambda_i g^{-1}\psi_i$ erfüllen, wenn $i\hat{D}(\mathcal{A})\psi_i = \lambda_i\psi_i$ ist. Dann wäre $\text{sp}(i\hat{D}(\mathcal{A}))$ eichinvariant. Obwohl individuelle Eigenwerte nicht eichinvariant sind, ist dies für den Absolutbetrag des Produkts der Eigenwerte von $i\hat{D}$ durchaus der Fall. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} \det(i\hat{D})\det((i\hat{D})^\dagger) &= \det(i\hat{D}(i\hat{D})^\dagger) \\ &= \det\begin{pmatrix} (i\cancel{\partial}_-)(i\cancel{\partial}_+) & 0 \\ 0 & (i\Psi_+)(i\Psi_-) \end{pmatrix} \\ &= \det(i\cancel{\partial}_-i\cancel{\partial}_+)\det(i\Psi_+i\Psi_-), \end{aligned} \quad (13.47)$$

mit $i\cancel{\partial}_+ = (i\cancel{\partial}_-)^*$ und $i\Psi_- = (i\Psi_+)^*$. Dies ist – bis auf einen irrelevanten Faktor $\det(i\cancel{\partial}_-i\cancel{\partial}_+)$ – einfach die Dirac-Determinante:

$$[\det(i\Psi)]^2 = \det\begin{pmatrix} i\Psi_-i\Psi_+ & 0 \\ 0 & i\Psi_+i\Psi_- \end{pmatrix} = [\det(i\Psi_+i\Psi_-)]^2. \quad (13.48)$$

$i\Psi$ ist dabei durch

$$i\Psi = \begin{pmatrix} 0 & i\Psi_- \\ i\Psi_+ & 0 \end{pmatrix} \quad (13.49)$$

gegeben. Die Dirac-Determinante ist eichinvariant, also $|\det(i\hat{D})|$ ebenfalls. Es folgt dann, dass auch $\text{Re } W_r[\mathcal{A}]$ eichinvariant ist, da

$$\exp(-W_r[\mathcal{A}])\exp(-\overline{W_r[\mathcal{A}]}) = \det(i\hat{D})\det((i\hat{D})^\dagger) \propto \det(i\Psi_+i\Psi_-)$$

eichinvariant ist. Daher kann nur der *Imaginärteil* von $W_r[\mathcal{A}]$, d. h. die *Phase* von $\det(i\hat{D})$, eine anomale Variation unter Eichtransformationen bekommen.

Die Anomalie kann man, wie zuvor, durch Berechnen der Jacobi-Determinante bestimmen. Das Funktionalmaß nehmen wir als $\prod_i da_i d\bar{b}_i$ und betrachten eine infinitesimale Eichtransformation

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} - \mathcal{D}v, \quad \psi \rightarrow \psi + v\psi_+, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} - \bar{\psi}_-v, \quad (13.50)$$

wobei die Eichtransformation nur die Anteile mit positiver Chiralität rotiert. Der Jacobi-Faktor ist

$$1 + \int dx \text{sp} v(x) \sum_n (n|x\rangle \gamma^{m+1} \langle x|n\rangle), \quad (13.51)$$

mit³ $\langle x|n\rangle = \psi_n(x)$ und $(n|x\rangle = \chi_n^\dagger(x)$. Dieses Integral ist nicht wohldefiniert und muss regularisiert werden. Wie gehabt, verwenden wir die Gauß-Regularisierung (vgl. 13.26):

$$\begin{aligned} &\int dx \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ x \rightarrow y}} \text{sp} v(x) \sum_n (n|y\rangle \gamma^{m+1} \langle x|e^{-(i\hat{D})^2/M^2}|n\rangle) \\ &= \int dx \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ x \rightarrow y}} \text{sp} v(x) \gamma^{m+1} e^{-(i\hat{D}_x)^2/M^2} \delta(x-y). \end{aligned} \quad (13.52)$$

³ Beachten Sie, dass $|n\rangle$ nicht zu $|n\rangle$ Hermite'sch konjugiert ist.

Hierbei haben wir die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = I \quad (13.53)$$

ausgenutzt. Aus (13.41) und (13.52) folgt dann

$$\int dx v^\alpha \mathcal{D}_\mu \left(\frac{\delta}{\delta A_\mu} W_r[\mathcal{A}] \right) = \int dx \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ x \rightarrow y}} \text{sp} \left[v \gamma^{m+1} e^{-(i\hat{D}_x)^2/M^2} \delta(x-y) \right]. \quad (13.54)$$

Im vorliegenden Fall verändert sich W_r unter (13.50) tatsächlich. Die Spur lässt sich als

$$\begin{aligned} \text{sp} \left[v \gamma^{m+1} e^{-(i\hat{D}_x)^2/M^2} \right] &= \text{sp} \left[v (\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-) e^{-(i\partial_- i\nabla_+) - (i\nabla_- i\partial_+)/M^2} \right] \\ &= \text{sp} \left[v P_+ e^{(i\partial_+ i\nabla)/M^2} \right] - \text{sp} \left[v P_- e^{(i\nabla_- i\partial)/M^2} \right] \end{aligned} \quad (13.55)$$

schreiben. Gleichung (13.55) kann in der Basis der ebenen Wellen ausgewertet werden, was nicht wirklich kompliziert, aber langwierig ist; siehe z. B. Gross und Jackiw (1972). Im nächsten Abschnitt werden wir die nicht-Abel'sche Anomalie topologisch herleiten. Für $m = 4$ ist die anomale Variation

$$\begin{aligned} W_r[\mathcal{A} - \mathcal{D}v] - W_r[\mathcal{A}] &= \int dx v^\alpha \mathcal{D}_\mu \langle j^\mu \rangle_\alpha \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int dx \text{sp} \{ v^\alpha T_\alpha \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \partial_\kappa [\mathcal{A}_\lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{1}{2} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu] \} \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int \text{sp} \{ v d[\mathcal{A} d\mathcal{A} + \frac{1}{2} \mathcal{A}^3] \}. \end{aligned} \quad (13.56)$$

Die anomale Divergenz des Eichstroms ist

$$\mathcal{D}_\mu \langle j^\mu \rangle_\alpha = \frac{1}{24\pi^2} \text{sp} \left\{ T_\alpha \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \partial_\kappa \left[\mathcal{A}_\lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{1}{2} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \right] \right\}. \quad (13.57)$$

Vergleichen Sie dies mit (13.33). Die beiden Ergebnisse unterscheiden sich in zwei Punkten: Der Faktor $\frac{2}{3}$ vor \mathcal{A}^3 wird durch $\frac{1}{2}$ ersetzt, und die Gesamtvorfaktoren sind verschieden.

13.4 Die Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen

13.4.1 Der Becchi-Rouet-Stora-Operator und der Faddeev-Popov-Geist

Sei $W[\mathcal{A}]$ die effektive Wirkung des Weyl-Fermions in der komplexen Darstellung r der Eichgruppe G .⁴ Im vorigen Abschnitt haben wir die Änderung von $W[\mathcal{A}]$ unter

⁴ Wir verzichten ab jetzt auf den Darstellungsindex r , um die Notation zu vereinfachen.

einer infinitesimalen Eichtransformation $\delta_v \mathcal{A} = -\mathcal{D}_v$ beobachtet:

$$\delta_v W[\mathcal{A}] = - \int (\mathcal{D}_\mu v)^\alpha \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu^\alpha} W[\mathcal{A}] = \int v^\alpha \mathcal{D}_\mu \langle j^\mu \rangle_\alpha. \quad (13.58)$$

Mit Stora (1984) und Zumino (1985) stellen wir den BRS-Operator \mathcal{S} und den Faddeev-Popov-Geist ω vor. Sei $\Omega^m(G)$ die Menge der Abbildungen von S^m nach G .⁵ Zusätzlich zur gewöhnlichen äußeren Ableitung d führen wir eine äußere Ableitung \mathcal{S} auf $\Omega^m(G)$ ein, welche wir **Becchi-Rouet-Stora-(BRS-)Operator** nennen. Im Allgemeinen ist \mathcal{S} auf einem unendlichdimensionalen Raum definiert, wir können aber ebenso gut die Einschränkung von \mathcal{S} auf einen endlichdimensionalen kompakten Unterraum von $\Omega^m(G)$ betrachten, etwa die S^n , parametrisiert durch λ^α . Dann kann man \mathcal{S} als $\mathcal{S} \equiv d\lambda^\alpha \partial/\partial\lambda^\alpha$ schreiben. Wir verlangen, dass d und \mathcal{S} Antitableitungen sein sollen:

$$d^2 = \mathcal{S}^2 = d\mathcal{S} + \mathcal{S}d = 0. \quad (13.59)$$

Wenn wir $\Delta \equiv d + \mathcal{S}$ definieren, ist Δ offensichtlich nilpotent:

$$\Delta^2 = d^2 + d\mathcal{S} + \mathcal{S}d + \mathcal{S}^2 = 0. \quad (13.60)$$

Unter der Wirkung von $g = g(x, \lambda^\alpha)$ transformiert sich \mathcal{A} wie

$$\mathcal{A} \rightarrow A \equiv g^{-1}(\mathcal{A} + d)g. \quad (13.61)$$

Beachten Sie, dass \mathcal{A} unabhängig von λ ist, während A über g von λ abhängt. Wir definieren den **Faddeev-Popov-(FP-)Geist** durch

$$\omega \equiv g^{-1} \mathcal{S}g. \quad (13.62)$$

Für die Wirkung von \mathcal{S} auf A und ω erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{S}A &= \mathcal{S}[g^{-1}(\mathcal{A} + d)g] = -g^{-1}\mathcal{S}gA - g^{-1}\mathcal{A}\mathcal{S}g + g^{-1}\mathcal{S}(dg) \\ &= -\omega A - (A - g^{-1}dg)\omega - g^{-1}d(\mathcal{S}g) \\ &= -\omega A - A\omega - d\omega \equiv -\mathcal{D}_A\omega, \end{aligned} \quad (13.63a)$$

$$\mathcal{S}\omega = -g^{-1}\mathcal{S}gg^{-1}\mathcal{S}g = -\omega^2. \quad (13.63b)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass \mathcal{S} nilpotent auf A und ω ist und damit auf jedem Polynom von A und ω , wie es ja auch sein sollte; siehe Übung 13.1. Wir definieren die Feldstärke von A durch

$$F \equiv dA + A^2 = g^{-1}\mathcal{F}g. \quad (13.64)$$

⁵ Die Menge $\Omega^m(G)$ sollte nicht mit $\Omega^m(M)$ verwechselt werden, der Menge der m -Formen auf M . Was jeweils gemeint ist, sollte aus dem Kontext klar sein.

Wir definieren außerdem

$$\mathbb{A} \equiv g^{-1}(\mathcal{A} + \Delta)g = A + g^{-1}\mathcal{S}g = A + \omega \quad (13.65a)$$

$$\mathbb{F} \equiv \Delta\mathbb{A} + \mathbb{A}^2 = g^{-1}\mathcal{F}g = F, \quad (13.65b)$$

wobei (13.65b) aus $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 = \Delta\mathcal{A} + \mathcal{A}^2$ folgt (beachten Sie, dass $\mathcal{S}\mathcal{A} = 0$ ist). Aus Satz 10.1 findet man, dass \mathbb{A} ein Ehresmann-Zusammenhang auf dem Prinzipalbündel ist und \mathbb{F} die assoziierte Krümmungs-2-Form.

Die Existenz einer nicht-Abel'schen Anomalie impliziert, dass $W[A]$ unter der Wirkung des BRS-Operators \mathcal{S} nicht verschwindet:⁶

$$\mathcal{S}W[A] = G[\omega, A]. \quad (13.66)$$

Da $W[A]$ unabhängig von ω ist, wirkt \mathcal{S} nur durch A . Bevor wir die Wess-Zumino-Konsistenzbedingung für die nicht-Abel'sche Anomalie formulieren, wollen wir hier kurz innehalten und einen Blick auf die physikalische Bedeutung von BRS-Operator und FP-Geist werfen.

Übung 13.1 Zeigen Sie mithilfe von 13.63a die Nilpotenz der Wirkung von \mathcal{S} auf A und ω :

$$\mathcal{S}^2 A = 0, \quad \mathcal{S}^2 \omega = 0. \quad (13.67)$$

13.4.2 BRS-Operator, FP-Geist und Modulraum

Um die physikalische Bedeutung von \mathcal{S} und ω zu erfassen, müssen wir die Topologie der Eichfelder untersuchen (Atiyah und Jones 1978, Singer 1985, Sumitani 1985). Sei \mathfrak{A} der Raum aller Eichpotenzialkonfigurationen auf S^m . Der Deutlichkeit zuliebe wählen wir $m = 4$, und die Verallgemeinerung auf beliebige m liegt auf der Hand. Die Topologie von \mathfrak{A} ist trivial, da für alle Eichpotenzialkonfigurationen \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 die Kombination $t\mathcal{A}_1 + (1-t)\mathcal{A}_2$ ($0 \leq t \leq 1$) auch wieder ein Eichpotenzial auf S^4 ist. Beachten Sie jedoch, dass \mathfrak{A} nicht den physikalischen Konfigurationsraum der Eichtheorie beschreibt. Wir müssen diejenigen Feldkonfigurationen miteinander identifizieren, die über G -Eichtransformationen zusammenhängen. Sei \mathfrak{G} der Raum aller Eichtransformationen auf S^4 , d. h. $\mathfrak{G} = \Omega^4(G)$ in der obigen Notation. Dann muss der physikalische Konfigurationsraum mit $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ identifiziert werden, dem **Modulraum** der Eichtheorie. Wir haben in Abschnitt 10.5 gesehen, dass die Eichfeldkonfiguration auf S^4 durch die Übergangsfunktion $g : S^3 \rightarrow G$ klassifiziert wird, mit der S^3 als dem „Äquator“ der S^4 . Im vorliegenden Fall wird $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ durch die Übergangsfunktion auf dem Äquator $S^3 \rightarrow G$ klassifiziert, und damit ist

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{G} \simeq \Omega^3(G). \quad (13.68)$$

Somit wird jede Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ durch die Instantonenzahl k gekennzeichnet, und man schreibt $\Omega_k^4(G)$.

⁶ Grob gesagt, korrespondiert ω mit v , siehe (13.39) und (13.63a).

Wir erkennen, dass der Raum \mathfrak{A} eine natürliche Projektion $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ hat und zu einem Faserbündel mit der Faser \mathfrak{G} gemacht werden kann, siehe Abb. 13.1. Seien $a \in \mathfrak{A}$ ein Repräsentant der Klasse $[a] \in \mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ und

$$\mathcal{A}(x) = g^{-1}(x)(a(x) + d)g(x) \quad (13.69)$$

ein Element von \mathfrak{A} in $[a]$. Wir bezeichnen den Operator der äußeren Ableitung in \mathfrak{A} mit δ . Dabei handelt es sich um eine *Funktionalvariation*, nicht zu verwechseln mit d , der gewöhnlichen Ableitung; siehe Leinaas und Olaussen (1982). Wenn δ auf (13.69) angewendet wird, erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= -g^{-1}\delta g \mathcal{A} + g^{-1}\delta ag - g^{-1}a\delta g - g^{-1}d(\delta g) \\ &= g^{-1}\delta ag - d(g^{-1}\delta g) - g^{-1}\delta g \mathcal{A} - \mathcal{A}g^{-1}\delta g \\ &= g^{-1}\delta ag - \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(g^{-1}\delta g), \end{aligned} \quad (13.70)$$

mit $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = d + [\mathcal{A}, \cdot]$. Der erste Term von (13.70) stellt die Ableitung von \mathcal{A} entlang $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ dar, während der zweite für diejenige entlang der Faser steht (Abb. 13.1). Die BRS-Transformation \mathcal{S} erhält man durch Einschränken der Variation δ entlang der Faser,

$$\mathcal{S}\mathcal{A} \equiv \delta \mathcal{A}|_{\text{Faser}} = -\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\omega, \quad (13.71a)$$

wobei der FP-Geist ω die Form $g^{-1}\mathcal{S}g \equiv g^{-1}\delta g|_{\text{Faser}}$ hat. Wir erhalten weiterhin

$$\mathcal{S}\omega = \delta\omega|_{\text{Faser}} = -g^{-1}\mathcal{S}gg^{-1}\mathcal{S}g = -\omega^2, \quad (13.71b)$$

was wiederum auf (13.63a) führt.

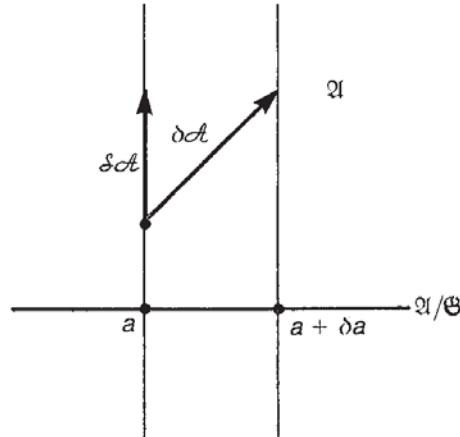


Abb. 13.1. Der BRS-Operator \mathcal{S} ist die Einschränkung von δ entlang der Faser.

13.4.3 Die Wess-Zumino-Bedingungen

Übung 13.1 zeigte, dass \mathcal{S} auf jedem Polynom f von \mathcal{A} und ω nilpotent ist:

$$\mathcal{S}^2 f(\omega, A) = 0. \quad (13.72)$$

Die Nilpotenz ist eine Konsequenz der Interpretation von \mathcal{S} als äußerem Ableitungsoperator. Insbesondere sollten wir

$$\mathcal{S}G[\omega, A] = \mathcal{S}^2 W[A] = 0 \quad (13.73)$$

erhalten. Diese Bedingung wird **Wess-Zumino-Konsistenzbedingung** (WZ-Bedingung) genannt; man kann sie zur Bestimmung der nicht-Abel'schen Anomalie verwenden (Wess und Zumino 1971, Stora 1984, Zumino 1985, Zumino *et al.* 1984). Wenn die Anomalie G mathematisch wohldefiniert ist, sollte G der WZ-Bedingung genügen. Diese Bedingung ist so stark, dass die Anomalie bereits mit dem ersten Term von $G[\omega, A]$ vollständig festgelegt ist.

13.4.4 Abstiegsgleichungen und Lösungen von WZ-Bedingungen

Stora (1984) und Zumino (1985) haben die Lösung von WZ-Bedingungen folgendermaßen konstruiert. Die *Abel'sche* Anomalie im $(2l+2)$ -dimensionalen Raum ist durch

$$\text{ch}_{l+1}(F) = \frac{1}{(l+1)!} \text{sp} \left(\frac{iF}{2\pi} \right)^{l+1} \quad (13.74)$$

gegeben, wobei wie zuvor $F = dA + A^2$ und $A = g^{-1}(\mathcal{A} + d)g$ ist. Sei $Q_{2l+1}(A, F)$ die Chern-Simons-Form von $\text{ch}_{l+1}(F)$:

$$\text{ch}_{l+1}(F) = dQ_{2l+1}(A, F). \quad (13.75)$$

Da das Tripel $(\Delta, \mathbb{A}, \mathbb{F})$ exakt dieselbe algebraische Struktur hat wie (d, A, F) , erhalten wir auch

$$\text{ch}_{l+1}(\mathbb{F}) = \Delta Q_{2l+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F}) = \Delta Q_{2l+1}(A + \omega, F), \quad (13.76)$$

wobei wir beachtet haben, dass $\mathbb{A} = A + \omega$ und $\mathbb{F} = F$ ist. Wenn wir $Q_{2l+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F}) = Q_{2l+1}(A + \omega, F)$ nach Potenzen von ω entwickeln, ergibt sich

$$Q_{2l+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F}) = Q_{2l+1}^0(A, F) + Q_{2l}^1(\omega, A, F) + Q_{2l-1}^2(\omega, A, F) + \cdots + Q_0^{2l+1}(\omega, A, F). \quad (13.77)$$

Hierbei ist Q_r^s von s -ter Ordnung in ω , und es gilt $r+s=2l+1$.

Wir erkennen nun, dass $\text{ch}_{l+1}(\mathbb{F}) = \text{ch}_{l+1}(F)$ ist, wegen $\mathbb{F} = F = g^{-1}\mathcal{F}g$. Mithilfe der Chern-Simons-Formen lässt sich dies als

$$\Delta Q_{2l+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F}) = dQ_{2l+1}(A, F) \quad (13.78)$$

ausdrücken. Nach Einsetzen von (13.77) in (13.78) ergibt sich

$$(d + \mathcal{S})[Q_{2l+1}^0(A, F) + Q_{2l}^1(\omega, A, F) + \cdots + Q_0^{2l+1}(\omega, A, F)] = dQ_{2l+1}^0(A, F). \quad (13.79)$$

Wenn wir Terme derselben Ordnung in ω zusammenfassen, erhalten wir die „**Abstiegsungleichungen**“

$$\mathcal{S}Q_{2l+1}^0(A, F) + dQ_{2l}^1(\omega, A, F) = 0 \quad (13.80a)$$

$$\mathcal{S}Q_{2l}^1(\omega, A, F) + dQ_{2l-1}^2(\omega, A, F) = 0 \quad (13.80b)$$

⋮

$$\mathcal{S}Q_1^{2l}(\omega, A, F) + dQ_0^{2l+1}(\omega, A, F) = 0 \quad (13.80c)$$

$$\mathcal{S}Q_0^{2l+1}(\omega, A, F) = 0. \quad (13.80d)$$

Beachten Sie hier, dass \mathcal{S} den Grad von ω um eins erhöht, siehe 13.63a. Sehen wir uns nun die $2l$ -Form $Q_{2l}^1(\omega, A, F)$ an. Wenn wir

$$G[\omega, A, F] \equiv \int_M Q_{2l}^1(\omega, A, F) \quad (13.81)$$

setzen, erfüllt $G[\omega, A, F]$ die WZ-Bedingung:

$$\mathcal{S}G[\omega, A, F] = \int_M \mathcal{S}Q_{2l}^1(\omega, A, F) = - \int_M dQ_{2l-1}^2(\omega, A, F) = - \int_{\partial M} Q_{2l-1}^2(\omega, A, F) = 0,$$

wobei wir angenommen haben, dass M keinen Rand hat. Außerdem haben wir (13.80b) verwendet. Dies zeigt, dass die Anomalie $G[\omega, A, F]$ schnell gefunden ist, wenn man erst einmal $Q_{2l}^1(\omega, A, F)$ erhalten hat.

Behauptung 13.1. Für das hier definierte Q_{2l}^1 gilt⁷

$$Q_{2l}^1(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{l+1} \frac{1}{(l-1)!} \int_0^1 dt (1-t) \text{ssp} [\omega d(\mathcal{A} \mathcal{F}_t^{l-1})]. \quad (13.82)$$

Beweis

Wir beginnen mit Gleichung (11.105):

$$Q_{2l+1}(\mathcal{A} + \omega, \mathcal{F}) = \frac{1}{l!} \int_0^1 dt \text{ssp} [(\mathcal{A} + \omega) \hat{\mathcal{F}}_t^l],$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_t &\equiv t\mathcal{F} + (t^2 - t)(\mathcal{A} + \omega)^2 = \mathcal{F}_t + (t^2 - t)\{\mathcal{A}, \omega\} + (t^2 - t)\omega^2, \\ \mathcal{F}_t &\equiv d(t\mathcal{A}) + (t\mathcal{A})^2. \end{aligned}$$

⁷ Hinweis: Im Beweis lassen wir zunächst den Normierungsfaktor $(i/2\pi)^{l+1}$ weg, um die Ausdrücke zu vereinfachen. Der Faktor wird ganz am Ende wieder an seinen Platz zurückkehren.

Wenn wir $\hat{\mathcal{F}}_t$ in Q_{2l+1} einsetzen und Terme von erster Ordnung in ω zusammenfassen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{l!} \int_0^1 \delta t \text{ssp} & \left[\omega \mathcal{F}_t^l + (t^2 - t) (\mathcal{A}[\mathcal{A}, \omega] \mathcal{F}_t^{l-1} + \mathcal{A}\mathcal{F}_t[\mathcal{A}, \omega] \mathcal{F}_t^{l-2} + \dots + \mathcal{A}\mathcal{F}_t^{l-1}[\mathcal{A}, \omega]) \right] \\ &= \frac{1}{l!} \int \delta t \text{ssp} \left[\omega \mathcal{F}_t^l + (t^2 - t) \mathcal{A} (\mathcal{F}_t^{l-1}[\mathcal{A}, \omega] + \mathcal{F}_t^{l-2}[\mathcal{A}, \omega] \mathcal{F}_t + \dots) \right] \\ &= \frac{1}{l!} \int \delta t \text{ssp} \left[\omega \mathcal{F}_t^l + (t^2 - t) l \mathcal{A}[\mathcal{A}, v] \mathcal{F}_t^{l-1} \right] \\ &= \frac{1}{l!} \int \delta t \text{ssp} \left[\omega \mathcal{F}_t^l + l(t^2 - t) ([\mathcal{A}, \mathcal{A}] \omega \mathcal{F}_t^{l-1} + \mathcal{A}\omega[\mathcal{A}, \mathcal{F}_t^{l-1}]) \right] \\ &= \frac{1}{l!} \int \delta t \text{ssp} \left[\omega \left\{ \mathcal{F}_t^l + l(t-1) (t[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \mathcal{F}_t^{l-1} - \mathcal{A}[\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t^{l-1}]) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Hier ist ssp wieder die **symmetrisierte Spur** aus (11.8). Nun verwenden wir

$$\mathcal{D}_t \mathcal{F}_t^{l-1} \equiv d\mathcal{F}_t^{l-1} + [\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t^{l-1}] = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}_t}{\partial t} = d\mathcal{A} + t[\mathcal{A}, \mathcal{A}],$$

um die letzte Zeile der vorigen Gleichung in

$$\begin{aligned} \frac{1}{l!} \int \delta t \text{ssp} & \left[\omega \left\{ \mathcal{F}_t^l + l(t-1) \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}_t}{\partial t} - d\mathcal{A} \right) \mathcal{F}_t^{l-1} + \mathcal{A}d\mathcal{F}_t^{l-1} \right] \right\} \right] \\ &= \frac{1}{l!} \int \delta t \text{ssp} \left[\omega \left\{ \mathcal{F}_t^l + l(1-t)d(\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{l-1}) + (t-1) \frac{\partial \mathcal{F}_t^l}{\partial t} \right\} \right] \end{aligned}$$

umzuformen. Mit partieller Integration ergibt sich

$$Q_{2l}^1(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}) = \frac{1}{(l-1)!} \int \delta t (1-t) \text{ssp} [\omega d(\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{l-1})].$$

Wiederherstellen der Normierung führt schließlich auf

$$Q_{2l}^1(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{l+1} \frac{1}{(l-1)!} \int_0^1 \delta t (1-t) \text{ssp} [\omega d(\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{l-1})]. \quad \square$$

Für $m = 2l = 2$ und $m = 4$ erhalten wir

$$Q_2^1(\omega, A, F) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \text{sp} (\omega dA), \quad (13.83a)$$

$$Q_4^1(\omega, A, F) = \frac{1}{6} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^3 \text{ssp} (\omega d(\text{Ad}A + \frac{1}{2}A^3)). \quad (13.83b)$$

Diese Ergebnisse werden auch durch direkte Berechnungen bestätigt. Bis auf den Normierungsfaktor ergibt (13.83b) die nicht-Abel'sche Anomalie im vierdimensionalen Raum, siehe (13.56).

Sumitani (1984) hat darauf hingewiesen, dass der hier vorgestellte Zugang zu nicht-Abel'schen Anomalien in gewisser Weise „*ad hoc*“ ist und die folgenden beiden Punkte nicht deutlich macht:

- (1) Die WZ-Bedingung (13.73) legt nicht die Normierung der Anomalie fest, und außerdem ist die Eindeutigkeit der Lösung alles andere als trivial.
- (2) Es ist nicht klar, warum wir bei der Abel'schen Anomalie im $(m+2)$ -dimensionalen Raum beginnen sollten.

Um diese Fragen zu klären, müssen wir einen ausgefeilten Indexsatz herleiten, welchen man den Familienindexsatz nennt, siehe Atiyah und Singer (1984), Singer (1985) und Sumitani (1984, 1985). Im nächsten Abschnitt werden wir anreissen, wie Physiker dieses Problem angehen, wobei wir uns eng an die Arbeit von Alvarez-Gaumé und Ginsparg (1984) anlehnen werden.

13.5 Abel'sche contra nicht-Abel'sche Anomalien

Betrachten wir einen m -dimensionalen euklidischen Raum ($m = 2l$), der zu $S^m = \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ kompaktifiziert wird. Ferner sei G eine halbeinfache, einfach zusammenhängende Eichgruppe (wie z. B. die $\text{SU}(N)$, für die $\pi_1(\text{SU}(N))$ trivial ist). Weiterhin betrachten wir eine einparametrische Familie $g(\theta, x)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) von Eichtransformationen, sodass gilt:

$$g(0, x) = g(2\pi, x) = e. \quad (13.84)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir g normieren, sodass $g(\theta, x_0) = e$ an einem Punkt $x_0 \in S^m$ ist. Die Abbildung $g : S^1 \times S^m \rightarrow G$ wird entsprechend der Homotopieklassse $\pi_{m+1}(G)$ klassifiziert. Um dies zu sehen, definieren wir das „**Smash**“-Produkt $X \wedge Y$ zweier topologischer Räume X und Y als das direkte Produkt $X \times Y$, bei dem $X \vee Y \equiv (x_0 \times Y) \cup (X \times y_0)$ auf einen Punkt zusammengezogen ist. Aus Abb. 13.2 ersehen wir leicht, dass $S^1 \wedge S^m = S^m \wedge S^1 = S^{m+1}$ ist.⁸ Wiederholte Anwendung hiervon ergibt

$$S^m \wedge S^n = S^{m+n}. \quad (13.85)$$

In dem uns interessierenden Fall lassen die Bedingungen (13.84) das direkte Produkt $S^1 \times S^m$ topologisch wie $S^1 \wedge S^m = S^{m+1}$ aussehen. Somit können wir g als eine Abbildung von S^{m+1} nach G ansehen, die durch $\pi_{m+1}(G)$ klassifiziert wird. Da wir eine einparametrische Familie im Raum $\mathfrak{G} = \Omega^m(G)$ vor uns haben, erhalten wir auch $\pi_{m+1}(G) = \pi_1(\mathfrak{G})$. In der Praxis nehmen wir $G = \text{SU}(N)$ an, wofür gilt:

$$\pi_{m+1}(\text{SU}(N)) = \mathbb{Z} \quad (N \geq \frac{1}{2}m + 1). \quad (13.86)$$

⁸ Überzeugen Sie sich selbst davon, indem Sie explizit $S^1 \wedge S^1 = S^2$ zeichnen.

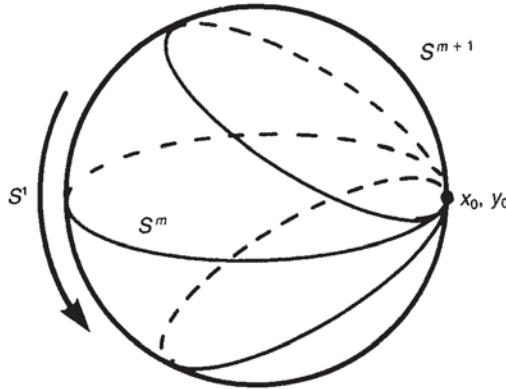


Abb. 13.2. Das Smash-Produkt $S^1 \wedge S^m \simeq S^{m+1}$.

Jetzt wählen wir ein „Referenz“-Eichfeld \mathcal{A} im Null-Instantonen-Bereich $\Omega_0^m(G)$, wofür wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Dirac-Operator (13.49) keine Nullmoden hat. Wir betrachten eine einparametrische Familie von Eichpotenzialen

$$\mathcal{A}^{g(\theta)}(x) \equiv g^{-1}(\theta, x)(\mathcal{A}(x) + d)g(\theta, x), \quad (13.87)$$

wobei θ die S^1 parametrisiert. In Abschnitt 13.3 haben wir gesehen, dass $|\det i\hat{D}|$ eichinvariant ist, siehe (13.47); nur die *Phase* von $\det i\hat{D}$ kann unter einer Eichtransformation eine anomale Variation bekommen. Dies impliziert insbesondere, dass $\det i\hat{D}$ für kein θ verschwindet. Wir schreiben

$$\exp\{-W_r[\mathcal{A}^{g(\theta)}]\} = \det i\hat{D}(\mathcal{A}^{g(\theta)}) = [\det i\Psi(\mathcal{A})]^{1/2} \exp[iw(\mathcal{A}, \theta)], \quad (13.88)$$

wobei $i\Psi$ der Dirac-Operator (13.49) ist und $\exp[iw(\mathcal{A}, \theta)]$ die mit der Eichtransformation (13.87) assoziierte anomale Phase. Als nächstes betrachten wir eine zweiparametrische Familie von Eichfeldern $\mathcal{A}^{t,\theta}$ ($0 \leq t \leq 1$), welche zwischen $\mathcal{A} = 0$ und $\mathcal{A}^{g(\theta)}$ interpoliert:

$$\mathcal{A}^{t,\theta} \equiv t\mathcal{A}^{g(\theta)} \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (13.89)$$

Den (t, θ) -Parameterraum fassen wir als eine zweidimensionale Einheitsscheibe D^2 mit Polarkoordinaten (t, θ) auf. Am Rand $\partial D^2 = S^1$ der Scheibe ist der Absolutbetrag von $\det i\hat{D}(\mathcal{A}^{1,\theta})$ eine nichtverschwindende Konstante. Damit definiert die Phase $e^{iw(\mathcal{A}, \theta)}$ eine Abbildung von $S^1 = \partial D^2$ nach $S^1 = U(1)$, siehe Abb. 13.3. Wenn wir uns den Rand der Scheibe entlang bewegen, „windet“ sich die Phase entsprechend um den Einheitskreis. Die Windungszahl dieser Abbildung ist die ganze Zahl

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial w(\mathcal{A}, \theta)}{\partial \theta} d\theta. \quad (13.90)$$

Weiter unten werden wir feststellen, dass \mathcal{N} sich aus der Abel'schen Anomalie in $m+2$ Dimensionen ableiten lässt.

Übung 13.2 Zeigen Sie, dass gilt:

$$W[\mathcal{A}^{g(2\pi)}] - W[\mathcal{A}^{g(0)}] = -2\pi i \mathcal{N}. \quad (13.91)$$

Wegen $g(2\pi) = g(0)$ können wir (13.91) als eine Berry-Phase ansehen.

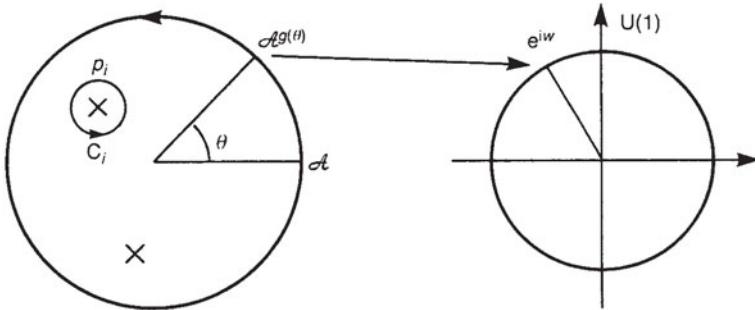


Abb. 13.3. Die Phase der effektiven Wirkung $W[\mathcal{A}^{g(\theta)}]$ definiert eine Abbildung $S^1 \rightarrow U(1)$, bei der $\theta \mapsto e^{iw(\mathcal{A}, \theta)}$ ist. Auf der Scheibe existieren Punkte $\{p_i\}$, an denen $\det i\hat{D}(\mathcal{A}^{t,\theta})$ verschwindet. Die Windungszahl der Abbildung $S^1 \rightarrow U(1)$ erhält man durch Aufsummieren einer Windungszahl entlang C_i .

13.5.1 m Dimensionen contra $m+2$ Dimensionen

Wir erinnern uns, dass unser Referenzeichfeld \mathcal{A} keine Nullmoden des Operators $i\hat{D}(\mathcal{A})$ erlaubt. Wegen $|\det i\hat{D}(\mathcal{A}^{g(\theta)})| = |\det i\hat{D}(\mathcal{A})| \neq 0$ lässt auch der Operator $i\hat{D}(\mathcal{A}^{g(\theta)})$ keine Nullmoden zu. Natürlich kann $i\hat{D}(\mathcal{A}^{t,\theta})$ Nullmoden haben, da sich $\mathcal{A}^{t,\theta}$ im Allgemeinen *nicht* aus \mathcal{A} durch eine Eichtransformation erhalten lässt. Nehmen wir an, es gebe eine Nullmode bei $p_i = (t_i, \theta_i)$, wobei wir annehmen wollen, dass es sich um isolierte Punkte handelt. Da $\det i\hat{D}(\mathcal{A}^{t,\theta})$ ein regularisiertes Produkt von Eigenwerten ist, verschwindet es bei p_i . Die Phase von $\det i\hat{D}(\mathcal{A}^{t,\theta})$ kann nur um diese Punkte homotop nichttrivial sein. Darüber hinaus wird die Windungszahl bei p_i durch den bei p_i verschwindenden Eigenwert festgelegt. Wenn beispielsweise $\lambda_n(t, \theta)$ bei p_i verschwindet, sollte es von der Form

$$\lambda_n(t, \theta) = f(t, \theta) e^{iw_i(t, \theta)} \quad (13.92)$$

sein, mit $f(t_i, \theta_i) = 0$. Die Windungszahl bei p_i ist dann

$$m_i = \frac{1}{2\pi} \int_{C_i} \frac{d}{ds} w_i(t, \theta) ds, \quad (13.93)$$

wobei C_i eine kleine Kurve um p_i ist, siehe Abb. 13.3. Durch stetige Deformation der Schleife $S^1 = \partial D^2$ in eine Summe aus kleinen Kreisen C_i um p_i erhalten wir für

die Gesamtwindungszahl

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} w(\mathcal{A}, \theta) = \sum m_i. \quad (13.94)$$

Nun wollen wir die Beziehung zwischen der Windungszahl \mathcal{N} und dem Indexsatz im $(m+2)$ -dimensionalen Raum aufzeigen ($m=2l$): $\mathcal{N} = \text{ind } i\Psi_{m+2}$. Dabei ist $i\Psi_{m+2}$ der Dirac-Operator auf $S^2 \times S^m$, den wir später definieren werden. Betrachten wir eine auf $D^2 \times S^m$ definierte Eichtheorie, deren Koordinaten (t, θ, x) seien. Um den Randterm zu vermeiden, fügen wir ein weiteres Stück $D^2 \times S^m$ mit den Koordinaten (s, θ, x) hinzu, womit wir eine Mannigfaltigkeit $S^2 \times S^m$ ohne Rand bilden, siehe Abb. 13.4. Wir nennen den Bereich (t, θ) die Nordhalbkugel U_N und (s, θ) die Südhalkugel U_S . Auf dem Äquator S^1 der S^2 ergibt sich $t=s=1$. Wir wählen die folgenden lokalen Eichpotenziale:

$$\mathcal{A}_N(t, \theta, x) = \mathcal{A}^{t, \theta} + g^{-1} d_\theta g, \quad (t, \theta) \in U_N, \quad (13.95a)$$

$$\mathcal{A}_S(s, \theta, x) = \mathcal{A}, \quad (s, \theta) \in U_S, \quad (13.95b)$$

wobei \mathcal{A} das oben eingeführte Referenzeichfeld ist. Um $\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_{N\mu} dx^\mu$ und $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_{S\mu} dx^\mu$ auf den global definierten Zusammenhang auf dem G -Bündel über $S^2 \times S^m$ zu erhöhen, definieren wir die $(m+2)$ -dimensionalen Eichpotenziale

$$\mathbb{A}_N(t, \theta, x) = (\mathcal{A}_t, \mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\mu) = (0, 0, \mathcal{A}_{N\mu}), \quad (13.96a)$$

$$\mathbb{A}_S(s, \theta, x) = (\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\mu) = (0, 0, \mathcal{A}_{S\mu}). \quad (13.96b)$$

Auf dem Äquator ($t=s=1$) ist $\mathbb{A}_N = g^{-1}(\mathbb{A}_S + \Delta)g$, mit $\Delta = d + d_\theta + d_t$ (beachten Sie, dass $d_t g = 0$ ist). Somit definiert $\mathbb{A} = \{\mathbb{A}_N, \mathbb{A}_S\}$ einen globalen Zusammenhang auf $S^2 \times S^m$. Wir betrachten einen Dirac-Operator $i\Psi_{m+2}$, der an \mathbb{A} koppelt. Der Indexsatz für $i\Psi_{m+2}$ ist gegeben durch

$$\text{ind } i\Psi_{m+2} = \mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_- = \int_{S^2 \times S^m} \text{ch}_{l+1}(\mathbb{F}), \quad (13.97)$$

wobei $\mathbb{F} = \Delta \mathbb{A} + \mathbb{A}^2$ und \mathcal{N}_+ (\mathcal{N}_-) für die Anzahl der Nullmoden von $i\Psi_{m+2}$ mit der Chiralität $+$ ($-$) ist (die Chiralität ist in einem $(m+2)$ -Raum definiert).

Alvarez-Gaumé und Ginsparg (1984) haben mithilfe einer adiabatischen Störungsrechnung gezeigt, dass jede Windungszahl $m_i = \pm 1$ sein muss. Darüber hinaus hat der Dirac-Operator $i\Psi_{m+2}$ eine Nullmode bei $p_i = (t_i, \theta_i)$ mit $(m+2)$ -dimensionaler Chiralität $\chi = m_i = \pm 1$. Dann ist die Gesamtwindungszahl $\mathcal{N} = \sum m_i$ durch den Index $\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_-$ gegeben. Nun ergibt sich

$$\text{ind } i\Psi_{m+2} = \int_{S^2 \times S^m} \text{ch}_{l+1}(\mathbb{F}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial w(\mathcal{A}, \theta)}{\partial \theta}. \quad (13.98)$$

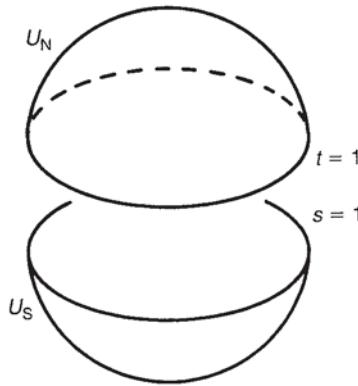


Abb. 13.4.

Aus (13.98) erhalten wir leicht die nicht-Abel'sche Anomalie einschließlich der Normierung: Wegen $\text{ch}_{l+1}(\mathbb{F}) = dQ_{m+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F})$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{S^2 \times S^m} \text{ch}_{l+1}(\mathbb{F}) &= \int_{D^2 \times S^m} \text{ch}_{l+1}(\mathbb{F}_N) + \int_{D^2 \times S^m} \text{ch}_{l+1}(\mathbb{F}_S) \\ &= \int_{S^1 \times S^m} [Q_{m+1}(\mathbb{A}_N, \mathbb{F}_N)|_{t=1} - Q_{m+1}(\mathbb{A}_S, \mathbb{F}_S)|_{s=1}]. \end{aligned} \quad (13.99)$$

Mit Gleichung (11.118) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(\mathbb{A}_N, \mathbb{F}_N)|_{t=1} - Q_{m+1}(\mathbb{A}_S, \mathbb{F}_S)|_{s=1} &= Q_{m+1}(g^{-1} \Delta g, 0) + \Delta \alpha_m \\ &= (-1)^l \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{l+1} \frac{l!}{(m+1)!} \text{sp}(g^{-1} \Delta g)^{m+1} + \Delta \alpha_m. \end{aligned} \quad (13.100)$$

Der Indexsatz ist jetzt durch

$$\text{ind } i\Psi_{m+2} = (-1)^l \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{l+1} \frac{l!}{(m+1)!} \int_{S^1 \times S^m} \text{sp}(g^{-1} \Delta g)^{m+1} \quad (13.101)$$

gegeben. Satz 10.7 besagt, dass $\int_{S^3} \text{sp}(g^{-1} dg)^3$ uns die Windungszahl der Abbildung $g : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$ liefert. Auf dieselbe Weise stellt (13.101) die Windungszahl der Abbildung $g : S^{m+1} \rightarrow G$ dar und wird durch $\pi_{m+1}(G)$ klassifiziert (beachten Sie, dass $S^1 \wedge S^m = S^{m+1}$ ist).

Schließlich zeigen wir noch, dass die nicht-Abel'sche Anomalie mit Q_m^1 identifiziert werden sollte. Wir berücksichtigen zunächst, dass gilt:

$$\int_{S^1 \times S^m} Q_{m+1}(\mathbb{A}_S, \mathbb{F}_S) = 0,$$

da der Integrand unabhängig von $d\theta$ ist und somit kein Volumenelement von $S^1 \times S^m$ sein kann. Dann ergibt sich

$$\text{ind } i\Psi_{m+2} = \int_{S^1 \times S^m} Q_{m+1}(\mathcal{A}^{g(\theta)} + \omega, \mathcal{F}^{g(\theta)}), \quad (13.102)$$

mit $\omega = g^{-1} d_\theta g$ und $\mathcal{F}^{g(\theta)} = d\mathcal{A}^{g(\theta)} + (\mathcal{A}^{g(\theta)})^2 = g(\theta)^{-1} \mathcal{F}g(\theta)$. Wenn der Integrand in Gleichung (13.102) nach ω entwickelt wird, trägt nur der in $d\theta$ *lineare* Term zum Integral bei. Dieser Term $Q_m^1(\omega, \mathcal{A}^{g(\theta)}, \mathcal{F}^{g(\theta)})$ ist proportional zu $d\theta \wedge$ (Volumenelement in S^m) und daher ein Volumenelement von $S^1 \times S^m$. Nun erhalten wir

$$\delta_\omega W[\mathcal{A}] = \int_{S^m} \text{sp } \omega \mathcal{D}_\mu \frac{\delta W[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu} = \text{id}_\theta w(\theta, \mathcal{A}) = 2\pi i \int_{S^m} Q_m^1(\omega, \mathcal{A}^{g(\theta)}, \mathcal{F}^{g(\theta)}). \quad (13.103)$$

Die explizite Form von Q_m^1 ist durch (13.82) gegeben. Für $m = 4$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{S^4} \text{sp } \omega \mathcal{D}_\mu \frac{\delta W[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu} &= 2\pi i \int_{S^4} Q_4^1(\omega, \mathcal{A}^{g(\theta)}, \mathcal{F}^{g(\theta)}) \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^4} \text{sp } \omega d \left[\mathcal{A}^{g(\theta)} d\mathcal{A}^{g(\theta)} + \frac{1}{2} (\mathcal{A}^{g(\theta)})^3 \right]. \end{aligned} \quad (13.104)$$

Wir setzen $\theta = 0$ ($g = e$) und erhalten so wieder die anomale Divergenz

$$\mathcal{D}_\mu \langle j^\mu \rangle_\alpha = \frac{1}{24\pi^2} \text{sp } T_\alpha \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \partial_\kappa \left[\mathcal{A}_\lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{1}{2} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \right], \quad (13.105)$$

in Übereinstimmung mit (13.56). Die hier vorgestellte Methode garantiert uns, dass die WZ-Bedingung das korrekte Ergebnis liefert. Darüber hinaus reproduziert sie die anomale Divergenz inklusive der Normierung, was die WZ-Bedingung allein nicht leistet.

13.6 Die Paritätsanomalie in ungeraddimensionalen Räumen

Bisher haben wir in geraddimensionalen Räumen gearbeitet. Einer der Gründe dafür ist, dass $\text{SO}(2l+1)$ reelle oder pseudoreelle, jedoch keine *komplexen* Spinordarstellungen hat, weswegen keine Eichanomalie zu erwarten ist. Wir können allerdings zeigen, dass Eichtheorien in ungeraddimensionalen Räumen eine andere Art von Anomalie aufweisen, die sog. „Paritätsanomalie“, bei welcher die Paritätssymmetrie der klassischen Wirkung während der Quantisierung verloren geht. Es sei bemerkt, dass die Paritätsanomalie in $2l+1$ Dimensionen mit der Abel'schen Anomalie in $2l+2$ verwandt ist, worauf Alvarez-Gaumé *et al.* (1985) hingewiesen haben.

13.6.1 Die Paritätsanomalie

Sei M eine $(2l+1)$ -dimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Wir zeichnen eine Dimension vor den anderen aus; d. h., wir nehmen an, dass M von der Form $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ oder $S^1 \times \mathcal{M}$ ist, wobei \mathcal{M} eine $2l$ -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Wir bezeichnen die Koordinate von \mathbb{R} oder S^1 mit t und die von \mathcal{M} mit x . Der Index 0 soll für die Komponente im t -Raum stehen, μ für diejenige im x -Raum. Beispielsweise sind die Komponenten der γ -Matrizen $\{\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{2l}\}$.

Wir definieren die „Paritätsoperation“ P durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(t, x) &\rightarrow \mathcal{A}_0^P(t, x) = -\mathcal{A}_0(-t, x), & \mathcal{A}_\mu(t, x) &\rightarrow \mathcal{A}_\mu^P(t, x) = \mathcal{A}_\mu(-t, x), \\ \psi(t, x) &\rightarrow \psi^P(t, x) = i\gamma_0\psi(-t, x), & \bar{\psi}(t, x) &\rightarrow \bar{\psi}^P(t, x) = i\bar{\psi}(-t, x)\gamma_0. \end{aligned}$$

Die klassische Wirkung ist invariant unter der Paritätsoperation,

$$\begin{aligned} &\int dt dx \bar{\psi} i\nabla \psi \\ &\rightarrow - \int dt dx \bar{\psi}(-t, x) \gamma^0 i [\gamma^0(\partial_0 - \mathcal{A}_0(-t, x)) + \gamma^\mu(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu(-t, x))] \gamma^0 \psi(-t, x) \\ &= \int dt dx \bar{\psi}(t, x) i [\gamma^0(\partial_0 + \mathcal{A}_0(t, x)) + \gamma^\mu(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu(t, x))] \psi(t, x), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile $t \rightarrow -t$ gesetzt haben. Schauen wir, ob die effektive Wirkung dieser Invarianz gehorcht. Die effektive Wirkung ist durch das regularisierte Produkt der Eigenwerte von $i\nabla$ gegeben. Wir verwenden die **Pauli-Villars-Regularisierung**, um das Produkt zu regularisieren, d. h., wir addieren

$$\mathcal{L}_{\text{reg}} \equiv \bar{\chi} i\nabla \chi + iM \bar{\chi} \chi \quad (13.106)$$

zu der ursprünglichen Lagrange-Funktion. Der Pauli-Villars-Regulator χ ist ein Spinor, welcher der *Bose*-Statistik gehorcht; die Gleichung ist im Grenzübergang $M \rightarrow \infty$ zu verstehen. Die regularisierte Determinante ist

$$e^{-W[\mathcal{A}]} = \frac{\det i\nabla}{\det(i\nabla + iM)} = \prod_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + iM}, \quad (13.107)$$

wobei wir beachtet haben, dass χ bosonisch ist. Hier ist λ_i der i -te Eigenwert von $i\nabla$: $i\nabla \psi_i = \lambda_i \psi_i$. Unter der Paritätsoperation wechseln die Eigenwerte ihr Vorzeichen:

$$\begin{aligned} &i [\gamma^0(\partial_0 - \mathcal{A}_0(-t, x)) + \gamma^i(\partial_i + \mathcal{A}_i(-t, x))] i\gamma^0 \psi_i(-t, x) \\ &= i\gamma^0 [\gamma^0(-\partial_\tau - \mathcal{A}_0(\tau, x)) - \gamma^i(\partial_i + \mathcal{A}_i(\tau, x))] i\psi(\tau, x) \\ &= -\lambda_i i\gamma^0 \psi_i(\tau, x), \end{aligned}$$

mit $\tau = -t$. Dies zeigt, dass sich die effektive Wirkung $W[\mathcal{A}]$ unter der Paritätsoperation P wie

$$W[\mathcal{A}] \rightarrow W[\mathcal{A}^P] = -\ln \prod \frac{-\lambda_i}{-\lambda_i + iM} = \overline{W[\mathcal{A}]} \quad (13.108)$$

transformiert; der Überstrich steht für die komplexe Konjugation. Gleichung (13.108) zeigt, dass der Imaginärteil von W mit dem paritätsverletzenden Anteil

$$W[\mathcal{A}] - W[\mathcal{A}^P] = 2 \operatorname{Im} W[\mathcal{A}] \quad (13.109)$$

identifiziert werden kann. $\operatorname{Im} W[\mathcal{A}]$ ist durch die in Abschnitt 12.8 definierte η -Invariante gegeben. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} W[\mathcal{A}] &= \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left(-\sum_i \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + iM} \right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_i \tan^{-1}(M/\lambda_i) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\sum_{\lambda > 0} 1 - \sum_{\lambda < 0} 1 \right) = \frac{\pi}{2} \eta. \end{aligned} \quad (13.110)$$

Somit verschafft uns der Pauli-Villars-Regulator eine regularisierte Form der η -Invariante. Schließlich erhalten wir

$$\operatorname{Im} W[\mathcal{A}] = \frac{\pi}{2} \eta = \frac{\pi}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \sum_i' \operatorname{sgn} \lambda_i |\lambda_i|^{-2s}, \quad (13.111)$$

wobei der Strich das Auslassen der Nullmoden anzeigt.

13.6.2 Die Dimensionsleiter 4–3–2

Es ist bemerkenswert, dass die Paritätsanomalie (13.110) eng mit der chiralen Anomalie in einem $(2l+2)$ -dimensionalen Raum zusammenhängt (Alvarez-Gaumé *et al.* 1985). In Anlehnung an Forte (1987) sehen wir uns daher jetzt die folgende „Dimensionsleiter“ an:

$$\begin{array}{c} \text{vierdimensionale Abel'sche Anomalie} \\ \downarrow \\ \text{dreidimensionale Paritätsanomalie} \\ \downarrow \\ \text{zweidimensionale nicht-Abel'sche Anomalie.} \end{array} \quad (13.112)$$

Wir nehmen $M_4 = S^2 \times S^2$ als vierdimensionalen Raum an. Die Abel'sche Anomalie ist durch den Index

$$\operatorname{ind} i\Psi_4 = \mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_- = \int_{S^2 \times S^2} \partial_\mu j_5^\mu = \int_{S^2 \times S^2} \operatorname{ch}_2(\mathbb{F}) \quad (13.113)$$

gegeben. Wie zuvor ist \mathcal{N}_+ (\mathcal{N}_-) die Zahl der positiven (negativen) Chiralitätsnullmoden. Sei Q_3 die Chern-Simons-Form von $\operatorname{ch}_2(\mathbb{F})$, mit $\operatorname{ch}_2(\mathbb{F}) = dQ_3(\mathbb{A}, \mathbb{F})$. Dann ist

$\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_-$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \int_{S^2 \times S^2} \text{ch}_2(\mathbb{F}) = \int_{U_N \times S^2} dQ_3(\mathbb{A}_N, \mathbb{F}_N) + \int_{U_S \times S^2} dQ_3(\mathbb{A}_S, \mathbb{F}_S) \\ &= \int_{S^1 \times S^2} [Q_3(\mathbb{A}_N, \mathbb{F}_N) - dQ_3(\mathbb{A}_S, \mathbb{F}_S)] \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^1 \times S^2} \text{sp}(g^{-1} dg)^3.\end{aligned}\quad (13.114)$$

Dabei ist g die Eichtransformation, welche den Zusammenhang zwischen \mathbb{A}_N und \mathbb{A}_S vermittelt: $\mathbb{A}_N = g^{-1}(\mathbb{A}_S + d + d_\theta)g$. Im vorigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass \mathcal{N} auch die nicht-Abel'sche Anomalie

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial w(\mathcal{A}, \theta)}{\partial \theta} \quad (13.115a)$$

darstellt, wobei w durch

$$\det i\hat{D}(\mathcal{A}^{g(\theta)}) = e^{iw(\mathcal{A}, \theta)} \det i\hat{D}(\mathcal{A}). \quad (13.115b)$$

definiert ist. Hier sind \mathcal{A} das Referenzzeichpotenzial, und es ist

$$\mathcal{A}^{g(\theta)} = g^{-1}(x, \theta)(\mathcal{A} + d)g(x, \theta)i\hat{D} = \emptyset + \mathcal{A}\mathcal{P}_+.$$

Als nächstes zeigen wir, dass \mathcal{N} auch mit der Paritätsanomalie im dreidimensionalen Raum verknüpft ist. Sei $i\Psi_3$ ein dreidimensionaler Dirac-Operator und definieren wir einen vierdimensionalen Dirac-Operator durch

$$iD_4[\mathcal{A}] \equiv i\sigma_1 \otimes I \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2 \otimes i\Psi_3[\mathcal{A}_t], \quad (13.116)$$

wobei die \mathcal{A}_t eine einparametrische Familie von Eichpotenzialen sind, die zwischen $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{t=0}$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{t=1}$ interpolieren. Der Atiyah-Patodi-Singer-Indexsatz (siehe Abschnitt 12.8) lautet

$$\text{ind } iD_4 = - \int_{S^2 \times S^1 \times I} \text{ch}_2(\mathbb{F}) + \frac{1}{2} [\eta(t=1) - \eta(t=0)], \quad (13.117)$$

wobei wir beachtet haben, dass das Dirac-Geschlecht \hat{A} trivial auf $S^2 \times S^1 \times I$ ist. Nehmen wir an, es seien \mathcal{A}_0 und \mathcal{A}_1 durch eine Eichtransformation miteinander verknüpft:

$$\mathcal{A}_1 = g^{-1}(\mathcal{A}_0 + d)g. \quad (13.118a)$$

Weiterhin sei

$$\mathcal{A}_t \equiv t\mathcal{A}_1 + (1-t)\mathcal{A}_0 \quad (13.118b)$$

ein interpolierendes Potenzial. Das Spektrum von $i\Psi_3$ ist eichinvariant, und es gilt insbesondere $\sigma(i\Psi_3(\mathcal{A}_0)) = \sigma(i\Psi_3(\mathcal{A}_1))$. Deswegen ist auch die η -Invariante eichinvariant.⁹ Dann erhalten wir $\eta(t=0) = \eta(t=1)$, und der APS-Indexatz (13.117) ergibt

$$\begin{aligned} \text{spektraler Fluss} &= \text{ind } iD_4(\mathcal{A}_t) \\ &= \int_{S^2 \times S^2} \text{ch}_2(\mathcal{F}) = \int_{S^1 \times S^2} [Q_3(\mathcal{A}_1, \mathcal{F}_1) - Q_3(\mathcal{A}_0, \mathcal{F}_0)] \\ &= \int_{S^1 \times S^2} Q_3(g^{-1} dg, 0) = \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (13.119)$$

Damit ist der spektrale Fluss der dreidimensionalen Theorie durch den Index \mathcal{N} gegeben.

Zusammenfassend können wir sagen, dass die Abbildung $g : S^2 \times S^1 \rightarrow G$ sich auf drei unterschiedliche Weisen verstehen lässt:

- (1) g ist eine Übergangsfunktion am Rand von zwei Stücken eines G -Bündels über $S^2 \times S^2$ und liefert den Index \mathcal{N} der vierdimensionalen Abel'schen Anomalie.
- (2) Zu den Eichpotenzialen \mathcal{A}_0 und $\mathcal{A}_1 = g^{-1}(\mathcal{A}_0 + d)g$ auf $S^2 \times S^1$ misst die Eichtransformationsfunktion g den spektralen Fluss \mathcal{N} zwischen $\sigma i\Psi_3(\mathcal{A}_0)$ und $\sigma i\Psi_3(\mathcal{A}_1)$.
- (3) $g : S^2 \times S^1 \rightarrow G$ induziert eine Abbildung $S^1 \rightarrow \mathfrak{G}$, deren Windungszahl \mathcal{N} mit der nicht-Abel'schen Anomalie im zweidimensionalen Raum identifiziert wird.

Dies ist die **4–3–2-Dimensionsleiter**. Die Erweiterung auf höhere Dimensionen ist offensichtlich.

⁹ Beachten Sie, dass es keine Echanomie in ungeraddimensionalen Räumen gibt.

14

Bosonische Stringtheorie

In diesem letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Ein-Schleifen-Amplitude in der bosonischen Stringtheorie. Unser Beispiel ist das einfachstmögliche: geschlossene orientierte bosonische Strings im 26-dimensionalen euklidischen Raum.¹ Die Wirkung ist die Polyakov-Wirkung

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_g} d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{\Sigma_g} d^2\xi \sqrt{\gamma} \mathcal{R}, \quad (14.1)$$

wobei Σ_g eine Riemann'sche Fläche mit Geschlecht g ist. Der zweite Term ist proportional zur Euler-Charakteristik $\chi = 2 - 2g$ und bestimmt daher das relative Verhältnis der Viel-Schleifen-Amplituden; die g -Schleifen-Amplitude ist proportional zu $\exp(-\lambda g)$. Die möglichen Gegenterme haben wir nicht explizit aufgeschrieben.

In den folgenden Abschnitten arbeiten wir den Pfadintegralformalismus für bosonische Strings aus. Wir entwickeln zunächst das benötigte mathematische Handwerkszeug, d. h. die Differentialgeometrie auf Riemann'schen Flächen. Dann formulieren wir den Pfadintegralausdruck für die Vakuumamplitude. Als Beispiel berechnen wir die Ein-Schleifen-Vakuumamplitude. Unsere Darstellung basiert auf D'Hoker und Phong (1986), Polchinski (1986) sowie Moore und Nelson (1986). Es gibt eine Vielzahl von Reviews zu diesen Themen, z. B. Alvarez-Gaumé und Nelson (1986), Bagger (1987), D'Hoker und Phong (1988) oder Weinberg (1988).

14.1 Differentialgeometrie auf Riemann'schen Flächen

Riemann'sche Flächen sind reelle zweidimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Auf unserer Reise durch Topologie und Geometrie sind sie uns bereits an verschiedenen Stellen begegnet. Wir wollen hier noch einmal die wichtigsten Grundlagen zu Riemann'sche Flächen zusammenfassen, womit dieses Kapitel zu einer in sich abgeschlossenen Einheit wird. Wir führen darüber hinaus auch einige neue Aspekte ein, damit wir einen ausreichenden Background für die Diskussion bosonischer Stringamplituden haben.

¹ Der Grund für $D = 26$ wird in Abschnitt 14.2 klar werden.

14.1.1 Metrik und komplexe Struktur

Sei Σ_g eine Riemann'sche Fläche mit dem Geschlecht g . In Beispiel 7.9 wurde gezeigt, dass wir in jeder Karte U die **isothermen Koordinaten** (ξ^1, ξ^2) einführen können, in welchen die Metrik konform flach wird:

$$g = e^{2\sigma(\xi)}(d\xi^1 \otimes d\xi^1 + d\xi^2 \otimes d\xi^2). \quad (14.2)$$

Wir führen die komplexen Koordinaten

$$z = \xi^1 + i\xi^2, \quad \bar{z} = \xi^1 - i\xi^2 \quad (14.3)$$

ein. Formen und Vektoren werden aufgespannt durch

$$dz = d\xi^1 + id\xi^2, \quad d\bar{z} = d\xi^1 - id\xi^2 \quad (14.4a)$$

$$\partial_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} - i \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} + i \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right). \quad (14.4b)$$

In den komplexen Koordinaten nimmt die Metrik die Form

$$g = \frac{1}{2} e^{2\sigma(z, \bar{z})} [dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz] \quad (14.5)$$

an, und die Komponenten von g sind

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2} e^{2\sigma}, \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (14.6a)$$

$$g_{\bar{z}\bar{z}} = g_{z\bar{z}} = 2e^{-2\sigma}, \quad g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = 0. \quad (14.6b)$$

Sei V eine weitere Karte von Σ_g , sodass $U \cap V \neq \emptyset$ ist, und seien (w, \bar{w}) die komplexen Koordinaten in V . Die Metrik in V ist

$$g = e^{2\sigma'(w, \bar{w})} dw \otimes d\bar{w}. \quad (14.7)$$

Die zwei Ausdrücke (14.5) und (14.7) sollten auf $U \cap V$ übereinstimmen:

$$e^{2\sigma(z, \bar{z})} dz \otimes d\bar{z} = e^{2\sigma'(w, \bar{w})} dw \otimes d\bar{w}.$$

Wegen

$$dw \otimes d\bar{w} = [(\partial w / \partial z) dz + (\partial w / \partial \bar{z}) d\bar{z}] \otimes [(\partial \bar{w} / \partial z) dz + (\partial \bar{w} / \partial \bar{z}) d\bar{z}] \propto dz \otimes d\bar{z}$$

muss gelten $\partial w / \partial \bar{z} = \partial \bar{w} / \partial z = 0$.² Damit folgt

$$w = w(z), \quad \bar{w} = \bar{w}(\bar{z}), \quad (14.8)$$

was bestätigt, dass Σ_g eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Außerdem ergibt sich

$$e^{2\sigma(z, \bar{z})} = e^{2\sigma'(w, \bar{w})} |\partial w / \partial z|^2. \quad (14.9)$$

² Eine andere Möglichkeit, $\partial w / \partial \bar{z} = \partial \bar{w} / \partial z = 0$, fällt heraus, wenn (z, \bar{z}) und (w, \bar{w}) dieselbe Orientierung definieren.

14.1.2 Vektoren, Formen und Tensoren

Sei $M = \Sigma_g$. Die Komponenten von Vektorfeldern $V^z \partial/\partial z \in TM^+$ und $V^{\bar{z}} \partial/\partial \bar{z} \in TM^-$ transformieren sich wie

$$V^w = (\partial w/\partial z)V^z, \quad V^{\bar{w}} = (\partial \bar{w}/\partial \bar{z})V^{\bar{z}}. \quad (14.10)$$

Die Komponenten von Differentialformen $w_z dz \in \Omega^{1,0}(M)$ und $w_{\bar{z}} d\bar{z} \in \Omega^{0,1}(M)$ transformieren sich wie

$$\omega_w = (\partial w/\partial z)^{-1} \omega_z, \quad \omega_{\bar{w}} = (\partial \bar{w}/\partial \bar{z})^{-1} \omega_{\bar{z}}. \quad (14.11)$$

Wir identifizieren diese Formen mit Schnitten der holomorphen (antiholomorphen) Geradenbündel über $M = \Sigma_g$ mit holomorphen (antiholomorphen) Übergangsfunktionen. Die Metrik liefert uns einen natürlichen Isomorphismus zwischen TM^+ und $\Omega^{0,1}(M)$ über

$$\omega_{\bar{z}} = g_{\bar{z}\bar{z}} V^z, \quad V^z = g^{z\bar{z}} \omega_{\bar{z}}. \quad (14.12)$$

In ähnlicher Weise ist TM^- isomorph zu $\omega^{1,0}(M)$:

$$\omega_z = g_{z\bar{z}} V^{\bar{z}}, \quad V^{\bar{z}} = g^{\bar{z}\bar{z}} \omega_z. \quad (14.13)$$

Im Allgemeinen erlaubt es uns die Metrik, bei einem beliebigen gegebenen Tensor alle \bar{z} -Indizes gegen z -Indizes einzutauschen. Es ist leicht zu sehen, dass gilt:

$$T \underbrace{\begin{array}{c} q_1 \\ z \dots z \\ z \dots z \end{array}}_{p_1} \underbrace{\begin{array}{c} q_2 \\ \bar{z} \dots \bar{z} \\ \bar{z} \dots \bar{z} \end{array}}_{p_2} \rightarrow T \underbrace{\begin{array}{c} q_1 + p_2 \\ z \dots z \\ z \dots z \end{array}}_{p_1 + q_2} = (g_{z\bar{z}})^{q_2} (g^{z\bar{z}})^{p_2} T \underbrace{\begin{array}{c} q_1 \\ z \dots z \\ z \dots z \end{array}}_{p_1} \underbrace{\begin{array}{c} q_2 \\ \bar{z} \dots \bar{z} \\ \bar{z} \dots \bar{z} \end{array}}_{p_2}. \quad (14.14)$$

Diese Entsprechung ist ein Isomorphismus. Wir beachten beispielsweise

$$T_{z\bar{z}}^{\bar{z}} \rightarrow g^{z\bar{z}} g_{z\bar{z}} T_{z\bar{z}}^{\bar{z}} = T_z^z.$$

Somit braucht man nur Tensoren mit reinen z -Indizes in Betracht zu ziehen. Diesen Tensoren weisen wir eine Helizität zu. Da der Tensor T nur z -Indizes hat, transformiert er sich unter $z \rightarrow w$ gemäß

$$T \rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^n T, \quad (14.15)$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$ als Anzahl der oberen z -Indizes minus der Anzahl der unteren z -Indizes gegeben ist. Beispielsweise ist

$$T^{zz}_z \rightarrow T^{ww}_w = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) T^{zz}_z.$$

Alles, worauf es ankommt, ist die *Differenz* zwischen den Anzahlen der oberen und der unteren Indizes. Der Tensor T^z_z bleibt invariant unter $z \rightarrow w$ und lässt sich als

ein Skalar ansehen. Die Zahl n wird **Helizität** genannt. Die Menge der Tensoren mit einer Helizität n bezeichnet man als \mathcal{T}^n , wobei gilt:

$$\mathcal{T}^n \equiv \{T \overbrace{\cdots}^q \underbrace{\cdots}_{p} | q-p=n\}. \quad (14.16)$$

Die Helizität charakterisiert die irreduzible Darstellung von $U(1) = SO(2)$.

Bisher haben wir n als ganze Zahl angenommen. Es lässt sich zeigen, dass $n = \frac{1}{2}$ mit dem Spinorfeld auf Σ_g korrespondiert. Tatsächlich wird die Existenz von Spinothen auf Riemann'schen Flächen durch die Trivialität der zweiten Stiefel-Whitney-Klasse von Σ_g gewährleistet. Die Menge \mathcal{T}^1 wird mit dem holomorphen Geradenbündel K über Σ_g identifiziert. Dann ist $\mathcal{T}^{1/2}$ die *Quadratwurzel* von K : $S_+^2 = K = \mathcal{T}^1$, wobei S_+ das Spinbündel mit positiver Chiralität ist. In ähnlicher Weise erhalten wir $\mathcal{T}^{-1} = \bar{K} = S_-^2$, mit S_- als dem Spinbündel mit negativer Chiralität.³

Beispiel 14.1. In reellen Indizes sind die Vektoren mit der Helizität ± 1 durch $V^1 \pm iV^2$ gegeben, was aus

$$V^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} + V^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} = (V^1 + iV^2)\partial_z + (V^1 - iV^2)\partial_{\bar{z}}$$

folgt. Wir setzen $V^z = V^1 + iV^2$ und $V^{\bar{z}} = V^1 - iV^2 \simeq V_z$. Die Tensoren mit Helizität ± 2 sind $T^{11} \pm iT^{22}$, wobei T ein *symmetrischer spurfreier* Tensor zweiter Stufe ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} T^{11} & \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^1} - \frac{\partial}{\partial \xi^2} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right) + T^{12} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^1} \right) \\ & = 2(T^{11} + iT^{12})\partial_z \otimes \partial_z + 2(T^{11} - iT^{12})\partial_{\bar{z}} \otimes \partial_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Offenkundig hat $T^{zz} = 2(T^1 + iT^{12})$ die Helizität $+2$ und $T^{\bar{z}\bar{z}} = 2(T^{11} - iT^{12})$ die Helizität -2 (beachten Sie, dass $g_{z\bar{z}}g_{z\bar{z}}T^{\bar{z}\bar{z}} = T_{zz}$ ist). \diamond

14.1.3 Kovariante Ableitungen

Die einzigen nichtverschwindenden Christoffel-Symbole von Σ_g sind, siehe (8.69):

$$\Gamma^z_{zz} = g^{z\bar{z}}\partial_z g_{z\bar{z}} = 2\partial_z\sigma, \quad \Gamma^{\bar{z}}_{z\bar{z}} = g^{\bar{z}\bar{z}}\partial_{\bar{z}} g_{z\bar{z}} = 2\partial_{\bar{z}}\sigma. \quad (14.17)$$

Für Tensoren in \mathcal{T}^n definieren wir zwei Arten von kovarianten Ableitungen: $\nabla_{(n)}^z : \mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}^{n+1}$ und $\nabla_z^{(n)} : \mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}^{n-1}$, und es sei

$$T \overbrace{\cdots}^q \underbrace{\cdots}_{p} \in \mathcal{T}^n \quad (q-p=n).$$

³ Wir verwenden für Spinbündel „ S_{\pm} “ anstelle von „ Δ_{\pm} “. Das Symbol „ Δ^{\pm} “ reservieren wir exklusiv für Laplace-Operatoren.

Wir definieren

$$\nabla_{(n)}^z T^{z \cdots z}_{z \cdots z} = g^{\bar{z}\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} T^{z \cdots z}_{z \cdots z} = g^{\bar{z}\bar{z}} [\partial_{\bar{z}} + (q-p)\Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^z] T^{z \cdots z}_{z \cdots z} = g^{\bar{z}\bar{z}} \partial_{\bar{z}} T^{z \cdots z}_{z \cdots z}, \quad (14.18a)$$

$$\nabla_z^{(n)} T^{z \cdots z}_{z \cdots z} = \nabla_z T^{z \cdots z}_{z \cdots z} = [\partial_z + (q-p)\Gamma_{zz}^z] T^{z \cdots z}_{z \cdots z} = (\partial_z + 2n\partial_z\sigma) T^{z \cdots z}_{z \cdots z}. \quad (14.18b)$$

In der zweiten Gleichung wirkt $2n\partial_z\sigma$ wie ein Eichpotenzial \mathcal{A} . Wir definieren außerdem kovariante Ableitungen nach \bar{z} :

$$\nabla_{(n)}^{\bar{z}} = g^{\bar{z}\bar{z}} \nabla_z^{(n)}, \quad \nabla_{\bar{z}}^{(n)} = g_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_{(n)}^z. \quad (14.19)$$

Die Krümmungs-2-Form von K und die mit den Christoffel-Symbolen assoziierte skalare Krümmung sind

$$\mathcal{F} = R_{z\bar{z}\bar{z}}^z dz \wedge d\bar{z} = -\partial_{\bar{z}}(2\partial_z\sigma) dz \wedge d\bar{z} = -2\partial_z\partial_{\bar{z}}\sigma dz \wedge d\bar{z}, \quad (14.20a)$$

$$\mathcal{R} = g^{\bar{z}\bar{z}} Ric_{\bar{z}\bar{z}} + g^{\bar{z}\bar{z}} Ric_{z\bar{z}} = -8e^{-2\sigma} \partial_z \partial_{\bar{z}}\sigma. \quad (14.20b)$$

Übung 14.1 Bestätigen Sie, dass gilt:

$$\nabla_{(n)}^z = 2e^{-2\sigma} \partial_{\bar{z}}, \quad \nabla_z^{(n)} = e^{-2n\sigma} \partial_z e^{2n\sigma}, \quad (14.21a)$$

$$\nabla_{(n)}^{\bar{z}} = 2e^{-2(n+1)\sigma} \partial_z e^{2n\sigma}, \quad \nabla_{\bar{z}}^{(n)} = \partial_{\bar{z}}. \quad (14.21b)$$

$\nabla_{(n)}^z$ und $\nabla_z^{(n)}$ sind jeweils zueinander adjungiert bezüglich eines geeignet definierten inneren Produkts. Sei $T, U \in \mathcal{T}^n$. Wir verlangen, dass das innere Produkt invariant unter einem holomorphen Koordinatenwechsel $z \rightarrow w$ ist. Wegen

$$g_{z\bar{z}} \rightarrow |dw/dz|^{-2} g_{z\bar{z}}, \quad d^2 z \sqrt{g} \rightarrow d^2 w \sqrt{g},$$

$$\bar{T} \rightarrow (\overline{dw/dz})^n \bar{T}, \quad U \rightarrow (dw/dz)^n U$$

ist die Kombination

$$(T, U) \equiv \int d^2 z \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^n \bar{T} U \quad (14.22)$$

invariant unter holomorphen Koordinatentransformationen. Wir betrachten $T \in \mathcal{T}^n$ und $U \in \mathcal{T}^{n+1}$ und erhalten

$$\begin{aligned} (U, \nabla_{(n)}^z T) &= \int d^2 z e^{2\sigma} 2^{-n-1} e^{2(n+1)\sigma} \bar{U} 2e^{-2\sigma} \partial_{\bar{z}} T \\ &= -2^{-n} \int d^2 z T \partial_{\bar{z}} [e^{(2n+1)\sigma} \bar{U}] \quad (\text{partielle Integration}) \\ &= -2^{-n} \int d^2 z T e^{(2n+1)\sigma} \overline{[\partial_z U + (2n+1)(\partial_z \sigma) U]} \\ &= - \overline{\int d^2 z \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^n [\nabla_z^{(n+1)} U] \bar{T}} = (-\nabla_z^{(n+1)} U, T). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass gilt:

$$(\nabla_{(n)}^z)^\dagger = -\nabla_z^{(n+1)}. \quad (14.23a)$$

Übung 14.2 Zeigen Sie:

$$(\nabla_z^{(n)})^\dagger = -\nabla_{(n-1)}^z. \quad (14.23b)$$

Wir definieren zwei Arten von Laplace-Operatoren $\Delta_{(n)}^\pm : \mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}^{n\pm 1} \rightarrow \mathcal{T}^n$ durch

$$\Delta_{(n)}^+ \equiv -\nabla_z^{(n+1)} \nabla_{(n)}^z = -2e^{-2\sigma} [\partial_z \partial_{\bar{z}} + 2n(\partial_z \sigma) \partial_{\bar{z}}], \quad (14.24a)$$

$$\Delta_{(n)}^- \equiv -\nabla_{(n-1)}^z \nabla_z^{(n)} = -2e^{-2\sigma} [\partial_z \partial_{\bar{z}} + 2n(\partial_z \sigma) \partial_{\bar{z}} + 2n(\partial_z \partial_{\bar{z}} \sigma)]. \quad (14.24b)$$

Damit folgt

$$\Delta_{(n)}^+ - \Delta_{(n)}^- = 4ne^{-2\sigma} (\partial_z \partial_{\bar{z}} \sigma) = -\frac{1}{2} n \mathcal{R}. \quad (14.25)$$

Dies zeigt insbesondere, dass gilt:

$$\Delta_{(0)}^+ = \Delta_{(0)}^- (\equiv \Delta_{(0)}). \quad (14.26)$$

14.1.4 Der Satz von Riemann-Roch

Wir leiten jetzt, D'Hoker und Phong (1988) folgend, aus dem Atiyah-Singer-Indexsatz eine Version des Satzes von Riemann-Roch her.

Satz 14.1. (Satz von Riemann-Roch) Sei Σ_g eine Riemann'sche Fläche mit dem Geschlecht g . Dann ist der Index des Operators $\nabla_z^{(n)}$:

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker \nabla_z^{(n)} - \dim_{\mathbb{C}} \ker \nabla_{(n-1)}^z = (2n-1)(g-1). \quad (14.27)$$

Beweis

Wir berechnen den Index mit dem Wärmeleitungskern. Als erstes beachten wir, dass $\ker \nabla_z^{(n)} = \ker \Delta_{(n)}^-$ und $\ker \nabla_{(n-1)}^z = \ker \Delta_{(n-1)}^+$ ist, siehe (14.24). Der Wärmeleitungskern \mathcal{K}_n^+ von $\Delta_{(n)}^+$ genügt der Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_{(n)}^+ \right) \mathcal{K}_n^+(z, w; t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta - V_n \right) \mathcal{K}_n^+(z, w; t) = 0,$$

wobei $\Delta \equiv -2\partial_z \partial_{\bar{z}}$ der Laplace-Operator für den flachen Raum ist, und gilt:

$$V_n \equiv \Delta - \Delta_{(n)}^+ = (1 - e^{-2\sigma}) \Delta + 4ne^{-2\sigma} \partial_z \sigma \partial_{\bar{z}}.$$

Der Laplace-Operator Δ definiert ebenfalls einen Wärmeleitungskern über

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) K(z, w; t) = 0,$$

was sich leicht lösen lässt:

$$K(z, w; t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-|z-w|^2/2t}.$$

Störungsrechnung und Iteration ergeben

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n^+(z, z'; t) &= K(z, z'; t) + \int_0^t ds \int dw K(z, w; t-s) V_n(w) \mathcal{K}_n^+(w, z'; s) \\ &= K(z, z'; t) + \int ds \int dw K(z, w; t-s) V_n(w) K(w, z'; s) \\ &\quad + \int ds \int ds' \int dv \int dw K(z, v; t-s) V_n(v) K(v, w; s-s') V_n(w) K(w, z'; s') + \dots\end{aligned}$$

Wir sind insbesondere interessiert an $\mathcal{K}_n^+(z, z; t)$ mit kleinem t :

$$\mathcal{K}_n^+(z, z; t) = \frac{1}{4\pi t} + \int_0^t ds \int dw K(z, w; t-s) V_n(w) K(w, z; s) + O(t). \quad (14.28)$$

Wenn wir ein Koordinatensystem mit $\sigma = 0$ bei z wählen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma(w) &\simeq 0 + \partial_z \sigma(w-z) + \partial_{\bar{z}} \sigma(\bar{w}-\bar{z}) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\partial_z^2 \sigma(w-z)^2 + \partial_{\bar{z}}^2 \sigma(\bar{w}-\bar{z})^2 + 2\partial_z \partial_{\bar{z}} \sigma |w-z|^2] + \dots\end{aligned}$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie im zweidimensionalen Raum überleben nur die Terme mit einer z -und einer \bar{z} -Ableitung im Integral in (14.28). Terme proportional zu $\partial_z \sigma \partial_{\bar{z}} \sigma$ fallen zwischen dem zweiten und dritten Term in der Entwicklung weg, und uns bleiben nur Terme proportional zu $\partial_z \partial_{\bar{z}} \sigma$. Nun müssen wir das Integral

$$\int_0^t ds \int d^2 w K(z, w; t-s) [2\partial_z \partial_{\bar{z}} \sigma |\bar{w}-\bar{z}|^2 \Delta_w + 4n(\bar{w}-\bar{z}) \partial_z \partial_{\bar{z}} \sigma \partial_{\bar{w}}] K(w, z; s)$$

auswerten. Aus den Identitäten

$$\begin{aligned}&\int d^2 w K(z, w; t-s) |w-z|^2 \Delta_w K(w, z; s) \\ &= \frac{1}{16\pi^2 s^2 (t-s)} \int d^2 w |w|^2 \exp\left(-\frac{t}{2s(t-s)} |w|^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{32\pi^2 s^3 (t-s)} \int d^2 w |w|^4 \exp\left(-\frac{t}{2s(t-s)} |w|^2\right) \\ &= \frac{(t-s)(2s-t)}{2\pi t^3}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\int d^2 w K(z, w; t-s) (\bar{z}-\bar{w}) \partial_{\bar{w}} K(w, z; s) \\ &= \frac{1}{32\pi^2 s^2 (t-s)} \int d^2 w \exp\left(-\frac{t}{2s(t-s)} |w|^2\right) = \frac{t-s}{4\pi t^2}\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\mathcal{K}_n^+(z, z; t) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{1+3n}{12\pi} \Delta\sigma + O(t). \quad (14.29a)$$

Außerdem gilt für den diagonalen Anteil des Wärmeleitungskerns \mathcal{K}_n^- für $\Delta_{(n)}^-$:

$$\mathcal{K}_n^-(z, z; t) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{1-3n}{12\pi} \Delta\sigma + O(t). \quad (14.29b)$$

Aus (14.29) und (14.20b) ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{ind } \nabla_z^{(n)} &= \int d^2 z \left(\frac{1-3n}{12\pi} - \frac{1+3(n-1)}{12\pi} \right) \Delta\sigma = \frac{1-2n}{8\pi} \int d^2 x \mathcal{R} \\ &= -\frac{2n-1}{2} \chi(\Sigma_g) = (2n-1)(g-1), \end{aligned}$$

mit

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2 x \mathcal{R} = 2 - 2g$$

als der Euler-Charakteristik von Σ_g .

14.2 Quantentheorie von bosonischen Strings

Nun sind wir bereit für die Polyakov'sche Formulierung bosonischer Strings, welche auf dem Pfadintegral über Geometrien basiert. Da die Stringwirkung eine enorme Symmetrie beinhaltet, müssen wir besonderes Augenmerk darauf richten, unabhängige Geometrien nur jeweils genau einmal zu zählen. Dies erreicht man mit dem Faddeev-Popov-Trick. Unsere Diskussion beschränkt sich auf den einfachsten denkbaren Fall, nämlich geschlossene orientierbare bosonische Strings. Die Theorie ist auf Riemann'schen Flächen definiert.

14.2.1 Vakuumamplitude von Polyakov-Strings

Entsprechend dem allgemeinen Vorgehen beim Pfadintegralformalismus ist die Zustandssumme (Vakuum-Vakuum-Amplitude) der Stringtheorie durch

$$Z = \sum_{g=0}^{\infty} Z_g = \sum_{g=0}^{\infty} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}\gamma e^{-S[X, \gamma]} \quad (14.30)$$

gegeben, siehe Abb. 14.1. Um Konfusion zu vermeiden, bezeichnen wir hier das Geschlecht mit g und die Metrik mit γ . Die Summe über Geschlechte läuft auf die Summe über die Topologien hinaus. Z_g ist die g -Schleifen-Amplitude, man erhält sie durch Integration über alle Metriken γ und alle Einbettungen X . Wie wir später

sehen werden, ist das Maß $\mathcal{D}X\mathcal{D}\gamma$ nicht wohldefiniert und wir werden ein paar Modifikationen anbringen müssen. Als Stringwirkung $S[X, \gamma]$ setzen wir an:

$$S[X, \gamma] \equiv \frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{\lambda}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \mathcal{R}. \quad (14.31)$$

Der erste Term ist die Polyakov-Wirkung, der zweite ist zur Euler-Charakteristik

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \mathcal{R} = 2 - 2g$$

proportional und dient als Stringkopplungskonstante; die Amplitude einer Schleife mit Geschlecht g ist um den Faktor $e^{-2\lambda g}$ unterdrückt. Da dieser Term eine topologische Invariante ist, hat er keinen Einfluss auf die Dynamik des Strings. Wir interessieren uns für Riemann'sche Flächen mit einem festen Geschlecht g und ignorieren daher diesen Term. Der erste Term der Wirkung hat die folgenden Symmetrien (siehe Abschnitt 7.11):

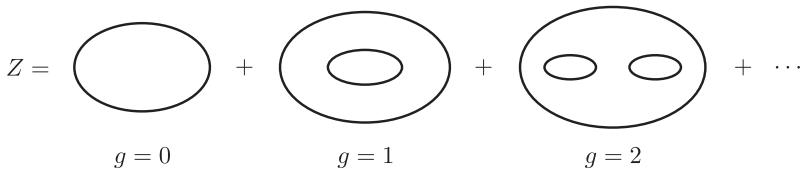


Abb. 14.1. Die totale Vakuumamplitude ist durch die Summe über g -Schleifen-Amplituden gegeben.

- (A) $\text{Diff}(\Sigma_g)$, die Gruppe der Diffeomorphismen $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$. Sei $\xi^\alpha \rightarrow \xi'^\alpha(\xi)$ der Koordinatenausdruck für f . Die neue Metrik ist der Rücktransport der alten, welche den Koordinatenkomponentenausdruck

$$\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow f^* \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \xi'^\alpha} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial \xi'^\beta} \gamma_{\gamma\delta} \quad (14.32)$$

hat. Die Einbettung transformiert sich gemäß

$$X^\mu \rightarrow f^* X^\mu = X^\mu f. \quad (14.33)$$

Die Invarianz der klassischen Wirkung hat die Form

$$S[X, \gamma] = S[f^* X, f^* \gamma]. \quad (14.34)$$

- (B) $\text{Weyl}(\Sigma_g)$, die Gruppe der zweidimensionalen Weyl-Reskalierungen

$$\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow \hat{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv e^\phi \gamma_{\alpha\beta}, \quad (14.35)$$

mit $\phi \in \mathcal{F}(\Sigma_g)$. Die konforme Invarianz von S hat die Form

$$S[X, \gamma] = S[X, \hat{\gamma}]. \quad (14.36)$$

Die Symmetrien (A) und (B) müssen unter der Quantisierung erhalten bleiben, andernfalls hätte die Theorie Anomalien.

Entsprechend dem üblichen Faddeev-Popov-Formalismus wurden die mit diesen Symmetrien korrespondierenden Freiheitsgrade bei der Definition von Z_g weggelassen. Beispielsweise sollten die durch die Paare (X_1, γ_1) und (X_2, γ_2) spezifizierten Stringgeometrien nicht als unabhängig gezählt werden, wenn sie durch ein Element von $\text{Diff}(\Sigma_g)$ verknüpft sind. In ähnlicher Weise sollten (X, γ) und $(X, e^\phi \gamma)$ nicht als unabhängige Konfigurationen gezählt werden. Wenn man nicht gut aufpasst, zählt man dieselben Konfigurationen unendlich oft und handelt sich dadurch desaströse Divergenzen ein. Es stellt sich heraus, dass der Raum aller Geometrien, (X, γ) , in Äquivalenzklassen separiert werden kann (durch den **Eichschnitt**, engl. gauge slice). Punkte aus verschiedenen dieser Äquivalenzklassen können nicht über diese Symmetrien verbunden sein, siehe Abb. 14.2.

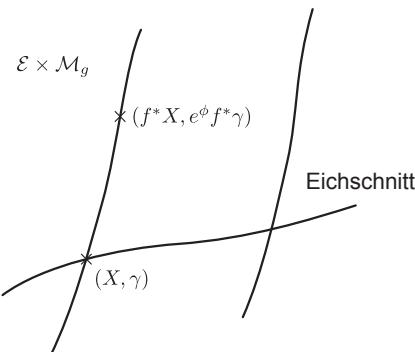


Abb. 14.2. Man erhält ein Element von $\mathcal{E} \times \mathcal{M}_g$ durch die Wirkung von $\text{Diff}(\Sigma_g) * \text{Weyl}(\Sigma_g)$ auf ein Element (X, γ) im Eichschnitt.

Um es etwas mathematischer auszudrücken: Seien \mathcal{E} der Raum aller Einbettungen $X : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{R}^D$ und \mathcal{M}_g der Raum aller auf Σ_g definierten Metriken. Naiv würde man das Pfadintegral über $\mathcal{E} \times \mathcal{M}_g$ definieren. Wegen der Symmetrien (A) und (B) sollte das Integral jedoch auf den Quotientenraum $(\mathcal{E} \times \mathcal{M}_g)/G$ eingeschränkt werden, wobei $G = \text{Diff}(\Sigma_g) * \text{Weyl}(\Sigma_g)$ die Eichgruppe ist.⁴ Die Wirkung von (f, e^ϕ) auf $(X, \gamma) \in \mathcal{E} \times \mathcal{M}_g$ ist

$$(f, e^\phi)(X, \gamma) = (f^* X, e^\phi f^* \gamma). \quad (14.37)$$

Der Quotient \mathcal{M}_g/G wird **Modulraum** von Σ_g genannt, und man schreibt dafür $\text{Mod}(\Sigma_g)$. Wir interessieren uns außerdem für die Untergruppe $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ von $\text{Diff}(\Sigma_g)$, die eine Zusammenhangskomponente der identischen Abbildung ist. Der Quotientenraum $\text{Teich}(\Sigma_g) \equiv \mathcal{M}_g/\text{Diff}_0(\Sigma_g) * \text{Weyl}(\Sigma_g)$ heißt **Teichmüller-Raum**

⁴ Hier bezeichnet $*$ das halbdirekte Produkt. Beachten Sie, dass $\text{Diff}(\Sigma_g) \cap \text{Weyl}(\Sigma_g) \neq \emptyset$ ist. Wir werden später auf diesen Punkt zurückkommen.

von Σ_g . Die allgemeine Theorie Riemann'scher Flächen zeigt, dass $\text{Teich}(\Sigma_g)$ ein endlichdimensionaler universeller Überlagerungsraum von $\text{Mod}(\Sigma_g)$ ist. Explizit gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Teich}(\Sigma_g) = \begin{cases} 0 & g = 0 \\ 2 & g = 1 \\ 6g - 6 & g \geq 2. \end{cases} \quad (14.38)$$

Die Gruppe $\text{Diff}(\Sigma_g)/\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ ist als **modulare Gruppe** (MG) oder **Abbildungsklassengruppe** (engl. mapping class group, MCG) bekannt. Die MG wird durch die **Dehn-Twists** erzeugt, die wir in Beispiel 8.2 definiert hatten. Für den Torus mit Geschlecht g wird die MG durch $3g - 1$ Dehn-Twists um a_i , b_i und c_i erzeugt (Abb. 14.3). Unglücklicherweise sind diese $3g - 1$ Dehn-Twists nicht die minimale Erzeugermenge. Die allgemeine Form von MG für $g \geq 2$ ist noch nicht gut verstanden.

Mit diesen Argumenten stellt sich der folgende Ausdruck als sinnvolle Zustandssumme heraus:

$$Z_g \equiv \int_{\mathcal{S} \times \mathcal{M}_g} \frac{\mathcal{D}X \mathcal{D}\gamma}{V(\text{Diff} * \text{Weyl})} e^{-S[X, \gamma]}. \quad (14.39)$$

Dabei ist $V(\text{Diff} * \text{Weyl})$ das (unendliche) räumliche Volumen von $\text{Diff}(\Sigma_g) * \text{Weyl}(\Sigma_g)$ und verhindert die fatale unendlichfache Berücksichtigung ein und derselben Geometrie. Die Ordnung (Anzahl der Elemente) von MG wird als $|\text{MG}|$ bezeichnet. Natürlich ist

$$V(\text{Diff} * \text{Weyl}) = |\text{MG}| V(\text{Diff}_0 * \text{Weyl}). \quad (14.40)$$

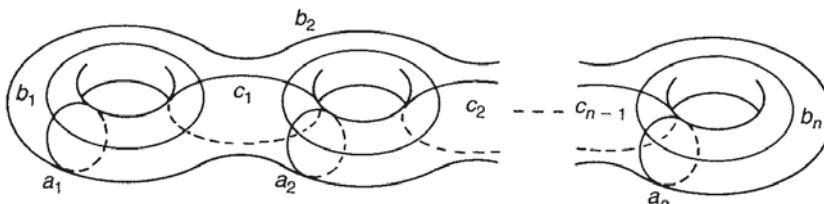


Abb. 14.3. Die modulare Gruppe (MG) wird durch Dehn-Twists um a_i , b_i und c_i ($1 \leq i \leq g$) erzeugt.

14.2.2 Integrationsmaße

Um die Integration (14.39) ausführen zu können, brauchen wir ein sinnvolles Maß, welches physikalische und Eichfreiheitsgrade separiert. Diese Separation erfordert die Jacobi-Determinante

$$\mathcal{D}\gamma \mathcal{D}X \rightarrow J(\mathcal{D} \text{ physikalisch})(\mathcal{D} \text{ Eichung}). \quad (14.41)$$

Zur Bestimmung dieser Jacobi-Determinante beachten wir, dass die Jacobi-Determinante auf einer Mannigfaltigkeit M mit derjenigen auf TM übereinstimmt. Dies sieht man mit folgender Überlegung: Sei x^μ (y^μ) eine Koordinate einer Karte U (V) von M , sodass $U \cap V \neq \emptyset$ ist. Die Jacobi-Determinante des Koordinatenwechsels ist $J = \det(\partial y^\mu / \partial x^\nu)$. Wir betrachten $V \in T_p M$. In Komponenten erhalten wir $V = u^\mu \partial / \partial x^\mu = v^\mu \partial / \partial y^\mu$, mit

$$v^\mu = u^\nu (\partial y^\mu / \partial x^\nu). \quad (14.42)$$

Hier sind $\{u^\mu\}$ und $\{v^\mu\}$ Faserkoordinaten von $T_p M$. Die mit diesem Koordinatenwechsel assoziierte Jacobi-Determinante \hat{J} ist

$$\hat{J} = \det(\partial v^\mu / \partial u^\nu) = \det(\partial y^\mu / \partial x^\nu) = J. \quad (14.43)$$

Dies zeigt, dass die Jacobi-Determinante bei $p \in M$ dieselbe ist wie die auf $T_p M$. Die Jacobi-Determinante \hat{J} hängt von p ab, aber nicht von dem Vektor selbst, da J nur von p abhängig ist.

Beispiel 14.2. Seien (x, y) und (r, θ) Koordinaten des \mathbb{R}^2 , mit $x = r \cos \theta$ und $y = r \sin \theta$. Die Jacobi-Determinante des Koordinatenwechsels ist

$$J = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

Lassen Sie uns

$$V = v_x \partial / \partial x + v_y \partial / \partial y = v_r \partial / \partial r + v_\theta \partial / \partial \theta \in T_p \mathbb{R}^2$$

wählen, sowie (v_x, v_y) und (v_r, v_θ) als Faserkoordinaten von $T_p \mathbb{R}^2$. Wegen

$$v_x = v_r \partial x / \partial r + v_\theta \partial x / \partial \theta, \quad v_y = v_r \partial y / \partial r + v_\theta \partial y / \partial \theta$$

berechnet sich die assoziierte Jacobi-Determinante \hat{J} leicht zu

$$\hat{J} = \det[\partial(v_x, v_y) / \partial(v_r, v_\theta)] = \begin{vmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{vmatrix} = J.$$

◇

Wir wollen diese Jacobi-Determinante auf eine indirekte, aber suggestive Weise herleiten. Dazu normieren wir das Maß $d^2 v$ wie⁵

$$1 = \int d^2 v \exp\left(-\frac{1}{2} \|v\|^2\right) = \int dv_x dv_y \exp\left[-\frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2)\right].$$

⁵ Diese Normierung des Maßes unterscheidet sich um einen konstanten Faktor von der konventionellen Normierung.

Außerdem ist $\|v^2\|^2 = v_r^2 + r^2 v_\theta^2$. Wir beachten, dass die Jacobi-Determinante unabhängig von v_r und v_θ ist. Damit ergibt sich

$$1 = J \int dv_r dv_\theta \exp \left[-\frac{1}{2} (v_r^2 + r^2 v_\theta^2) \right] = J r^{-1},$$

woraus wir $J = r$ erhalten. Wir verwenden jetzt diese Prozedur, um das Funktionalmaß der Stringtheorie herzuleiten.⁶

Die obige Argumentation erlaubt uns,

$$\mathcal{D}\delta\gamma\mathcal{D}\delta X = J\mathcal{D}\delta(\text{physikalisch})\mathcal{D}\delta(\text{Eichung}) \quad (14.44)$$

zu schreiben, mit $\delta\gamma(\delta X)$ als einer kleinen Variation der Metrik γ (der Einbettung X), die sich als ein Element von $T_\gamma(\mathcal{M}_g)$ bzw. von $T_X\mathcal{E}$ ansehen lässt. Die Bedeutung der rechten Seite der Gleichung wird gleich klar werden.

Betrachten Sie den Diffeomorphismus, der durch ein infinitesimales Vektorfeld δv auf Σ_g erzeugt wird. Da δv infinitesimal ist, gehört es eher zu $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ als zur vollen Gruppe $\text{Diff}(\Sigma_g)$. Die Änderungen der Metrik und der Einbettung unter δv sind, vgl. (7.120):

$$\delta_D\gamma_{\alpha\beta} = (\mathcal{L}_{\delta v}\gamma)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\delta v_\beta + \nabla_\beta\delta v_\alpha \quad \text{bzw.} \quad \delta_D X = \delta v^\alpha \partial_\alpha X. \quad (14.45)$$

γ und X ändern sich unter einer infinitesimalen Weyl-Reskalierung $e^{\delta\phi}$ gemäß

$$\delta_W\gamma_{\alpha\beta} = \delta\phi\gamma_{\alpha\beta}, \quad \delta_W X = 0. \quad (14.46)$$

Diese Änderungen gehören zu unphysikalischen (Eich-)Freiheitsgraden. Im Allgemeinen ist eine kleine Änderung der Metrik durch

$$\begin{aligned} \delta\gamma_{\alpha\beta} &= \delta_W\gamma_{\alpha\beta} + \delta_D\gamma_{\alpha\beta} + (\text{physikalische Änderung}) \\ &= \delta\phi\gamma_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\delta v_\beta + \nabla_\beta\delta v_\alpha + \delta t^i \frac{\partial}{\partial t^i} \gamma_{\alpha\beta}(t) \end{aligned} \quad (14.47)$$

gegeben. Der letzte Term wird **Teichmüller-Deformation** der Metrik genannt und kann weder durch einen Diffeomorphismus noch durch eine Weyl-Reskalierung beschrieben werden. Wie bereits erwähnt, ist $\{i\}$ eine endliche Menge: $1 \leq i \leq n = \dim_{\mathbb{R}} \text{Teich}(\Sigma_g)$. Es wird sich später als praktisch erweisen, wenn wir $\delta\gamma$ in zwei Anteile zerlegen: einen spurfreien und einen mit nichtverschwindender Spur. Wir schreiben

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \delta\bar{\phi}\gamma_{\alpha\beta} + (P_1\delta v)_{\alpha\beta} + \delta t^i T_{i\alpha\beta}(t), \quad (14.48)$$

wobei $T_{i\alpha\beta}$ der spurfreie Anteil der Teichmüller-Deformation sein soll:

$$T_{i\alpha\beta} \equiv \frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t^i} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \gamma^{\gamma\delta} \frac{\partial\gamma_{\gamma\delta}}{\partial t^i}. \quad (14.49)$$

⁶ Wir sollten im Hinterkopf behalten, dass wir den Tangentialraum nur für die Herleitung der Jacobi-Determinante einführen. Der Tangentialraum selbst hat keine physikalische Bedeutung.

Wir definieren den Operator P_1 , welcher den spurfreien Anteil von $\delta_D \gamma_{\alpha\beta}$ herausgreift, durch

$$(P_1 \delta v)_{\alpha\beta} \equiv \nabla_\alpha \delta v_\beta + \nabla_\beta \delta v_\alpha - \gamma_{\alpha\beta} (\nabla_\gamma \delta v_\gamma), \quad (14.50)$$

während $\delta \bar{\phi}$ gemäß

$$\delta \bar{\phi} = \delta \phi + \left(\nabla_\gamma \delta v^\gamma + \text{nichtspurfreier Anteil von } \delta t \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \quad (14.51)$$

definiert ist, wobei wir die explizite Form des Terms in Klammern nicht benötigen.

Was die Einbettungen anbelangt, betrachten wir den Quotienten $\mathcal{E}/\text{Diff}(\Sigma_g)$. Eine beliebige Einbettung X erhält man durch die Wirkung von $\text{Diff}(\Sigma_g)$ auf ein $\tilde{X} \in \mathcal{E}/\text{Diff}(\Sigma_g)$. Dann drückt sich eine kleine Änderung der Einbettung als

$$\delta X = \delta v^\alpha \partial_\alpha \tilde{X} + \delta \tilde{X} \quad (14.52)$$

aus. Hier stellt der erste Term die durch δv erzeugte Änderung von X dar, und der zweite ist mit keinem Diffeomorphismus assoziiert. Jetzt sollte das Maß so aussehen:

$$\mathcal{D}\delta\gamma \mathcal{D}\delta X = J d^n t \mathcal{D}\delta v \mathcal{D}\delta\phi \mathcal{D}\delta\tilde{X}. \quad (14.53)$$

Um das Maß zu definieren, müssen wir eine Metrik auf dem Tangentialraum angeben, siehe Beispiel 14.2. Wir beschränken uns dabei auf die sog. *ultralokale* Metrik, welche quadratisch ist und von $\gamma_{\alpha\beta}$, aber nicht von $\partial \gamma_{\alpha\beta}$ abhängt. Wir definieren eine Metrik für symmetrische Tensoren zweiter Stufe durch

$$\|\delta h\|_\gamma^2 = \int d^2\xi \sqrt{\gamma} (G^{\alpha\beta\gamma\delta} + u \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\gamma\delta}) \delta h_{\alpha\beta} \delta h_{\gamma\delta}, \quad (14.54a)$$

wobei $u > 0$ eine willkürliche Konstante ist und zudem gilt:

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \gamma^{\alpha\gamma} \gamma^{\beta\delta} + \gamma^{\alpha\delta} \gamma^{\beta\gamma} - \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\gamma\delta}. \quad (14.55)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass G der Projektionsoperator auf den spurfreien Anteil ist: $\text{sp } G^{\alpha\beta\gamma\delta} \delta h_{\gamma\delta} = \gamma_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta\gamma\delta} \delta h_{\gamma\delta} = 0$. Entsprechend projiziert $u \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\gamma\delta}$ auf den „spurhaltigen“ Anteil. In einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit definiert eine Metrik ein natürliches Volumenelement. Im vorliegenden Fall kann das Maß jedoch nicht explizit definiert werden, und wir müssen es implizit mithilfe des Gauß-Integrals definieren (siehe Beispiel 14.2):

$$\int \mathcal{D}\delta h \exp\left(-\frac{1}{2} \|\delta h\|_\gamma^2\right) = 1. \quad (14.56a)$$

In ähnlicher Weise werden die Metriken für einen Skalar $\delta\phi$, einen Vektor δv und eine Abbildung δX^μ definiert:

$$\|\delta\phi\|_\gamma^2 = \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \delta\phi^2 \quad (14.54b)$$

$$\|\delta v\|_\gamma^2 = \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma_{\alpha\beta} \delta v^\alpha \delta v^\beta \quad (14.54c)$$

$$\|\delta X\|_\gamma^2 = \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \delta X^\mu \delta X_\mu. \quad (14.54d)$$

Mit diesen Metriken sind die Maße wie folgt definiert:

$$\int \mathcal{D}\delta\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta\phi\|_\gamma^2\right) = 1 \quad (14.56b)$$

$$\int \mathcal{D}\delta v \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta v\|_\gamma^2\right) = 1 \quad (14.56c)$$

$$\int \mathcal{D}\delta X \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta X\|_\gamma^2\right) = 1. \quad (14.56d)$$

Übung 14.3 Zeigen Sie, dass $\|\delta\gamma\|_\gamma^2$ und $\|\delta X\|_\gamma^2$ invariant unter $\text{Diff}(\Sigma_g)$ sind, aber nicht unter $\text{Weyl}(\Sigma_g)$. Dies ist der mögliche Ursprung von konformen Anomalien, siehe (14.84).

Bevor wir weitermachen, müssen wir noch den Überlapp zwischen $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ und $\text{Weyl}(\Sigma_g)$ erläutern. Nehmen wir an, es sei $\delta v \in \ker P_1$, also

$$P_1\delta v = \nabla_\alpha\delta v_\beta + \nabla_\beta\delta v_\alpha - \gamma_{\alpha\beta}(\nabla_\gamma\delta v^\gamma) = 0. \quad (14.57)$$

Für solche δv erhalten wir $\delta_D\gamma_{\alpha\beta} = (\nabla_\gamma\delta v^\gamma)\gamma_{\alpha\beta}$. Ein Vektor $\delta v \in \ker P_1$ wird mit dem **konformen Killing-Vektor** (engl. conformal Killing vector, CKV), identifiziert, siehe Abschnitt 7.7. Es ist wichtig darauf hinzuweisen, dass δ_D und δ_W dieselben Metrikdeformationen ergeben, wenn $\delta\phi$ als $\nabla_\gamma\delta v^\gamma$ gewählt wird. Auf diese Weise wird die Menge der CKVs mit dem Überlapp zwischen $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ und $\text{Weyl}(\Sigma_g)$ identifiziert. Es gebe k unabhängige CKVs auf Σ_g , die mit Φ_s^α bezeichnet sein mögen ($1 \leq s \leq k$). Aus der Theorie der Riemann'schen Flächen ist bekannt:

$$k = \begin{cases} 6 & g = 0 \\ 2 & g = 1 \\ 0 & g \geq 2. \end{cases} \quad (14.58)$$

Wir zerlegen δv in einen durch die CKV erzeugten Anteil und dessen orthogonales Komplement und schreiben

$$\delta v^\alpha = \delta\tilde{v}^\alpha + \delta a^s \Phi_s^\alpha. \quad (14.59)$$

Der Tangentialvektor δX wird entsprechend in

$$\delta X = \delta\tilde{X} + \delta\tilde{v}^\alpha \partial_\alpha \tilde{X}^\mu + \delta a^s \Phi_s^\alpha \partial_\alpha \tilde{X}^\mu \quad (14.60)$$

zerlegt, und die Funktionalmaße werden zu

$$\mathcal{D}\delta\gamma\mathcal{D}\delta X \rightarrow J d^n \delta t \mathcal{D}\delta\phi \mathcal{D}\delta\tilde{v} d^k \delta a \mathcal{D}\delta\tilde{X}, \quad (14.61)$$

wobei wir beachtet haben, dass die t - und die a -Parameter endlichdimensional sind.

Sei $\text{Diff}_0^\perp(\Sigma_g)$ der zu den CKVs orthogonale Unterraum von $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$. Dann ist

$$V(\text{Diff}_0) = V(\text{Diff}_0^\perp) \cdot V(\text{CKV}), \quad (14.62)$$

$$V(\text{Diff}_0 * \text{Weyl}) = V(\text{Diff}_0^\perp) V(\text{Weyl}) = V(\text{Diff}_0) V(\text{Weyl}) / V(\text{CKV}). \quad (14.63)$$

Wir betrachten einen Schnitt $\hat{\gamma}(t)$ von \mathcal{M}_g . Dieser Schnitt wird durch n Teichmüller-Parameter parametrisiert. Jede Metrik $\tilde{\gamma}$, die mit $\hat{\gamma}$ über $G = \text{Diff}(\Sigma_g) * \text{Weyl}(\Sigma_g)$ verknüpft ist, lässt sich als

$$\tilde{\gamma} = f^*(e^\phi \hat{\gamma}) \quad (f \in \text{Diff}(\Sigma_g), e^\phi \in \text{Weyl}(\Sigma_g)) \quad (14.64)$$

schreiben. Wir drücken eine kleine Deformation $\delta\tilde{\gamma}$ bei $\tilde{\gamma}$ als einen Rücktransport einer Deformation $\delta\gamma$ bei $\gamma \equiv e^{\delta\phi}\hat{\gamma}$: $\delta\tilde{\gamma} = f^*(\delta\gamma)$ aus. Beachten Sie, dass $\delta\gamma$ ein kleiner Diffeomorphismus am Ursprung von $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ ist und daher durch ein Vektorfeld δv beschrieben werden kann. Wie wir in Übung 14.3 gezeigt haben, ist $\text{Diff}(\Sigma_g)$ die Isometrie der relevanten Vektorräume. Es folgt dann

$$\|\delta\tilde{\gamma}\|_{\tilde{\gamma}}^2 = \|f^*(\delta\gamma)\|_{f^*\gamma}^2 = \|\delta\gamma\|_\gamma^2 \quad \text{und} \quad \gamma = e^\phi \hat{\gamma}. \quad (14.65)$$

Am Punkt γ zerlegen wir $\delta\gamma$ gemäß

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \delta\phi\gamma_{\alpha\beta} + (P_1\delta\tilde{v})_{\alpha\beta} + \delta t^i T_{i\alpha\beta}, \quad (14.66)$$

wobei $\delta\phi$ umdefiniert wurde, damit es die nichtspurfreien Anteile der Teichmüller-Deformation sowie $\nabla_\alpha\delta v_\beta + \nabla_\beta\delta v_\alpha$ einschließt, siehe (14.51).

Übung 14.4 Zeigen Sie, dass $T_{i\alpha\beta}$ bei γ mit $\hat{T}_{i\alpha\beta}$ bei $\hat{\gamma}$ verknüpft ist gemäß

$$T_{i\alpha\beta} = e^\phi \hat{T}_{i\alpha\beta}. \quad (14.67)$$

Jetzt sind wir so weit, dass wir die explizite Form des Maßes angeben können. Wir ermitteln zunächst die mit der Transformation $\mathcal{D}\delta v \rightarrow \mathcal{D}\delta\tilde{v} d^k \delta a$ assoziierte Jacobi-Determinante. Dann ist

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}\delta v \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta v\|_\gamma^2\right) = J \int \mathcal{D}\delta\tilde{v} d^k \delta a \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta\tilde{v}\|_\gamma^2 - \frac{1}{2}\|\delta a^s \Phi_s\|_\gamma^2\right) \\ &= J [\det(\Phi_s, \Phi_r)]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (14.68a)$$

mit⁷

$$(\Phi_s, \Phi_r) = \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma_{\alpha\beta} \Phi_s^\alpha \Phi_r^\beta. \quad (14.68b)$$

⁷ Anmerkung: Obwohl das Matrixelement (14.68b) für $\gamma = e^\phi \hat{\gamma}$ definiert ist, können wir zeigen, dass es unabhängig von e^ϕ ist. Lassen Sie uns hierfür einen CKV $\hat{\Phi}_s^\alpha$ der Metrik $\hat{\gamma}$ auswählen: $\hat{\nabla}_\alpha \hat{\Phi}_{s\beta} + \hat{\nabla}_\beta \hat{\Phi}_{s\alpha} = \hat{\gamma}_{\alpha\beta} \hat{\nabla}^\gamma \hat{\Phi}_s^\gamma$. Hier ist $\hat{\nabla}$ die kovariante Ableitung nach $\hat{\gamma}$, und es ist $\hat{\Phi}_{s\alpha} \equiv \hat{\gamma}_{\alpha\beta} \hat{\Phi}_s^\beta$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass $\Phi_{s\alpha} = \gamma_{\alpha\beta} \hat{\Phi}_s^\beta = e^\phi \hat{\Phi}_{s\alpha}$ die Gleichung

$$\nabla_\alpha \Phi_{s\beta} + \nabla_\beta \Phi_{s\alpha} = e^\phi (\hat{\nabla}_\alpha \hat{\Phi}_{s\beta} + \hat{\nabla}_\beta \hat{\Phi}_{s\alpha} + \hat{\gamma}_{\alpha\beta} \Phi_s^\gamma \partial_\gamma \phi) = e^\phi \hat{\gamma}_{\alpha\beta} (\hat{\nabla}_\gamma \Phi_s^\gamma + \Phi_s^\gamma \partial_\gamma \phi) = \gamma_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \Phi_s^\gamma$$

erfüllt, mit ∇ als kovarianter Ableitung nach γ . Somit ist $\Phi_s^\alpha = \hat{\Phi}_s^\alpha$ ein CKV der Metrik $\gamma = e^\phi \hat{\gamma}$, und die CKV erweisen sich als unabhängig von ϕ .

Gleichung (14.68a) zeigt, dass gilt:

$$\mathcal{D}\delta v = [\det(\Phi_r, \Phi_s)]^{1/2} \mathcal{D}\delta\tilde{v} d^k \delta a. \quad (14.69)$$

Nun schreibt sich das totale Maß als

$$J[\det(\Phi_r, \Phi_s)]^{1/2} d^n t \mathcal{D}\delta\phi \mathcal{D}\delta\tilde{v} d^k \delta a \mathcal{D}\delta\tilde{X}, \quad (14.70)$$

wobei J sich um die übrigen Variablen kümmert.

Die Jacobi-Determinante J erhalten wir jetzt aus (14.60), (14.66) und (14.70) sowie der Definition der Maße in (14.56). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}\delta\gamma \mathcal{D}\delta X \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta\gamma\|_\gamma^2 - \frac{1}{2}\|\delta X\|_\gamma^2\right) \\ &= J \det^{1/2}(\Phi, \Phi) \int d^n \delta t \mathcal{D}\delta\tilde{v} \mathcal{D}\delta\phi d^k \delta a \mathcal{D}\delta\tilde{X} \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left\|\delta\phi\gamma_{\alpha\beta} + (P_1\delta\tilde{v})_{\alpha\beta} + \delta t^i \frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t^i}\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|\delta\tilde{X} + \delta\tilde{v}^\alpha \partial_\alpha \tilde{X} + \delta a^s \Phi_s^\alpha \partial_\alpha \tilde{X}\right\|^2\right] \\ &= J \det^{1/2}(\Phi, \Phi) \int d^n \delta t \mathcal{D}\delta\tilde{v} \dots \exp\left(-\frac{1}{2}\|MV\|^2\right), \end{aligned} \quad (14.71)$$

mit

$$V = \begin{pmatrix} \delta t \\ \delta\phi \\ \delta\tilde{v} \\ \delta a \\ \delta\tilde{X} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \partial\gamma/\partial t & \gamma & P_1 \\ 0 & 0 & \partial\tilde{X} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}. \quad (14.72)$$

Die Matrix im Exponenten von (14.71) ist

$$M^\dagger M = \begin{pmatrix} A^\dagger & C^\dagger \\ 0 & B^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger A + C^\dagger C & C^\dagger B \\ B^\dagger C & B^\dagger B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & B^\dagger B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ ** & I \end{pmatrix}, \quad (14.73)$$

dabei sind „*“ und „**“ irrelevante Terme. Der letzte Ausdruck folgt aus der Identität

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}.$$

Die Gauß-Integrale in (14.71) lassen sich leicht ausrechnen:

$$1 = J \det^{1/2}(\Phi, \Phi) \det^{-1/2}(M^\dagger M) = J \det^{1/2}(\Phi, \Phi) [\det(A^\dagger A) \det(B^\dagger B)]^{-1/2}. \quad (14.74)$$

Um $\det^{1/2}(A^\dagger A)$ zu berechnen, müssen wir $\|\delta\gamma\|_\gamma^2$ auswerten:

$$\begin{aligned} \|\delta\gamma\|_\gamma^2 &= \int d^2 \xi \sqrt{\gamma} (G^{\alpha\beta\gamma\delta} + u\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\gamma\delta}) \\ &\quad \cdot [\delta\phi\gamma_{\alpha\beta} + (P_1\delta\tilde{v})_{\alpha\beta} + \delta t^i T_{i\alpha\beta}] [\delta\phi\gamma_{\gamma\delta} + (P_1\delta\tilde{v})_{\gamma\delta} + \delta t^j T_{j\gamma\delta}] \\ &= 4u\|\delta\phi\|_\gamma^2 + \|P_1\delta\tilde{v}\|^2 + \delta t^i \delta t^j (T_i, T_j) + 2\delta t^i (P_1\delta\tilde{v}, T_i). \end{aligned} \quad (14.75)$$

Im Allgemeinen ist T_i nicht orthogonal zu $P_1\delta v$. Um T_i in Anteile orthogonal und parallel zu $P_1\delta v$ zu separieren, müssen wir die Adjungierte P_1^\dagger von P_1 definieren. P_1 ist ein elliptischer Operator, der ein Vektorfeld in ein spurfreies symmetrisches Tensorfeld überführt. Somit bildet P_1^\dagger symmetrische spurfreie Tensoren auf Vektoren ab. Für einen symmetrischen spurfreien Tensor δh erhalten wir

$$\begin{aligned}(P_1\delta v, \delta h) &= \int d^2\xi \sqrt{\gamma} G^{\alpha\beta\gamma\delta} (P_1\delta v)_{\alpha\beta} \delta h_{\gamma\delta} \\ &= \int d^2\xi \sqrt{\gamma} (\nabla^\alpha \delta v^\beta + \nabla^\beta \delta v^\alpha) \delta h_{\alpha\beta} \\ &= \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \delta v^\alpha (-2\nabla^\beta) \delta h_{\alpha\beta} \equiv (\delta v, P_1^\dagger \delta h),\end{aligned}$$

wobei das innere Produkt im letzten Ausdruck durch (14.54c) definiert ist. Damit folgt

$$(P_1^\dagger \delta h)_\alpha = -2\nabla^\beta \delta h_{\alpha\beta}. \quad (14.76)$$

Nun sei δh orthogonal zu $P_1\delta v$. Die obige Diskussion liefert $(P_1\delta v, \delta h) = (\delta v, P_1^\dagger \delta h) = 0$. Da δv beliebig ist, muss δh ein Element von $\ker P_1^\dagger$ sein, siehe Abb. 14.4. Jetzt können wir T_i separieren:

$$T_i = \mathcal{P}_0 T_i + \mathcal{P}_\perp T_i. \quad (14.77a)$$

Die Projektionsoperatoren \mathcal{P}_0 und \mathcal{P}_\perp sind dabei definiert als

$$\mathcal{P}_0 \equiv 1 - P_1 \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger, \quad \mathcal{P}_\perp \equiv P_1 \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger. \quad (14.77b)$$

Man überzeugt sich leicht, dass $\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 = 1$, $\mathcal{P}_0 \mathcal{P}_\perp = 0$, $P_1^\dagger \mathcal{P}_0 = 0$, $P_1^\dagger \mathcal{P}_\perp = P_1^\dagger$, $\mathcal{P}_0 T_i = T_i$ und $\mathcal{P}_\perp T_i = 0$ für $T_i \in \ker P_1^\dagger$ etc. ist. Damit ist (14.77a) eine orthogonale Zerlegung

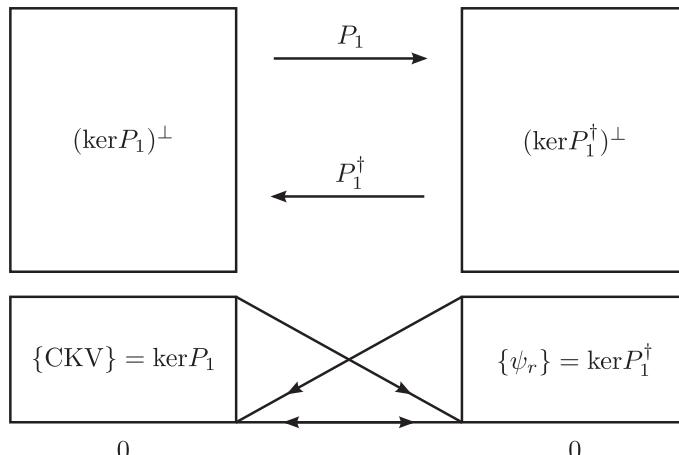


Abb. 14.4. Die Abbildung P_1 und ihre Adjungierte P_1^\dagger .

von T_i . Wir schreiben $\mathcal{P}_\perp T_i = P_1 u_i$, mit

$$u_i = \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger T_i.$$

Sei $\{\psi_r\}$ ($1 \leq r \leq n$) eine reelle Basis von $\ker P_1^\dagger$, die nicht notwendigerweise ortho-normal ist. Dann können wir T_i entwickeln, vgl. Abb. 14.5:

$$T_i = \sum_r \psi_r Q_{ri} + P_1 u_i. \quad (14.78)$$

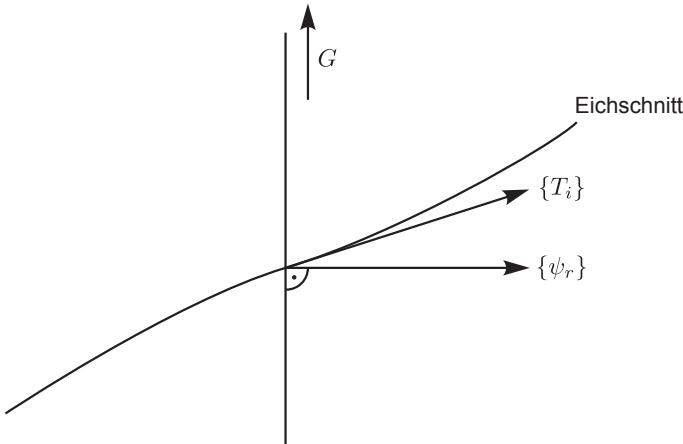


Abb. 14.5. $\{T_i\}$ spannt die zum Eichschnitt tangentiale Deformation auf, $\{\psi_r\}$ spannt $\ker P_1^\dagger$ auf.

Mit einem inneren Produkt zwischen T_i und ψ_r erhalten wir

$$Q_{ri} = \sum_s \left[(\psi, \psi)^{-1} \right]_{rs} (\psi_s, T_i). \quad (14.79)$$

Schließlich wird $\delta\gamma$ in paarweise orthogonale Stücke zerlegt:

$$\delta\gamma = \delta\phi\gamma + P_1(\delta\tilde{v} + \delta t^i u_i) + \delta t^i \psi_r Q_{ri}. \quad (14.80a)$$

Dementsprechend zerfällt der Raum $\{\delta\gamma\}$ der Metrikdeformationen in die direkte Summe

$$\{\delta\gamma\} = \{\text{konform}\} \oplus \{\text{im } P_1\} \oplus \{\ker P_1^\dagger\}. \quad (14.80b)$$

Einsetzen von (14.80a) in (14.75) ergibt

$$\|\delta\gamma\|^2 = 4u\|\delta\phi\|^2 + \|P_1\delta\tilde{v}\|^2 + \delta t^i \delta t^j (T_i, \psi_r)_\gamma \left[(\psi, \psi)^{-1} \right]_{rs} (\psi_s, T_j)_\gamma, \quad (14.81)$$

wobei $\delta\bar{v} \equiv \delta\tilde{v} + \delta t^i u_i$ ist und die Inverse im letzten Term als Inverse der Matrix $(a_{rs}) = ((\psi_r, \psi_s))$ zu verstehen ist. Wenn wir $\mathcal{V}_1^t = (\delta t, \delta\phi, \delta\bar{v})$ setzen, ergibt sich

$$\begin{aligned} \det^{-1/2}(A^\dagger A) &= \int d^n \delta t \mathcal{D}\delta\phi \mathcal{D}\delta\bar{v} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathcal{V}_1^t A^\dagger A \mathcal{V}_1\right) \\ &= \int \mathcal{D}\delta\phi \exp\left(-2u\|\delta\phi\|^2\right) \int \mathcal{D}\delta\bar{v} \exp\left(-\frac{1}{2} \|P_1 \bar{v}\|^2\right) \\ &\quad \cdot \int d^n \delta t \exp\left\{-\frac{1}{2} \delta t^i (T_i, \psi_r) [(\psi, \psi)^{-1}]_{rs} (\psi_s, T_j) \delta t^j\right\} \\ &\propto (\det P_1^\dagger P_1)^{-1/2} \left(\frac{\det(T, \psi)^2}{\det(\psi, \psi)}\right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (14.82)$$

Zusammenfassen der Gleichungen (14.71) und (14.82) führt uns auf

$$1 = J \det^{1/2}(\Phi, \Phi) \det^{-1/2} B^\dagger B \det^{-1/2} P_1^\dagger P_1 \left(\frac{\det(T, \psi)^2}{\det(\psi, \psi)}\right)^{-1/2}.$$

Die g -Schleifen-Zustandssumme ist dann durch

$$Z_g = \int \frac{d^n t \mathcal{D}\bar{v} \mathcal{D}\phi \det \tilde{X}}{V(\text{Diff} * \text{Weyl})} \det^{1/2} B^\dagger B \det^{-1/2}(\Phi, \Phi) \left(\det P_1^\dagger P_1 \frac{\det(T, \psi)^2}{\det(\psi, \psi)}\right)^{1/2} e^{-S} \quad (14.83)$$

gegeben. Das Integral über a (die CKV) wurde hier weggelassen, da es bereits in der ϕ -Integration enthalten ist. Naiv würde man erwarten, dass das Integral über \bar{v} den Term $V(\text{Diff}_0^\perp)$ ergibt, und das über ϕ entsprechend $V(\text{Weyl})$. Tatsächlich hängen allerdings die Maße $\mathcal{D}X$ und $\mathcal{D}\gamma$, wie Übung 14.3 zeigt, von dem konformen Faktor ab. Polyakov (1981) hat gezeigt, dass sich die Maße unter der konformen Transformation $\gamma \rightarrow e^{2\phi} \gamma$ wie

$$\mathcal{D}X \rightarrow \exp\left(\frac{D}{24\pi^2} \int d^2 \xi \sqrt{\gamma} (\gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \mathcal{R}\phi)\right) \mathcal{D}X, \quad (14.84a)$$

$$\mathcal{D}\gamma \rightarrow \exp\left(\frac{-26}{24\pi^2} \int d^2 \xi \sqrt{\gamma} (\gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \mathcal{R}\phi)\right) \mathcal{D}\gamma \quad (14.84b)$$

transformieren. Auf diese Weise ist das Maß $\mathcal{D}X \mathcal{D}\gamma$ dann und nur dann konform invariant, wenn $D = 26$. Die Zahl 26 wird **kritische Dimension** genannt. Ab jetzt werden wir durchgängig $D = 26$ setzen. Damit vereinfacht sich (14.83) zu

$$Z_g = \frac{1}{|MG|} \int d^n t \mathcal{D}\tilde{X} \det^{1/2} B^\dagger B \det^{-1/2}(\Phi, \Phi) \left(\det P_1^\dagger P_1 \frac{\det(T, \psi)^2}{\det(\psi, \psi)}\right)^{1/2} e^{-S}. \quad (14.85)$$

Führen wir die X -Integration aus, um den Term $\det^{1/2} B^\dagger B$ zu eliminieren:

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}\delta X \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta X\|^2\right) \\ &= J \int \mathcal{D}\delta \tilde{X} d^k \delta a \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta \tilde{X} + \delta a^s \Phi_s^\alpha \partial_\alpha \tilde{X}\|^2\right) \\ &= J \int \mathcal{D}\delta \tilde{X} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta \tilde{X}\|^2\right) \int d^k \delta a \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta a^s \Phi_s^\alpha \partial_\alpha \tilde{X}\|^2\right) \\ &= J \det^{-1/2}(B^\dagger B). \end{aligned}$$

Daher identifizieren wir $\det^{1/2}(B^\dagger B)$ mit der Jacobi-Determinante der Transformation $X \rightarrow (\tilde{X}, a)$. Daraus folgt

$$\int \mathcal{D}\tilde{X} \det^{1/2} B^\dagger B e^{-S} = \int \frac{\mathcal{D}X}{V(\text{CKV})} e^{-S}, \quad (14.86)$$

mit $V(\text{CKV}) = \int d^k a$ als dem CKV-Volumen.

Die Integration über X ist schnell ausgeführt:

$$\int_{\mathcal{E}} \mathcal{D}X e^{-S} = \int_{\mathcal{E}} \mathcal{D}X \exp\left[-\frac{1}{2}(X, \Delta X)\right], \quad (14.87a)$$

wobei

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\alpha \sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta \quad (14.87b)$$

den auf 0-Formen wirkenden Laplace-Operator darstellt, siehe (7.188). Wir geben jetzt die explizite Form des Pfadintegrals (14.87a) an. Sei ψ_n die Eigenfunktion von Δ ,

$$\Delta \psi_n = \lambda_n \psi_n \quad (\lambda_n \in [0, \infty)), \quad (14.88)$$

wobei die ψ_n gemäß

$$(\psi_n, \psi_m) = \int d^2 \xi \sqrt{\gamma} \psi_n \psi_m = \delta_{nm}$$

normiert seien. Der Eigenwert λ ist nichtnegativ, da Δ positiv definit ist. Lassen Sie uns X^μ nach den ψ_n entwickeln:

$$X^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\mu \psi_n = X_0^\mu + X'^\mu \quad (a_n^\mu \in R). \quad (14.89)$$

Dabei sind $X_0^\mu = a_0^\mu \psi_0$ die Null-Eigenfunktion von Δ und die X'^μ die verbleibenden Freiheitsgrade. Dementsprechend schreibt sich das Pfadintegral (14.87a) als

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}X \exp\left[-\frac{1}{2}(X, \Delta X)\right] &= \int \prod_{n,\mu} da_n^\mu \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \lambda_n (a_n^\mu)^2\right) \\ &= \int \prod_\mu da_0^\mu \int \prod_{n \neq 0} \prod_\mu da_n^\mu \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \lambda_n (a_n^\mu)^2\right) \\ &= \left(\int \prod_\mu da_0^\mu \right) (\det' \Delta)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (14.90)$$

wobei der Strich anzeigt, dass die Nullmode weggelassen wurde. Um über die Nullmode zu integrieren, beachten wir, dass der *normierte* Eigenvektor ψ_0 durch⁸

$$\psi_0 = \left(\frac{1}{\int d^2\xi \sqrt{\gamma}} \right)^{1/2} \quad (14.91)$$

gegeben ist. Aus $X_0^\mu = a_0^\mu \psi_0$ erhalten wir

$$\int \prod_\mu da_0^\mu = \int \prod_\mu dX_0^\mu (\psi_0)^{-26} = V \left(\frac{1}{\int d^2\xi \sqrt{\gamma}} \right)^{-13}, \quad (14.92)$$

mit dem Raumzeitvolumen $V = \int \prod dX_0^\mu$. Zusammenfassen der Gleichungen (14.90) und (14.92) führt uns auf

$$\int \mathcal{D}\lambda e^{-S} = \left(\frac{\det' A}{\int d^2\xi \sqrt{\gamma}} \right)^{-13}, \quad (14.93)$$

wobei wir V und andere irrelevante Konstanten weggelassen haben.

Schließlich erhalten wir als Ausdruck für die g -Schleifen-Zustandssumme

$$Z_g = \int_{\text{Mod}} \frac{d^n t}{V(\text{CKV})} \frac{\det(T, \psi)}{\det^{1/2}(\psi, \psi) \det^{1/2}(\Phi, \Phi)} [\det' P_1^\dagger P_1]^{1/2} \left(\frac{\det' \Delta}{\int d^2\xi \sqrt{\gamma}} \right)^{-13} \quad (14.94)$$

wobei wir

$$\frac{1}{|\text{MG}|} \int_{\text{Teich}} d^n t = \int_{\text{Mod}} d^n t \quad (14.95)$$

beachtet haben. Für $g \geq 2$ haben die Riemann'schen Flächen keine CKV, und (14.95) reduziert sich auf

$$Z_g = \int_{\text{Mod}} d^n t \frac{\det(T, \psi)}{\det^{1/2}(\psi, \psi)} (\det' P_1^\dagger P_1)^{1/2} \left(\frac{\det' \Delta}{\int d^2\xi \sqrt{\gamma}} \right)^{-13}. \quad (14.96)$$

14.2.3 Komplexe Tensoranalysis und Stringmaß

Jede Riemann'sche Fläche lässt komplexe Strukturen zu, was bei der Berechnung von Stringamplituden von Nutzen sein kann. Die Schönheit der Stringtheorie zeigt sich in vielen Punkten erst dann, wenn diese komplexen Strukturen explizit berücksichtigt werden. Hierzu formulieren wir die Zustandssumme in der Sprache der komplexen Differentialgeometrie.

Wir legen zunächst die Eichung in \mathcal{M}_g fest, indem wir das isotherme Koordinatensystem

$$\gamma = \frac{1}{2} e^{2\sigma} [dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz]$$

⁸ Da ψ_0 die Gleichung $\Delta\psi_0 = 0$ erfüllt, ist es eine harmonische Funktion. Jede harmonische Funktion auf einer Riemann'schen Fläche muss wegen des Maximumsprinzips eine *konstante* Funktion sein.

wählen, mit $\gamma_{z\bar{z}} = \gamma_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2} \exp 2\sigma$.⁹ Dann ist die Deformation von γ unter einem von δv erzeugten Diffeomorphismus, vgl. (14.45),

$$\begin{aligned}\delta_D \gamma_{zz} &= 2\nabla_z^{(-1)} \delta v_z, \\ \delta_D \gamma_{z\bar{z}} &= \nabla_z \delta v_{\bar{z}} + \nabla_{\bar{z}} \delta v_z = \gamma_{\bar{z}\bar{z}} (\nabla_z^{(1)} \delta v^z + \nabla_{z}^{(-1)} \delta v_z).\end{aligned}\quad (14.97)$$

In ähnlicher Weise gilt mit Gleichung (14.46) für ein durch eine infinitesimale konforme Transformation erzeugtes $\delta_W \gamma$:

$$\delta_W \gamma_{z\bar{z}} = \delta \phi \gamma_{z\bar{z}}, \quad \delta_W \gamma_{zz} = 0. \quad (14.98)$$

Um zu sehen, wie der Operator P_1 auf Vektoren wirkt, betrachten wir $\delta v^z \in \mathcal{T}^1$ und $\delta v_z \in \mathcal{T}^{-1}$. Mit Gleichung (14.50) ergibt sich

$$(P_1 \delta v)^{z\bar{z}} = 2\nabla_{(1)}^z \delta v^{\bar{z}} \in \mathcal{T}^2, \quad (14.99a)$$

$$(P_1 \delta v)_{zz} = 2\nabla_z^{(-1)} \delta v_z \in \mathcal{T}^{-2}. \quad (14.99b)$$

P_1 ist also eine Abbildung

$$P_1 = \begin{pmatrix} \nabla_z^{(1)} & 0 \\ 0 & \nabla_z^{(-1)} \end{pmatrix} : \mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^{-1} \rightarrow \mathcal{T}^2 \oplus \mathcal{T}^{-2}. \quad (14.100)$$

Analog bildet P_1^\dagger spurfreie symmetrische Tensoren auf Vektoren ab. Für $\delta h^{z\bar{z}} \in \mathcal{T}^2$ und $\delta h_{zz} \in \mathcal{T}^{-2}$ erhalten wir

$$(P_1^\dagger \delta h)^z = \nabla_z^{(2)} \delta h^{z\bar{z}} \in \mathcal{T}^1, \quad (14.101a)$$

$$(P_1^\dagger \delta h)_z = \nabla_{z(-2)}^z \delta h_{zz} \in \mathcal{T}^{-1}. \quad (14.101b)$$

Somit ist P_1^\dagger eine Abbildung

$$P_1^\dagger = \begin{pmatrix} \nabla_z^{(2)} & 0 \\ 0 & \nabla_{z(-2)}^z \end{pmatrix} : \mathcal{T}^2 \oplus \mathcal{T}^{-2} \rightarrow \mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^{-1}, \quad (14.102)$$

und das Produkt $P_1^\dagger P_1$ ist

$$P_1^\dagger P_1 = \begin{pmatrix} \nabla_z^{(2)} \nabla_{(1)}^z & 0 \\ 0 & \nabla_{z(-2)}^z \nabla_z^{(-1)} \end{pmatrix} : \mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^{-1} \rightarrow \mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^{-1}. \quad (14.103)$$

Dementsprechend wird die Determinante in (14.96) zu

$$(\det' P_1^\dagger P_1)^{1/2} = (\det' \nabla_z^{(2)} \nabla_{(1)}^z \det' \nabla_{z(-2)}^z \nabla_z^{(-1)})^{1/2} = (\det' \Delta_{(1)}^+ \Delta_{(-1)}^-)^{1/2}, \quad (14.104)$$

⁹ Tatsächlich ist die Eichung durch diese Wahl nicht eindeutig festgelegt. Wir werden uns später des *Uniformisierungssatzes* (Riemann'schen Abbildungssatzes) bedienen, um die Eichung vollständig zu fixieren.

wobei $\Delta_{(n)}^\pm$ die Laplace-Operatoren sind. Wir zeigen nun, dass $\Delta_{(1)}^+$ und $\Delta_{(-1)}^-$ dasselbe Spektrum haben. Wir betrachten eine Eigenfunktion δv^z von $\Delta_{(1)}^+$,

$$\Delta_{(1)}^+ \delta v^z = -2e^{-4\sigma} \partial_z e^{2\sigma} \partial_{\bar{z}} \delta v^z = \lambda \delta v^z. \quad (14.105)$$

Hierbei haben wir (14.21a) verwendet. Der Eigenwert λ ist eine nichtnegative reelle Zahl (beachten Sie, dass die $\Delta_{(n)}^\pm$ positiv definite Hermite'sche Operatoren sind). Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_{(-1)}^- (\gamma_{z\bar{z}} \overline{\delta v^z}) &= -e^{-2\sigma} \partial_{\bar{z}} e^{2\sigma} \partial_z \overline{\delta v^z} = -e^{-2\sigma} \overline{\partial_z e^{2\sigma} \partial_{\bar{z}} \delta v^z} \\ &= -\gamma_{z\bar{z}} 2e^{-4\sigma} \overline{\partial_z e^{2\sigma} \partial_{\bar{z}} \delta v^z} = \lambda \gamma_{z\bar{z}} \overline{\delta v^z}, \end{aligned} \quad (14.106)$$

was zeigt, dass $\gamma_{z\bar{z}} \overline{\delta v^z}$ eine Eigenfunktion von $\Delta_{(-1)}^-$ zu demselben Eigenwert λ ist. Man sieht leicht, dass die umgekehrte Aussage ebenfalls wahr ist, siehe Übung 14.5. $\Delta_{(1)}^+$ und $\Delta_{(-1)}^-$ teilen sich also dieselben Eigenwerte, und es gilt $\det' \Delta_{(1)}^+ = \det' \Delta_{(-1)}^-$. Nun wird (14.104) zu

$$(\det' P_1^\dagger P_1)^{1/2} = \det' \Delta_{(-1)}^- = \det' \Delta_{(1)}^+. \quad (14.107)$$

Übung 14.5 Sei δv_z ein Eigenvektor von $\Delta_{(-1)}^-$ zu einem Eigenwert λ . Zeigen Sie, dass $\gamma^{z\bar{z}} \overline{\delta v_z}$ ein Eigenvektor von $\Delta_{(1)}^+$ zu demselben Eigenwert ist.

Der physikalische Wechsel der Metrik ist die Teichmüller-Deformation $\delta \tau^i \mu_i$, wobei $\tau^i (\mu_i)$ das komplexe Gegenstück von $t^i (T_i)$ ist. Aus unserer Erfahrung wissen wir, dass der relevante Anteil der Teichmüller-Deformation in der reellen Basis *symmetrisch* und *spurfrei* ist. In der komplexen Basis führt das auf $\mu_{i\bar{z}\bar{z}} = \mu_{i\bar{z}z} = 0$. Dementsprechend ist die allgemeine Variation der Metrik gegeben durch

$$\delta \gamma_{zz} = \nabla_z^{(-1)} \delta \tilde{v}_z + \delta \tau^i \mu_{iz\bar{z}}, \quad (14.108a)$$

$$\delta \gamma_{z\bar{z}} = \delta \phi \gamma_{z\bar{z}}. \quad (14.108b)$$

Dabei haben wir $\delta \phi$ umdefiniert, sodass es auch die Variation von $\delta \gamma_{z\bar{z}}$ aufgrund von δv einschließt (beachten Sie, dass $\delta_D \gamma_{z\bar{z}} \propto \gamma_{z\bar{z}}$ ist). In (14.108a) enthält $\delta \tilde{v}$ nicht die CKV, sodass gilt: $\delta \tilde{v} \in (\ker \nabla_z^{(-1)})^\perp$.

Um die orthogonale Zerlegung von $\{\delta \gamma\}$ auszuführen, müssen wir in verschiedenen Räumen die inneren Produkte definieren. Die jeweils natürliche Wahl bilden

$$\|\delta \gamma_{zz}\|^2 = \int d^2 z \sqrt{\gamma} \delta \gamma_{zz} \delta \gamma^{zz}, \quad (14.109a)$$

$$\|\delta \gamma_{z\bar{z}}\|^2 = \int d^2 z \sqrt{\gamma} \delta \gamma_{z\bar{z}} \delta \gamma^{z\bar{z}} \quad (14.109b)$$

und

$$\|\delta v_z\|^2 = \int d^2 z \sqrt{\gamma} \gamma_{z\bar{z}} \overline{\delta v_z} \delta v^z. \quad (14.109c)$$

Beachten Sie, dass $\delta\gamma_{z\bar{z}}dz \otimes dz$ und $\delta\gamma_{z\bar{z}}d\bar{z} \otimes d\bar{z}$ verschiedene Tensoren sind; wir müssen das innere Produkt jeweils separat angeben.

Mit der Argumentation aus dem vorigen Unterabschnitt führen wir die orthogonale Zerlegung

$$\delta\gamma_{zz} = \nabla_z^{(-1)}\delta\tilde{v}_z + \delta\tau^i\mu_{izz} = \nabla_z^{(-1)}\delta\tilde{v}_z + \delta\tau^i\phi_{izz} \quad (14.110)$$

ein, mit $\delta\bar{v} = \delta\tilde{v} + (\text{Projektion von } \delta\tau^i\mu_{izz} \text{ nach } \{\text{im } \nabla_z^{(-1)}\})$. Die Orthogonalität von $\nabla_z^{(-1)}\delta\tilde{v}_z$ und ϕ_{izz} impliziert

$$0 = (\nabla_z^{(-1)}\delta v_z, \phi_{izz}) = \int d^2z \sqrt{\gamma}\delta v_z (-\nabla_{(-2)}^z)\phi_{izz},$$

wobei wir beachtet haben, dass $\nabla_z^{(-1)\dagger} = -\nabla_{(-2)}^z$. Auf diese Weise erhalten wir (vgl. Abb. 14.6):

$$\phi_{izz} \in \ker \nabla_{(-2)}^z. \quad (14.111)$$

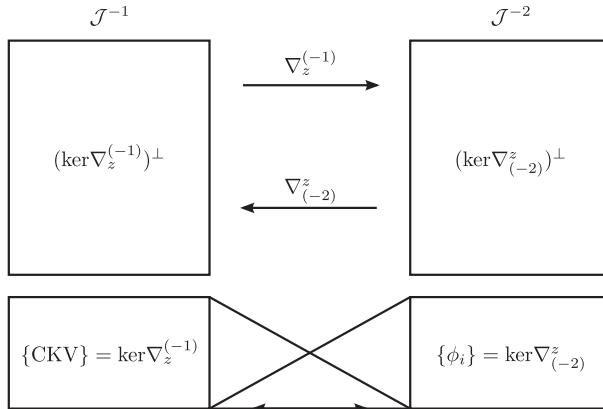


Abb. 14.6. Die Abbildung $\nabla_z^{(-1)}$ und ihre Adjungierte $\nabla_{(-2)}^z$.

Die explizite Form von $\nabla_{(-2)}^z$ zeigt, dass $\partial_{\bar{z}}\phi_{izz} = 0$ ist; $\ker \nabla_{(-2)}^z$ ist die Menge der holomorphen Tensoren mit der Helizität -2 . Der Tensor $\phi_i = \phi_{izz}dz \otimes dz$ wird **quadratisches Differential** genannt, während $\mu_i = \mu_{izz}dz \otimes dz$ das **Beltrami-Differential** ist, siehe Abb. 14.7. Bei praktischen Berechnungen ist es oft bequem, den Eichschnitt mit dem Beltrami-Differential anzugeben, siehe unten. Jetzt haben wir festgestellt, dass gilt:

$$\{\ker P_1^\dagger\} = \{\text{quadratisches Differential}\} = \{\ker \nabla_{(-2)}^z\}. \quad (14.112)$$

Der Satz von Riemann-Roch (14.27) hat nun die Form

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker \nabla_z^{(-1)} - \dim_{\mathbb{C}} \ker \nabla_{(-2)}^z = 3 - 3g. \quad (14.113)$$

Somit haben wir $\{\delta\gamma\}$ in zueinander orthogonale Stücke

$$\{\delta\gamma\} = \{\text{konform}\} \oplus \{\text{im } \nabla_z^{(-1)}\} \oplus \{\ker \nabla_{(-2)}^z\} + \text{cc} \quad (14.114)$$

zerlegt. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit (14.80b). Das Maß wird zu

$$\mathcal{D}\delta\gamma \mathcal{D}\delta X \rightarrow J d^n\delta\tau \mathcal{D}\delta\bar{v} \mathcal{D}\delta\phi \mathcal{D}\delta\tilde{X} d^k\delta a, \quad (14.115)$$

wobei n und k die komplexen Dimensionen des Teichmüller-Raums bzw. der CKV sind. Die Jacobi-Determinante erhalten wir mit derselben Argumentation wie im vorigen Unterabschnitt:

$$Z_g = \int \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}X \frac{1}{V(\text{Diff}^*\text{Weyl})} e^{-S} = \int_{\text{Mod}} d^n\tau \mathcal{D}X \frac{\det' \Delta_{(1)}^+}{V(\text{CKV})} \frac{|\det(\mu, \phi)|^2}{\det(\phi, \phi) \det(\Phi, \Phi)} e^{-S}. \quad (14.116)$$

Da wir über komplexe Variablen integrieren, erscheint der Exponent $\frac{1}{2}$ aus (14.96) nicht in (14.116). Die X -Integration ergibt

$$Z_g = \int_{\text{Mod}} \frac{d^n\tau}{V(\text{CKV})} \frac{|\det(\mu, \phi)|^2}{\det(\phi, \phi) \det(\Phi, \Phi)} \det' \Delta_{(1)}^+ \left(\frac{\det' \Delta}{\int d^2z \sqrt{\gamma}} \right)^{-13}. \quad (14.117)$$

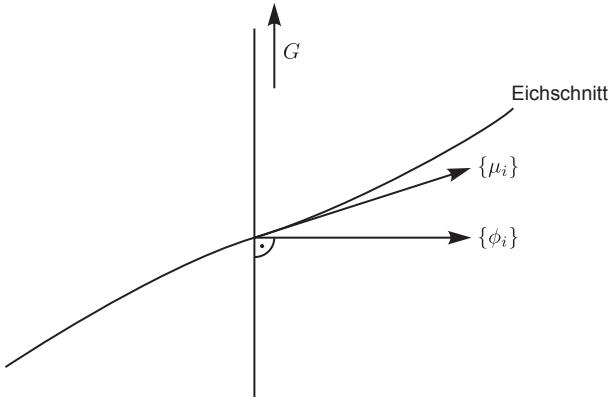


Abb. 14.7. Das Beltrami-Differential $\{\mu_i\}$ spannt die zum Eichschnit tangentiale Deformation auf, während $\{\phi_i\}$ den Raum $\ker \nabla_{(-2)}^z$ aufspannt.

14.2.4 Modulräume von Riemann'schen Flächen

Die Räume $\text{Mod}(\Sigma_g)$ und $\text{Teich}(\Sigma_g)$ wurden definiert als

$$\text{Mod}(\Sigma_g) \equiv \mathcal{M}_g / \text{Diff}(\Sigma_g), \quad \text{Teich}(\Sigma_g) \equiv \mathcal{M}_g / \text{Diff}_0(\Sigma_g).$$

Zwischen ihnen besteht die Beziehung $\text{Mod}(\Sigma_g) = \text{Teich}(\Sigma_g)/\text{MG}$, mit $\text{MG} \equiv \text{Diff}(\Sigma_g)/\text{Diff}_0(\Sigma_g)$. Wir wollen diese Objekte nun näher in Augenschein nehmen. Als erstes erkennen wir, dass gilt:¹⁰

g	$\dim_{\mathbb{C}} \text{CKV}$	CKV	$\dim_{\mathbb{C}} \text{Teich}(\Sigma_g)$	MG	
0	3	$\text{SL}(2, \mathbb{C})$	0	$\text{SL}(2, \mathbb{R})$	(14.118)
1	1	$\text{U}(1) \times \text{U}(1)$	1	$\text{SL}(2, \mathbb{Z})$	
≥ 2	0	leer	$3g - 3$?	

Aus (14.118) können wir unmittelbar auf $Z_0 = 0$ schließen, da der Teichmüller-Raum ein einzelner Punkt und das Volumen von $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ unendlich ist. Natürlich bedeutet dies nicht, dass die drei Amplituden mit Vertex-Operatoren verschwinden. Im Allgemeinen ist $\text{Mod}(\Sigma_g)$ topologisch nichttrivial, obwohl $\text{Teich}(\Sigma_g)$ topologisch trivial ist. $\text{Teich}(\Sigma_g)$ ist ein universeller Überlagerungsraum von $\text{Mod}(\Sigma_g)$ und die topologische Nichttrivialität röhrt von MG her.

Bei konkreten Berechnungen ist der Uniformisierungssatz (Riemann'sche Abbildungssatz) sehr nützlich. Im vorigen Unterabschnitt haben wir zuerst das Beltrami-Differential μ_i gewählt und dann die Basis zu $\phi_i \in \ker P_1^\dagger$ gewechselt. Die ursprüngliche Wahl μ_i war durch den Uniformisierungssatz motiviert.

Satz 14.2. (Uniformisierungssatz) Sei Σ_g ein Torus mit Geschlecht g . Dann besteht eine konforme Beziehung zwischen diesem Torus und einer der folgenden Riemann'schen Flächen konstanter Krümmung:

g	Riemann'sche Fläche	Metriken	Vorzeichen von \mathcal{R}	
0	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	$ds^2 = dz \otimes d\bar{z}/(1 + z\bar{z})^2$	+	(14.119)
1	\mathbb{C}/L	$ds^2 = dz \otimes d\bar{z}$	0	
≥ 2	H/G	$ds^2 = dz \otimes d\bar{z}/(\text{Im } z)^2$	-	

Hier ist L ein Gitter in \mathbb{C} (siehe Beispiel 8.2), H ist die obere Halbebene, und $G \subset \text{SL}(2, \mathbb{R})$ wird **Fuchs'sche Gruppe** genannt. Die Metrik für $g \geq 2$ heißt **Poincaré-Metrik** (siehe Beispiel 7.6).

Den Beweis dieses Satzes finden Sie z. B. bei Farkas und Kra (1980). Dank dieses Satzes finden wir immer Metriken mit konstanter Krümmung, um den Eichschnitt in \mathcal{M}_g zu bilden. Dies korrespondiert mit einer speziellen Wahl des Beltrami-Differentials μ_i . Dieser Schnitt definiert das **Weil-Petersson-Maß**

$$\int d^n \tau \frac{|\det(\mu, \phi)|^2}{\det(\phi, \phi)} = \int d(\text{Weil-Petersson}), \quad (14.120)$$

siehe D'Hoker und Phong (1986).

¹⁰ *Anmerkung:* Für $g \geq 2$ lässt sich MG durch $3g - 1$ Dehn-Twists ausdrücken, die allerdings nicht minimal sind.

Übung 14.6 Berechnen Sie die skalare Krümmung der Metriken in (14.119). Bestätigen Sie, dass die Metriken unabhängig von z und \bar{z} sind.

14.3 Ein-Schleifen-Amplituden

Als Illustration des im vorigen Absatz entwickelten Formalismus berechnen wir die Vakuum-zu-Vakuum-Ein-Schleifen-Amplitude der geschlossenen orientierbaren bosonischen Stringtheorie. Wegen $\dim_{\mathbb{C}} \text{Teich}(\Sigma_1) = 1$ und $\dim_{\mathbb{C}} \ker \nabla_z^{(-1)} = 1$ gilt

$$Z_1 = \int_{\text{Mod}} \frac{d\tau}{V(\text{CKV})} \frac{|(\mu, \phi)|^2}{(\phi, \phi) \cdot (\Phi, \Phi)} \det' \Delta_{(1)}^+ \left(\frac{\det' \Delta}{\int d^2 \xi \sqrt{\gamma}} \right)^{-13}. \quad (14.121)$$

Um (14.121) ausrechnen zu können, müssen wir schrittweise vorgehen.

14.3.1 Modulräume, CKV, Beltrami- und quadratische Differentiale

In Beispiel 8.2 haben wir gezeigt, dass die komplexe Struktur, d. h. die konforme Struktur, des Torus durch einen komplexen Parameter τ ($\text{Im } \tau > 0$) festgelegt wird. Abb. 8.3 zeigt den Modulraum

$$\text{Mod}(\Sigma_g) = \mathcal{M}_1/G = \text{Teich}(\Sigma_g)/\text{SL}(2, \mathbb{Z}) = H/\text{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Dabei steht H für die obere Halbebene.

Wir betrachten den Torus T_τ mit dem Teichmüller-Parameter $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ ($\tau_2 > 0$). Als Repräsentanten nehmen wir einen Torus in Abb. 14.8. Die Metrik in \mathbb{C} induziert auf natürliche Weise eine flache Metrik (dies garantiert uns der Uniformisierungssatz):

$$\gamma = \frac{1}{2} [dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz]. \quad (14.122)$$

Die CKV sind global definierte holomorphe Vektoren. Wir verwenden $\Phi = \alpha \partial / \partial z$ als die normierte Basis der CKV. Die Bedingung $(\Phi, \Phi) = 1$ ergibt $\int d^2 z |\alpha|^2 = \tau_2 |\alpha|^2 = 1$, d. h., $\alpha = \tau_2^{-1/2}$ (wir haben die Phase weggelassen). Der Vektor Φ erzeugt Translationen in der komplexen Ebene:

$$z \rightarrow z' = z + \tau_2^{-1/2} (v^1 + iv^2). \quad (14.123)$$

Beachten Sie jedoch, dass diese Translation nur modulo das Gitter definiert ist: $\tau_2^{-1/2} (v^1 + iv^2)$ und $\tau_2^{-1/2} (v^1 + iv^2) + (m + \tau n)$ ergeben identische Translationen. Dies erzwingt, dass $\tau_2^{-1/2} (v^1 + iv^2)$ innerhalb des Parallelogramms in Abb. 14.8 liegt. Wegen

$$\tau_2 = \int d^2 z = \tau_2^{-1} \int d^2 v$$

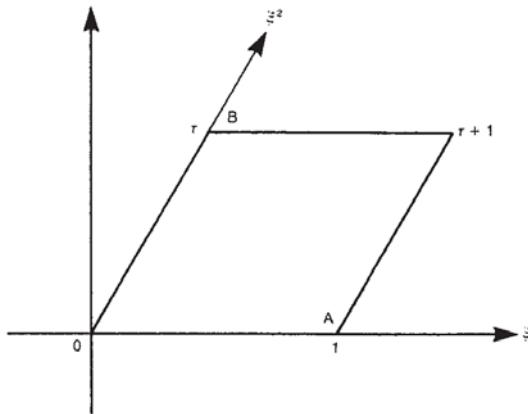


Abb. 14.8. Das Parallelogramm, dessen komplexe Struktur durch τ parametrisiert wird.

erhalten wir

$$V(\text{CKV}) = \int d^2v = \tau_2^2. \quad (14.124)$$

Unsere nächste Aufgabe ist es, das Weil-Petersson-Maß zu bestimmen. Auf dem Torus existiert ein quadratisches Differential ϕ . Da $\phi \in \mathcal{T}^{-2}$ ein global definiertes holomorphes Differential ist, muss es von der Form

$$\phi = a dz \otimes d\bar{z} \quad (a \in \mathbb{C}) \quad (14.125)$$

sein. Um das Beltrami-Differential zu ermitteln, bestimmen wir die Änderung der Metrik unter einer kleinen Variation von τ . Hierfür empfiehlt es sich, das ξ^α -Koordinatensystem in Abb. 14.8 einzuführen. Der Punkt A entspricht $(1, 0)$, und B entspricht $(0, 1)$. Demnach ist $z = \xi^1 + \tau \xi^2$. Unter einer kleinen Änderung $\delta\tau$ des Teichmüller-Parameters erhalten wir, bis auf einen konformen Faktor:

$$|dz|^2 \rightarrow |d\xi^1 + (\tau + \delta\tau)d\xi^2|^2 = |dz + \delta\tau d\xi^2|^2 = \left| dz + d\tau \frac{dz - d\bar{z}}{2i\tau_2} \right|^2 = \left| dz + \delta\tau \frac{id\bar{z}}{2\tau_2} \right|^2.$$

Wenn wir dies mit (14.110) vergleichen, ergibt sich

$$\mu_{zz} = i/2\tau_2. \quad (14.126)$$

Hier ist der Ausdruck $(\delta\tau)\mu$ ($\equiv \delta\tau^i \mu_{iz}$) die komplexe Konjugierte des entsprechenden Terms in Gleichung (14.110). Dies ist natürlich lediglich eine Reparametrisierung des Teichmüller-Raums und hat keinen Einfluss auf die Ergebnisse. Wenn Sie sich dabei nicht ganz wohl fühlen, wählen Sie $\bar{\tau}$ als den Teichmüller-Parameter. Aus (14.125) und (14.126) erhalten Sie dann, bis auf irrelevante Konstanten:

$$(\mu, \phi) = \int d^2z \overline{\phi^{zz}} \phi_{zz} = \frac{i}{2\tau_2} a \tau_2 \propto a,$$

$$(\phi, \phi) = \int d^2z \overline{\phi^{zz}} \phi_{zz} = a^2 \tau_2$$

und schließlich

$$\frac{|(\mu, \phi)|^2}{(\phi, \phi)} = \tau_2^{-1}. \quad (14.127)$$

14.3.2 Bestimmung der Determinanten

Wir betrachten zunächst $\det' P_1^\dagger P_1 = \det' \Delta_{(1)}^+$. Da wir eine flache Metrik wählen, nimmt der Laplace-Operator eine recht simple Form an:

$$\Delta_{(1)}^+ = -2\partial_z \partial_{\bar{z}} = \Delta. \quad (14.128)$$

Hier ist Δ der Laplace-Operator aus Gleichung (14.87b). Wegen

$$\int d^2\xi \sqrt{\gamma} = \int d^2z = \tau_2$$

reduziert sich die Amplitude (14.121) auf

$$Z_1 = \int_{\text{Mod}} \frac{d\tau}{\tau_2^2} \frac{\det' \Delta}{\tau_2} \left(\frac{\det' \Delta}{\tau_2} \right)^{-1}, \quad (14.129)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $V(\text{CKV}) \quad W\text{-P} \quad \int d^2z$

wobei (14.124) und (14.127) verwendet wurden. Wir haben den Integranden faktorisiert, damit die modulare Invarianz manifest wird, siehe Übung 14.7.

Lassen Sie uns das Spektrum von Δ berechnen. Sinnvollerweise drücken wir dazu den Laplace-Operator in ξ^α -Koordinaten aus. Aus

$$\xi^1 = i(\bar{\tau}z - \tau\bar{z})/2\tau_2, \quad \xi^2 = (z - \bar{z})/2i\tau_2 \quad (14.130)$$

erhalten wir sofort

$$\Delta = -\frac{1}{2\tau_2^2} [|\tau|^2 (\partial_1)^2 - 2\tau_1 \partial_1 \partial_2 + (\partial_2)^2], \quad (14.131)$$

mit $\partial_1 = \partial/\partial\xi^1$ etc. Die Eigenfunktion, welche die periodische Randbedingung auf dem Torus erfüllt, ist

$$\psi_{m,n}(\xi) = \exp[2\pi i(n\xi^1 + m\xi^2)] \quad ((m, n) \in \mathbb{Z}^2). \quad (14.132)$$

Wenn wir dies in (14.131) einsetzen, ergibt sich der Eigenwert

$$\lambda_{m,n} = \frac{2\pi^2}{\tau_2^2} (m - \tau n)(m - \bar{\tau}n). \quad (14.133)$$

Die Determinante wird als ein unendliches Produkt ausgedrückt,

$$\det' \Delta = \prod'_{m,n} \frac{2\pi^2}{\tau_2^2} |m + \tau n|^2, \quad (14.134)$$

wobei das Produkt über alle ganzen Zahlen $(m, n) \neq (0, 0)$ gebildet wird.

Offenkundig ist $\det' \Delta$ nicht wohldefiniert und muss regularisiert werden. Lassen Sie uns die **Eisenstein-Reihe** (Siegel 1980, Lang 1987) einführen, die durch

$$E(\tau, s) \equiv \sum'_{m,n} \frac{\tau_2^s}{|m + \tau n|^{2s}} \quad (14.135)$$

definiert ist; die Summation erfolgt über alle ganzen Zahlen $(m, n) \neq (0, 0)$. Diese Reihe konvergiert für $\operatorname{Re} s > 1$ und kann in die komplexe s -Ebene analytisch fortgesetzt werden. Die Reihe $E(\tau, s)$ hat einen einfachen Pol bei $s = 1$, wobei wir die Laurent-Entwicklung

$$E(\tau, s) = \frac{\pi}{s-1} + 2\pi \left[\gamma - \ln 2 - \ln(\sqrt{\tau_2} |\eta(\tau)|^2) \right] + O(s-1) \quad (14.136)$$

verwendet haben. Dieser Ausdruck ist unter dem Namen **erste Kronecker'sche Grenzformel** bekannt, er ist für unser Vorgehen essenziell. In (14.136) sind $\gamma = 0,57721\dots$ die Euler'sche Konstante und $\eta(\tau)$ die **Dedekind'sche η -Funktion**

$$\eta(\tau) \equiv e^{i\pi\tau/12} \prod_{n>1} (1 - e^{2i\pi n\tau}). \quad (14.137)$$

Unter Vernachlässigung konstanter Faktoren erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\det' \Delta}{\tau_2} &= \exp \left(-\ln \tau_2 + \sum' \ln \frac{|m + \tau n|^2}{\tau_2^2} \right) \\ &= \exp \left(-\ln \tau_2 - \frac{\partial}{\partial s} [\tau_2^s E(\tau, s)] \Big|_{s=0} \right) \\ &= \exp \{-\ln \tau_2 [1 + E(\tau, 0)] - E'(\tau, 0)\}. \end{aligned} \quad (14.138)$$

Um den Exponenten auszurechnen, beachten wir die Funktionalgleichung

$$\pi^{-s} \Gamma(s) E(\tau, s) = \pi^{-(1-s)} \Gamma(1-s) E(\tau, 1-s). \quad (14.139)$$

Im Grenzübergang $s \rightarrow 0$ wird daraus

$$\begin{aligned} s E(\tau, 1-s) &= \pi^{1-2s} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1-s)} E(\tau, s) \\ &= \pi (1 - 2s \ln \pi + \dots) \frac{(1 - \gamma s + \dots)}{(1 + \gamma s + \dots)} [E(\tau, 0) + E'(\tau, 0)s + \dots] \\ &= \pi E(\tau, 0) + [-2(\ln \pi + \gamma) E(\tau, 0) + E'(\tau, 0)] \pi s + \dots \end{aligned}$$

Aus (14.136) folgt außerdem

$$s E(\tau, 1-s) = -\pi + 2\pi s \left[\gamma - \ln 2 - \ln(\sqrt{\tau_2} |\eta(\tau)|^2) \right] + \dots$$

Gleichsetzen der Koeffizienten von s^0 und s^1 liefert

$$E(\tau, 0) = -1, \quad (14.140a)$$

$$E'(\tau, 0) = -2 \left[\ln 2\pi + \ln(\sqrt{\tau_2} |\eta(\tau)|^2) \right]. \quad (14.140b)$$

Durch Einsetzen von (14.140) in (14.138) erhalten wir

$$\frac{\det' \Delta}{\tau_2} = \exp[-E'(\tau, 0)] = \tau_2 |\eta(\tau)|^4. \quad (14.141)$$

Schließlich folgt aus (14.129) und (14.141):

$$Z_1 = \int_{\text{Mod}} \frac{d\tau}{\tau_2^2} \tau_2^{-12} |\eta(\tau)|^{-48}. \quad (14.142)$$

Z_1 nimmt eine besonders schöne Form an, wenn wir die **Diskriminante**

$$\Delta(\tau) \equiv (2\pi)^{12} \eta(\tau)^{24} \quad (14.143)$$

definieren. Bis auf eine irrelevante Konstante ist die Ein-Schleifen-Amplitude dann

$$Z_1 = \int_{\text{Mod}} \frac{d\tau}{\tau_2^2} \tau_2^{-12} |\Delta(\tau)|^{-2}. \quad (14.144)$$

$\Delta(\tau)$ ist auch als **Spitzenform** (engl. cusp form) vom Gewicht 12 bekannt, was impliziert:

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12} \Delta(\tau) \quad (14.145)$$

und $c(0) = 0$ ist, wobei die $c(n)$ die Fourier-Koeffizienten sind:

$$\Delta(\tau) = \sum_{n \geq 0} c(n) e^{2\pi n i \tau}. \quad (14.146)$$

Amplituden für höhere Geschlechter sind durch Spitzenformen mit anderen Gewichten gegeben, siehe Belavin und Knizhnik (1986), Moore (1986), Gilbert (1986) und Morozov (1987).

Übung 14.7 Zeigen Sie, dass gilt:

$$\eta(\tau + 1) = e^{\pi i/12} \eta(\tau), \quad \eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau), \quad (14.147)$$

wobei derjenige Ast gewählt sein soll, bei dem $\sqrt{z} > 0$, wenn $z > 0$ ist. Verwenden Sie dieses Resultat, um zu zeigen, dass $d\tau/\tau_2^2$ und $\tau_2^{-12} |\eta(\tau)|^{-48}$ unabhängig invariant unter $\tau \rightarrow \tau + 1$ und $\tau \rightarrow -1/\tau$ sind.

Literatur

- Adler S L 1969 *Phys. Rev.* **177** 2426
- Aitchison I J R 1987 *Acta Phys. Pol. B* **18** 207
- Alvarez O 1985 Topological methods in field theory *Berkeley Preprint UCB-PTH-85/43*
- Alvarez O 1995 *Geometry and Quantum Field Theory* ed D S Freed *et al* (Providence, RI: American Mathematical Society) p 271
- Alvarez-Gaumé L 1983 *Commun. Math. Phys.* **90** 161
- 1986 *Fundamental Problems of Gauge Field Theory* (*Erice, 1985*) ed V Gelo and A S Wightman (New York: Plenum)
- Alvarez-Gaumé L and Della Pietra S 1985 *Recent Developments in Quantum Field Theory* ed J Ambjørn *et al* (Amsterdam: Elsevier) p 95
- Alvarez-Gaumé L, Della Pietra S and Moore G 1985 *Ann. Phys., NY* **163** 288
- Alvarez-Gaumé L and Ginsparg P 1984 *Nucl. Phys. B* **243** 449
- 1985 *Ann. Phys., NY* **161** 423
- Alvarez-Gaumé L and Nelson P 1986 *Supersymmetry, Supergravity, and Superstrings '86* ed B de Wit and M Grisaru (Singapore: World Scientific)
- Anderson P W and Brinkman W F 1975 *The Helium Liquids* ed J G M Armitage and I E Farquhar (New York: Academic) p 315
- Anderson P W and Toulouse G 1977 *Phys. Rev. Lett.* **38** 408
- Armstrong M A 1983 *Basic Topology* (New York: Springer)
- Atiyah M F 1985 *Arbeitstagung Bonn 1984* ed F Hirzebruch, J Schwermer and S Suter (Berlin and Heidelberg: Springer) p 251
- Atiyah M F and Jones J D S 1978 *Commun. Math. Phys.* **61** 97
- Atiyah M F, Patodi V and Singer I M 1975a *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **77** 43
- 1975b *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **77** 405
- 1976 *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **79** 71
- Atiyah M F and Segal G B 1968 *Ann. Math.* **87** 531
- Atiyah M F and Singer I M 1968a *Ann. Math.* **87** 485
- 1968b *Ann. Math.* **87** 546
- 1984 *Proc. Natl Acad. Sci., USA* **81** 2597
- Bagger J 1987 *The Santa Fe TASI-87* ed R Slansky and G West (Singapore: World Scientific)
- Bailin D and Love A L 1996 *Introduction to Gauge Field Theory* revised edn (Bristol and New York: Adam Hilger)
- Bardeen W A 1969 *Phys. Rev.* **184** 1848
- Belavin A A and Knizhnik V G 1986 *Sov. Phys.–JETP* **64** 214
- Belavin A A and Polyakov A M 1975 *JETP Lett.* **22** 245
- Belavin A A, Polyakov A M, Schwartz A S and Tyupkin Yu S 1975 *Phys. Lett. B* **59** 85
- Bell J and Jackiw R 1969 *Nuovo Cimento A* **60** 47
- Berezin F A 1966 *The Method of Second Quantization* (New York and London: Academic)
- Berry M 1984 *Proc. R. Soc. A* **392** 45
- 1989 *Principles of Cosmology and Gravitation* 2nd edn (Bristol: Adam Hilger)

- Bertlmann R A 1996 *Anomalies in Quantum Field Theory* (Oxford: Oxford University Press)
- Booss B and Bleecker D D 1985 *Topology and Analysis: The Atiyah–Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics* (New York: Springer)
- Bott R and Seeley R 1978 *Commun. Math. Phys.* **62** 235
- Bott R and Tu L W 1982 *Differential Forms in Algebraic Topology* (New York: Springer)
- Buchholz L J and Fetter A L 1977 *Phys. Rev. B* **15** 5225
- Calabi E 1957 *Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of S Lefschetz* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
- Callias C 1978 *Commun. Math. Phys.* **62** 213
- Candelas P 1988 *Superstrings '87* (Singapore: World Scientific)
- Cheng T-P and Li L-F 1984 *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (New York and Oxford: Oxford University Press)
- Chern S 1979 *Complex Manifolds without Potential Theory* 2nd edn (New York: Springer)
- Choquet-Bruhat Y and DeWitt-Morette C with Dillard-Bleick M 1982 *Analysis, Manifolds and Physics* revised edn (Amsterdam: North-Holland)
- Coleman S 1979 *The Whys of Subnuclear Physics* ed A Zichichi (New York: Plenum)
- Crampin M and Pirani F A E 1986 *Applicable Differential Geometry* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Croom F H 1978 *Basic Concepts of Algebraic Topology* (New York: Springer)
- Daniel M and Viallet C M 1980 *Rev. Mod. Phys.* **52** 175
- Das A 1993 *Field Theory* (Singapore: World Scientific)
- Deser S, Jackiw R and Templeton S 1982a *Phys. Rev. Lett.* **48** 975
– 1982b *Ann. Phys., NY* **140** 372
- D’Hoker E and Phong D 1986 *Nucl. Phys. B* **269** 205
– 1988 *Rev. Mod. Phys.* **60** 917
- Dirac P A M 1931 *Proc. R. Soc. A* **133** 60
- Dixon L, Harvey J, Vafa C and Witten E 1985 *Nucl. Phys. B* **261** 678
– 1986 *Nucl. Phys. B* **274** 285
- Dodson C T J and Poston T 1977 *Tensor Geometry* (London: Pitman)
- Donaldson S K 1983 *J. Diff. Geom.* **18** 279
- Eells J and Lemaire L 1968 *Bull. London Math. Soc.* **10** 1
- Eguchi T, Gilkey P B and Hanson A J 1980 *Phys. Rep.* **66** 213
- Farkas H M and Kra I 1980 *Riemann Surfaces* (New York: Springer)
- Federbush P 1987 *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)* **17** 93
- Flanders H 1963 *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences* (New York: Academic, reprint Dover)
- Forte S 1987 *Nucl. Phys. B* **288** 252
- Fraleigh J B 1976 *A First Course in Abstract Algebra* (Reading, MA: Addison-Wesley)
- Freed D S and Uhlenbeck K 1984 *Instantons and Four-Manifolds* (New York: Springer)
- Friedan D and Windey P 1984 *Nucl. Phys. B* **235** 395
– 1985 *Physica D* **15** 71
- Frödlicher A 1955 *Math. Ann.* **129** 50
- Fujikawa K 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1195
– 1980 *Phys. Rev. D* **21** 2848; *Phys. Rev. D* **22** 1499(E)
– 1986 in *Superstrings, Supergravity and Unified Theories* ed G Furlan *et al* (Singapore: World Scientific) p 230
- Gilbert G 1986 *Nucl. Phys. B* **277** 102
- Gilkey P B 1995 *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah–Singer Index Theorem* 2nd edn (Boca Raton, FL: Chemical Rubber Company)

- Goldberg S I 1962 *Curvature and Homology* (New York: Academic)
- Green M B, Schwarz J H and Witten E 1987 *Superstring Theories* vols I and II (Cambridge: Cambridge University Press)
- Greenberg M J and Harper J R 1981 *Algebraic Topology: A First Course* (Reading, MA: Benjamin/Cummings)
- Greene R E 1987 *Differential Geometry (Lecture Notes in Mathematics 1263)* ed V L Hansen (Berlin and Heidelberg: Springer) p 228
- Griffiths P and Harris J 1978 *Principles of Algebraic Geometry* (New York: Wiley)
- Gross D J and Jackiw R 1972 *Phys. Rev. D* **6** 477
- Gunning R C 1962 *Lectures on Modular Forms* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
- Hawking S 1977 *Commun. Math. Phys.* **55** 133
- Hicks N 1965 *Notes on Differential Geometry* (Princeton, NJ: Van Nostrand)
- Hirayama M 1983 *Prog. Theor. Phys.* **70** 1444
- Hirzebruch F 1966 *Topological Methods in Algebraic Geometry* 3rd edn (Berlin and Heidelberg: Springer)
- Horowitz G 1986 *Unified String Theories* ed M Green and D Gross (Singapore: World Scientific) p 635
- Huang K 1982 *Quarks, Leptons and Gauge Fields* (Singapore: World Scientific)
- Ito K (ed) 1987 *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* 3rd edn (Cambridge, MA: MIT Press)
- Jackiw R and Rebbi C 1977 *Phys. Rev. D* **16** 1052
- Jackiw R and Templeton S 1981 *Phys. Rev. D* **23** 2291
- Kleinert H 1990 *Path Integrals* (Singapore: World Scientific)
- Kobayashi S 1984 *Introduction to the Theory of Connections* (Yokohama: Department of Mathematics, Keio University) (in Japanese)
- Kobayashi S and Nomizu K 1963 *Foundations of Differential Geometry* vol I (New York: Interscience)
- 1969 *Foundations of Differential Geometry* vol II (New York: Interscience)
- Koblitz N 1984 *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* (New York: Springer)
- Kulkarni R S 1975 *Index Theorems of Atiyah–Bott–Patodi and Curvature Invariants* (Montréal: Les Presses de l’Université de Montréal)
- Lang S 1987 *Elliptic Functions* 2nd edn (New York: Springer)
- Leggett A J 1975 *Rev. Mod. Phys.* **47** 331
- Leinaas J M and Olaussen K 1982 *Phys. Lett. B* **108** 199
- Lightman A P, Press W H, Price R H and Teukolsky S A 1975 *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
- Longuet-Higgins H C 1975 *Proc. R. Soc. A* **344** 147
- Maki K and Tsuneto T 1977 *J. Low-Temp. Phys.* **27** 635
- Matsushima Y 1972 *Differentiable Manifolds* (New York: Dekker)
- Mermin N D 1978 in *Quantum Liquids* ed J Ruvalds and T Regge (Amsterdam: North-Holland) p 195
- 1979 *Rev. Mod. Phys.* **51** 591
- Mermin N D and Ho T-L 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 594
- Milnor J 1956 *Ann. Math.* **64** 394
- Mickelsson J 1989 *Current Algebras and Groups* (New York: Plenum)
- Milnor J W and Stasheff J D 1974 *Characteristic Classes* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
- Minami S 1979 *Prog. Theor. Phys.* **62** 1128
- Mineev V P 1980 *Sov. Sci. Rev. A* **2** 173

- Misner C W 1978 *Phys. Rev. D* **18** 4510
- Misner C W, Thorne K S and Wheeler J A 1973 *Gravitation* (San Francisco, CA: Freeman)
- Moore G 1986 *Phys. Lett. B* **176** 369
- Moore G and Nelson P 1986 *Nucl. Phys. B* **266** 58
- Morozov 1987 *Sov. J. Nucl. Phys.* **45** 181
- Nakahara M 1998 *Path Integrals and Their Applications* (Tokyo: Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo)
- Nambu Y 1970 *Lectures at the Copenhagen Symposium* unpublished
- Nash C 1991 *Differential Topology and Quantum Field Theory* (London: Academic)
- Nash C and Sen S 1983 *Topology and Geometry for Physicists* (London: Academic)
- Newlander A and Nirenberg L 1957 *Ann. Math.* **65** 391
- Nomizu K 1981 *Introduction to Modern Differential Geometry* (Tokyo: Shokabo) (in Japanese)
- Palais R S 1965 *Seminars on the Atiyah–Singer Index Theorem* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
- Polchinski J 1986 *Commun. Math. Phys.* **104** 37
- Polyakov A M 1981 *Phys. Lett. B* **103** 207
- Price R H 1982 *Am. J. Phys.* **50** 300
- Rabin J M 1995 *Geometry and Quantum Field Theory* ed D S Freed *et al* (Providence, RI: American Mathematical Society) p 183
- Ramond P 1989 *Field Theory: A Modern Primer* 2nd edn (Reading, MA: Benjamin/Cummings)
- Rennie R 1990 *Adv. Phys.* **39** 617
- Ryder L H 1980 *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 437
- 1996 *Quantum Field Theory* 2nd edn (Cambridge: Cambridge University Press)
- Sakita B 1985 *Quantum Theory of Many-Variable System and Fields* (Singapore: World Scientific)
- Sánchez N 1988 *Harmonic Mappings, Twistors, and a-Models* ed P Gauduchon (Singapore: World Scientific) p 270
- Sattinger D H and Weaver O L 1986 *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics* (New York: Springer)
- Scherk J 1975 *Rev. Mod. Phys.* **47** 123
- Schutz B F 1980 *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Schwartz L 1986 *Lectures on Complex Analytic Manifolds* (Berlin and Heidelberg: Springer)
- Shanahan P 1978 *The Atiyah–Singer Index Theorem: An Introduction* (Berlin and Heidelberg: Springer)
- Shankar R 1977 *J. Physique* **38** 1405
- Siegel C L 1980 *Advanced Analytic Number Theory* (Bombay: Tata Institute of Fundamental Research)
- Simon B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 2167
- Singer I M 1985 *Soc. Math. de France, Astérisque* hors série 323
- Steenrod N 1951 *The Topology of Fibre Bundles* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
- Stora R 1984 in *Progress in Gauge Field Theory* ed G ’t Hooft *et al* (New York: Plenum) p 543
- Sumitani T 1984 *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** L811
- 1985 *MSc Thesis Soryushiron-Kenkyu* **71** 65 (in Japanese)
- Swanson M S 1992 *Path Integrals and Quantum Processes* (Boston, MA: Academic)
- Tonomura A, Umezaki H, Matsuda T, Osakabe N, Endo J and Sugita Y 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 331

- Toulouse G and Kléman M 1976 *J. Physique Lett.* **37** L149
- Trautman A 1977 *Int. J. Theor. Phys.* **16** 561
- Tsuneto T 1982 *The Structure and Properties of Matter* ed T Matsubara (Berlin: Springer) p 101
- Utiyama R 1956 *Phys. Rev.* **101** 1597
- Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago, IL: The University of Chicago Press)
- Warner F W 1983 *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (New York: Springer)
- Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (New York: Wiley)
- 1988 *Strings and Superstrings: Jerusalem Winter School for Theoretical Physics* ed S Weinberg (Singapore: World Scientific)
- Wells R O 1980 *Differential Analysis on Complex Manifolds* (New York: Springer)
- Wess J and Zumino B 1971 *Phys. Lett. B* **37** 95
- Whitehead G W 1978 *Elements of Homotopy Theory* (New York: Springer)
- Wu T T and Yang C N 1975 *Phys. Rev. D* **12** 3845
- Yang C N and Mills R L 1954 *Phys. Rev.* **96** 191
- Yau S-T 1977 *Proc. Natl Acad. Sci., USA* **74** 1798
- Zumino B 1985 *Relativity, Groups and Topology II* vol 3, ed B S DeWitt and R Stora (Amsterdam: North-Holland) p 1291
- 1987 Geometry and physics *Berkeley Preprint UCB/pTH-87/13*
- Zumino B, Wu Y-S and Zee A 1984 *Nucl. Phys. B* **239** 477

Sachregister

- Abbildung, 69
 Einbettung, 71
 harmonische, 319
 identische, 71
 inverse, 71
 konstante, 70
 Verkettung, 71
- Abbildungsklassengruppe, 561
- Abel'sche Anomalie, 528
- abgeschlossen, 86
- abgeschlossene Hülle, 86
- Abrikosov-Gitter, 165
- Abstiegsgleichung, 538
- Adjungierte, 81
- adjungierte Abbildung, 235, 392
- adjungierte Darstellung, 235
- adjungierte Wirkung, 392
- adjungierter Operator, 476
- Ä-Geschlecht, 460
- Aharonov-Bohm-Effekt, 420
- algebraische Varietät, 328
- allgemeine lineare Gruppe, 218
- allgemeines Relativitätsprinzip, 309
- Ambrose-Singer-Theorem, 406
- analytischer Index, 473, 476
- Anderson-Toulouse-Vortex, 174
- Anomalie
 Abel'sche, 528
 axiale, 528
 chirale, 528
 nicht-Abel'sche, 524
- antiholomorpher Vektor, 333
- Antikommatorrelation, 41
- antiselbstdual, 66
- Antisymmetrisierer, 206
- Äquivalenzklasse, 72
- Äquivalenzrelation, 72
- arithmetisches Geschlecht, 483
- assoziiertes Faserbündel, 386
- assoziiertes Vektorbündel, 386
- Atiyah-Patodi-Singer-Indexsatz, 499
- Atiyah-Singer-Indexsatz, 479
- Atlas, 180
- äußeres Produkt, 207
- axiale Anomalie, 528
- axialer Vektor, 208
- baryzentrische Koordinaten, 105
- Basis, duale, 10
- Basispunkt, 128
- Basisraum, 363, 365
- Baum, 145
- Becci-Rouet-Stora-(BRS-)Operator, 534
- Belavin-Polyakov-Monopol, 162
- Beltrami-Differential, 575
- Bernoulli-Zahlen, 453
- Berry-Krümmung, 431
- Berry-Phase, 429
- Berry-Zusammenhang, 430
- Betti-Zahl, 124
- Bewegungsgleichungen
 Euler-Lagrange'sche, 3
 Hamilton'sche, 7
 Heisenberg'sche, 12
 Newton'sche, 1
- Bianchi-Identität, 60, 66, 210, 280, 297, 408
- Komponentenform, 281
- Bigrad, 335
- biholomorph, 329
- Biholomorphismus, 329
- bijektiv, 70
- Bild, 70, 79
- bogenweise zusammenhängend, 88

- Bosonen, 20
Bott'scher Periodizitätssatz, 160
Bouquet, 146
Bra-Vektor, 10
Brouwer'scher Fixpunktsatz, 176
BRS-Operator, 534
Buchstaben, 142
Bündelabbildung, 369
- Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit, 349
Cartan'sche Homotopieformel, 464
Cartan-Strukturgleichung, 297, 404
Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, 321
Čech-Kohomologiegruppe, 468
Čech-Kokette, 468
charakteristische Klasse, 443
Chern-Charakter, 449
 totaler, 449
Chern-Klasse, 344, 444
 totale, 444
Chern-Simons-Form, 462
chirale Anomalie, 528
chirale Symmetrie, 524
chiraler Strom, 526
Chiralität, 489, 510
Chiralitätsoperator, 510
Christoffel-Symbole, 265
Clifford-Algebra, 503
- Darstellung, adjugierte, 235
Dedekind'sche η -Funktion, 581
Defekt, 166
 Ring-, 169
Definitionsbereich, 70
Deformationsretrakt, 136
Dehn-Twist, 326, 561
De-Rham-Kohomologiegruppe, 242
De-Rham-Komplex, 210
De-Rham-Satz, 245
Derrick-Theorem, 67
diffeomorph, 189
Diffeomorphismus, 189
Differentialabbildung, 195
- Differentialform, 206
 komplexe, 334
differenzierbare Abbildung, 188
differenzierbare Struktur, 181
Dilatationsvektor, 294
Dimensionsleiter, 547, 549
Dirac-Feld, 56
Dirac-Geschlecht, 461, 491
Dirac-Gleichung, 56
Dirac-Operator, 490
Dirac-Strings, 62
Dirac'sche δ -Funktion, 13
Dirac'sche Quantisierungsbedingung, 64
Direktor, 168
Diskriminante, 582
Dolbeault-Komplex, 338, 483
Dolbeault-Operator, 336
Domänengrenze, 166
duale Basis, 10, 80
dualer Feldtensor, 60
dualer Vektor, 80, 193
dualer Vektorraum, 80
duales Bündel, 376
Dualraum, 10
- effektiv, 230
effektive Wirkung, 56
Ehresmann-Zusammenhang, 394
Eichpotenzial, 397
Eichschnitt, 560
Eichtransformation, 57, 397
eigentliche Seite, 105
Einbettung, 71, 197
einfach zusammenhängend, 88, 138
einparametrische Transformationsgruppe, 199
einparametrische Untergruppe, 223
Ein-Punkt-Kompaktifizierung, 88
Einschränkung, 70
Einstein-Gleichung, 310, 312
Einstein-Hilbert-Wirkung, 311
Einstein-Tensor, 282, 310, 311
Eisenstein-Reihe, 581
elektromagnetischer Feldtensor, 57
elliptischer Komplex, 477

- elliptischer Operator, 475
- endlich erzeugte Abel'sche Gruppe, 102
 - Hauptsatz über, 103
- Energie, 2
 - Gradienten-, 163
 - Kondensations-, 163
- Energie-Impuls-Tensor, 310, 312
- erste Homotopiegruppe, 131
- erste Kronecker'sche Grenzformel, 581
- erzeugendes Funktional, 30, 32
 - Dirac-Feld, 56
- Erzeuger, 102
 - Transformationen, 9
- Erzeugungsoperator, 19
- euklidische Zeit, 28
- euklidischer Raum, komplexer, 346
- Euler-Charakteristik, 93, 125
- Euler-Klasse, 457, 459
- Euler-Lagrange-Gleichung, 3
- Euler-Poincaré-Satz, 125
- Euler'scher Polyedersatz, 93
- exakte Differentialform, 210
- Exponentialisierung, 200
- Faddeev-Popov-(FP-)Geist, 534
- Faser, 364, 365
- Faserdimension, 373
- fastkomplexe Mannigfaltigkeit, 356
- fastkomplexe Struktur, 332, 356
- Feldstärke, Yang-Mills-, 407
- Fermionenzahl, 510
- Flächendefekt, 166
- Fluss, 198
- Form, 193, 206
 - 1-Form, 193
 - 2-Form, 212
 - harmonische, 307
 - r -Form, 206
- FP-Geist, 534
- Fredholm-Operator, 476
- frei, 230
- freie Abel'sche Gruppe, 102
- freie Gruppe, 141
- freie Menge von Erzeugern, 141
- Fubini-Study-Metrik, 348
- Fuchs'sche Gruppe, 577
- fundamentales Vektorfeld, 392
- Fundamentalgruppe, 131
- Funktion, 189
 - lineare, 10
- G -Bündel, 379
- generalisierte Geschwindigkeit, 3
- generalisierte Koordinaten, 3
- generalisierter Impuls, 4
- Geodäten, 262
- Gerüst, 146
- Geradenbündel, 374
 - kanonisches, 374
- gerades Bündel, 478
- Geschlecht, 76
- geschlossene Differentialform, 210
- geschlossene Form, 307
- Gewicht, Spitzenform, 582
- glatte Abbildung, 188
- Grad, Homotopie, 139
- Graduierung \mathbb{Z}_2 , 42
- Graßmann-Algebra, 42
- Graßmann-Mannigfaltigkeit
 - komplexe, 328
 - reelle, 185
- Graßmann-Zahlen, 40
- Green-Funktion, 55
- Grundzustand, 20
- Gruppe
 - allgemeine lineare, 218
 - konforme, 286
 - Lie-, 217
 - symmetrische, 205
 - zyklische, 73, 103
- Hamilton-Funktion, 6
- Hamilton-Operator
 - Heisenberg-Modell, 161
- Hamilton'sches Prinzip, 3
- Hamilton'sches Vektorfeld, 213
- harmonische Abbildung, 319
- harmonische Form, 307, 352
- harmonischer Oszillator, 2, 4, 7, 18, 32
- Fermionen, 40, 41

- Hausdorff-Raum, 86
Heisenberg-Bild, 14
Heisenberg-Modell, 161
Helizität, 554
Hermite'sche Mannigfaltigkeit, 338
Hermite'sche Metrik, 338
Hermite'sche Struktur, 416
Hermite'scher Zusammenhang, 342, 416
Higgs-Feld, 61
Higgs-Mechanismus, 61
Hirzebruch'sches L -Polynom, 460
Hirzebruch-Signatur, 461, 484, 487
Hodge-Diamant, 354
Hodge-Stern-Operator, 302, 351
Hodge-Zahl, 353
Hodge'scher Zerlegungssatz, 307
holomorph, 321
 Abbildungen, 329
 Formen, 337
 Funktionen, 329
 Tangentialbündel, 416
 Vektorbündel, 415
 Vektoren, 333
Holonomiegruppe, 283, 402
 eingeschränkte, 403
homogene Koordinaten, 185, 327
homogener Raum, 232
homolog, 113
Homologiegruppe, 113
Homologiekasse, 113
Homomorphiesatz, 101
Homomorphismus, 72, 100
homöomorph, 89
Homöomorphismus, 89
homotop, 130, 134, 153, 372
Homotopie, 130, 134, 153
Homotopieäquivalenz, 135
Homotopiegruppe, 154
Homotopieinverse, 135
Homotopiekasse, 131, 153
Homotopieoperator, 464
Homotopietyp, 92, 134
Hopf-Abbildung, 382
Hopf-Invariante, 389
horizontale Liftung, 398
horizontaler Unterraum, 392
Hurwitz'sche ζ -Funktion, 51
identische Abbildung, 71
imaginäre Zeit, 28
Immersion, 197
Impuls
 generalisierter, 4
Index
 analytischer, 473, 476
 elliptischer Operator, 477
 Metrik, 256
Indexsatz, Spinkomplex, 520
infinitesimaler Erzeuger, 200
inhomogene Koordinaten, 185, 328
injektiv, 70
Inneres, 86
inneres Produkt, 11, 80, 81, 211
 Vektor und 1-Form, 193
Instanton, 65, 381, 423
Instantonenzahl, 381
integrabel, 357
 η -Invariante, 498
invariantes Polynom, 439
inverse Abbildung, 71
Isometrie, 285
isomorph, 79, 100
Isomorphismus, 72, 100
isotherme Koordinaten, 290, 552
Isotropiegruppe, 231
Jacobi-Identität, 8
 J -Homomorphismus, 160
Kähler-Form, 339
Kähler-Mannigfaltigkeit, 344
Kähler-Metrik, 344
Kähler-Potenzial, 345
kanonische 1-Form, 226
kanonische lokale Trivialisierung, 395
kanonische Quantisierung, 11
kanonisches Geradenbündel, 374
kanonisches Kurvensystem, 121
Kantengruppe, 144
Kantenpfad, 144

- Kantenschleife, 144
- Karte, 180
- Kern, 79, 476
 - offener, 86
- Ket-Vektor, 10
- Kette, 109, 238
- Kettengruppe, 109, 239
- Kettenkomplex, 111
- Killing-Gleichung, 291
- Killing-Vektorfeld, 291
- klassifizierender Raum, 448
- Klein'sche Flasche, 75
- kleinste Wirkung
 - Prinzip der, 3
- koexakt, 307
- kogeschlossene Form, 307
- kohärenter Zustand, 47
- kohomolog, 242
- Kohomologiegruppe
 - De-Rham-, 242
 - Dolbeault-Komplex, 338
 - komplexe Mannigfaltigkeit, 350
- Kohomologierung, 250
- Kokern, 476
- kommutatives Diagramm, 71
- Kommutator, 12
- Kommutatorgruppe, 152
- kompakt, 87
- kompatibel, 181
- Kompatibilitätsbedingung, 397
- Komplex
 - Dolbeault-, 483
 - elliptischer, 477
 - Signatur-, 487
 - Spin-, 491
- komplexe Differentialform, 334
- Komplexifizierung, 330
- Komponente, 79
- Konfigurationsraum, 3
- konform flach, 289
- konforme Gruppe, 286
- konforme Struktur, 286
- konforme Transformation, 285
- konformer Killing-Vektor, 565
- konformes Killing-Vektorfeld, 294
- Konjugationsklasse, 78
- konervative Kraft, 1
- konstante Abbildung, 70
- konstanter Pfad, 128
- Kontorsionstensor, 265
- Kontraktion, 83, 137
- Koordinaten, 180
 - generalisierte, 3
 - homogene, 185, 327
 - inhomogene, 185, 328
 - isotherme, 290, 552
 - zyklische, 5
- Koordinatenbasis, 192
- Koordinatenbündel, 366
- Koordinatenfunktion, 180
- Koordinatenumgebung, 180
- Korand, 338
- Korandgruppe, 242, 468
- kosmologische Konstante, 312
- Kotangentialbündel, 376
- Kotangentialraum, 193
- Kotangentialvektor, 193
- kovariante Ableitung, 59
 - Prinzipalbündel, 403
- Kovektor, 193
- Kozykel, 338
- Kozykelgruppe, 241, 468
- Kraft, konservative, 1
- Kreuzprodukt, 207
- kritische Dimension, 570
- kritische Temperatur, 161
- Kronecker'sche Grenzformel, erste, 581
- Krümmungs-2-Form, 297, 403
- Krümmungsskalar, 272
- Krümmungstensor, Riemann'scher, 266
- Künneth-Formel, 250
- Kurve, 189
- Lagrange-Funktion, 3
- Laplace-Operator, 306, 477
- leeres Wort, 142
- Levi-Civita-Symbol, 208
- Levi-Civita-Zusammenhang, 261
- Lichtkegelsystem, 257
- Lie-Ableitung, 201

- Lie-Algebra, 221
Lie-Gruppe, 217
Lie-Klammer, 8, 202
Lie-Untergruppe, 219
linear abhängig, 78
linear unabhängig, 78
 Abel'sche Gruppe, 102
lineare Abbildung, 79
lineare Funktion, 10, 79
linearer Raum, 78
Liniendefekt, 166
linksinvariantes Vektorfeld, 220
Linkstranslation, 219
lokale Trivialisierung, 365
 kanonische, 380
lokaler Schnitt, 367
Lorentz-Gruppe, 218
Lorentz-Mannigfaltigkeit, 257
- magnetischer Monopol, 380
Mannigfaltigkeit
 Calabi-Yau'sche, 349
 differenzierbare, 180
 Hermite'sche, 338
 Kähler'sche, 344
 Lorentz'sche, 257
 mit Rand, 181
 pseudo-Riemann'sche, 257
 Riemann'sche, 257
- Maurer-Cartan-Form, 226
Maurer-Cartan-Gleichung, 226
maximal symmetrischer Raum, 292
maximaler Baum, 145
Maxwell-Wirkung, 418
Mellin-Transformation, 496
Mermin-Ho-Vortex, 174
Metrik, 85
 euklidische, XX, 257
 Hermite'sche, 338
 induzierte, 258
 Kähler'sche, 344
 Lorentz'sche, 257
 Minkowski'sche, 257
 Minkowski-, XX
 pseudo-Riemann'sche, 256
- Riemann'sche, 255
Robertson-Walker'sche, 280
Schwarzschild'sche, 280
Metrikkompatibilität, 265, 342
metrischer Raum, 85
metrischer Zusammenhang, 414
Milne-Universum, 290
modulare Gruppe, 561
modulare Transformation, 326
Modulraum
 Eichtheorie, 535
 String, 560
- Monopol, 166
 Belavin-Polyakov-, 162
 Dirac-, 62
 magnetischer, 62, 380
 Shankar-, 159, 175
 Wu-Yang-, 63
- Nambu-Wirkung, 316
Natürlichkeit, 443
Nebenklasse, 77
Newton'sches Axiom, zweites, 1
nicht-Abel'sche Anomalie, 524
Nichtkoordinatenbasis, 193, 295
nichtorientierbar, 74
Nijenhuis-Tensorfeld, 357
Noether-Theorem, 8
Norm, 11
Normalbündel, 374
Normalkoordinatensystem, 279
Normalteiler, 77, 219
Nullmoden, 493, 511
Nullschnitt, 376
- Observable, 12
offene Menge, 84
offener Kern, 86
Operator
 Erzeugungs-, 19
 Vernichtungs-, 19
Orbifold, 359
Orbit, 230
Ordnung, elliptischer Operator, 474
Ordnungsparameter, 161

- Ordnungsparameter-Raum, 166
- orientierbar, 74, 214
- Orientierung, 214
- orthogonale Gruppe, 218
- orthogonales Komplement, 79
- Orthonormalrahmen, 415

- Palatini-Identität, 310
- parakompakt, 216
- parallelisierbar, 270
- Paralleltransport, 259, 262, 400
- Pauli-Hamilton-Operator, 503
- Pauli-Spinmatrix, XX
- Pauli-Villars-Regularisierung, 546
- Periode, Formen, 245
- Pfad, 128
- Pfadintegrale
 - Bosonen, 20
 - Fermionen, 40
- Pfaff'sche Determinante, 45, 458
- Phasenraum, 6
- Poincaré-Alexander-Theorem, 93
- Poincaré-Dualität, 249
- Poincaré-Halbebene, 277
- Poincaré-Lemma, 247
- Poincaré-Metrik, 577
- Poincaré-Wirkung, 318
- Poisson-Klammer, 7
- Polarisierung, 439
- Polyakov-Wirkung, 317
- Polyeder, 92, 106
- Pontrjagin-Klasse, 457
 - totale, 454
- Präsentation, 143
- Prinzip der kleinsten Wirkung, 3
- Produktbündel, 377
- Projektion, 364, 365
- projektive Ebene, 75, 168
- projektiver Raum, komplexer, 327
- pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit, 257
- Pseudoteilchen, 423
- Pullback-Bündel, 371
- Punktdefekt, 166

- quadratisches Differential, 575
- Quantenfeldtheorie, 52
- Quantisierung
 - kanonische, 11
 - Pfadintegrale, 20
 - skalare Felder, 52
- Quaternionen, XX
- Quelle, 30
- Quotientengruppe, 77
- Quotientenraum, 73

- Rahmen, 375
- Rahmenbündel, 386
- Rand, 86, 110, 112, 239
 - Mannigfaltigkeiten, 182
 - Simplexe, 239
- Rändergruppe, 112, 239
- Randoperator, 111
- Rang
 - endlich erzeugte Abel'sche Gruppe, 103
 - freie Abel'sche Gruppe, 102
- Raum, maximal symmetrischer, 292
- Rechtstranslation, 219
- reduziertes Wort, 142
- reeller Vektor, 330
- reine Eichung, 408
- Relation, 72
 - freie Gruppen, 142
- Repräsentant, 73
- Retrakt, 136
- Retraktion, 136
- Ricci-flach, 349
- Ricci-Form, 343
- Ricci-Rotationskoeffizienten, 299
- Ricci-Tensor, 272
- Riemann'sche ζ -Funktion, 39
- Riemann'sche Fläche, 346
- Riemann'sche Mannigfaltigkeit, 257
- Riemann'sche Normalkoordinaten, 515
- Riemann'sche Struktur, 414
- Riemann-Tensor, 266
- Rücktransport, 80, 196
 - Faserbündel, 371
- Rücktransportbündel, 371

- Sattelpunktmethode, 514
Satz von Chern-Weil, 440
Satz von de Rham, 245
Satz von Gauß-Bonnet, 458
Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch, 484
Satz von Hodge, 308
komplexe Mannigfaltigkeiten, 352
Satz von Riemann-Roch, 556
Schleife, 88, 128, 153
Schnitt, 365, 367
lokaler, 365
Schrödinger-Bild, 14
Schrödinger-Gleichung, 14
zeitabhängige, 17
zeitunabhängige, 18
Seite (Facette), 105
selbstduale Feldstärke, 66
Shankar-Monopol, 159, 175
Signaturkomplex, 487
Signatursatz von Hirzebruch, 461, 488
Simplex, 93
orientiertes, 109
singuläres, 238
Standard-, 237
Simplizialkomplex, 106
singuläres Simplex, 238
skalare Krümmung, 272
Skalarmultiplikation, 78
Skalarprodukt, 11
Smash-Produkt, 540
spektrale ζ -Funktion, 39
spektraler Fluss, 498
spezielle lineare Gruppe, 218, 219
spezielle orthogonale Gruppe, 218
spezielle unitäre Gruppe, 219
Spinbündel, 387, 467
Spingruppe, 158
Spinkomplex, 491
Spinstruktur, 467
Spitzenform, 582
Splitting-Prinzip, 447
spontane Magnetisierung, 161
spontane Symmetriebrechung, 161
Stabilisator, 231
Standardsimplex, 237
stetig, 85
Stiefel-Whitney-Klasse, 469
Stirling-Formel, 515
Stokes'scher Satz, 239
Strahldarstellung, 12
Strings, 315
Strukturgleichung, 226
Strukturgruppe, 365
Strukturkonstanten, 59, 226, 392
Superladung, 504
Superstringtheorie, 315
Supersymmetrie, 502
Supersymmetrietransformation, 504
surjektiv, 70
Symbol, elliptischer Operator, 474
Symmetriebrechung, spontane, 161
symmetrische Gruppe, 205
Symmetrisierer, 205
symmetrierte Spur, 439, 539
symplektische 2-Form, 212
Tangentialbündel, 363
holomorphe, 416
Tangentialraum, 192
Tangentialvektor, 191
Teichmüller-Deformation, 563
Teichmüller-Raum, 560
Tensor, 83, 194
Tensorfeld, 194
Tensorprodukt, 83
Tensorproduktbündel, 378
Tensorraum, 83
Tensorverjüngung, 83
Textur, 168, 173
Todd-Klasse, 453
Topologie, 84
diskrete, 84
gewöhnliche, 84
metrische, 85
relative, 85
triviale, 84
topologische Anregungen, 162
topologische Invarianten, 90
topologischer Raum, 84
Torsions-2-Form, 297

- Torsionstensor, 265, 266
- Torsionsuntergruppe, 124
- Torus, 75
- Totalraum, 365
- T -Produkt, 29
- Transgression, 443
- transitiv, 230
- Triangulation, 107
- triangulierbar, 107
- triviales Bündel, 367
- typische Faser, 365
- Überdeckung, 87
 - offene, 87
- Übergangsamplitude, 21
- Pfadintegral-Darstellung, 26, 53
- Übergangsfunktion, 366
- Überlagerungsraum, 156
- Umgebung, 86
 - offene, 86
- ungerades Bündel, 478
- Uniformisierungssatz, 577
- unitäre Gruppe, 61, 219
- unitärer Rahmen, 416
- universelle Überlagerungsgruppe, 156, 230
- universeller Überlagerungsraum, 156
- universelles Bündel, 448
- Untergruppe, einparametrische, 223
- Untermannigfaltigkeit, 197
- unzusammenhängend, 88
- Urbild, 69
- Vakuumerwartungswert, 61
- Variationsableitung, 4
 - Graßmann-Zahlen, 46
- Vektor, 78
 - axialer, 208
 - Bra-, 10
 - Ket-, 10
 - lichtartiger, 257
 - Null-, 257
 - raumartiger, 257
 - zeitartiger, 257
- Vektorbündel, 373
 - holomorphes, 415
- Vektorfeld, 194
 - antiholomorphes, 333
 - holomorphes, 333
 - induziertes, 234
 - linksinvariantes, 220
- Vektorprodukt, 207
- Vektorraum, 78
 - dualer, 80
- verallgemeinerte ζ -Funktion, 51
- Verjüngung, 83
- Verkettung von Abbildungen, 71
- Vernichtungsoperator, 19
- vertikaler Unterraum, 392
- Vielbein, 295
- Vierbein, 295
- Vollständigkeitsrelation, 11
 - Graßmann-Zahlen, 47
- Volumenelement, 214
 - invariantes, 301
- Vortex, Mermin-Ho-, 174
- Wahrscheinlichkeitsamplitude, 13
- Wärmeleitungsgleichung, 494
- Wärmeleitungskern, 22, 493
- Weil-Homomorphismus, 443
- Weil-Petersson-Maß, 577
- Wellenfunktion, 15
- Weltfläche, 316
- Wertebereich, 70
- Wess-Zumino-(WZ-)Konsistenzbedingung, 537
- Weyl-Ordnung, 24
- Weyl-Reskalierung, 286, 319
- Weyl-Schouten-Tensor, 320
- Weyl-Tensor, 289
- Whitney-Summen-Bündel, 377
- Wick-Rotation, 28
- Windungszahl, 167
- Wirbel, 166
- Wirkung, 3
 - effektive, 56
 - Prinzip der kleinsten W., 3
- Wort, 142

- WZ-Konsistenzbedingung, 537
Yang-Mills-Eichfeld, 60
Yang-Mills-Feldtensor, 60
Yang-Mills-Potenzial, 397

Zerlegung der Eins, 216
Zerlegungssatz, Hodge'scher, 307
zusammenhängend, 88
 bogenweise, 88
 einfach, 88
zusammenhängende Summe, 94
Zusammenhang, 258
 Hermite'scher, 342, 416
Koeffizienten, 261

Levi-Civita-, 261, 265, 272
metrischer, 265
Prinzipalbündel, 392
symmetrischer, 272
Zusammenhangs-1-Form, 297,
 393
zusammenziehbar, 137
Zustandssumme, 29
 Fermionen, 48
 harmonischer Oszillator, 36
Zustandsvektor, 12
Zyklengruppe, 111, 239
zyklische Gruppe, 73, 103
zyklische Koordinaten, 5
Zyklus, 111, 239