Chapitre 3

Modèle de résolution

3.1 Solutions progressives et analytiques de l'équation des ondes

Cette section est inspirée d'un document que m'a transmis Mr Ricchiuto intitulé "Travelling solutions : linear shallow water equations".

Le système formé de (1.74c) et (1.74d) peut être réécrit de façon simple dans Ω_w (sans flotteur) dans une direction $\overrightarrow{d} = [\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}]^T$:

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \mathbf{d_1} \partial_x q_1 + \mathbf{d_2} \partial_y q_2 = 0, & (3.1a) \\ \partial_t q_1 + \mathbf{d_1} c_0^2 \partial_x \zeta = 0, & (3.1b) \\ \partial_t q_2 + \mathbf{d_2} c_0^2 \partial_y \zeta = 0, & (3.1c) \end{cases}$$

avec $c_0^2 = g d_0 = g h_0$. La mise sous forme d'un système est relativement simple

$$\partial_t W + \mathbf{d_1} A \partial_x W + \mathbf{d_2} B \partial_y W = \mathbf{0}, \qquad W = \begin{bmatrix} \zeta \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{3\times 3}}, \text{ et } \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_0^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{3\times 3}} \tag{3.2}$$

Les matrices A et B peuvent être écrites comme suit

$$A = L_A D_A R_A, \quad L_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0} & -\frac{1}{c_0} \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{3\times 2}}, \quad D_A = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & -c_0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}, \quad R_A = \begin{bmatrix} \frac{c_0}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{c_0}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{2\times 3}} \tag{3.3}$$

$$B = L_B D_B R_B, \quad L_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0} & -\frac{1}{c_0} \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{3\times 2}}, \quad D_B = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & -c_0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}, \quad R_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{c_0}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{c_0}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{2\times 3}} \tag{3.4}$$

Introduisons maintenant les variables caractéristiques

$$N^x = \begin{bmatrix} \eta^{+x} \\ \eta^{-x} \end{bmatrix} := R_A W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(q_1 + c_0 \zeta) \\ \frac{1}{2}(q_1 - c_0 \zeta) \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$N^y = \begin{bmatrix} \eta^{+y} \\ \eta^{-y} \end{bmatrix} := R_B W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(q_2 + c_0 \zeta) \\ \frac{1}{2}(q_2 - c_0 \zeta) \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Nous pouvons remarquer que

$$\begin{cases} \zeta = \dfrac{1}{2c_0} \left(\eta^{+x} - \eta^{-x} + \eta^{+y} - \eta^{-y} \right), & (3.7a) \\ q_1 = \eta^{+x} + \eta^{-x}, & (3.7b) \\ q_2 = \eta^{+y} + \eta^{-y}. & (3.7c) \end{cases}$$

Nous obtenons deux caractérisations de W (une dans la direction $\overrightarrow{x}$ et une dans la direction $\overrightarrow{y}$)

$$W^x = L_A N^x \quad \text{et} \quad W^y = L_B N^y. \tag{3.8}$$

Nous pouvons dès lors dégager deux systèmes, l'un en multipliant (3.2) par R_A et en remplaçant W par W^x et l'autre R_B et W^y

$$\begin{cases} \partial_t N^x + \mathbf{d_1}\partial_x D_A N^x + \mathbf{d_2}\partial_y R_A B L_A N^x = 0 & (3.9a) \\ \partial_t N^y + \mathbf{d_1}\partial_x R_B A L_B N^y + \mathbf{d_2}\partial_y D_B N^y = 0 & (3.9b) \end{cases}$$

Or nous avons $R_A B L_A = R_B A L_B = \mathbf{0}$. Nous obtenons donc les systèmes

$$\begin{cases} \left(\partial_t + \overrightarrow{v}^{d_1} \cdot \nabla\right) \eta^{+x} = 0 & (3.10a) \\ \left(\partial_t - \overrightarrow{v}^{d_1} \cdot \nabla\right) \eta^{-x} = 0 & (3.10b) \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\partial_t + \overrightarrow{v}^{d_2} \cdot \nabla\right) \eta^{+y} = 0 & (3.11a) \\ \left(\partial_t - \overrightarrow{v}^{d_2} \cdot \nabla\right) \eta^{-y} = 0 & (3.11b) \end{cases}$$

où $\overrightarrow{v}_{d_1} = (c_0\mathbf{d_1}, 0)^T$ et $\overrightarrow{v}_{d_2} = (0, c_0\mathbf{d_2})^T$. Ainsi nous avons les solutions générales

$$\begin{cases} \eta^{+x}(\overrightarrow{x}, t) = \eta_0^{+x}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_{d_1} t) & (3.12a) \\ \eta^{-x}(\overrightarrow{x}, t) = \eta_0^{-x}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}_{d_1} t) & (3.12b) \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta^{+y}(\overrightarrow{x}, t) = \eta_0^{+y}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_{d_2} t) & (3.13a) \\ \eta^{-y}(\overrightarrow{x}, t) = \eta_0^{-y}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}_{d_2} t) & (3.13b) \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \zeta(\overrightarrow{x}, t) = \dfrac{\eta_0^{+x}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_{d_1} t) - \eta_0^{-x}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}_{d_1} t) + \eta_0^{+y}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_{d_2} t) - \eta_0^{-y}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}_{d_2} t)}{2c_0} & (3.14a) \\ \overrightarrow{q}(\overrightarrow{x}, t) = \begin{bmatrix} \eta_0^{+x}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_{d_1} t) + \eta_0^{-x}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}_{d_1} t) \\ \eta_0^{+y}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_{d_2} t) + \eta_0^{-y}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}_{d_2} t) \end{bmatrix} & (3.14b) \end{cases}$$

Par ailleurs, il est toujours possible d'écrire

$$\overrightarrow{d} = \begin{bmatrix} d_1^+ - d_1^- \\ d_2^+ - d_2^- \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a^+ = \frac{|a| + a}{2} \text{ et } a^- = \frac{|a| - a}{2} \tag{3.15}$$

Ainsi, selon $\overrightarrow{d}$ nous avons

$$\begin{cases} \eta^{+x}(\overrightarrow{x}, t) = \dfrac{d_1^+}{d_1} \eta_0^{+x}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_{d_1} t) & (3.16a) \\ \eta^{-x}(\overrightarrow{x}, t) = \dfrac{d_1^-}{d_1} \eta_0^{-x}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}_{d_1} t) & (3.16b) \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta^{+y}(\overrightarrow{x}, t) = \dfrac{d_2^+}{d_2} \eta_0^{+y}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_{d_2} t) & (3.17a) \\ \eta^{-y}(\overrightarrow{x}, t) = \dfrac{d_2^-}{d_2} \eta_0^{-y}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}_{d_2} t) & (3.17b) \end{cases}$$

Ainsi selon $\overrightarrow{d}$ nous avons une simplification possible. Par exemple prenons $a, b \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{d} = \left[a^2, -b^2\right]^T$ alors

$$\begin{cases} \eta^{+x}(\overrightarrow{x}, t) = \eta_0^{+x}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_{d_1} t) & (3.18a) \\ \eta^{-x}(\overrightarrow{x}, t) = 0 & (3.18b) \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta^{+y}(\overrightarrow{x}, t) = 0 & (3.19a) \\ \eta^{-y}(\overrightarrow{x}, t) = \eta_0^{-y}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}_{d_2} t) & (3.19b) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \eta_0^{-x} \\ \eta_0^{+y} \end{bmatrix} = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{q} = \overrightarrow{c_0}\zeta, \tag{3.20}$$

sous la notation $\overrightarrow{c_0} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$, ainsi

$$\overrightarrow{q}_t = \overrightarrow{c_0}\zeta_t, \quad \text{et} \quad \mathbf{div}\left(\overrightarrow{q}\right) = c_0\partial_x\zeta + c_0\partial_y\zeta \tag{3.21}$$

Ainsi, le système formé par (3.1a)-(3.1c) devient

$$\begin{cases} \zeta_t + c_0\mathbf{d_1}\partial_x\zeta + c_0\mathbf{d_2}\partial_y\zeta = 0 & (3.22a) \\ \zeta_t + c_0\mathbf{d_1}\partial_x\zeta = 0 & (3.22b) \\ \zeta_t + c_0\mathbf{d_2}\partial_y\zeta = 0 & (3.22c) \end{cases}$$