1 Introduction

Dans ce document on s'intéresse à la discrétisation du Laplacien pour un problème type Laplace

$$-\Delta u = F \tag{1}$$

sur des maillages simples.

2 Second ordre en 1D

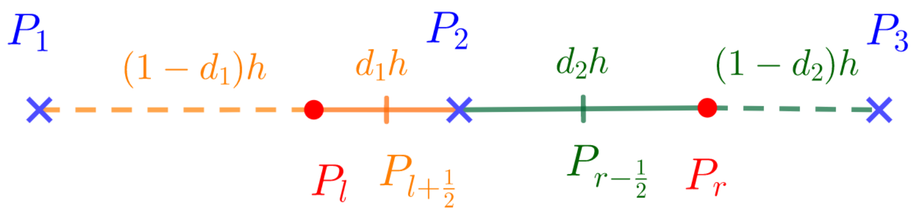

FIGURE 1 – Illustration : 1D

En une dimension, le problème de Laplace (1) est discrétisé sous la forme

$$-\frac{u_{i-1} - 2\,u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i \tag{2}$$

Sur une grille cartésienne quelconque où tous les points sont à une distance h de leurs voisins directs et sous des conditions aux limites périodiques, résoudre (1) revient à résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} a & b & & b \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ b & & b & a \end{bmatrix} U = F \tag{3}$$

avec $a := -2b$ et $b := -\frac{1}{h^2}$.

Dans l'exemple illustré **Figure 1** le système est encore plus simplifié si l'on considère uniquement les points P_1, P_2 et P_3 comme étant des points de grille :

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Maintenant imaginons que nous voulions rajouter des points supplémentaires sur ce maillage, pour pouvoir, par exemple, imposer des conditions aux limites supplémentaires plus tard.

On introduit ainsi les points P_r et P_l :

- P_l étant à une distance de $(1-d_1)h$ de P_1 et à une distance de $d_1 h$ de P_2.
- P_r étant à une distance de $(1-d_2)h$ de P_2 et à une distance de $d_2 h$ de P_3.

2.1 P_l

Dans un premier temps, analysons la discrétisation du Laplacien en 1D sur un maillage non régulier :

$$\Delta\,u = \partial_x^2\,u = \partial_x(\partial_x u)$$

Étudions dans un premier temps les développement de Taylor autour de P_l

$$\begin{aligned} u\left(P_1\right) &= u\left(P_l-(1-d_1)\,h\right) = u\left(P_l\right)-(1-d_1)\,h\,u'\left(P_l\right)+\frac{(1-d_1)^2\,h^2}{2}\,u''(P_l)+O\left((1-d_1)^3\,h^3\right) \\ u(P_2) &= u\left(P_l+d_1 h\right) = u\left(P_l\right)+d_1 h\,u'\left(P_l\right)+\frac{d_1^2h^2}{2}\,u''\left(P_l\right)+O\left(d_1^3h^3\right) \end{aligned}$$

On peut remarquer que

$$d_1 u\left(P_1\right)-d_1 u\left(P_l\right)-(1-d_1)u\left(P_l\right)+(1-d_1)\,u(P_2)=d_1(1-d_1)h\frac{h}{2}u''\left(P_l\right)+O(h^3) \tag{5}$$

qui se réécrit comme

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(P_1)-u(P_l)}{(1-d_1)h}-\frac{u(P_l)-u(P_2)}{d_1 h}}{\frac{h}{2}}=u''(P_l) \tag{6}$$

2.2 P_r

De la même manière nous avons un développement de Taylor autour de P_r

$$\begin{aligned} u\left(P_3\right) &= u\left(P_r+(1-d_2)\,h\right) = u\left(P_r\right)+(1-d_2)\,h\,u'\left(P_r\right)+\frac{(1-d_2)^2\,h^2}{2}\,u''(P_r)+O\left((1-d_2)^3\,h^3\right) \\ u(P_2) &= u\left(P_r-d_2 h\right) = u\left(P_r\right)-d_2 h\,u'\left(P_r\right)+\frac{d_2^2h^2}{2}\,u''\left(P_r\right)+O\left(d_2^3h^3\right) \end{aligned}$$

Qui conduit à

$$d_2 u\left(P_2\right)-d_2 u\left(P_2\right)-(1-d_2)u\left(P_r\right)+(1-d_2)\,u(P_3)=d_2(1-d_2)h\frac{h}{2}u''\left(P_r\right)+O(h^3) \tag{7}$$

et qui se réécrit comme

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(P_2)-u(P_r)}{d_2 h}-\frac{u(P_r)-u(P_3)}{(1-d_2)h}}{\frac{h}{2}}=u''(P_r) \tag{8}$$

Nous avons donc deux nouvelles formules de discrétisation

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{(1-d_1)h^2}\,u(P_1)+\frac{2}{h^2}\left(\frac{1}{1-d_1}+\frac{1}{d_1}\right)u(P_l)-\frac{2}{d_1h^2}\,u(P_2)=f_l \\ \Longleftrightarrow &\frac{2}{(1-d_1)}\,b\,u(P_1)-2b\left(\frac{1}{1-d_1}+\frac{1}{d_1}\right)u(P_l)+\frac{2}{d_1}b\,u(P_2)=f_l \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{(1-d_2)h^2}\,u(P_3)+\frac{2}{h^2}\left(\frac{1}{1-d_2}+\frac{1}{d_2}\right)u(P_r)-\frac{2}{d_2h^2}\,u(P_2)=f_r \\ \Longleftrightarrow &\frac{2}{(1-d_2)}\,b\,u(P_3)-2b\left(\frac{1}{1-d_2}+\frac{1}{d_2}\right)u(P_r)+\frac{2}{d_2}b\,u(P_2)=f_r \end{aligned}$$

2.3 P_1

Vérifions maintenant que les coefficients calculés interviennent aussi dans la discrétisation du Laplacien au point P_1.

Nous avons un développement de Taylor autour de P_1

$$
\begin{aligned}
u(P_3) &= u\left(P_1 - h\right) = u\left(P_1\right) - h\, u'\left(P_1\right) + \frac{h^2}{2}\, u''\left(P_1\right) + O\left(h^3\right) \\
u\left(P_l\right) &= u\left(P_1 + (1-d_1)h\right) = u\left(P_1\right) + (1-d_1)h\, u'\left(P_1\right) + \frac{(1-d_1)^2 h^2}{2}\, u''(P_1) + O\left((1-d_1)^3 h^3\right)
\end{aligned}
$$

Qui conduit à

$$
(1-d_1)u\left(P_3\right) - (1-d_1)u\left(P_1\right) - u\left(P_1\right) + u(P_l) = (1-d_1)h\frac{(2-d_1)h}{2}u''\left(P_1\right) + O(h^3) \tag{9}
$$

et qui se réécrit comme

$$
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(P_3)-u(P_1)}{h} - \frac{u(P_1)-u(P_l)}{(1-d_1)h}}{\frac{(2-d_1)h}{2}} = u''(P_1) \tag{10}
$$

La nouvelle formule de discrétisation en P_1 est donc

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{(2-d_1)h^2}u(P_3) - \frac{2}{h^2}\frac{1}{2-d_1}\left(1 - \frac{1}{1-d_1}\right) u(P_1) + \frac{2}{(2-d_1)(1-d_1)h^2}u(P_l) = f_1 \\
\iff &\frac{2}{2-d_1}b\, u(P_3) - 2b\frac{1}{2-d_1}\left(1 - \frac{1}{1-d_1}\right) u(P_1) + \frac{2}{(2-d_1)(1-d_1)}b\, u(P_l) = f_1
\end{aligned}
$$

2.4 P_2

Vérifions maintenant que les coefficients calculés interviennent aussi dans la discrétisation du Laplacien au point P_2.
Nous avons un développement de Taylor autour de P_2

$$
\begin{aligned}
u(P_l) &= u\left(P_2 - d_1 h\right) = u\left(P_2\right) - d_1 h\, u'\left(P_2\right) + \frac{d_1^2 h^2}{2}\, u''\left(P_2\right) + O\left(d_1^3 h^3\right) \\
u\left(P_r\right) &= u\left(P_2 + d_2 h\right) = u\left(P_2\right) + d_2 h\, u'\left(P_2\right) + \frac{d_2^2 h^2}{2}\, u''(P_2) + O\left(d_2^3 h^3\right)
\end{aligned}
$$

Qui conduit à

$$
d_2 u\left(P_l\right) - d_2 u\left(P_2\right) - d_1 u\left(P_2\right) + d_1 u(P_r) = d_2 d_1 h\frac{(d_1+d_2)h}{2}u''\left(P_2\right) + O(h^3) \tag{11}
$$

et qui se réécrit comme

$$
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(P_l)-u(P_2)}{d_1 h} - \frac{u(P_2)-u(P_r)}{d_2 h}}{\frac{(d_1+d_2)h}{2}} = u''(P_r) \tag{12}
$$

La nouvelle formule de discrétisation en P_2 est donc

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{(d_1+d_2)d_1 h^2}u(P_l) - \frac{2}{h^2}\frac{1}{d_1+d_2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) u(P_2) + \frac{2}{(d_1+d_2)d_2 h^2}u(P_r) = f_2 \\
\iff &\frac{2}{(d_1+d_2)d_1}b\, u(P_l) - 2b\frac{1}{d_1+d_2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) u(P_2) + \frac{2}{(d_1+d_2)d_2}b\, u(P_r) = f_2
\end{aligned}
$$

2.5 P_3

Vérifions maintenant que les coefficients calculés interviennent aussi dans la discrétisation du Laplacien au point P_3.

Nous avons un développement de Taylor autour de P_3

$$
\begin{aligned}
u(P_r) &= u\left(P_3 - (1-d_2)h\right) = u\left(P_3\right) - (1-d_2)h\, u'\left(P_3\right) + \frac{(1-d_2)^2h^2}{2}\, u''\left(P_3\right) + O\left((1-d_2)^3h^3\right)\\
u\left(P_1\right) &= u\left(P_3 + h\right) = u\left(P_3\right) + h\, u'\left(P_3\right) + \frac{h^2}{2}\, u''(P_3) + O\left(h^3\right)
\end{aligned}
$$

Qui conduit à

$$
u\left(P_r\right) - u\left(P_3\right) - (1-d_2)u\left(P_1\right) + (1-d_2)u(P_1) = (1-d_2)h\frac{(2-d_2)h}{2}u''\left(P_3\right) + O(h^3) \tag{13}
$$

et qui se réécrit comme

$$
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(P_r)-u(P_3}{(1-d_2)h} - \frac{u(P_3)-u(P_1)}{h}}{\frac{(2-d_2)h}{2}} = u''(P_3) \tag{14}
$$

La nouvelle formule de discrétisation en P_1 est donc

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{(2-d_2)(1-d_2)h^2}u(P_r) - \frac{2}{h^2}\frac{1}{2-d_2}\left(\frac{1}{1-d_1} - 1\right)\, u(P_3) + \frac{2}{(2-d_2)h^2}u(P_1) = f_3\\
\iff &\frac{2}{(2-d_2)(1-d_2)}b\, u(P_r) - 2b\frac{1}{2-d_2}\left(\frac{1}{1-d_2} - 1\right)\, u(P_3) + \frac{2}{(2-d_2)}b\, u(P_1) = f_3
\end{aligned}
$$

2.6 Final

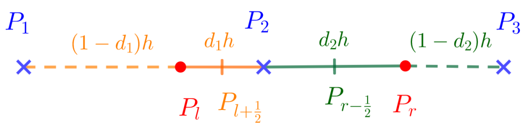

FIGURE 2 – Illustration : 1D

Maintenant nous avons donc

Pour P_1

$$
2b\frac{1}{2-d_1}\, u(P_3) \qquad -2b\frac{1}{2-d_1}\left(1 - \frac{1}{1-d_1}\right)\, u(P_1) + 2b\frac{1}{(2-d_1)(1-d_1)}\, u(P_l) \qquad = f_1
$$

Pour P_2

$$
2b\frac{1}{(d_1+d_2)d_1}\, u(P_l) \qquad -2b\frac{1}{d_1+d_2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)\, u(P_2) + 2b\frac{1}{(d_1+d_2)d_2}\, u(P_r) \qquad = f_2
$$

Pour P_3

$$
2b\frac{1}{(2-d_2)(1-d_2)}\, u(P_r) \qquad -2b\frac{1}{2-d_2}\left(\frac{1}{1-d_2} - 1\right)\, u(P_3) + 2b\frac{1}{(2-d_2)}\, u(P_1) \qquad = f_3
$$

Pour P_l

$$
2b\frac{1}{1-d_1}\, u(P_1) \qquad -2b\left(\frac{1}{1-d_1} - \frac{1}{d_1}\right)\, u(P_l) + 2b\frac{1}{d_1}\, u(P_2) \qquad = f_l
$$

Pour P_r

$$
2b\frac{1}{(1-d_2)}\, u(P_3) \qquad -2b\left(\frac{1}{1-d_2} - \frac{1}{d_2}\right)\, u(P_r) + 2b\frac{1}{d_2}\, u(P_2) \qquad = f_r
$$

2.7 Formule générale

Ainsi si on prend trois points alignés a, b et c, séparés respectivement par des distances d_{ab} et d_{bc}, alors la discrétisation 1D du Laplacien est

$$[\Delta]\, u(b) = \frac{\frac{u(a)-u(b)}{d_{ab}} - \frac{u(b)-u(c)}{d_{bc}}}{\frac{d_{ab}+d_{bc}}{2}}$$