Équation de la chaleur et conditions aux bords

Valentin Pannetier

10 décembre 2020

Équation de la chaleur

$$\partial_t u - D\Delta u = f \tag{1}$$

D coefficient de diffusité thermique. Une fois discrétisée, on obtient des matrices représentant les opérateurs. On note $[\Delta]$ la matrice du Laplacien et T la matrice de la dérivée temporelle.

Rappel développement de Taylor
Soit u une fonction différentiable en z_0 et $z_0 + \alpha$, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$

$$u(z_0 + \alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \partial_z^k u(z_0) + \mathcal{O}(\alpha^n) \tag{2}$$

qui est utilisé pour approcher la valeur de $u(z_0 + \alpha)$ avec une combinaison des valeurs des dérivées $\partial_z^k u(z_0)$. Cette relation est utilisé dans la méthode des différences finies pour obtenir plusieurs relations. On peut par exemple voir le fameux taux d'accroissement

$$\frac{u(z_0 + \alpha) - u(z_0)}{\alpha} = \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \partial_z^k u(z_0) + \mathcal{O}(\alpha^n)\right] - u(z_0)}{\alpha} \tag{3}$$

En scindant la somme on obtient

$$= \frac{\left[\underbrace{\frac{\alpha^0}{0!}\partial_z^0 u(z_0)}_{=u(z_0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \partial_z^k u(z_0) + \mathcal{O}(\alpha^n)\right] - u(z_0)}{\alpha} \tag{4}$$

C'est-à-dire

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{k-1}}{k!} \partial_z^k u(z_0) + \mathcal{O}(\alpha^{n-1}) \tag{5}$$

En scindant de nouveau

$$= \underbrace{\frac{\alpha^0}{1!}\partial_z^1 u(z_0)}_{\partial_z u(z_0)} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha^{k-1}}{k!} \partial_z^k u(z_0) + \mathcal{O}(\alpha^{n-1})}_{\mathcal{O}(\alpha^1} \tag{6}$$

$$= \partial_z u(z_0) + \mathcal{O}(\alpha^1) \tag{7}$$

$$\approx \partial_z u(z_0) \tag{8}$$

On dit alors que l'on peut approcher $\partial_z u(z_0)$ grâce à $\dfrac{u(z_0 + \alpha) - u(z_0)}{\alpha}$ à l'ordre 1 (c'est la dernière ligne avec le $\mathcal{O}(\alpha^1)$) sur le stencil $z_0 + \alpha, z_0$.

Une liste non exhaustive des approximations des dérivées avec des stencils (liste des points que l'on prend pour approximer une valeur en z_0, par exemple $z_0 - \alpha, z_0, z_0 + \alpha$) est donnée ici https:

//en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient.

La dérivée temporelle
La dérivée temporelle est particulière dans le sens où le stencil que l'on prend est temporel et que pour approcher la valeur de $\partial_t u(t)$ on ne peut pas prendre de valeurs qui n'ont pas été calculée encore. On a une boucle sur le temps pour avoir les valeurs successives de u : $u^0, u^1, u^2, \cdots$. Mais si on veut approcher u^3 (ie la solution u qui est solution d'un équation faisant intervenir une dérivée temporelle) on ne peut que se servir des valeurs u^k déjà calculées ! On parle alors de stencils décentrés. Par exemple on peut pour calculer en t_0 (en prenant $z_0 = t_0$ et $\alpha = \Delta t$) :

$$\partial_t u(x, t_0) = \frac{u(x, t_0) - u(x, t_0 - \Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^1) \tag{9}$$

$$\partial_t u(x, t_0) = \frac{\frac{3}{2}u(x, t_0) - 2u(x, t_0 - \Delta t) + \frac{1}{2}u(x, t_0 - 2\Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{10}$$

$$\partial_t u(x, t_0) = \frac{\frac{11}{6}u(x, t_0) - 3u(x, t_0 - \Delta t) + \frac{3}{2}u(x, t_0 - 2\Delta t) - \frac{1}{3}u(x, t_0 - 3\Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \tag{11}$$

Ce sont les trois premières lignes du tableau https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient#Backward_finite_difference !

Le Laplacien
On rappelle que le Laplacien de u s'écrit comme $\Delta u := \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$. Il nous faut donc approcher les des deux dérivées secondes.
Travaillons donc uniquement sur $\partial_x^2 u$ (la dérivée seconde selon y fonctionne exactement pareil, et il suffit de faire une somme des deux approximations obtenues pour approcher le Lalplacien de u).
Habituellement, $\partial_x^2 u$ est approchée comme :

$$\partial_x^2 u(x_0, y_0) = \frac{u(x_0 - h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 + h, y_0)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{12}$$

C'est la 5ieme ligne du tableau https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient#Central_finite_difference.

Finalité
Discrétiser l'équation de la chaleur avec la formule pour le temps (9) et l'espace (12).
Pour un point (x_i, y_j, t_n), on note

- $u_{ij}^n \approx u(x_i, y_j, t_n)$
- $u_{i-1,j}^n \approx u(x_i - \Delta x, y_j, t_n)$
- $u_{i+1,j}^n \approx u(x_i + \Delta x, y_j, t_n)$
- $u_{i,j-1}^n \approx u(x_i, y_j - \Delta y, t_n)$
- $u_{i,j+1}^n \approx u(x_i, y_j + \Delta y, t_n)$
- $u_{i,j}^{n-1} \approx u(x_i, y_j, t_n - \Delta t)$

On obtient ainsi la discrétisation de l'équation de la chaleur :

$$\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} - D\left[\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2}\right] = f_{ij}^n \tag{13}$$

ou encore

$$\frac{u_{i,j}^n}{\Delta t} - D\left[\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2}\right] = \frac{u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + f_{ij}^n \tag{14}$$

On parle ici d'un schéma implicite (d'autres choix sont possibles, comme prendre la discrétisation du laplacien au temps $t_n - \Delta t$ et on obtient donc un schéma explicite !).
On note $b = -\dfrac{D}{\Delta x^2}$, $c = -\dfrac{D}{\Delta y^2}$, $e = \dfrac{1}{\Delta t}$ et $a = e - b - c$ pour obtenir le schéma plus clair

$$a u_{ij}^n + b\left(u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n\right) + c\left(u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n\right) = e u_{i,j}^{n-1} + f_{ij}^n \tag{15}$$

Cette formule n'est valable que **si** les 4 points autour du point (x_i, y_j) existent. Or les points qui sont sur le bord du domaine n'ont pas tous ces voisins.

Les conditions de Dirichlet
Les conditions de Dirichlet sont de la forme $u = g$ sur le bord du domaine avec g une fonction.
Il est assez simple d'imposer une condition de Dirichlet, en effet si le point (par exemple mais c'est valable pour tous les points) (x_{i-1}, y_j) est un point de bord alors il suffit de prendre le schéma

$$a u_{ij}^n + b\left(\boldsymbol{g_{i-1,j}^n} + u_{i+1,j}^n\right) + c\left(u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n\right) = e u_{i,j}^{n-1} + f_{ij}^n \tag{16}$$

et comme g n'est pas une inconnue on obtient le schéma

$$a u_{ij}^n + b u_{i+1,j}^n + c\left(u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n\right) = e u_{i,j}^{n-1} + f_{ij}^n - \underbrace{b\boldsymbol{g_{i-1,j}^n}}_{\text{condition de bord}} \tag{17}$$

On peut faire ça pour n'importe quel point dont un point voisin est un point de bord ! !

Les conditions de Neumann
Voir `https://www.math.uci.edu/~chenlong/226/FDM.pdf` pour une explication plus claire peut-être.
Les conditions de Neumann sont de la forme $\partial_n u = g$ sur le bord du domaine avec g une fonction.
Le terme $\partial_n u$ désigne la dérivée normale de u : si on a un vecteur normal au bord de la forme $\vec{n} = (n_x, n_y)$ alors $\partial_n u = \vec{n} \cdot \nabla u = n_x \partial_x u + n_y \partial_y u$.
Il faut maintenant discrétiser les opérateurs de dérivée première en espace (le $\partial_x u$ et le $\partial_y u$). Il est habituel de prendre un schéma du même ordre que l'ordre qu'on a pris pour le Laplacien (c'est-à-dire 2). Or on a (voir le tableau dérivée centrée)

$$\partial_x u(x_i, y_j, t_n) = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \tag{18}$$

et

$$\partial_y u(x_i, y_j, t_n) = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y^2) \tag{19}$$

Donc

$$\partial_n u(x_i, y_j, t_n) \approx n_x \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + n_y \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = g_{ij}^n \tag{20}$$

En général les normales $\vec{n}$ sont dans la direction de la grille (ie soit $n_x = 0$ soit $n_y = 0$). Admettons ici que $n_y = 0$ et $n_x = 1$ et que le point $x_i - \Delta x$ est le point de bord.
On obtient donc

$$u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n = 2\Delta x g_{ij}^n \tag{21}$$

ou encore

$$u_{i-1,j}^n = u_{i+1,j}^n - 2\Delta x g_{ij}^n \tag{22}$$

Donc le schéma devient

$$a u_{ij}^n + b\left(\boldsymbol{u_{i+1,j}^n - 2\Delta x g_{ij}^n} + u_{i+1,j}^n\right) + c\left(u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n\right) = e u_{i,j}^{n-1} + f_{ij}^n \tag{23}$$

C'est-à-dire

$$a u_{ij}^n + 2 u_{i+1,j}^n + c\left(u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n\right) = e u_{i,j}^{n-1} + f_{ij}^n \boldsymbol{- 2b\Delta x g_{ij}^n} \tag{24}$$