



# La méthode *Shifted Boundary* pour un problème d'ondes linéaire avec zones de congestion

## Rapport de stage

PANNETIER VALENTIN  
sous la direction de MR MARIO RICCHIUTO.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Considérations théoriques pour la surface libre</b>	<b>3</b>
1.1	Les lois de conservation . . . . .	3
1.1.1	La dérivée particulaire ou matérielle . . . . .	3
1.1.2	La conservation de la masse (équation de continuité) . . . . .	3
1.1.3	La conservation de la quantité de mouvement . . . . .	4
1.1.4	La conservation de l'énergie . . . . .	5
1.1.5	Les équations d'Euler . . . . .	6
1.2	L'équation des ondes linéaire . . . . .	7
1.2.1	Présentation du problème . . . . .	7
1.2.2	Équation de la masse moyennée sur la verticale . . . . .	9
1.2.3	La conservation de la quantité de mouvement moyennée sur la verticale . . . . .	10
1.2.4	Système intermédiaire . . . . .	11
1.2.5	Adimensionnement et linéarisation . . . . .	11
1.2.6	La conservation de l'énergie . . . . .	15
1.2.7	Vers l'équation des ondes . . . . .	17
1.3	Couplage des domaines . . . . .	17
1.3.1	L'équation de conservation de la masse . . . . .	18
1.3.2	La continuité de la pression hydrostatique totale . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Considérations théoriques pour le flotteur</b>	<b>19</b>
2.1	Définitions propres au flotteur . . . . .	19
2.2	Inertie et rotations . . . . .	20
2.2.1	Condition d'imperméabilité du flotteur . . . . .	21
2.3	La masse du flotteur . . . . .	21
2.4	Notion de masse et d'inertie ajoutée . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Modèle de résolution</b>	<b>24</b>
3.1	Solutions progressives et analytiques de l'équation des ondes . . . . .	24
3.2	La méthode <i>Shifted Boundary</i> . . . . .	26
3.2.1	Définitions . . . . .	26
3.2.2	Exemple d'application : problème de Poisson sur domaine simple . . . . .	27
3.2.3	Réécriture de l'équation de ondes sous forme variationnelle . . . . .	29
3.3	Éléments P1-Lagrange . . . . .	30
3.3.1	Système dans $\Omega_w$ . . . . .	31
3.3.2	Système dans $\Omega_b$ . . . . .	32
3.3.3	Schéma Newmark . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Soliton</b>	<b>34</b>
	Table des figures	35
	Liste des tableaux	36

<b>Bibliographie</b>	<b>37</b>
<b>A Aide-mémoire</b>	<b>39</b>
A.1 Opérateurs et coordonnées . . . . .	39
A.2 Quantités physique . . . . .	41
<b>B Aide éléments finis</b>	<b>42</b>
B.1 Éléments finis de type Lagrange . . . . .	42
B.1.1 Fonctions de transformation . . . . .	42
B.1.2 Matrice jacobienne, son inverse et son déterminant . . . . .	42
B.1.3 Vecteurs normaux et tangents . . . . .	43
B.1.4 Liste des éléments . . . . .	44
B.2 Quadratures . . . . .	49
B.2.1 Quadrature sur un élément de référence de type ligne . . . . .	49
B.2.2 Quadrature sur un élément de référence de type triangle . . . . .	49

# Chapitre 1

## Considérations théoriques pour la surface libre

### 1.1 Les lois de conservation

Les équations d'Euler sont issues des lois de conservations de certaines quantités physiques importantes, et elles permettent, par exemple, l'étude de la dynamique des gaz ou dans le cas présent l'étude d'écoulement de fluide. Ainsi, dans la suite, nous détaillerons les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale.

#### 1.1.1 La dérivée particulaire ou matérielle

Selon [17], si nous considérons un champ scalaire  $\phi$  dépendant de l'espace et du temps, les variations temporelles de  $\phi$  peuvent être obtenues en regardant les variations par rapport à la vitesse du fluide  $\vec{u}$ . Nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{D\phi}{Dt} = \partial_t \phi + \vec{u} \cdot \nabla \phi \quad (1.1)$$

La quantité  $\frac{D\phi}{Dt}$  désigne la dérivée particulaire de  $\phi$  par rapport au temps  $t$ . Notons que cette relation peut être étendue et appliquée à n'importe quel champ vectoriel  $\vec{w}$ . Posons maintenant

$$\psi(t) := \iiint_V \phi(x, y, z, t) dV \quad (1.2)$$

avec  $\psi$  un champ scalaire et un volume d'intégration  $V$  dont la surface  $A$  est considérée lipschitzienne au moins par morceaux. Et la dérivée particulaire (ou matérielle) de cette fonction est

$$\frac{D\psi}{Dt} = \iiint_V \partial_t \phi dV + \iint_A (\vec{n} \cdot \phi \vec{u}) dA, \quad (1.3)$$

avec  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  le vecteur normal sortant. Cette relation est l'extension de (1.1) à un champ vectoriel  $\vec{\psi}(x, y, z, t)$ . Nous rappelons aussi en annexe la formule de Green (A.2).

#### 1.1.2 La conservation de la masse (équation de continuité)

La loi de conservation de la masse peut maintenant être établie, et la masse  $m(t)$  dans un volume  $V$  peut être exprimée comme

$$m(t) = \iiint_V \rho dV. \quad (1.4)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

La conservation de la masse implique que

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

et donc par (1.3) que

$$\frac{Dm}{Dt} = \iiint_V \partial_t \rho \, dV + \iint_A \vec{n} \cdot \rho \vec{u} \, dA = 0 \quad (1.5)$$

ou encore par (A.2)

$$\iiint_V [\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{u})] \, dV = 0. \quad (1.6)$$

Or le volume  $V$  est purement arbitraire et donc nous obtenons **l'équation de conservation de la masse** suivante

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.7)$$

avec  $\rho$  la masse volumique et  $\vec{u}$  la vitesse du fluide. Remarquons que si  $\rho$  est constante en temps et en espace alors cette équation est réduite à

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (1.8)$$

Cette équation définit ce que nous appellerons **la contrainte d'incompressibilité** pour un fluide incompressible.

### 1.1.3 La conservation de la quantité de mouvement

Passons maintenant à la conservation de la quantité de mouvement  $\vec{p}$ . La quantité de mouvement est exactement

$$\vec{p} = \rho \vec{u}. \quad (1.9)$$

Cela nous conduit donc à poser la fonction suivante

$$\psi(t) = \iiint_V \rho \vec{u} \, dV.$$

D'après la loi de Newton

$$\frac{D\psi}{Dt} = \vec{f}_S + \vec{f}_V, \quad (1.10)$$

où  $\vec{f}_S$  et  $\vec{f}_V$  désignent respectivement les forces surfaciques et volumiques en jeu.

En pratique, selon Toro [17], nous avons

$$\vec{f}_S = \iint_A \vec{n} \cdot S \, dA \quad \vec{f}_V = \iiint_V \rho \vec{g} \, dV. \quad (1.11)$$

avec  $S = -P\mathcal{I} + \Psi$  (voir Toro [17] pour plus de détails) avec  $P$  un terme de pression et  $\Psi$  un terme de forces visqueuses.

Remarquons déjà que  $\vec{p}$  n'est plus un champ scalaire mais un champ vectoriel et cela nous conduit à utiliser la version généralisée de la dérivée particulaire (1.3). Ainsi par (1.10) et (1.3), nous avons

$$\iiint_V \partial_t(\rho \vec{u}) \, dV + \iint_A (\vec{n} \cdot \rho \vec{u}) \vec{u} \, dA = \vec{f}_S + \vec{f}_A \quad (1.12)$$

Par application directe de la formule de Green (A.2), en utilisant la relation (A.3), en remplaçant  $f_S + f_V$  par la relation établie en (1.11) et comme nous intégrons sur un volume  $V$  arbitraire alors l'équation de conservation de la quantité de mouvement est

$$\partial_t (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot [\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P\mathbf{I} - \Psi] = \rho \vec{g} \quad (1.13)$$

Cette relation forme les équations de **Navier-Stokes** pour les fluides compressibles (**NSc**). Dans le cas d'un fluide parfait incompressible non visqueux subissant uniquement des forces de pression  $P$ , nous avons simplement

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \vec{g}. \quad (1.14)$$

Cette équation constitue l'équation de Navier-Stokes incompressible (**NSi**) sans viscosité et avec une masse volumique constante  $\rho \neq 0$ .

### 1.1.4 La conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie totale ( $E_{tot}$ ) au cours du temps peut aussi être exprimée, c'est-à-dire que nous pouvons définir

$$\psi(t) = \iiint_V E_{tot} dV. \quad (1.15)$$

Rappelons qu'une force  $\vec{f}$  produit un travail  $\vec{u} \cdot \vec{f}$  homogène à une énergie (selon Toro [17]). Donc si nous nous référons aux forces établies à (1.11), et si nous rajoutons un effet thermique alors nous pouvons définir

- l'énergie issue des forces de pression et de viscosité :

$$E_{surf} = \iint_A P (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA + \iint_A \vec{u} \cdot (\vec{n} \cdot \Psi) dA, \quad (1.16a)$$

- l'énergie issue du poids :

$$E_{volu} = \iiint_V \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}) dV, \quad (1.16b)$$

- le flux d'énergie  $\vec{Q}$  (ici considéré comme un flux thermique) qui traverse la surface  $A$  :

$$E_{infl} = - \iint_A \vec{n} \cdot \vec{Q} dA. \quad (1.16c)$$

Nous avons donc, toujours par application de la loi de Newton,

$$\frac{D\psi}{Dt} = E_{surf} + E_{volu} + E_{infl}. \quad (1.17)$$

Sous forme détaillée, selon Toro [17], nous obtenons

$$\begin{aligned} & \iiint_V \partial_t E_{tot} dV + \iint_A \vec{n} \cdot E_{tot} \vec{u} dA = \\ & \iint_A P (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA + \iint_A \vec{u} \cdot (\vec{n} \cdot \Psi) dA + \iiint_V \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}) dV - \iint_A \vec{n} \cdot \vec{Q} dA. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Grâce à la formule de Green (A.2), et comme nous intégrons sur un volume  $V$  purement arbitraire, nous avons **l'équation de conservation de l'énergie totale**

$$\partial_t E_{tot} + \mathbf{div}((E_{tot} + P) \vec{u} - \vec{u} \cdot \Psi + Q) = \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}). \quad (1.19)$$

Dans le cas d'un fluide parfait incompressible sans viscosité subissant un échange adiabatique<sup>a</sup> nous avons simplement que

$$\partial_t E_{tot} + \mathbf{div}((E_{tot} + P) \vec{u}) = \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}). \quad (1.20)$$

<sup>a</sup>. sans transfert thermique.

### 1.1.5 Les équations d'Euler

#### Fluide compressible

Les équations d'Euler pour un fluide compressible ne sont ni plus ni moins que le regroupement des équations de conservation de la masse (1.7), de la quantité de mouvement (NSc sans le terme de viscosité) (1.13) et de l'énergie totale (1.19) dans le cadre d'un fluide parfait compressible sans viscosité et qui subit une transformation adiabatique.

Nous pouvons donc les regrouper sous la forme d'un système comme suit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{div}(\rho \vec{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \vec{u}) + \mathbf{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P \mathbf{I}) = \rho \vec{g}, \\ \partial_t E_{tot} + \mathbf{div}((E_{tot} + P) \vec{u}) = \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}). \end{cases} \quad (1.21a)$$

En notant  $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ , nous avons

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_{tot} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_{tot} + P) u \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ (E_{tot} + P) v \end{bmatrix}_y + \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + P \\ (E_{tot} + P) w \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}) \end{bmatrix} \quad (1.21b)$$

#### Fluide incompressible

Les équations d'Euler incompressible (pour le même fluide mais cette fois-ci incompressible) sont quant à elles les équations de conservation citées ci-dessus mais avec une masse volumique  $\rho \neq 0$  constante en temps et en espace. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement est donc exactement (1.14).

Nous obtenons donc le système suivant

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \vec{g}, \\ \partial_t E_{tot} + \mathbf{div}((E_{tot} + P) \vec{u}) = \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}). \end{cases} \quad (1.22a)$$

## 1.2 L'équation des ondes linéaire

### 1.2.1 Présentation du problème

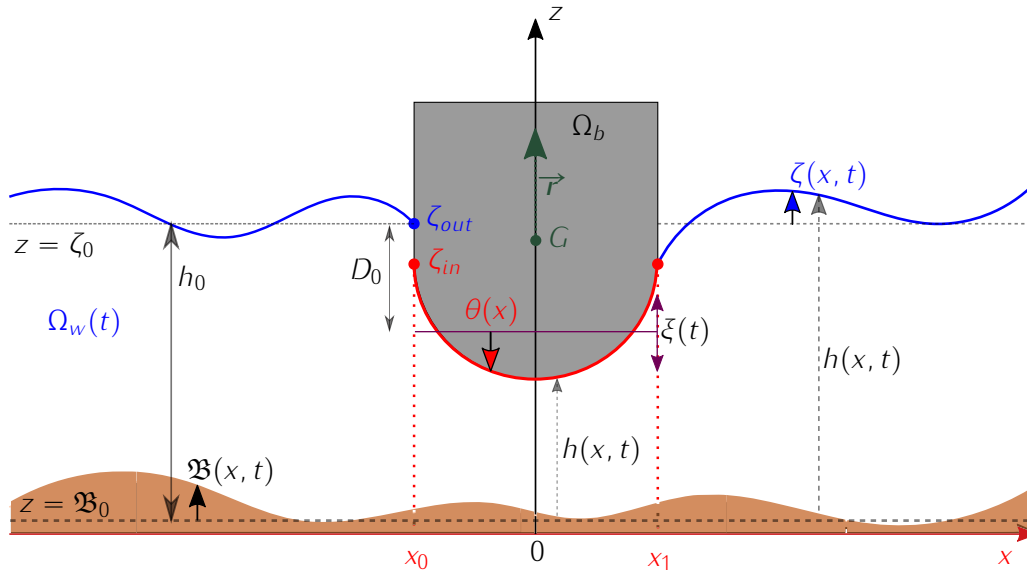


FIGURE 1.1 – Modèle 1D bathymétrique avec flotteur.

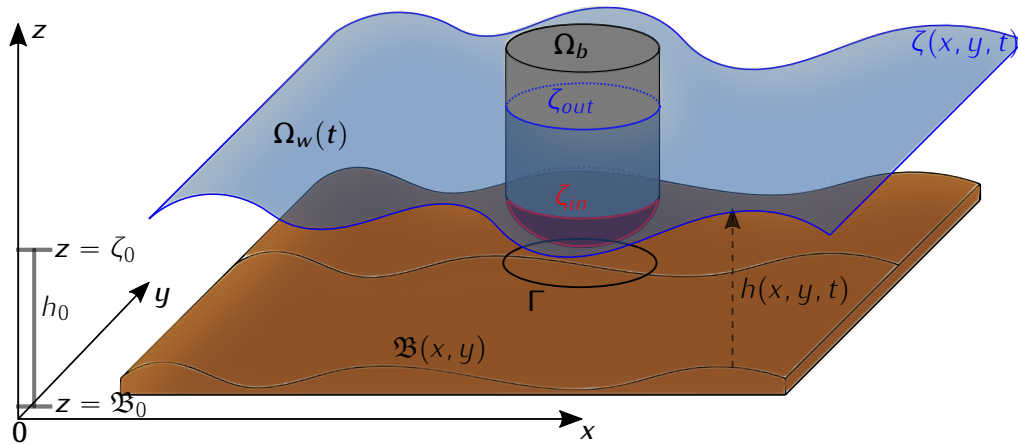


FIGURE 1.2 – Modèle 2D bathymétrique avec flotteur.

L'étude de ce problème 3D, sur un domaine  $\Omega_f$  est réduite à du 2D en intégrant les équations obtenues selon l'axe  $z$ , et le domaine doit être divisé en deux parties distinctes mais qui doivent être **couplées** :

- une surface libre référencée par  $w$  pour *water* sur un domaine  $\Omega_w := \Omega_f \setminus \Omega_b$  définissant la *domaine extérieur*, et
- le flotteur, corps flottant sur la surface libre (fixé ou non), référencé par  $b$  pour *body*, et nous définissons la *domaine intérieur*  $\Omega_b$  représentant la *position* de ce corps.
- La frontière partagée par  $\Omega_b$  et  $\Omega_w$  est dénotée  $\Gamma$  communément appelée *ligne de contact*.

Nous avons ainsi par décomposition du domaine

$$\Omega_f := \Omega_b \cup \Omega_w.$$



### Domaine surface libre

Dans  $\Omega_w$ , nous notons aussi

- $\zeta_0$ ,  $\mathfrak{B}_0$  et  $h_0 = \zeta_0 - \mathfrak{B}_0$  des constantes positives qui représentent la coordonnée  $z$  (axe  $z$  croissant) respectivement de la surface libre à un état stationnaire, du fond moyenné et de la hauteur d'eau moyenne dans un état stationnaire,
- $\zeta$  l'amplitude de la perturbation verticale de la surface libre par rapport à  $z = \zeta_0$  ( $\zeta$  étant par hypothèse négligeable devant  $\zeta_0$ ),
- $\mathfrak{B}$  l'amplitude de la perturbation verticale du fond par rapport à  $\mathfrak{B}_0$  ( $\mathfrak{B}$  étant par hypothèse négligeable devant  $\mathfrak{B}_0$ ), et
- la hauteur totale  $h(x, t)$  de la surface libre dans  $\Omega_w$  depuis le fond  $\mathfrak{B}$ , de sorte que

$$h(x, y, t) = h_0 + \zeta(x, y, t) - \mathfrak{B}(x, y)$$

### Domaine flotteur

Dans  $\Omega_b$  nous introduisons les quantités suivantes

- $D_0$  une constante positive qui représente le saut de hauteur caractéristique d'une colonne de fluide entre  $\Omega_w$  et  $\Omega_b$ , la constante complémentaire  $d_0$  de hauteur caractéristique sous le flotteur telle que  $d_0 = h_0 - D_0$ , et la constante  $\zeta_0$  liée à la bathymétrie telle que  $\zeta_0 = d_0 + \mathfrak{B}_0$ ,
- $\xi$  une fonction dépendant uniquement du temps qui représente la variation de hauteur moyenne du fluide sous la partie immergée du flotteur en fonction du temps  $t$  par rapport à  $z = \zeta_0$ ,
- $\theta$  l'amplitude de la perturbation verticale de la hauteur du fluide sous le flotteur en coordonnées spatiales par rapport à  $z = \xi$  à  $t$  fixé,
- $\zeta(x, y, t) := \xi(t) + \theta(x, y)$  l'amplitude de la perturbation verticale de la hauteur moyenne du fluide sous la partie immergée du flotteur par rapport à la hauteur  $d_0$  (notation empruntée à Bosi [2]),
- la hauteur totale de  $h(x, t)$  de la colonne de fluide sous le flotteur dans  $\Omega_b$  depuis le fond  $\mathfrak{B}$  de sorte que

$$h(x, y, t) = d_0 + \zeta(x, y, t) - \mathfrak{B}(x, y)$$

Nous pouvons dès lors uniformiser la définition de la hauteur  $h$  dans les deux domaines telle que

$$h(x, y, t) = d_0 + \zeta(x, y, t) - \mathfrak{B}(x, y), \quad \text{avec } d_0 = h_0 - \mathbf{1}_{\Omega_b} D_0. \quad (1.23)$$

La surface  $\mathbf{S}$  est à

$$z = \mathbf{S}(x, y, t) = \zeta_0 + \zeta(x, y, t), \quad (1.24)$$

et le fond  $\mathbf{B}$  est à

$$z = \mathbf{B}(x, y) = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}(x, y). \quad (1.25)$$

Faisons une remarque importante concernant la dérivée temporelle de  $h$

$$h_t = \zeta_t \stackrel{\text{dans } \Omega_b}{=} \xi'. \quad (1.26)$$

### Conditions au fond et à la surface

En premier lieu deux conditions d'imperméabilité essentielles aux bords sont à exhiber dans  $\Omega_w$  et dans  $\Omega_b$ , comme le rappelle Pons [15].

Pour cela rappelons que le vecteur vitesse  $\vec{u}$  dans le repère cartésien est formé respectivement de  $u$ ,  $v$ , et  $w$  et que pour toute fonction  $\phi$  ne dépendant pas de  $z$  nous avons  $\partial_z \phi = 0$ . La notation  $\phi(z = \dots)$  désignera dans la suite l'évaluation de  $\phi$  en  $z = \dots$ .

- En  $z = S(x, y, t) = \zeta_0 + \zeta(x, y, t)$  :
  - *une particule en surface reste en surface*. Ce qui correspond à une vitesse verticale nulle pour une particule de fluide en tout point de la surface :

$$\left. \frac{D(S - z)}{Dt} \right|_{z=S} = \partial_t(S - z) + \vec{u} \cdot \nabla(S - z)|_{z=S} = 0$$

c'est-à-dire

$$w(z = S) = \zeta_t + u(z = S)\zeta_x + v(z = S)\zeta_y \quad (1.27)$$

- La pression  $\underline{P}_w$  à la surface dans  $\Omega_w$  est normalement la pression atmosphérique  $P_{atm}$ , mais au prix d'une translation, nous pourrions aisément considérer que  $P_{atm} = 0$ . Il suit donc, pour le moment, que

$$P(z = S) = \underline{P}_w = P_{atm} \quad \text{dans } \Omega_w. \quad (1.28)$$

- La pression à la surface contre le flotteur dans  $\Omega_b$  est une inconnue du système final : nous la notons  $\rho\Pi$ . Nous avons donc dans  $\Omega_b$

$$P(z = S) = \underline{P}_b = \rho\Pi \quad \text{dans } \Omega_b. \quad (1.29)$$

- Nous formaliserons la pression totale comme  $P$ , avec dans  $\Omega_f$

- La pression à la surface  $S$  :

$$P(z = S) = \underline{P} = \begin{cases} \underline{P}_w = P_{atm} & \text{dans } \Omega_w, \\ \underline{P}_b = \rho\Pi & \text{dans } \Omega_b. \end{cases} \quad (1.30)$$

- La pression au fond  $B$  est

$$P(z = B) = \underline{\underline{P}} = \begin{cases} \underline{\underline{P}}_w & \text{dans } \Omega_w, \\ \underline{\underline{P}}_b & \text{dans } \Omega_b. \end{cases} \quad (1.31)$$

- En  $z = B(x, y) = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}(x, y)$  qui correspond au fond, nous avons une condition d'imperméabilité de celui-ci (supposé ici non dépendant du temps)

$$\left. \frac{D(B - z)}{Dt} \right|_{z=B} = 0$$

c'est-à-dire

$$w(z = B) = u(z = B)\mathfrak{B}_x + v(z = B)\mathfrak{B}_y. \quad (1.32)$$

qui est pratiquement la même formule que (1.27) bien que  $B$  ne dépende pas de la coordonnée temporelle.

### 1.2.2 Équation de la masse moyennée sur la verticale

Dans cette sous-section nous allons moyenner les équations obtenues précédemment sur la hauteur du fluide, pour cela nous définissons la moyenne d'une quantité  $f$  selon la hauteur d'eau  $h$  en tant que

$$\bar{f}(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_B^S f(x, y, t) dz$$

et nous rappelons par ailleurs le théorème de Leibniz en annexe (formule (A.6)) qui permet entre autres de réécrire certaines intégrales de dérivée.

Un fluide incompressible est caractérisé par la relation (1.8) et nous avons donc une formulation simple de contrainte pour l'équation de conservation de la masse.

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = u_x + v_y + w_z = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (1.33)$$

En intégrant cette équation selon la hauteur d'eau  $h$ , nous obtenons

$$\int_B^S u_x + v_y dz = - \int_B^S w_z dz = \underbrace{w(z=B)}_{\text{fond}} - \underbrace{w(z=S)}_{\text{surface}} \quad (1.34)$$

$$\stackrel{(A.6) \& (1.27) \& (1.32)}{\implies} S_t + (h\bar{u})_x + (h\bar{v})_y = 0. \quad (1.35)$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'équation de masse moyennée sur la verticale selon Pons [15] en remplaçant les variables génériques et en utilisant l'identité sur la dérivée temporelle (1.26)

$$h_t + (h\bar{u})_x + (h\bar{v})_y = 0. \quad (1.36)$$

Rappelons que  $\bar{\vec{u}}$  désigne la moyenne des vitesses horizontales selon la hauteur d'eau.

### 1.2.3 La conservation de la quantité de mouvement moyennée sur la verticale

L'équation de conservation de la masse demande quant à elle un peu plus de travail, reprenons (1.14)

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P.$$

avec  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  où  $g$  est la constante d'accélération gravitationnelle.

Selon Pons [15], il est possible d'appliquer la même démarche ici, de sorte à exprimer l'équation de conservation de la quantité de mouvement moyennée selon  $h$ .

Selon l'axe  $x$ , l'équation (1.14) devient

$$\underbrace{\int_b^S u_t dz}_{=:I_1} + \underbrace{\int_b^S uu_x dz}_{=:I_2} + \underbrace{\int_b^S vu_y dz}_{=:I_3} + \underbrace{\int_b^S wu_z dz}_{=:I_4} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\int_b^S P_x dz}_{=:I_5} \quad (1.37)$$

Nous utiliserons dans la suite la définition de la moyenne d'une quantité selon la hauteur  $h$ , et les conditions d'imperméabilité de surface (1.27) et de fond (1.32).

Ainsi nous avons

$$I_1 \stackrel{(A.6)}{=} (h\bar{u})_t - \underbrace{u(z=S)S_t + u(z=B)B_t}_{=0}.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 + I_4 &\stackrel{\text{IPP}}{=} [uv]_B^S + [uw]_B^S + 2 \int_B^S uu_x dz - \int_B^S u \underbrace{(u_x + v_y + w_z)}_{=\operatorname{div}(\vec{u})=0} dz \\ &= [uv]_B^S + [uw]_B^S + \left(h\bar{u}^2\right)_x - u^2(z=S)S_x + u^2(z=B)B_x, \\ (\text{cond. imp} \& (A.6) \implies) &= \left(h\bar{u}^2\right)_x + (h\bar{u}\bar{v})_y + u(z=S)S_t - \underbrace{u(z=B)B_t}_{=0} \end{aligned}$$

Finalement nous avons aussi

$$I_5 \stackrel{(A.6)}{=} (h\bar{P})_x - \underline{P}S_x + \underline{P}B_x$$

Ceci conduisant à

$$(h\bar{u})_t + (h\bar{u}^2)_x + (h\bar{u}\bar{v})_y = -\frac{1}{\rho} ((h\bar{P})_x - \underline{P}S_x + \underline{P}B_x) \quad (1.38)$$

Selon l'axe  $y$ , l'équation (1.14) devient

$$\int_B^S v_t dz + \int_B^S uv_x dz + \int_B^S vv_y dz + \int_B^S ww_z dz = -\frac{1}{\rho} \int_B^S P_y dz \quad (1.39)$$

La démarche de calcul étant très similaire au point précédent, nous obtenons

$$(h\bar{v})_t + (h\bar{u}\bar{v})_x + (h\bar{v}^2)_y = -\frac{1}{\rho} ((h\bar{P})_y - \underline{P}S_y + \underline{P}B_y) \quad (1.40)$$

Selon l'axe  $z$ , l'équation (1.14) devient

$$-P_z = \rho (g + w_t + uw_x + vw_y + ww_z) \quad (1.41)$$

ce qui, en intégrant jusqu'à la surface  $S$ , conduit à

$$P(z) = \rho g(S - z) + \rho \int_z^S w_t + uw_x + vw_y + ww_z dz + \underline{P}. \quad (1.42)$$

### 1.2.4 Système intermédiaire

Après remplacement des termes de pression grâce à (1.30) et en remplaçant les termes génériques de surface et de fond nous obtenons un système :

$$\begin{cases} u_x + v_y + w_z = 0 & (1.43a) \\ h_t + (h\bar{u})_x + (h\bar{v})_y = 0 & (1.43b) \\ (h\bar{u})_t + \left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{\rho}h\bar{P}\right)_x + (h\bar{u}\bar{v})_y = \frac{1}{\rho}\underline{P}\zeta_x - \frac{1}{\rho}\underline{P}\mathfrak{B}_x & (1.43c) \\ (h\bar{u})_t + (h\bar{u}\bar{v})_x + \left(h\bar{v}^2 + \frac{1}{\rho}h\bar{P}\right)_y = \frac{1}{\rho}\underline{P}\zeta_y - \frac{1}{\rho}\underline{P}\mathfrak{B}_y & (1.43d) \\ P(z) = \rho g(\zeta_0 + \zeta - z) + \rho \int_z^{\zeta_0 + \zeta} w_t + uw_x + vw_y + ww_z dz + \underline{P} & (1.43e) \end{cases} \quad (1.43f)$$

qui, selon (1.27) donne que  $\underline{P}$  est soit  $P_{atm} = 0$ , soit une inconnue  $\rho\Gamma$ . De plus il faut faire attention, car  $h$  dépend de  $d_0$  qui dépend elle-même d'une indicatrice !

### 1.2.5 Adimensionnement et linéarisation

Comme dans la thèse de Pons [15], nous allons introduire maintenant une condition d'irrotationnalité du fluide à ajouter au système précédent. Nous avons donc

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (1.44)$$

Cette condition empêche notamment la formation de tourbillon et comme il est précisé dans Pons [15] elle est peu restrictive en dehors des zones de déferlement ou à fort cisaillement.

En prévision de l'adimensionnement, nous considérons une onde plane se déplaçant le long de l'axe  $\vec{x} + \vec{y}$ .

Nous définissons plusieurs paramètres : dans le but d'uniformiser la linéarisation sur les deux domaines nous considérerons que  $d_0 \propto h_0$ .

- Le paramètre de **dispersion**  $\mu$

$$\mu = \kappa d_0, \quad \text{avec } \kappa = \frac{1}{\lambda} \text{ et donc } \mu = \frac{d_0}{\lambda} \quad (1.45)$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde et  $\kappa$  le nombre d'onde par unité de longueur. Selon Bosi [2] et Pons [15], pour les longues vagues le paramètre  $\mu$  est petit.

- Le paramètre de **non-linéarité**  $\varepsilon$  de la surface libre

$$\varepsilon = \frac{A}{d_0} \quad (1.46)$$

avec  $A$  l'amplitude de l'onde. Dans Bosi [2] il est aussi précisé que dans les modèles complètement non-linéaires  $\varepsilon \approx 1$  et que nous avons un modèle faiblement non-linéaire sous l'hypothèse suivante

$$\varepsilon \approx \mu^2 < 1. \quad (1.47)$$

- Et le paramètre de **non-linéarité**  $\beta$  de bathymétrie

$$\beta = \frac{\mathfrak{B}_0}{d_0}. \quad (1.48)$$

- La célérité caractéristique de l'écoulement

$$c_0 = \sqrt{g d_0}. \quad (1.49)$$

Nous définissons aussi les variables adimensionnelles (dénotées par  $\cdot^*$ ) suivantes

- La variable temporelle :  $t = \frac{\lambda}{c_0} t^*$ .
- Les variables d'espace :  $x = \lambda x^*$ ,  $y = \lambda y^*$  et  $z = d_0 z^*$ .
- Les vitesses :  $u = c_0 \varepsilon u^*$ ,  $v = c_0 \varepsilon v^*$  et  $w = c_0 \varepsilon \mu w^*$ .
- Les perturbations verticales :  $\zeta = \varepsilon d_0 \zeta^*$  et  $\mathfrak{B} = \beta d_0 \mathfrak{B}^*$
- Les hauteurs :  $h = d_0 h^*$ ,  $D_0 = d_0 D_0^*$  et  $d_0 = d_0 d_0^*$
- Les pressions :  $P = \varepsilon \rho c_0^2 P^* + P_{atm}$ ,  $\underline{P} = \varepsilon \rho c_0^2 \underline{P}^*$  et  $\underline{\underline{P}} = \varepsilon \rho c_0^2 \underline{\underline{P}}^*$ .
- Les positions :  $S = d_0 S^*$  et  $B = d_0 B^*$

Nous pouvons exhiber

$$d_0^* = 1, \quad (1.50a)$$

$$S^* = 1 + \beta + \varepsilon \zeta^*, \quad (1.50b)$$

$$B^* = \beta (1 + \mathfrak{B}^*), \quad (1.50c)$$

$$h^* = S^* - B^* = 1 + \varepsilon \zeta^* - \beta \mathfrak{B}^*. \quad (1.50d)$$

Nous pouvons aussi remarquer que

$$h^* \approx 1 + \mathcal{O}(\varepsilon, \beta), \quad S^* \approx 1 + \mathcal{O}(\varepsilon, \beta), \quad \text{et} \quad B^* \approx \mathcal{O}(\beta).$$

Dans la suite nous noterons

$$\underline{\underline{P}}^* := P^*(z^* = B^*) = P^*(z^* = \beta(1 + \mathfrak{B}^*)). \quad (1.51)$$

Aussi nous retrouvons la translation évoquée à (1.28) telle que

$$\underline{P}_w^* = 0 \quad \text{et} \quad \underline{P}_b^* = \frac{\rho \Pi - P_{atm}}{\varepsilon \rho c_0^2}.$$

L'adimensionnement qui est fait en suivant est détaillé entièrement dans Pons [15] et dans Bosi [2]. Pour plus de lisibilité la notation " $\cdot^*$ " est omise.

## Réécriture des systèmes

- La contrainte d'irrotationnalité (1.44) :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \mu^2 w_y - v_z \\ u_z - \mu^2 w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = 0 \quad (1.52)$$

- La contrainte d'incompressibilité (1.43a) ne change pas :

$$u_x + v_y + w_z = 0$$

- L'équation de flux massique (1.43b) :

$$\varepsilon \mu \zeta_t + \varepsilon \mu (h\bar{u})_x + \varepsilon \mu (h\bar{v})_y = 0 \quad (1.53)$$

- L'équation de quantité de mouvement selon l'axe  $x$  (1.43c) :

$$\varepsilon \mu (h\bar{u})_t + \varepsilon \mu (h\bar{P})_x + \varepsilon \mu \beta \underline{\underline{P}}_{\mathfrak{B}x} - \varepsilon^2 \mu \underline{P} \zeta_x = -\varepsilon^2 \mu \left[ (h\bar{u}^2)_x + (h\bar{u}\bar{v})_y \right] \quad (1.54)$$

- L'équation de quantité de mouvement selon l'axe  $y$  (1.43d) :

$$\varepsilon \mu (h\bar{v})_t + \varepsilon \mu (h\bar{P})_y + \varepsilon \mu \beta \underline{\underline{P}}_{\mathfrak{B}y} - \varepsilon^2 \mu \underline{P} \zeta_y = -\varepsilon^2 \mu \left[ (h\bar{u}\bar{v})_x + (h\bar{v}^2)_y \right] \quad (1.55)$$

- La pression (1.43e) où la surface est formalisée à  $z = S$  (attention ce ne sont que des variables adimensionnelles) :

$$P(z) = \frac{1}{\varepsilon} (S - z) + \mu^2 \int_z^S w_t dz + \varepsilon \mu^2 \int_z^S u w_x + v w_y + w w_z dz + \underline{P} \quad (1.56)$$

où le facteur  $\varepsilon \rho c_0^2$  présent dans la pression adimensionnée est omis.

Supposons maintenant **le modèle non-dispersif**, c'est-à-dire que nous négligeons tous les termes en  $\mathcal{O}(\mu^2)$ . Ce qui implique notamment que la pression adimensionnée s'écrit comme

$$P(z) = \frac{1}{\varepsilon} (S - z) + \underline{P} \quad (1.57)$$

et que **les vitesses dérivées verticalement sont nulles**  $v_z = u_z = v_x - u_y = 0$  faisant disparaître du même coup la vitesse verticale  $w$  de toutes les équations. Nous prendrons donc  $w \equiv 0$  à partir de maintenant.

## Expression des vitesses horizontales

Pour la vitesse  $u$  selon l'axe  $x$  nous partons de l'identité  $u_z = 0$  qui intégrée entre le fond et une hauteur donnée  $z$  nous donne que

$$u(x, y, z, t) \approx u(x, y, z = B, t) + \mathcal{O}(\mu^2). \quad (1.58)$$

Ce calcul est détaillé dans Pons [15] et Bosi [2] notamment.

Rappelons que nous voulons un modèle non-dispersif, ainsi la vitesse moyennée selon la verticale devient

$$\frac{1}{h} \int_B^S u dz = \bar{u}(x, y, z, t) \approx u(x, y, z = B, t) + \mathcal{O}(\mu^2). \quad (1.59)$$

Ainsi nous pouvons redéfinir la vitesse  $u$  comme une fonction dépendant uniquement de  $(x, y, t)$ . Avec une procédure similaire il en va de même pour la vitesse  $v$  selon l'axe  $y$ . Nous avons à remplacer

$$\bar{u}(x, y, \cdot, t) = u(x, y, t) \quad \text{et} \quad \bar{v}(x, y, \cdot, t) = v(x, y, t) \quad (1.60)$$

Regardons maintenant de plus près les termes  $\bar{u}^2$  et  $\bar{v}^2$ . Une procédure détaillée est disponible dans Pons [15] pour des modèles dispersifs plus généraux. Il suffit, entre autres, de calculer les intégrales en remplaçant  $u$  et  $v$  par leurs expressions en  $z = \mathcal{B}$  pour obtenir que

$$\bar{u}^2 \approx \bar{u}^2 + \mathcal{O}(\mu^2), \quad \text{et} \quad \bar{v}^2 \approx \bar{v}^2 + \mathcal{O}(\mu^2). \quad (1.61)$$

Sous l'hypothèse d'un modèle non-dispersif, comme nous le souhaitons, il en va que ces quantités sont assimilées entre elles.

### La pression adimensionnée moyennée selon la verticale

Comme nous avons négligé la vitesse verticalement, nous avons obtenu que la pression adimensionnée s'écrit comme

$$P(z) = \frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{S} - z) + \underline{P}.$$

Nous obtenons après calculs rapides

$$h\bar{P} = \frac{1}{2\varepsilon}h^2 + h\underline{P}. \quad (1.62)$$

Et nous avons

$$\underline{\underline{P}} = \frac{1}{\varepsilon}h + \underline{P}. \quad (1.63)$$

### Réécriture de l'équation de la quantité de mouvement

De par les conclusions précédentes : la nouvelle formulation des vitesses verticales, la pression, la pression moyennée, l'équation de quantités de mouvement formée par (1.54) et (1.55), et sous l'hypothèse d'un modèle non-dispersif nous avons

$$\varepsilon\mu(h\vec{u})_t + \mu h \nabla h + \varepsilon\mu \nabla(h\underline{P}) + \mu\beta h \nabla \mathfrak{B} + \varepsilon\mu\beta \underline{P} \nabla \mathfrak{B} = \varepsilon^2\mu \underline{P} \nabla \zeta - \varepsilon^2\mu \nabla \cdot (h\vec{u} \otimes \vec{u}) \quad (1.64)$$

qui, développé, peut être facilement réduit en revenant à la définition de  $h^*$  comme

$$\varepsilon\mu(h\vec{u})_t + \mu h \nabla(\varepsilon\zeta) + \mu\varepsilon h \nabla \underline{P} = \mathcal{O}(\varepsilon^2\mu) \quad (1.65)$$

En développant les termes  $h$  (variable  $h^*$  en pratique), nous obtenons

$$\varepsilon\mu(h\vec{u})_t + \mu d_0 \nabla(\varepsilon\zeta + \varepsilon\underline{P}) = \mathcal{O}(\varepsilon^2\mu, \varepsilon\mu\beta) \quad (1.66)$$

Comme nous souhaitons **un modèle linéaire**, à partir de maintenant nous négligerons les **termes non-linéaires** : c'est-à-dire tous ceux présents dans  $\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha_1}\beta^{\alpha_2}) \quad \forall \alpha_1 + \alpha_2 > 1$ .

Par ailleurs, nous avons, en variables adimensionnelles

$$P(z) = \frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{S} - z) + \underline{P} = \mathcal{P} - \frac{1}{\varepsilon}z \quad (1.67)$$

avec  $\mathcal{P}$  la pression dynamique telle que

$$\mathcal{P} = \frac{d_0}{\varepsilon} + \frac{\beta}{\varepsilon} + \zeta + \underline{P} \quad (1.68)$$

### Modèle non-dispersif linéaire adimensionné

Nous obtenons ainsi le modèle linéaire non-dispersif adimensionné en 2D suivant

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0, & (\text{Cont. incompressible}) & (1.69a) \\ v_x - u_y = 0, & (\text{Cont. irrotationnel}) & (1.69b) \\ \varepsilon\mu\zeta_t + \varepsilon\mu\operatorname{div}(h\vec{u}) = 0, & (\text{Cons. de la masse}) & (1.69c) \\ \varepsilon\mu(h\vec{u})_t + \mu d_0 \nabla(\varepsilon\zeta + \varepsilon\underline{P}) = \vec{0}. & (\text{Cons. du flux de masse}) & (1.69d) \end{cases}$$

où les ".\*" sont omis. Attention ici  $d_0^* = 1$ .

### Modèle non-dispersif linéaire dimensionné

Rappelons par ailleurs que  $d_0 = h_0 - \mathbb{1}_{\Omega_b} D_0$  et que la pression totale  $P$  à une profondeur  $z$  est donnée par

$$P(z) = \rho g (\zeta_0 - z) + \mathcal{P}. \quad (1.70)$$

où la pression hydrodynamique  $\mathcal{P}$  est

$$\mathcal{P} = \rho g \zeta + \underline{P} \quad (1.71)$$

et  $-\rho g z$  est la pression hydrostatique. Conduisant à

$$\underline{\underline{P}} = \rho g h + \underline{P} \quad (1.72)$$

représentant la pression totale du fond jusqu'à la surface.

Remarquons que dans  $\mathbb{R}^2$ , nous avons l'égalité suivante

$$\nabla P = \nabla \mathcal{P} = \nabla (\rho g \zeta + \underline{P}) \quad (1.73)$$

Ainsi, ce système en variables dimensionnelles est

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0, & (\text{Cont. incompressible}) & (1.74a) \\ v_x - u_y = 0, & (\text{Cont. irrotationnel}) & (1.74b) \\ \zeta_t + \operatorname{div}(\vec{q}) = 0, & (\text{Cons. de la masse}) & (1.74c) \\ \vec{q}_t + \frac{d_0}{\rho} \nabla \mathcal{P} = \vec{0}. & (\text{Cons. du flux de masse}) & (1.74d) \end{cases}$$

avec la notation  $\vec{q} = h\vec{u}$ .

Remarquons qu'en l'absence de flotteur ces équations forment les **équations de Saint-Venant linéaires** (valable ici dans  $\Omega_w$ ).

D'autre part, si nous avons pris en compte en plus les terme non-linéaires, alors nous aurions simplement en reprenant les calculs

$$\begin{cases} h_t + \operatorname{div} \vec{q} = 0, & (1.75a) \\ \vec{q}_t + \operatorname{div}(\vec{q} \otimes \vec{u}) + \frac{h}{\rho} \nabla \mathcal{P} = \vec{0}. & (1.75b) \end{cases}$$

qui forment les **équations de Saint-Venant non-linéaires** en l'absence de flotteur.

#### 1.2.6 La conservation de l'énergie

Conformément à Bosi [2], multiplions le système formé par [(1.75a),(1.75b)] par le vecteur

$$V = [\mathcal{P} - \kappa, \quad \rho \vec{u} \cdot] \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 \quad \text{l'énergie cinétique volumique,}$$



et sommons les deux équations obtenues. Regardons dans un premier temps la somme des dérivées temporelles,

$$(\mathcal{P} - \kappa) h_t + \rho \vec{u} \cdot \vec{q}_t = \mathcal{P} h_t + \kappa h_t + h \kappa_t = \mathcal{P} h_t + (h \kappa)_t.$$

Nous avons aussi grâce à (1.71)

$$\mathcal{P} \zeta_t = \left( \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 \right)_t + \underline{P} \zeta_t \quad (1.76)$$

Dans un second temps, regardons la somme des dérivées spatiales,

$$\begin{aligned} & (\mathcal{P} - \kappa) \operatorname{div}(\vec{q}) + \rho \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\vec{q} \otimes \vec{u}) + \vec{q} \cdot \nabla \mathcal{P} \\ & \stackrel{(A.4)}{=} \operatorname{div}(\vec{q} \mathcal{P}) + \kappa \operatorname{div}(\vec{q}) + \rho \vec{q} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \\ & \stackrel{(A.5) \stackrel{\text{eq}}{(1.44)}}{=} \operatorname{div}(\vec{q} \mathcal{P}) + \kappa \operatorname{div}(\vec{q}) + \vec{q} \cdot \nabla \kappa \\ & = \operatorname{div}(\vec{q} (\mathcal{P} + \kappa)) \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons l'équation de conservation de l'énergie

$$E_t + \operatorname{div}(F) = -\mathcal{W} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 + h \kappa \\ F = \vec{q} (\mathcal{P} + \kappa) \\ \mathcal{W} = \underline{P} \zeta_t \end{cases} \quad (1.77)$$

Remarquons que le terme  $\mathcal{W}$  désigne la puissance échangée entre le fluide et le flotteur.

De plus, selon Bosi [2], lorsque  $\Pi$  et  $\mathcal{W}$  sont nuls, nous retrouvons l'équation de conservation de l'énergie classique pour un problème de Shallow-Water dans  $\Omega_w$ .

Regardons maintenant l'équation de conservation de l'énergie linéarisée. Sous les définitions des variables adimensionnelles nous avons

$$\vec{q} = d_0 c_0 \varepsilon \vec{q}^* \quad \text{et} \quad \kappa = c_0^2 \varepsilon^2 \kappa^*.$$

Conduisant à

$$\partial_t E = \frac{c_0^3 d_0 \varepsilon^2}{\lambda} \partial_{t^*} E^* = \frac{c_0^3 d_0 \varepsilon^2}{\lambda} \partial_{t^*} \left( \frac{1}{2} \rho \zeta^{*2} + h^* \kappa^* \right) \quad (1.78)$$

$$\operatorname{div}(F) = \frac{c_0^3 \varepsilon^2 \rho d_0}{\lambda} \operatorname{div}(\vec{q}^* \mathcal{P}^*) + \frac{c_0^3 \varepsilon^3 d_0}{\lambda} \operatorname{div}(\vec{q}^* \kappa^*) \quad (1.79)$$

$$\mathcal{W} = \frac{c_0^3 \varepsilon^2 d_0 \rho}{\lambda} \mathcal{W}^* \quad (1.80)$$

qui réécrit en omettant le  $\cdot^*$  et en divisant par  $c_0^3 \varepsilon$  conduit à

$$\varepsilon \mu \partial_t \left( \frac{1}{2} \rho \zeta^2 + h \kappa \right) + \varepsilon \mu \rho \operatorname{div}(\vec{q} \mathcal{P}) + \varepsilon^2 \mu \operatorname{div}(\vec{q} \kappa) = -\varepsilon \mu \rho \mathcal{W} \quad (1.81)$$

ce qui sous l'approximation de linéarité nous donne

$$\varepsilon \mu \partial_t \left( \frac{1}{2} \rho \zeta^2 + h \kappa \right) + \varepsilon \mu \rho \operatorname{div}(\vec{q} \mathcal{P}) = -\varepsilon \mu \rho \mathcal{W} \quad (1.82)$$

et en dimension

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 + h \kappa \right) + \operatorname{div}(\vec{q} \mathcal{P}) = -\underline{P} \zeta_t. \quad (1.83)$$

### 1.2.7 Vers l'équation des ondes

Par (1.74c) nous avons simplement que

$$(\operatorname{div}(\vec{q}))_t = -\zeta_{tt} \quad (1.84)$$

De plus, en prenant la divergence de part et d'autre dans l'équation (1.74d) et comme le champ de vitesse  $\vec{u}$  est supposé continu en dehors de  $\Gamma$  (qui est de mesure nulle), alors nous avons

$$\zeta_{tt} - c_0^2 \Delta \zeta = \operatorname{div} \left( \frac{d_0}{\rho} \nabla P \right) \quad (1.85)$$

avec  $c_0 = \sqrt{gd_0}$  la vitesse d'écoulement caractéristique du fluide.

Remarquons que si  $\zeta$  est fixe dans  $\Omega_b$  alors nous avons simplement un système simple à résoudre

$$\begin{cases} \zeta_{tt} - c_0^2 \Delta \zeta = 0 & \text{dans } \Omega_w, \\ \operatorname{div}(d_0 \nabla \Pi) = \zeta_{tt} - c_0^2 \Delta \zeta & (\zeta \text{ connue}) \text{ dans } \Omega_b. \end{cases} \quad (1.86a)$$

$$(1.86b)$$

## 1.3 Couplage des domaines

Cette section est basée sur la thèse Bosi [2].

Premièrement nous définissons la notion de *saut d'une quantité scalaire*  $Q$  à travers une interface  $\Gamma$  comme

$$[[Q]]_b = Q_w - Q_b \quad \text{et} \quad [[Q]]_w = Q_b - Q_w \quad (1.87)$$

où les quantités  $Q_b$  et  $Q_w$  sont définies telles que

$$Q_b = \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \Omega_w \\ \vec{x} \in \Omega_b}} Q(\vec{x}) \quad \text{et} \quad Q_w = \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \Omega_b \\ \vec{x} \in \Omega_w}} Q(\vec{x}). \quad (1.88)$$

Pour des quantités scalaires il est trivial que

$$[[Q]]_w + [[Q]]_b = 0. \quad (1.89)$$

Remarquons que nous attribuons une notation spécifique aux valeurs de  $Q = \zeta$ . En accord avec les figures 1.1 et 1.2, nous posons

$$\zeta_{in}(t) := \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Omega_w \\ (x,y) \in \Omega_b}} \zeta(x, y, t) \quad \text{et} \quad \zeta_{out}(t) := \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Omega_b \\ (x,y) \in \Omega_w}} \zeta(x, y, t). \quad (1.90)$$

Nous définissons donc les vecteurs sortants unitaires  $\vec{n}_b$  et  $\vec{n}_w$  relatifs respectivement à  $\Omega_b$  et à  $\Omega_w$  de telle sorte que

$$\vec{n}_b + \vec{n}_w = \vec{0}. \quad (1.91)$$

En conséquence nous définissons

$$[[\vec{Q}]] := \vec{Q}_w \cdot \vec{n}_w + \vec{Q}_b \cdot \vec{n}_b. \quad (1.92)$$

Nous chercherons à exhiber les conditions de couplage possible à partir des équations formant le système. Nous discuterons des quantités apparaissant dans le système formé par (1.74c), (1.74d), (1.77) et par l'équation des ondes (1.85).

### 1.3.1 L'équation de conservation de la masse

L'équation de conservation (1.74c) peut être réécrite en intégrant sur une surface  $\mathcal{S}$  arbitraire à cheval sur  $\Gamma$ . Nous supposons qu'il existe une subdivision  $\{\mathcal{S}_w, \mathcal{S}_b\}$  de  $\mathcal{S}$  telle que  $\mathcal{S}_w \cap \mathcal{S}_b = \Gamma$ . Nous supposons aussi que  $\mathcal{S} \subsetneq \Omega_f$ , ainsi nous pouvons considérer que la masse totale est conservée au cours du temps :  $\vec{q}|_{\partial\mathcal{S}} = \vec{0}$ . Ainsi

$$\iint_{\mathcal{S}} \zeta_t + \operatorname{div}(\vec{q}) \, ds = 0 \quad (1.93)$$

réécrit grâce à (A.2)

$$\underbrace{\iint_{\mathcal{S}} \zeta_t \, ds + \int_{\partial\mathcal{S}} \vec{q} \cdot \vec{n} \, da}_{=0 \text{ par (1.93)}} + \iint_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} \, da = 0 \quad (1.94)$$

impliquant

$$\iint_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} \, da = 0. \quad (1.95)$$

Ainsi, nous avons

$$[[\vec{q}]] = \vec{q}_w \cdot \vec{n}_w + \vec{q}_b \cdot \vec{n}_b = 0. \quad (1.96)$$

### 1.3.2 La continuité de la pression hydrostatique totale

La pression hydrostatique totale  $\mathcal{P}$  telle que définie à partir de l'équation (1.71) est :  $\rho g \zeta + \underline{P}$ . Cette quantité doit être aussi continue en  $\Gamma$  c'est-à-dire que

$$[[\mathcal{P}]]_b = [[\rho g \zeta + \underline{P}]]_b = 0 \quad (1.97)$$

Autrement dit

$$\rho g [[\zeta]]_b + [[\underline{P}]]_b = 0 \quad (1.98)$$

$$\stackrel{\text{Déf. de } \Pi}{\implies} \rho g (\zeta_{out} - \zeta_{in}) - \rho \Pi_{in} = 0 \quad (1.99)$$

Donc nous avons

$$g \zeta_{out} = g \zeta_{in} + \Pi_{in} \quad (1.100)$$

## Chapitre 2

# Considérations théoriques pour le flotteur

### 2.1 Définitions propres au flotteur

Dans ce stage, nous n'avons regardé que des flotteurs indéformables, c'est-à-dire que les distances intérieures dans celui-ci sont conservées au cours du temps sous les différents déplacements. Pour plus de commodités nous donnons le schéma suivant :

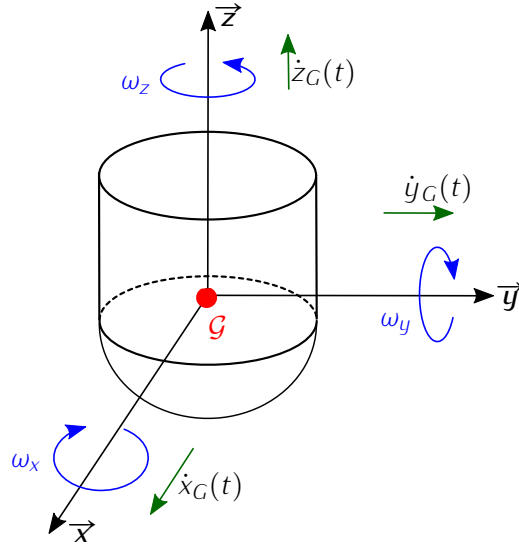


FIGURE 2.1 – Modèle 2D – caractéristiques du flotteur.

Nous rappelons que nous avons défini  $\Omega_b$  comme le domaine associé au flotteur, correspondant à la partie immergée du flotteur. En conséquence, nous définissons plusieurs variables associées à celui-ci :

- Le centre de masse  $\mathcal{G}(t) = (x_G(t), y_G(t), z_G(t)) \in \mathbb{R}^3$  du flotteur. Point auquel nous assimilons le flotteur dans l'ensemble de ses mouvements. En particulier la vitesse axiale est donnée par

$$\vec{u}_G = (\dot{x}_G(t), \dot{y}_G(t), \dot{z}_G(t)) \in \mathbb{R}^3. \quad (2.1)$$

Et une accélération

$$\vec{a}_G = \frac{d}{dt} \vec{u}_G = (\ddot{x}_G(t), \ddot{y}_G(t), \ddot{z}_G(t)) \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

- Nous notons l'extension naturelle à  $\mathbb{R}^3$  des coordonnées positions  $(x, y)^T \in \Omega_b \subset \mathbb{R}^2$  comme le point à la surface

$$\underline{\zeta}(x, y, t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \zeta(x, y, t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.3)$$

- Dans un premier temps, nous définissons la vitesse angulaire du flotteur, qui ne dépend pas du point où nous l'exprimons, comme

$$\vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.4)$$

- Dans un second temps, nous définissons la vitesse de translation du flotteur exprimé en un point de sa surface immergée (elle est également valable en n'importe quel point du flotteur en changeant la définition de  $\underline{\zeta}$ ) comme

$$\vec{u}_b(x, y, t) = \vec{u}_g(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{g}\underline{\zeta} \quad (2.5)$$

où

$$\vec{g}\underline{\zeta}(t) = \underline{\zeta}(x, y, t) - \mathcal{G}(t) = \begin{bmatrix} x - x_g(t) \\ y - y_g(t) \\ \zeta(x, y, t) - z_g(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

qui est, en accord avec Lannes [9], l'expression standard pour déterminer le champ de vitesse d'un solide en mécanique des solides.

- Nous désignerons la masse du flotteur par  $m_b$ .

## 2.2 Inertie et rotations

La matrice d'inertie  $\bar{\mathcal{J}}(t)$ , aussi appelée tenseur d'inertie, est obtenue selon Lannes [9] comme

$$\bar{\mathcal{J}}(t) = \Theta(t) \bar{\mathcal{J}}_0 \Theta^T(t) \quad (2.7)$$

avec  $\bar{\mathcal{J}}_0 = \bar{\mathcal{J}}(t=0)$  l'état initial et  $\Theta$  une matrice de rotation 3D solution de l'EDO

$$\frac{d}{dt} \Theta = \vec{\omega} \times \Theta, \quad \Theta_0 = \Theta(t=0) = \mathcal{I}_3. \quad (2.8)$$

Nous noterons que

$$\Theta = [\Theta]_{1 \leq i, j \leq 3} \in O_3(\mathbb{R}), \text{ et } \bar{\mathcal{J}} = [\mathcal{J}_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq 3} \in M_3(\mathbb{R}) \quad (2.9)$$

D'autre part, nous avons une équation de conservation sur la quantité de mouvement angulaire fournie par le théorème du moment cinétique appliqué au flotteur

$$\frac{d}{dt} (\bar{\mathcal{J}} \vec{\omega}) = \vec{\mathcal{M}}_{\mathcal{P}} \quad (2.10)$$

avec  $\vec{\mathcal{M}}_{\mathcal{P}}$  le moment vectoriel de la force de pression  $\mathcal{P}$  calculé comme

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathcal{P}} = \iint_{\Omega_b} \mathcal{P} [\vec{g}\underline{\zeta} \times \vec{n}] dx dy \quad (2.11)$$

avec  $\mathcal{P}$  la pression hydrostatique totale et  $\vec{n}$  le vecteur normal sortant à la surface immergée du flotteur défini comme

$$\vec{n} \propto \begin{bmatrix} -\nabla \zeta \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Nous pouvons réécrire l'équation (2.10) comme

$$\bar{\mathcal{J}} \dot{\vec{\omega}} + \dot{\bar{\mathcal{J}}} \vec{\omega} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathcal{P}} \quad (2.13)$$

or

$$\dot{\vec{J}}\vec{\omega} = \frac{d}{dt} (\Theta \mathcal{I}_0 \Theta^T) \vec{\omega} = \dot{\Theta} \mathcal{I}_0 \Theta^T \vec{\omega} + \Theta \mathcal{I}_0 \dot{\Theta}^T \vec{\omega}. \quad (2.14)$$

Or  $\Theta^T \dot{\Theta} \Theta^T = \Theta^T \Theta \dot{\Theta}^T = \mathcal{I} \dot{\Theta}^T = \dot{\Theta}^T$  donc

$$\dot{\vec{J}}\vec{\omega} = \vec{\omega} \times \mathcal{I}\vec{\omega} - \mathcal{I}\dot{\Theta}\Theta^T \vec{\omega}. \quad (2.15)$$

Mais  $\dot{\Theta}\Theta^T \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \Theta\Theta^T \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$  donc nous avons

$$\dot{\vec{J}}\vec{\omega} + \vec{\omega} \times \mathcal{I}\vec{\omega} = \vec{\mathcal{M}}_P, \quad (2.16)$$

ou encore

$$\dot{\vec{J}}\vec{\omega} = \mathcal{I}\vec{\omega} \times \vec{\omega} + \vec{\mathcal{M}}_P. \quad (2.17)$$

Maintenant, reprenons la définition de la pression  $\mathcal{P} = \rho g \zeta + \Pi$  (??) et insérons-la dans (2.11)

$$\vec{\mathcal{M}}_P = \rho g \iint_{\Omega_b} \zeta [\underline{\vec{g}} \times \underline{\vec{n}}] dx dy + \rho \iint_{\Omega_b} \Pi [\underline{\vec{g}} \times \underline{\vec{n}}] dx dy \quad (2.18)$$

ainsi

$$\dot{\vec{J}}\vec{\omega} = \dot{\vec{J}}\vec{\omega} \times \vec{\omega} + \rho g \iint_{\Omega_b} \zeta [\underline{\vec{g}} \times \underline{\vec{n}}] dx dy + \rho \iint_{\Omega_b} \Pi [\underline{\vec{g}} \times \underline{\vec{n}}] dx dy \quad (2.19)$$

### 2.2.1 Condition d'imperméabilité du flotteur

Par ailleurs, nous pouvons donner une condition d'imperméabilité différente dans  $\Omega_b$  à la surface  $S$  (comparativement à (1.27))

$$\left. \frac{D(S-z)}{Dt} \right|_{z=S} = (S-z)_t + \vec{u}_b \cdot \nabla (S-z)|_{z=S} \quad (2.20)$$

conduisant à

$$\zeta_t + (\vec{u}_g + \vec{\omega} \times \underline{\vec{g}}) \cdot \begin{bmatrix} \nabla \zeta \\ -1 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.21)$$

Donc (2.20) se réécrit comme

$$\zeta_t - (\vec{u}_g + \vec{\omega} \times \underline{\vec{g}}) \cdot \underline{\vec{n}} = 0. \quad (2.22)$$

## 2.3 La masse du flotteur

Premièrement, rappelons la seconde loi de Newton

$$\mathbf{m}_b \vec{a}_G = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{m}_b$  désigne la masse du flotteur et  $\sum_i \vec{F}_i$  la somme des forces extérieures subies par le corps. Dans notre cas, seuls le poids et les forces découlant de la pression entrent en jeu, c'est-à-dire que nous avons

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \mathbf{m}_b \vec{g} = -g \mathbf{m}_b \vec{e}_z & (\text{poids}), \\ \vec{F}_2 = \iint_{\Omega_b} \mathcal{P} \underline{\vec{n}} dx dy & (\text{force issue de la pression } \mathcal{P}). \end{cases} \quad (2.24a) \quad (2.24b)$$

avec  $\mathcal{P} = \rho g \zeta + \Pi$  définie à (??). Ainsi

$$\mathbf{m}_b \vec{a}_G = -g \mathbf{m}_b \vec{e}_z + \rho g \iint_{\Omega_b} \zeta \underline{\vec{n}} dx dy + \rho \iint_{\Omega_b} \Pi \underline{\vec{n}} dx dy \quad (2.25)$$

## 2.4 Notion de masse et d'inertie ajoutée

La mise en équation dans (2.19) et (2.25) a fait apparaître des intégrales dépendantes de

$$\vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{g}\vec{\zeta} \times \vec{n}. \quad (2.26)$$

Partant de là, nous pouvons appliquer la même stratégie que dans Lannes [9], c'est-à-dire définir des potentiels tels que

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (d_0 \nabla \vec{\Phi}) = -d_0 \Delta \vec{\Phi} = \vec{n} & (2.27a) \\ \vec{\Phi}|_{\Gamma} = \vec{0}. & (2.27b) \end{cases} \quad \begin{cases} -\operatorname{div} (d_0 \nabla \vec{\Psi}) = -d_0 \Delta \vec{\Psi} = \vec{g}\vec{\zeta} \times \vec{n}, & (2.28a) \\ \vec{\Psi}|_{\Gamma} = \vec{0}. & (2.28b) \end{cases}$$

Ce qui nous permet de réécrire les équations (2.19) et (2.25) comme

$$\vec{\mathcal{J}}\vec{\omega} = \vec{\mathcal{J}}\vec{\omega} \times \vec{\omega} - d_0 \rho g \iint_{\Omega_b} \zeta \Delta \vec{\Psi} dx dy - d_0 \rho \iint_{\Omega_b} \Pi \Delta \vec{\Psi} dx dy \quad (2.29)$$

et

$$\mathbf{m}_b \vec{\mathcal{A}}_G = -g \mathbf{m}_b \vec{e}_z - d_0 \rho g \iint_{\Omega_b} \zeta \Delta \vec{\Phi} dx dy - d_0 \rho \iint_{\Omega_b} \Pi \Delta \vec{\Phi} dx dy \quad (2.30)$$

en termes de laplaciens vectoriels. Grâce à la formule d'intégration dans  $\mathcal{H}^2$  (A.9a), attention ici dans  $\mathbb{R}^3$ , nous pouvons réécrire

$$\iint_{\Omega_b} \zeta \Delta \vec{\Psi} dx dy = \iint_{\Omega_b} \vec{\Psi} \Delta \zeta dx dy + \underbrace{\iint_{\Gamma=\partial\Omega_b} (\nabla \vec{\Psi} \cdot \vec{n}) \cdot (\nabla \zeta \cdot \vec{n}) dx dy}_{=0} \quad (2.31)$$

Par l'équation des ondes (1.85),

$$= \iint_{\Omega_b} \vec{\Psi} \frac{1}{c_0^2} (\zeta_{tt} - d_0 \Delta \Pi) dx dy \quad (2.32)$$

$$= \frac{1}{c_0^2} \iint_{\Omega_b} \vec{\Psi} \zeta_{tt} dx dy - \frac{1}{g} \iint_{\Omega_b} \vec{\Psi} \Delta \Pi dx dy. \quad (2.33)$$

De plus,

$$\iint_{\Omega_b} \Pi \Delta \vec{\Psi} dx dy = \iint_{\Omega_b} \vec{\Psi} \Delta \Pi dx dy + \underbrace{\iint_{\Gamma=\partial\Omega_b} (\nabla \vec{\Psi} \cdot \vec{n}) \cdot (\nabla \Pi \cdot \vec{n}) dx dy}_{=0}. \quad (2.34)$$

En remplaçant, nous avons ainsi

$$\vec{\mathcal{J}}\vec{\omega} = \vec{\mathcal{J}}\vec{\omega} \times \vec{\omega} - \rho \iint_{\Omega_b} \vec{\Psi} \zeta_{tt} dx dy, \quad (2.35)$$

et

$$\mathbf{m}_b \vec{\mathcal{A}}_G = -g \mathbf{m}_b \vec{e}_z - \rho \iint_{\Omega_b} \vec{\Psi} \zeta_{tt} dx dy. \quad (2.36)$$

Mais  $\zeta_{tt}$  peut être exprimée à partir de la condition de surface (2.20) selon Lannes [9] comme

$$\zeta_{tt} = (\vec{\mathcal{A}}_G + \vec{\omega} \times \vec{g}\vec{\zeta}) \cdot \vec{n} \quad (2.37)$$

Ainsi, et comme  $\vec{a}$  et  $\vec{\omega}$  ne dépendent pas de  $x$  ni de  $y$ ,

$$\iint_{\Omega_b} \vec{\psi} \zeta_{tt} dx dy = -d_0 \iint_{\Omega_b} (\vec{\psi} \otimes \Delta \vec{\phi}) dx dy \vec{a}_g - d_0 \iint_{\Omega_b} (\vec{\psi} \otimes \Delta \vec{\psi}) dx dy \vec{\omega} \quad (2.38)$$

$$\iint_{\Omega_b} \vec{\phi} \zeta_{tt} dx dy = -d_0 \iint_{\Omega_b} (\vec{\phi} \otimes \Delta \vec{\phi}) dx dy \vec{a}_g - d_0 \iint_{\Omega_b} (\vec{\phi} \otimes \Delta \vec{\psi}) dx dy \vec{\omega} \quad (2.39)$$

De plus  $\forall \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in \{\vec{\phi}, \vec{\psi}\}$  et par (A.9b)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_b} [\vec{\lambda}_1 \otimes (-d_0 \Delta \vec{\lambda}_2)] dx dy &= \iint_{\Omega_b} \frac{1}{d_0} [(-d_0 \nabla \vec{\lambda}_1) \otimes (-d_0 \nabla \vec{\lambda}_2)] dx dy \\ &\quad + \iint_{\Gamma=\partial\Omega_b} (\nabla \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{n}) \cdot \underbrace{\gamma_0(\vec{\lambda}_2)}_{=0} dx dy. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons réécrire (2.35) et (2.36) comme

$$[\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}_{add}(t)] \begin{bmatrix} \vec{a}_g \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \mathbf{m}_b \vec{e}_z \\ \vec{\mathcal{J}} \vec{\omega} \times \vec{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

avec

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_b \mathcal{I}_3 & 0 \\ 0 & \vec{\mathcal{J}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (2.41)$$

et sous la notation  $\vec{\pi} = \begin{bmatrix} \vec{\phi} \\ \vec{\psi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ ,

$$(\mathbf{M}_{add}(t))_{1 \leq i,j \leq 6} = \rho \iint_{\Omega_b} \frac{1}{d_0} [(-d_0 \nabla \vec{\pi}_i) \cdot (-d_0 \nabla \vec{\pi}_j)] dx dy. \quad (2.42)$$

La matrice  $\mathbf{M}(t)$  est une matrice de taille  $6 \times 6$  qui représente la matrice de masse et d'inertie, tandis que  $\mathbf{M}_{add}(t)$  aussi de taille  $6 \times 6$ , désigne la matrice de masse et d'inertie ajoutée.

Avec la notation :  $\mathcal{N}_i = -d_0 \nabla \vec{\pi}_i$  nous avons

$$\begin{cases} \text{div}(\mathcal{N}_i) = (\vec{\pi})_i & \forall i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.43a)$$

$$\begin{cases} \text{div}(\mathcal{N}_i) = (\vec{\mathcal{G}} \vec{\xi} \times \vec{\pi})_{i-3} & \forall i = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (2.43b)$$

ainsi

$$(\mathbf{M}_{add}(t))_{1 \leq i,j \leq 6} = \frac{\rho}{d_0} \iint_{\Omega_b} \mathcal{N}_i \cdot \mathcal{N}_j dx dy. \quad (2.44)$$

Dans le cas où nous négligeons toutes les rotations, nous obtenons simplement

$$\vec{\omega} = \vec{0}, \quad \vec{u}_b = \vec{u}_g \text{ et } \zeta_{tt} = \vec{a}_g \cdot \vec{n} \quad (2.45)$$

et

$$(\mathbf{m}_b \mathcal{I}_3 + \mathbf{M}_{add}(t)) \vec{a}_g = -g \mathbf{m}_b \vec{e}_z \quad (2.46)$$

avec

$$(\mathbf{M}_{add}(t))_{1 \leq i,j \leq 3} = \frac{\rho}{d_0} \iint_{\Omega_b} \mathcal{N}_i \cdot \mathcal{N}_j dx dy. \quad (2.47)$$



## Chapitre 3

# Modèle de résolution

### 3.1 Solutions progressives et analytiques de l'équation des ondes

Cette section est inspirée d'un document que m'a transmis Mr Ricchiuto intitulé "Travelling solutions : linear shallow water equations".

Le système formé de (1.74c) et (1.74d) peut être réécrit de façon simple dans  $\Omega_w$  (sans flotteur) dans une direction  $\vec{d} = [d_1, d_2]^T$  :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + d_1 \partial_x q_1 + d_2 \partial_y q_2 = 0, & (3.1a) \\ \partial_t q_1 + d_1 c_0^2 \partial_x \zeta = 0, & (3.1b) \\ \partial_t q_2 + d_2 c_0^2 \partial_y \zeta = 0, & (3.1c) \end{cases}$$

avec  $c_0^2 = g d_0 = g h_0$ . La mise sous forme d'un système est relativement simple

$$\partial_t W + d_1 A \partial_x W + d_2 B \partial_y W = 0, \quad W = \begin{bmatrix} \zeta \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}, \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_0^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \quad (3.2)$$

Les matrices  $A$  et  $B$  peuvent être écrites comme suit

$$A = L_A D_A R_A, \quad L_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0} & -\frac{1}{c_0} \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{3 \times 2}}, \quad D_A = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & -c_0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}, \quad R_A = \begin{bmatrix} \frac{c_0}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{c_0}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{2 \times 3}} \quad (3.3)$$

$$B = L_B D_B R_B, \quad L_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0} & -\frac{1}{c_0} \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{3 \times 2}}, \quad D_B = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & -c_0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}, \quad R_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{c_0}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{c_0}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^{2 \times 3}} \quad (3.4)$$

Introduisons maintenant les variables caractéristiques

$$N^x = \begin{bmatrix} \eta^{+x} \\ \eta^{-x} \end{bmatrix} := R_A W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (q_1 + c_0 \zeta) \\ \frac{1}{2} (q_1 - c_0 \zeta) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$N^y = \begin{bmatrix} \eta^{+y} \\ \eta^{-y} \end{bmatrix} := R_B W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (q_2 + c_0 \zeta) \\ \frac{1}{2} (q_2 - c_0 \zeta) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Nous pouvons remarquer que

$$\begin{cases} \zeta = \frac{1}{2c_0} (\eta^{+x} - \eta^{-x} + \eta^{+y} - \eta^{-y}), & (3.7a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \eta^{+x} + \eta^{-x}, & (3.7b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_2 = \eta^{+y} + \eta^{-y}. & (3.7c) \end{cases}$$

Nous obtenons deux caractérisations de  $W$  (une dans la direction  $\vec{x}$  et une dans la direction  $\vec{y}$ )

$$W^x = L_A N^x \quad \text{et} \quad W^y = L_B N^y. \quad (3.8)$$

Nous pouvons dès lors dégager deux systèmes, l'un en multipliant (3.2) par  $R_A$  et en remplaçant  $W$  par  $W^x$  et l'autre  $R_B$  et  $W^y$

$$\begin{cases} \partial_t N^x + \mathbf{d}_1 \partial_x D_A N^x + \mathbf{d}_2 \partial_y R_A B L_A N^x = 0 \end{cases} \quad (3.9a)$$

$$\begin{cases} \partial_t N^y + \mathbf{d}_1 \partial_x R_B A L_B N^y + \mathbf{d}_2 \partial_y D_B N^y = 0 \end{cases} \quad (3.9b)$$

Or nous avons  $R_A B L_A = R_B A L_B = \mathbf{0}$ . Nous obtenons donc les systèmes

$$\begin{cases} \left( \partial_t + \vec{v}^{d_1} \cdot \nabla \right) \eta^{+x} = 0 & (3.10a) \\ \left( \partial_t - \vec{v}^{d_1} \cdot \nabla \right) \eta^{-x} = 0 & (3.10b) \end{cases} \quad \begin{cases} \left( \partial_t + \vec{v}^{d_2} \cdot \nabla \right) \eta^{+y} = 0 & (3.11a) \\ \left( \partial_t - \vec{v}^{d_2} \cdot \nabla \right) \eta^{-y} = 0 & (3.11b) \end{cases}$$

où  $\vec{v}_{d_1} = (c_0 \mathbf{d}_1, 0)^T$  et  $\vec{v}_{d_2} = (0, c_0 \mathbf{d}_2)^T$ . Ainsi nous avons les solutions générales

$$\begin{cases} \eta^{+x}(\vec{x}, t) = \eta_0^{+x}(\vec{x} - \vec{v}_{d_1} t) & (3.12a) \\ \eta^{-x}(\vec{x}, t) = \eta_0^{-x}(\vec{x} + \vec{v}_{d_1} t) & (3.12b) \end{cases} \quad \begin{cases} \eta^{+y}(\vec{x}, t) = \eta_0^{+y}(\vec{x} - \vec{v}_{d_2} t) & (3.13a) \\ \eta^{-y}(\vec{x}, t) = \eta_0^{-y}(\vec{x} + \vec{v}_{d_2} t) & (3.13b) \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \zeta(\vec{x}, t) = \frac{\eta_0^{+x}(\vec{x} - \vec{v}_{d_1} t) - \eta_0^{-x}(\vec{x} + \vec{v}_{d_1} t) + \eta_0^{+y}(\vec{x} - \vec{v}_{d_2} t) - \eta_0^{-y}(\vec{x} + \vec{v}_{d_2} t)}{2c_0} \end{cases} \quad (3.14a)$$

$$\begin{cases} \vec{q}(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} \eta_0^{+x}(\vec{x} - \vec{v}_{d_1} t) + \eta_0^{-x}(\vec{x} + \vec{v}_{d_1} t) \\ \eta_0^{+y}(\vec{x} - \vec{v}_{d_2} t) + \eta_0^{-y}(\vec{x} + \vec{v}_{d_2} t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.14b)$$

Par ailleurs, il est toujours possible d'écrire

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1^+ - d_1^- \\ d_2^+ - d_2^- \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a^+ = \frac{|a| + a}{2} \quad \text{et} \quad a^- = \frac{|a| - a}{2} \quad (3.15)$$

Ainsi, selon  $\vec{d}$  nous avons

$$\begin{cases} \eta^{+x}(\vec{x}, t) = \frac{d_1^+}{d_1} \eta_0^{+x}(\vec{x} - \vec{v}_{d_1} t) & (3.16a) \\ \eta^{-x}(\vec{x}, t) = \frac{d_1^-}{d_1} \eta_0^{-x}(\vec{x} + \vec{v}_{d_1} t) & (3.16b) \end{cases} \quad \begin{cases} \eta^{+y}(\vec{x}, t) = \frac{d_2^+}{d_2} \eta_0^{+y}(\vec{x} - \vec{v}_{d_2} t) & (3.17a) \\ \eta^{-y}(\vec{x}, t) = \frac{d_2^-}{d_2} \eta_0^{-y}(\vec{x} + \vec{v}_{d_2} t) & (3.17b) \end{cases}$$

Ainsi selon  $\vec{d}$  nous avons une simplification possible. Par exemple prenons  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\vec{d} = [a^2, -b^2]^T$  alors

$$\begin{cases} \eta^{+x}(\vec{x}, t) = \eta_0^{+x}(\vec{x} - \vec{v}_{d_1} t) & (3.18a) \\ \eta^{-x}(\vec{x}, t) = 0 & (3.18b) \end{cases} \quad \begin{cases} \eta^{+y}(\vec{x}, t) = 0 & (3.19a) \\ \eta^{-y}(\vec{x}, t) = \eta_0^{-y}(\vec{x} + \vec{v}_{d_2} t) & (3.19b) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \eta_0^{-x} \\ \eta_0^{+y} \end{bmatrix} = \vec{0} \implies \vec{q} = \vec{c_0} \zeta, \quad (3.20)$$

sous la notation  $\vec{c_0} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$ , ainsi

$$\vec{q}_t = \vec{c_0} \zeta_t, \quad \text{et} \quad \text{div}(\vec{q}) = c_0 \partial_x \zeta + c_0 \partial_y \zeta \quad (3.21)$$

Ainsi, le système formé par (3.1a)-(3.1c) devient

$$\begin{cases} \zeta_t + c_0 \mathbf{d}_1 \partial_x \zeta + c_0 \mathbf{d}_2 \partial_y \zeta = 0 \end{cases} \quad (3.22a)$$

$$\begin{cases} \zeta_t + c_0 \mathbf{d}_1 \partial_x \zeta = 0 \end{cases} \quad (3.22b)$$

$$\begin{cases} \zeta_t + c_0 \mathbf{d}_2 \partial_y \zeta = 0 \end{cases} \quad (3.22c)$$

## 3.2 La méthode *Shifted Boundary*

Cette section est inspirée de Main and Scovazzi [12, 13], de Burman [3] et de Nouveau et al. [14].

La méthode *Shifted Boundary*, abrégée (**SB**), est une méthode de déplacement de conditions de bords : la méthode se résume à introduire un bord  $\tilde{\Gamma}$  substitut au bord physique  $\Gamma$  dans l'objectif que les conditions de bord pourront être imposés sur des nœuds du maillage déjà présents. Comme le précise l'article Main and Scovazzi [12], il serait judicieux que ce déplacement de frontière ne réduise pas l'ordre de convergence de la méthode globale. Les conditions de bords seront donc modifiées et imposées dans la formulation variationnelle grâce à une méthode de pénalisation qui a fait ses preuves : la pénalisation de Nitsche ; c'est la méthode employée dans Nouveau et al. [14] pour le problème de Poisson notamment.

### 3.2.1 Définitions

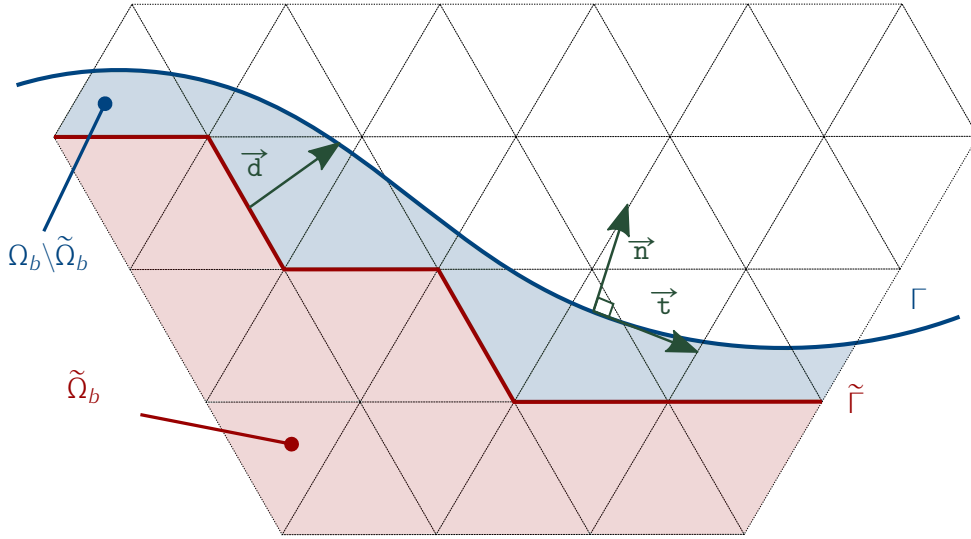


FIGURE 3.1 – La méthode *Shifted Boundary* (SB).

Nous donnons donc plusieurs définitions

- Le domaine  $\Omega_b \subset \Omega_f \subset \mathbb{R}^2$  est, rappelons-le, le domaine associé au flotteur. De plus, nous avons noté la frontière de  $\Omega_b$

$$\Gamma := \partial\Omega_b. \quad (3.23)$$

- Nous posons aussi le bord  $\tilde{\Gamma}$  défini comme le substitut au bord physique  $\Gamma$ , nous conduisant à définir le domaine substitut  $\tilde{\Omega}_b$  tel que

$$\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{\Omega}_b, \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega}_b \subset \Omega_b. \quad (3.24)$$

- Le vecteur sortant normal  $\vec{n}$  à  $\Gamma$  et le vecteur tangent associé  $\vec{\tau}$ .
- La carte  $\mathbf{M} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  telle que  $\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}$ . Celle-ci peut être construite de plusieurs manières comme le rappelle Main and Scovazzi [12] : analytiquement, via une fonction de *level-set* ou explicitement.

- Le vecteur sortant normal  $\tilde{\vec{n}}$  à  $\tilde{\Gamma}$  et le vecteur tangent associé  $\tilde{\vec{t}}$  tels que

$$\tilde{\vec{n}}(\tilde{x}) = \vec{n}(\mathbf{M}(\tilde{x})) \quad \text{et} \quad \tilde{\vec{t}}(\tilde{x}) = \vec{t}(\mathbf{M}(\tilde{x})). \quad (3.25)$$

- Le vecteur distance  $\vec{d}$  tel que  $\forall \tilde{x} \in \tilde{\Gamma}$

$$\vec{d}(\tilde{x}) = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{M} - \mathcal{I}](\tilde{x}) \quad (3.26)$$

Dans la suite nous aurons,

$$\vec{d} = \|\vec{d}\| \vec{n}. \quad (3.27)$$

Sous ces définitions, comme le présente Main and Scovazzi [12], nous avons

$$\begin{cases} \nabla \varphi(\tilde{x}) \cdot \tilde{\vec{n}} = \nabla \varphi(\tilde{x}) \cdot \vec{n}(\mathbf{M}(\tilde{x})) \end{cases} \quad (3.28a)$$

$$\begin{cases} \nabla \varphi(\tilde{x}) \cdot \tilde{\vec{t}} = \nabla \varphi(\tilde{x}) \cdot \vec{t}(\mathbf{M}(\tilde{x})) \end{cases} \quad (3.28b)$$

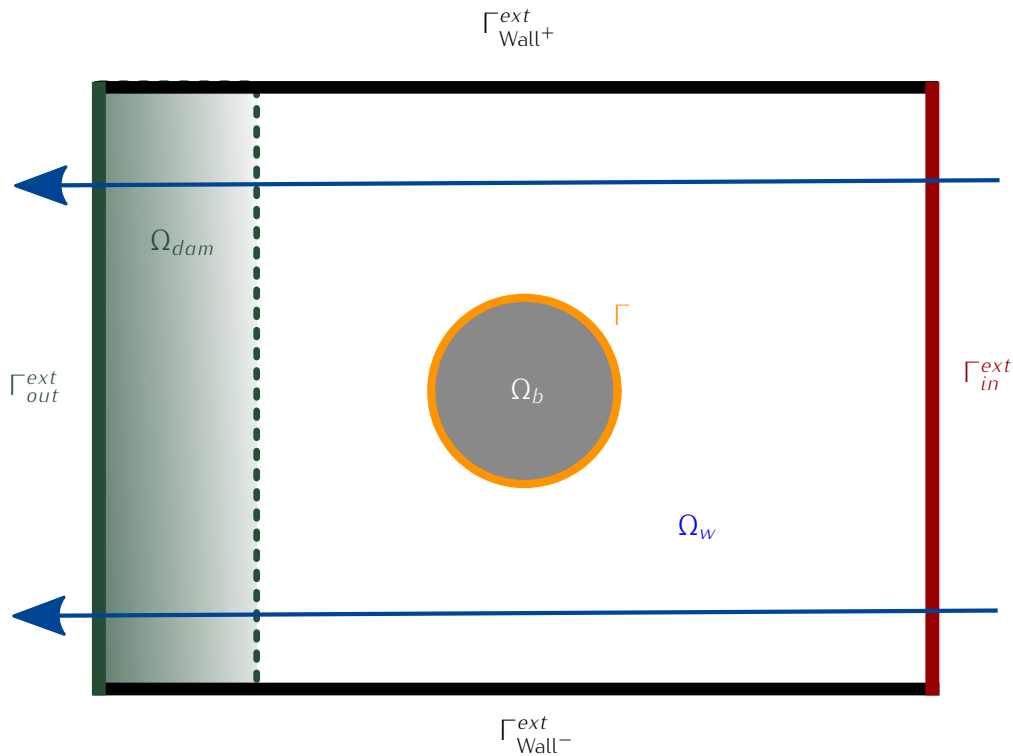


FIGURE 3.2 – Les différents bords.

La nouveauté ici correspond à la zone d'amortissement (*damping area*)  $\Omega_{dam} \subset \Omega_w$ . Et nous définissons aussi plusieurs bords

- La frontière entre  $\Omega_b$  et  $\Omega_w$  que nous avons appelé  $\Gamma$ .
- Deux murs, avec une condition d'imperméabilité  $\Gamma_{Wall^\pm}^{ext}$  correspondant aux murs haut et bas sur la figure 3.2.
- Le bord d'entrée des vagues  $\Gamma_{in}^{ext}$ , et le bord de sortie "officiel" des vagues  $\Gamma_{out}^{ext}$ .

### 3.2.2 Exemple d'application : problème de Poisson sur domaine simple

Dans cette section tirée de Main and Scovazzi [12] nous illustrerons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.29a)$$

$$\begin{cases} u = u_D, & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \quad (3.29b)$$

$$\begin{cases} \nabla u \cdot \vec{n} = t_N, & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.29c)$$

avec  $\Gamma_D, \Gamma_N$  une partition de  $\partial\Omega$ . Nous traiterons exclusivement  $\Gamma_D$  par la méthode (SB) et le bord  $\Gamma_N$  par maillage conforme.

Par utilisation des formules de Taylor, selon Main and Scovazzi [12], il est possible de montrer que

$$\widetilde{u}_D(\tilde{x}) = u_D(\mathbf{M}(\tilde{x})) = u(\tilde{x}) + \nabla u(\tilde{x}) \cdot \vec{d}(\tilde{x}) + \underbrace{\mathcal{O}(\|\vec{d}(\tilde{x})\|_2^2)}_{=\mathcal{O}(h^2)} \quad (3.30)$$

La formulation faible obtenue selon Nitsche est

Trouver  $u^h \in V^h(\Omega)$  tel que  $\forall w^h \in V^h(\Omega)$ ,

$$\underbrace{\langle \nabla w^h, \nabla u^h \rangle_\Omega}_{=:l_1} - \underbrace{\langle w^h, \nabla u^h \cdot \vec{n} \rangle_{\Gamma_D}}_{=:l_2} + \underbrace{\langle w^h, \nabla u^h \cdot \vec{n} - t_N \rangle_{\Gamma_N}}_{=:l_3} - \underbrace{\langle \nabla w^h \cdot \vec{n}, u^h - u_D \rangle_{\Gamma_D}}_{=:l_4} + \underbrace{\langle \frac{\alpha}{h^\perp} w^h, u^h - u_D \rangle_{\Gamma_D}}_{=:l_5} = \underbrace{\langle w^h, f \rangle_\Omega}_{=:l_6} \quad (3.31)$$

Ce qui en utilisant (3.28a) et (3.30), nous donne

$$\begin{cases} l_1 = \langle \nabla w^h, \nabla u^h \rangle_{\tilde{\Omega}} \end{cases} \quad (3.32a)$$

$$\begin{cases} l_2 = \langle w^h + \nabla w^h \cdot \vec{d}, \nabla u^h \cdot \vec{n} \rangle_{\tilde{\Gamma}_D} - \langle \nabla w^h \cdot \vec{d}, \nabla u^h \cdot \vec{n} \rangle_{\tilde{\Gamma}_D} \end{cases} \quad (3.32b)$$

$$\begin{cases} l_3 = \langle w^h, \nabla u^h \cdot \vec{n} \rangle_{\Gamma_N} - \langle w^h, t_N \rangle_{\Gamma_N} \end{cases} \quad (3.32c)$$

$$\begin{cases} l_4 = \langle \nabla w^h \cdot \vec{n}, u^h + \nabla u^h \cdot \vec{d} \rangle_{\tilde{\Gamma}_D} - \langle \nabla w^h \cdot \vec{n}, \widetilde{u}_D \rangle_{\tilde{\Gamma}_D} \end{cases} \quad (3.32d)$$

$$\begin{cases} l_5 = \langle \frac{\alpha}{h^\perp} (w^h + \nabla w^h \cdot \vec{d}), u^h + \nabla u^h \cdot \vec{d} \rangle_{\tilde{\Gamma}_D} - \langle \frac{\alpha}{h^\perp} (w^h + \nabla w^h \cdot \vec{d}), \widetilde{u}_D \rangle_{\tilde{\Gamma}_D} \end{cases} \quad (3.32e)$$

$$\begin{cases} l_6 = \langle w^h, f \rangle_{\tilde{\Omega}} \end{cases} \quad (3.32f)$$

auquel nous pouvons ajouter un terme de pénalisation tangentielle (optionnel)

$$l_7 = \underbrace{\langle \beta h^T \nabla w^h \cdot \vec{\tau}, \nabla u^h \cdot \vec{\tau} \rangle_{\tilde{\Gamma}_D}}_{=:l_a} - \underbrace{\langle \beta h^T \nabla w^h \cdot \vec{\tau}, \nabla \widetilde{u}_D \cdot \vec{\tau} \rangle_{\tilde{\Gamma}_D}}_{=:l_L} \quad (3.33)$$

Permettant de réécrire tout le problème variationnel comme

Trouver  $u^h \in V^h(\Omega)$  tel que  $\forall w^h \in V^h(\Omega)$ ,

$$a(w^h, u^h) = L(w^h) \quad (3.34)$$

$$a(w^h, u^h) := \langle \nabla w^h, \nabla u^h \rangle_{\tilde{\Omega}} + a_{sb}^{\Gamma_D}(w^h, u^h) + a_{pen}^{\Gamma_D} + a_{conf}^{\Gamma_N}$$

$$L(w^h) := \langle w^h, f \rangle_{\tilde{\Omega}} + L_{sb}^{\Gamma_D}(\varphi) + L_{pen}^{\Gamma_D}(\varphi) + L_{conf}^{\Gamma_N}(\varphi)$$

avec

$$a_{sb}^{\Gamma_D} := - \langle w^h, \nabla u^h \cdot \vec{n} \rangle_{\tilde{\Gamma}_D} - \langle \nabla w^h \cdot \vec{n}, u^h \rangle_{\tilde{\Gamma}_D} - \langle \nabla w^h \cdot \vec{n}, \nabla u^h \cdot \vec{d} \rangle_{\tilde{\Gamma}_D}$$

$$a_{pen}^{\Gamma_D} := \langle \frac{\alpha}{h^\perp} (w^h + \nabla w^h \cdot \vec{d}), u^h + \nabla u^h \cdot \vec{d} \rangle_{\tilde{\Gamma}_D}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{conf}^{\Gamma_N} &:= \left\langle \mathbf{w}^h, \nabla \mathbf{u}^h \cdot \vec{\mathbf{n}} \right\rangle_{\Gamma_N} \\
L_{sb}^{\Gamma_D}(\varphi) &:= - \left\langle \nabla \mathbf{w}^h \cdot \vec{\tilde{\mathbf{n}}}, \widetilde{u_D} \right\rangle_{\widetilde{\Gamma_D}} \\
L_{pen}^{\Gamma_D}(\varphi) &:= \left\langle \frac{\alpha}{h^\perp} \left( \mathbf{w}^h + \nabla \mathbf{w}^h \cdot \vec{\mathbf{d}} \right), \widetilde{u_D} \right\rangle_{\widetilde{\Gamma_D}} \\
L_{conf}^{\Gamma_N}(\varphi) &:= \left\langle \mathbf{w}^h, t_N \right\rangle_{\Gamma_N}
\end{aligned}$$

Il est utile de remarquer que  $\mathbf{a}$  n'est pas symétrique à cause de la présence de terme  $\left\langle \nabla \mathbf{u}^h \cdot \vec{\tilde{\mathbf{n}}}, \nabla \mathbf{w}^h \cdot \vec{\mathbf{d}} \right\rangle_{\widetilde{\Gamma_D}}$ . En se rappelant que  $\vec{\mathbf{d}} = \|\vec{\mathbf{d}}\| \vec{\mathbf{n}}$ , comme dans Main and Scovazzi [12], il est possible de symétriser la fonction  $\mathbf{a}$ .

### 3.2.3 Réécriture de l'équation de ondes sous forme variationnelle

Reprenons l'équation des ondes (1.85) avec les conditions de bords établies naturellement au vu des définitions précédentes dans un modèle sans rotations.

$$\begin{cases}
\partial_{tt}\zeta - c_0^2 \Delta \zeta + \chi_{dam} \zeta_t = 0 & \text{dans } \Omega_w & (3.35a) \\
\chi_{dam}(\vec{\mathbf{x}}) = \frac{\mathbf{1}_{\Omega_{dam}}(\vec{\mathbf{x}})}{\text{dist}(\vec{\mathbf{x}}, \Gamma_{out}^{ext})} & \text{dans } \Omega_w & (3.35b) \\
\zeta = \zeta_{inlet} & \text{sur } \Gamma_{in}^{ext} & (3.35c) \\
\zeta = \zeta_{outlet} = 0 & \text{sur } \Gamma_{out}^{ext} & (3.35d) \\
\nabla \zeta \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Wall+}^{ext} \cup \Gamma_{Wall-}^{ext} & (3.35e) \\
d_0 \Delta \Pi = \partial_{tt}\zeta - c_0^2 \Delta \zeta & \text{dans } \Omega_b & (3.35f) \\
\zeta_{tt} = \vec{\mathbf{d}}_g \cdot \begin{bmatrix} -\nabla \zeta \\ 1 \end{bmatrix} & \text{dans } \Omega_b \text{ (2.37) \& (2.40)} & (3.35g) \\
g \zeta_{out} = g \zeta_{in} + \Pi_{in} & \text{sur } \Gamma & (3.35h)
\end{cases}$$

Nous utiliserons la notation produit scalaire sur  $\ell^2$ , les indices  $w, b$  et  $f$  font respectivement référence aux domaines  $\Omega_w, \Omega_b$  et  $\Omega_f$ . Nous partons de l'équation des ondes (1.85). Et nous appliquons la formulation trouvée dans la section précédente pour une frontière déplacée  $\tilde{\Gamma}$  correspondant à  $\Gamma = \Omega_w \cap \Omega_b$ .

Dans  $\Omega_w$ , nous avons la formulation variationnelle suivante, obtenue par la section précédente en remplaçant la taille maximale des cellules  $h^\perp$  par  $\lambda$ , et nous omettrons volontairement les exposants  $\cdot^h$ , de plus nous prendrons la forme non-symétrique de la formule dégagée dans la section précédente,

Trouver  $\zeta \in V^h(\Omega_f)$  tel que  $\forall \varphi \in V^h(\Omega_f)$ ,

$$\mathbf{a}_1^{time/dam}(\varphi, \zeta) + \mathbf{a}_1^{space}(\varphi, \zeta) = L_1(\varphi) \quad (3.36)$$

l'indice  $\cdot_1$  fait ici référence à la formulation variationnelle dans  $\Omega_w$ , les exposants *time space* et *dam* font respectivement référence à au temps, à la partie spatiale et à la partie "amortissement" de la formulation variationnelle.

- pour les dérivées temporelles

$$\mathbf{a}_1^{time/dam}(\varphi, \zeta) := \partial_{tt} \langle \varphi, \zeta \rangle_{\widetilde{\Omega_w}} + \partial_t \langle \varphi, \chi_{dam} \zeta \rangle_{\widetilde{\Omega_w}} \quad (3.37)$$

- pour la partie spatiale

$$\mathbf{a}_1^{space}(\varphi, \zeta) := \langle \nabla \varphi, \nabla \zeta \rangle_{\widetilde{\Omega_w}} + \mathbf{a}_{sb,1}^{\Gamma}(\varphi, \zeta) + \mathbf{a}_{conf,1}^{\Gamma_{ext}}(\varphi, \zeta) + \mathbf{a}_{pen,1}(\varphi, \zeta) \quad (3.38)$$

- le second membre

$$L_1(\varphi) := L_{sb,1}^\Gamma(\varphi) + L_{conf,1}^{\Gamma^{ext}}(\varphi) + L_{pen,1}(\varphi) \quad (3.39)$$

où nous avons

$$a_{sb,1}^\Gamma(\varphi, \zeta) := -\langle \varphi, \nabla \zeta \cdot \tilde{\mathbf{n}} \rangle_{\tilde{\Gamma}} - \langle \nabla \varphi \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \zeta \rangle_{\tilde{\Gamma}} - \langle \nabla \varphi \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \nabla \zeta \cdot \vec{\mathbf{d}} \rangle_{\tilde{\Gamma}} \quad (3.40a)$$

$$a_{conf,1}^{\Gamma^{ext}}(\varphi, \zeta) := -\langle \varphi, \nabla \zeta \cdot \vec{\mathbf{n}} \rangle_{\Gamma_{Wall+}^{ext} \cup \Gamma_{Wall-}^{ext}} - \langle \nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{n}}, \zeta \rangle_{\Gamma_{in}^{ext} \cup \Gamma_{out}^{ext}} \quad (3.40b)$$

$$a_{pen,1}(\varphi, \zeta) := \left\langle \frac{\alpha}{\lambda} (\varphi + \nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{d}}), \zeta + \nabla \zeta \cdot \vec{\mathbf{d}} \right\rangle_{\tilde{\Gamma}} + \left\langle \frac{\alpha}{\lambda} \varphi, \zeta \right\rangle_{\Gamma_{in}^{ext} \cup \Gamma_{out}^{ext}} \quad (3.40c)$$

$$L_{sb,1}^\Gamma(\varphi) := -\langle \nabla \varphi \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\zeta}_{out} \rangle_{\tilde{\Gamma}} \quad (3.40d)$$

$$L_{conf,1}^{\Gamma^{ext}}(\varphi) := -\langle \nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{n}}, \zeta_{inlet} \rangle_{\Gamma_{in}^{ext}} - \langle \nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{n}}, \zeta_{outlet} \rangle_{\Gamma_{out}^{ext}} \quad (3.40e)$$

$$L_{pen,1}(\varphi) := \left\langle \frac{\alpha}{\lambda} (\varphi + \nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{d}}), \tilde{\zeta}_{out} \right\rangle_{\tilde{\Gamma}} + \left\langle \frac{\alpha}{\lambda} \varphi, \zeta_{inlet} \right\rangle_{\Gamma_{in}^{ext}} + \left\langle \frac{\alpha}{\lambda} \varphi, \zeta_{outlet} \right\rangle_{\Gamma_{out}^{ext}} \quad (3.40f)$$

Tandis que dans  $\Omega_b$  nous avons le problème variationnel suivant

Trouver  $\Pi \in V^h(\Omega_f)$  tel que  $\forall \varphi \in V^h(\Omega_f)$ ,

$$a_2(\varphi, \Pi) = L_2(\varphi) \quad (3.41)$$

l'indice  $\cdot_2$  fait ici référence à la formulation variationnelle dans  $\Omega_b$ . Et nous avons avec

$$a_2(\varphi, \Pi) := \langle \nabla \varphi, \nabla \Pi \rangle_{\tilde{\Omega}_b} + a_{sb,2}^\Gamma(\varphi, \Pi) + a_{pen,2}^\Gamma(\varphi, \Pi) \quad (3.42)$$

et

$$L_2(\varphi) := L_{\zeta,2}(\varphi) + L_{sb,2}^\Gamma(\varphi) + L_{pen,2}^\Gamma(\varphi) \quad (3.43)$$

où

$$a_{sb,2}^\Gamma(\varphi, \Pi) := -\langle \varphi + \nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{d}}, \nabla \Pi \cdot \tilde{\mathbf{n}} \rangle_{\tilde{\Gamma}} - \langle \nabla \varphi \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \Pi + \nabla \Pi \cdot \vec{\mathbf{d}} \rangle_{\tilde{\Gamma}} + \langle \nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{d}}, \nabla \Pi \cdot \vec{\mathbf{n}} \rangle_{\tilde{\Gamma}} \quad (3.44a)$$

$$a_{pen,2}^\Gamma(\varphi, \Pi) := \left\langle \frac{\alpha}{\lambda} (\varphi + \nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{d}}), \Pi + \nabla \Pi \cdot \vec{\mathbf{d}} \right\rangle_{\tilde{\Gamma}} \quad (3.44b)$$

$$L_{\zeta,2}(\varphi) := \frac{\ddot{g}}{d_0} \langle \varphi, 1 \rangle_{\tilde{\Omega}_b} - \frac{\ddot{x}g}{d_0} \langle \varphi, \partial_x \zeta \rangle_{\tilde{\Omega}_b} - \frac{\ddot{y}g}{d_0} \langle \varphi, \partial_y \zeta \rangle_{\tilde{\Omega}_b} - g \langle \varphi, \Delta \zeta \rangle_{\tilde{\Omega}_b} \quad (3.44c)$$

$$L_{sb,2}^\Gamma(\varphi) := -\langle \nabla \varphi \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\Pi}_{in} \rangle_{\tilde{\Gamma}} \quad (3.44d)$$

$$L_{pen,2}^\Gamma(\varphi) := \left\langle \frac{\alpha}{\lambda} (\varphi + \nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{d}}), \tilde{\Pi}_{in} \right\rangle_{\tilde{\Gamma}} \quad (3.44e)$$

### 3.3 Éléments P1-Lagrange

Dans cette section nous réécrivons les problèmes variationnels obtenus précédemment en P1-Lagrange avec une méthode de Galerkin. Nous supposons la méthode des éléments finis P1 en 2D déjà connue est seuls les calculs les plus importants seront détaillés.

Nous rappelons l'élément de référence 2D utilisé dans la suite des développements :

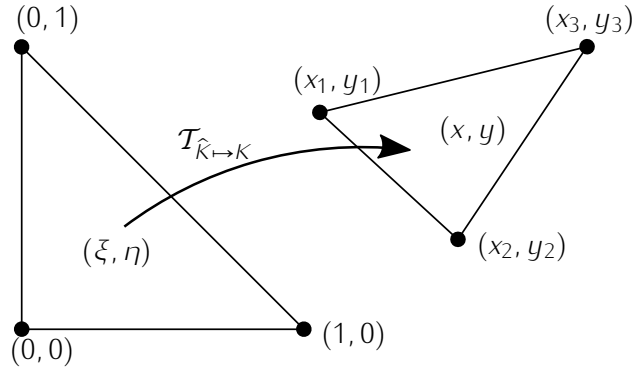


FIGURE 3.3 – Éléments de référence en 2D

Où la fonction de passage entre l'élément de référence  $\hat{K}$  et un élément  $K$  est

$$\mathcal{T}_{\hat{K} \mapsto K}(\xi, \eta) := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

avec comme matrice jacobienne

$$\mathbf{J}_{\mathcal{T}_{\hat{K} \mapsto K}} := \text{Jac} [\mathcal{T}_{\hat{K} \mapsto K}] = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Remarquons que

$$\det(\mathbf{J}_{\mathcal{T}_{\hat{K} \mapsto K}}) = 2|K| =: 2 \text{Aire}(K) \quad (3.47)$$

et donc nous avons

$$\mathbf{J}_{\mathcal{T}_{\hat{K} \mapsto K}}^{-1} = \frac{1}{2|K|} \text{Com}(\mathbf{J}_{\mathcal{T}_{\hat{K} \mapsto K}})^T = \frac{1}{2|K|} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}.$$

Nous rappelons aussi les 3 fonctions d'interpolations P1 sur l'élément de référence, ainsi que leur gradients

$i$	$\hat{\varphi}_i$	$\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i$
1	$1 - \xi - \eta$	$[-1, -1]^T$
2	$\xi$	$[1, 0]^T$
3	$\eta$	$[0, 1]^T$

Remarquons aussi que  $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j = \delta_{ij} \frac{1}{24} + \frac{1}{24} \quad (3.48)$$

Nous rappelons aussi la formule de changement de variables dans une intégrale en annexe (A.7).

### 3.3.1 Système dans $\Omega_w$

Nous définissons la discrétisation de  $\zeta$  sur un élément  $K$  comme

$$[\zeta]^K := \{\zeta_j\}_{j=1,3} \quad (3.49)$$

et une approximation de la fonction  $\chi_{dam}$  sur  $K$  comme

$$\widetilde{\chi_{dam}}^K := \sum_{j=1}^3 \frac{\chi_{dam}(x_j, y_j)}{3}. \quad (3.50)$$



### Partie temporelle

La partie temporelle de la formulation variationnelle est contenue dans  $\mathbf{a}^{time/dam}$  (3.37). Nous notons l'opérateur de dérivée seconde  $T^{(2)}$  et l'opérateur de dérivée première  $T^{(1)}$  : nous y reviendrons ensuite. Après calculs,  $\mathbf{a}^{time/dam}$  en formulation variationnelle élémentaire devient

$$\left[ \mathbf{a}^{time/dam} \right]^K = |K| RT^{(2)} [\zeta]^K + \widetilde{\chi_{dam}}^K |K| RT^{(1)} [\zeta]^K \quad (3.51)$$

avec

$$R = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

### Partie spatiale

Prenons en premier lieu la partie sur  $\widetilde{\Omega}_w$  de (3.38) :

$$[W]_{ij} = \iint_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = 2|K| \iint_{\widehat{K}} \mathbf{J}_{T_{\widehat{K} \rightarrow K}}^{-T} \widehat{\nabla} \widehat{\varphi}_i \cdot \mathbf{J}_{T_{\widehat{K} \rightarrow K}}^{-T} \widehat{\nabla} \widehat{\varphi}_j \quad (3.53)$$

Prenons en premier lieu (3.40a) :

$$[R]_{ij} = \iint_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy = 2|K| \iint_{\widehat{K}} (\nabla \varphi_i)^T \mathbf{J}_{T_{\widehat{K} \rightarrow K}}^{-1} \mathbf{J}_{T_{\widehat{K} \rightarrow K}}^{-T} \nabla \varphi_j d\xi d\eta \quad (3.54)$$

### 3.3.2 Système dans $\Omega_b$

### 3.3.3 Schéma Newmark

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Au = F \quad (3.55)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t \ddot{u}_\alpha & (3.56a) \\ \text{avec } \ddot{u}_\alpha = \alpha \ddot{u}_n + (1 - \alpha) \ddot{u}_{n+1} & (3.56b) \\ u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_\beta & (3.56c) \\ \text{avec } \ddot{u}_\beta = 2\beta \ddot{u}_n + (1 - 2\beta) \ddot{u}_{n+1} & (3.56d) \end{cases}$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \partial_t u_n + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{2t} u_n + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{3t} u_n + \frac{\Delta t^4}{24} \partial_{4t} u_n + \frac{\Delta t^5}{120} \partial_{5t} u_n \quad (3.57)$$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2\Delta t \partial_t u_{n-1} + 2\Delta t^2 \partial_{2t} u_{n-1} + \frac{4\Delta t^3}{3} \partial_{3t} u_{n-1} + \frac{2\Delta t^4}{3} \partial_{4t} u_{n-1} + \frac{4\Delta t^5}{15} \partial_{5t} u_{n-1} \quad (3.58)$$

$$\ddot{u} \quad (3.59)$$

## Chapitre 4

# Résultats numériques

## Chapitre 5

# Soliton

Bocchi [1] Bosi [2] Burman [3] Casulli and Walters [4] Chouly [5] Chouly et al. [6] Darrozès and Francois [7] Lannes [9] LeVeque [10] Li et al. [11] Main and Scovazzi [12] Main and Scovazzi [13] Nouveau et al. [14] Pons [15] Song et al. [16] Toro [17] Vallis [18] Wahl [19]

# Table des figures

1.1	Modèle 1D bathymétrique avec flotteur. . . . .	7
1.2	Modèle 2D bathymétrique avec flotteur. . . . .	7
2.1	Modèle 2D – caractéristiques du flotteur. . . . .	19
3.1	La méthode <i>Shifted Boundary</i> (SB). . . . .	26
3.2	Les différents bords. . . . .	27
3.3	Élément de référence en <b>2D</b> . . . . .	31

# Liste des tableaux

B.1	Correspondance des vecteurs entre $K$ et $\partial K$ .	43
B.2	Élément physique : Emp0N.	44
B.3	Élément Lagrange : Emp0N0DDL	44
B.4	Élément physique : Ver1N.	44
B.5	Élément Lagrange : Ver1N1DDL	44
B.6	Élément physique : Lin2N.	45
B.7	Élément Lagrange : Lin2N2DDL	45
B.8	Élément physique : Lin3N.	45
B.9	Élément Lagrange : Lin3N3DDL	45
B.10	Élément physique : Tri3N.	46
B.11	Élément Lagrange : Tri3N3DDL	46
B.12	Élément physique : Tri6N.	46
B.13	Élément Lagrange : Tri6N6DDL	46
B.14	Élément physique : Quad4N.	47
B.15	Élément Lagrange : Quad4N4DDL	47
B.16	Élément physique : Quad8N.	47
B.17	Élément Lagrange : Quad8N8DDL	47
B.18	Élément physique : Quad9N.	48
B.19	Élément Lagrange : Quad9N9DDL	48
B.20	Élément physique : Tet4N.	48
B.21	Élément Lagrange : Tet4N4DDL	48
B.22	Quadrature de Gauss-Legendre (1D) (source Fortin and Geron [8])	49
B.23	Quadrature de Hammer (2D) (source Fortin and Geron [8])	49

# Bibliographie

- [1] Bocchi, Edoardo : *Compressible-incompressible transitions in fluid mechanics : waves-structures interaction and rotating fluids*, Université de Bordeaux, PhD dissertation, 2019. – URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02371058>
- [2] Bosi, Umberto : *A unified spectral/hp element depth-integrated Boussinesq model for nonlinear wavefloating body interaction*, Université de Bordeaux, PhD dissertation, 2019. – URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02297587>
- [3] BURMAN, Erik : Ghost penalty. In : *Comptes Rendus Mathématique* 348 (2010), November, Nr. 21–22, S. 1217–1220. – URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1631073X10002827>. – Zugriffsdatum : 2020-07-14. – ISSN 1631073X
- [4] CASULLI, Vincenzo; WALTERS, Roy A. : An unstructured grid, three-dimensional model based on the shallow water equations. In : *International journal for numerical methods in fluids* 32 (2000), Nr. 3, S. 331–348
- [5] CHOULY, Franz : *Contribution au traitement des conditions limites et d'interface dans le cadre de la Méthode des Éléments Finis*, Université de Franche-Comté, Habilitation à diriger des recherches, December 2013. – URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00981356>
- [6] CHOULY, Franz; FABRE, Mathieu; HILD, Patrick; MLIKA, Rabii; POUSIN, Jérôme; RENARD, Yves : An Overview of Recent Results on Nitsche's Method for Contact Problems. In : BORDAS, Stéphane P. A. (Hrsg.); BURMAN, Erik (Hrsg.); LARSON, Mats G. (Hrsg.); OLSHANSKII, Maxim A. (Hrsg.) : *Geometrically Unfitted Finite Element Methods and Applications* Bd. 121. Cham : Springer International Publishing, 2017, S. 93–141. – URL [http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-71431-8\\_4](http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-71431-8_4). – Zugriffsdatum : 2020-06-18. – ISBN 9783319714301 9783319714318
- [7] DARROZÈS, Jean-Sylvestre; FRANCOIS, Claude : *Mécanique des fluides incompressibles*. 1998. – OCLC : 494019189. – ISBN 9782722509009
- [8] FORTIN, André; GARON, André : *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. URL [https://giref.ulaval.ca/afortin/elements\\_finis.pdf](https://giref.ulaval.ca/afortin/elements_finis.pdf), 2020
- [9] LANNES, David : On the Dynamics of Floating Structures. In : *Annals of PDE* 3 (2017), June, Nr. 1, S. 11. – URL <http://link.springer.com/10.1007/s40818-017-0029-5>. – Zugriffsdatum : 2020-07-08. – ISSN 2199-2576
- [10] LEVEQUE, Randall J. : *Numerical methods for conservation laws*. 2nd ed. Basel ; Boston : Birkhauser Verlag, 1992 (Lectures in mathematics ETH Zurich). – ISBN 9783764327231 9780817627232
- [11] LI, Kangan; ATALLAH, Nabil M.; MAIN, G. A.; SCOVAZZI, Guglielmo : The Shifted Interface Method : A flexible approach to embedded interface computations. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 121 (2020), February, Nr. 3, S. 492–518. – URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.6231>. – Zugriffsdatum : 2020-07-15. – ISSN 0029-5981, 1097-0207
- [12] MAIN, A.; SCOVAZZI, G. : The shifted boundary method for embedded domain computations. Part I : Poisson and Stokes problems. In : *Journal of Computational Physics* 372 (2018), November, S. 972–995. – ISSN 00219991

- [13] MAIN, A.; SCOVAZZI, G. : The shifted boundary method for embedded domain computations. Part II : Linear advection–diffusion and incompressible Navier–Stokes equations. In : *Journal of Computational Physics* 372 (2018), November, S. 996–1026. – URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021999118300330>. – Zugriffsdatum : 2020-07-14. – ISSN 00219991
- [14] NOUVEAU, L.; RICCHIUTO, M.; SCOVAZZI, G. : High-order gradients with the shifted boundary method : An embedded enriched mixed formulation for elliptic PDEs. In : *Journal of Computational Physics* 398 (2019), December, S. 108898. – ISSN 00219991
- [15] PONS, Kévin : *Modélisation des tsunamis : propagation et impact*, Université de Toulon, PhD dissertation, 2018. – URL <http://www.theses.fr/2018TOUL0014/document>
- [16] SONG, Ting; MAIN, Alex; SCOVAZZI, Guglielmo; RICCHIUTO, Mario : The shifted boundary method for hyperbolic systems : Embedded domain computations of linear waves and shallow water flows / Inria Bordeaux Sud-Ouest. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01671990>, December 2017 (RR-9136). – Research Report. – 1–56 S
- [17] TORO, E. F. : *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. 3rd ed. Dordrecht; New York : Springer, 2009. – OCLC : ocn401321914. – ISBN 9783540252023 9783540498346
- [18] VALLIS, Geoffrey K. : *Atmospheric and oceanic fluid dynamics : fundamentals and large-scale circulation*. Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – OCLC : ocm70671784. – ISBN 9780521849692
- [19] WAHL, Fabien : *Modeling and analysis of interactions between free surface flows and floating structures*, Sorbonne Université, Theses, December 2018. – URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01955798>

# Annexe A

## Aide-mémoire

### A.1 Opérateurs et coordonnées

Dans ce rapport nous utiliserons un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  orthonormée sur  $\mathbb{R}^3$  et une variable temporelle désignée par  $t$ . Les systèmes de coordonnées *sphériques* et *cylindriques* peuvent être obtenus par simple dérivation à l'aide de la formule de dérivées en chaîne :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{A.1})$$

Soit la quantité  $\phi$  qui dépend des coordonnées spatiales et temporelle dénotée

$$\phi(x, y, z, t).$$

Les équations qui gouvernent les phénomènes physiques peuvent faire apparaître des *dérivées partielles* de  $\phi$  et en conséquence elles seront abrégées **PDEs** pour **partial differential equations**.

Nous utiliserons donc les notations suivantes

$$\phi_\alpha = \partial_\alpha \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \quad \text{et} \quad \partial_\alpha^2 \phi = \partial_{\alpha\alpha} \phi = \partial_\alpha \phi_\alpha = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} \quad \alpha = x, y, z, t$$

Ainsi que de multiples opérateurs, tels que

- le **produit scalaire** entre  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  et  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3,$$

- le **produit vectoriel** entre  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} v_2 u_3 - v_3 u_2 \\ v_3 u_1 - v_1 u_3 \\ v_1 u_2 - v_2 u_1 \end{bmatrix},$$

- le **produit tensoriel** entre  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$

$$\vec{v} \otimes \vec{u} = \begin{bmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & v_1 u_3 \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & v_2 u_3 \\ v_3 u_1 & v_3 u_2 & v_3 u_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} \otimes \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2^2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z} = [0],$$

- l'opérateur **gradient** pour une quantité scalaire  $\phi$

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z),$$

- l'opérateur de **divergence** appliqué à un vecteur  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3,$$



- l'opérateur **rotationnel** appliqué à  $\vec{v}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{bmatrix},$$

- l'opérateur **laplacien**

$$\Delta \vec{v} = \partial_x^2 v_1 + \partial_y^2 v_2 + \partial_z^2 v_3.$$

- l'opérateur **d'advection**

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \partial_x v_1 + v_2 \partial_y v_1 + v_3 \partial_z v_1 \\ v_1 \partial_x v_2 + v_2 \partial_y v_2 + v_3 \partial_z v_2 \\ v_1 \partial_x v_3 + v_2 \partial_y v_3 + v_3 \partial_z v_3 \end{bmatrix}$$

Le théorème de Gauss (aussi appelé formule de Green), nous avons

$$\iint_A \vec{n} \cdot \vec{\psi} dA = \iiint_V \text{div } \vec{\psi} dV \quad (\text{A.2})$$

où  $\vec{\psi}$  est un champ vectoriel et  $\vec{n}$  un vecteur normal sortant à la surface  $A$ .

Décomposition grâce au produit tensoriel :

$$(\vec{n} \cdot \rho \vec{u}) \vec{u} = \vec{n} \cdot \rho \vec{u} \otimes \vec{u} \quad (\text{A.3})$$

Divergence d'un produit tensoriel :

$$\text{div} (\vec{v} \otimes \vec{u}) = \vec{u} (\text{div } \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (\text{A.4})$$

Décomposition de Lamb :

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{2} \nabla \vec{u}^2 + (\vec{\text{rot}} \vec{u}) \times \vec{u} \quad (\text{A.5})$$

**Théorème d'intégration de Leibniz** avec  $f, \partial_{x,y,z} f$  continues et  $\alpha(x, y, t)$  et  $\beta(x, y, t)$  des fonctions différentiables de  $x, y$  et  $z$  et donc à  $\star = (x, y)$  fixé nous avons

$$\int_{\alpha(\star, t)}^{\beta(\star, t)} \partial_x f(\star, z, t) dz = \partial_x \left[ \int_{\alpha(\star, t)}^{\beta(\star, t)} f(\star, z, t) dz \right] + f(\star, \alpha(\star, t)) \alpha_x(\star, t) - f(\star, \beta(\star, t)) \beta_x(\star, t) \quad (\text{A.6})$$

**Changement de variable dans une intégrale** avec  $f$  une fonction continue,  $\Phi$  un  $C^1$ -difféomorphisme

$$\iint_{\Phi(I)} f(\vec{x}) d\vec{x} = \iint_I f(\Phi(\vec{u})) |\det J_\Phi(\vec{u})| d\vec{u} \quad (\text{A.7})$$

**Formule de Green** dans  $u, v \in \mathcal{H}^1$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot v d\vec{x} = - \iiint_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} d\vec{x} + \iint_{\Gamma=\partial\Omega} \gamma_0(u) \cdot \gamma_0(v) \cdot \vec{n}_k d\vec{\sigma}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (\text{A.8})$$

**Formules de Green** dans  $\mathcal{H}^2$

- $u, v \in \mathcal{H}^2$

$$\iiint_\Omega \Delta u \cdot v d\vec{x} = \iiint_\Omega u \cdot \Delta v d\vec{x} + \iint_{\Gamma=\partial\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right] d\vec{\sigma}. \quad (\text{A.9a})$$

- $u \in \mathcal{H}^2$  et  $v \in \mathcal{H}^1$

$$\iiint_\Omega \Delta u \cdot v d\vec{x} = - \iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\vec{x} + \iint_{\Gamma=\partial\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \gamma_0(v) \right] d\vec{\sigma}. \quad (\text{A.9b})$$

## A.2 Quantités physique

Pour un fluide nous pouvons être amené à étudier différentes quantités physiques telles que

- sa masse notée  $m$ ,
- la masse volumique  $\rho$ ,
- sa vitesse  $\vec{u} = (u, v, w)$ ,
- la quantité de mouvement  $\vec{p} = \rho \vec{u}$ ,
- la pression thermodynamique  $P$ ,
- l'énergie total par unité de masse, notée  $E$ ,
- l'énergie interne massique  $e$ ,
- l'entropie  $s$ ,
- l'enthalpie  $h$ ,
- la température  $T$ , et
- l'accélération gravitationnelle terrestre  $g$  de  $9.81 \text{ m/s}^2$ .

La pression  $P$ , le volume et la température  $T$  forment les **variables d'état** d'un système. Chacune de ces variables peut être extensive ou intensive, respectivement définie sur l'ensemble du système considéré ou considérée égale en tout point du système.

Les autres variables apparaissant dans le système peuvent toujours être exprimée à partir des variables d'état par une **fonction d'état**.

## Annexe B

# Aide éléments finis

### B.1 Éléments finis de type Lagrange

Nous présentons ici une courte liste des éléments finis de type Lagrange utilisés dans ce stage.

#### B.1.1 Fonctions de transformation

Nous rappelons aussi que l'application qui permet de passer de l'élément de référence à l'élément réel est donnée par

$$\vec{x} = \mathcal{T}_K^K(\vec{\xi}) = \sum_{i=0}^{n_p[K]} \hat{\phi}_i(\vec{\xi}) p_i \quad (\text{B.1})$$

où  $n_p[K]$  est le nombre de points qui définissent la géométrie *physique* de l'élément, ainsi c'est aussi le nombre de fonctions de base locale ( $\hat{\phi}_i$ ) (nombre de  $p_i = (p_{i,0}, p_{i,1}, p_{i,2})^T$ ). Nous abrégeons les vecteurs de coordonnées comme suit

$$\vec{x} = (x, y, z) \quad \vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta). \quad (\text{B.2})$$

L'application inverse  $\mathcal{T}_K^K(\vec{x}) = (\mathcal{T}_K^K)^{-1}(\vec{x})$  vérifiant

$$\vec{\xi} = \mathcal{T}_K^K(\vec{x}) \quad (\text{B.3})$$

peut être obtenue en appliquant l'algorithme de Newton-Raphson suivant

$$\begin{cases} \vec{\xi}_{n+1} = \vec{\xi}_n - [\text{Jac}_{\mathcal{F}}(\vec{\xi}_n)]^{-T} \mathcal{F}(\vec{\xi}_n) \end{cases} \quad (\text{B.4a})$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\vec{\xi}) = \mathcal{T}_K^K(\vec{\xi}) - \vec{x} \end{cases} \quad (\text{B.4b})$$

$$\begin{cases} [\text{Jac}_{\mathcal{F}}(\vec{\xi})] = [\text{Jac}_{\mathcal{T}_K^K}(\vec{\xi})] \end{cases} \quad (\text{B.4c})$$

#### B.1.2 Matrice jacobienne, son inverse et son déterminant

Nous noterons aussi  $[\mathbf{J}(\vec{\xi})] \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  la jacobienne de  $\mathcal{T}_K^K$  évaluée au point  $\vec{\xi}$  et  $\mathbf{j}(\vec{\xi})$  le déterminant de  $[\mathbf{J}(\vec{\xi})]$ .

Il est d'usage d'écrire cette matrice jacobienne à partir des gradients de  $\hat{\phi}(\vec{\xi})$  comme suit

$$[\mathbf{J}(\vec{\xi})] = \sum_{k=0}^{n_p[K]} p_k \otimes \hat{\nabla} \hat{\phi}_k(\vec{\xi}) \quad (\text{B.5})$$

où  $\otimes$  désigne le produit vectoriel.

Nombre de changement de variables sont à faire lors du calcul de matrices élémentaires, faisant intervenir notamment  $\left[\mathbf{J}(\vec{\xi})\right]^{-1}$ , or dans de nombreux cas (comme  $\mathcal{T}_{\hat{K}}^K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ )  $\left[\mathbf{J}(\vec{\xi})\right]$  n'est pas inversible. Ce problème a été résolu en prenant non pas  $\left[\mathbf{J}(\vec{\xi})\right]^{-1}$  mais la matrice pseudo inverse au sens de Moore-Penrose  $\left[\mathbf{J}(\vec{\xi})\right]^\dagger$  (vérifiant la propriété de faible inverse  $[\mathbf{J}][\mathbf{J}]^\dagger[\mathbf{J}] = [\mathbf{J}]$  et si  $[\mathbf{J}]^{-1}$  existe alors  $[\mathbf{J}]^\dagger = [\mathbf{J}]^{-1}$ ) calculée à partir de la relation  $[\mathbf{J}] = U\Sigma V^*$  comme

$$[\mathbf{J}]^\dagger = V\Sigma^\dagger U^* \quad (\text{B.6})$$

issue de la décomposition SVD de  $[\mathbf{J}]$ . Quant au déterminant, nécessaire lors des changements de variables, il est naturellement remplacé par le pseudo-déterminant calculé comme

$$j(\vec{\xi}) = \left| \prod_{\substack{i=0 \\ \sigma_i \neq 0}}^3 \sigma_i \right| \quad (\text{B.7})$$

où les  $\sigma_i$  sont les valeurs singulières de  $\left[\mathbf{J}(\vec{\xi})\right]$ .

### B.1.3 Vecteurs normaux et tangents

Pour tout élément  $K$  nous pouvons définir le bord de  $K$  comme  $\partial K := \bigcup_{i=0}^{n_e[K]} E_i^K$  où  $n_e[K]$  est le nombre d'élément de bord de  $K$ . Ainsi nous pouvons donner le vecteur normal de bord associé à  $K$

$$\vec{n}^{\partial K}(\vec{x}) = \left( \left[\mathbf{J}(\vec{\xi})\right]^\dagger \right)^T \vec{n}^{\partial \hat{K}}(\vec{\xi}) \quad \text{où} \quad \vec{\xi} = \mathcal{T}_{\hat{K}}^K(\vec{x}) \quad (\text{B.8})$$

avec le vecteur normal sur l'élément de référence est obtenue comme

$$\vec{n}^{\partial \hat{K}}(\vec{\xi}) = \sum_{i=0}^{n_e[\hat{K}]} \left| \widehat{\varphi}_{E_i}(\vec{\xi}) \right| \vec{n}_i^{\partial \hat{K}}(\vec{\xi}) \quad (\text{B.9})$$

où  $\vec{n}_i^{\partial \hat{K}}$  désigne le vecteur normal associé à l'élément de bord  $E_i^{\hat{K}}$  sur l'élément de référence  $\hat{K}$  et

$$\widehat{\varphi}_{E_i}(\vec{\xi}) = \prod_{j=0}^{n_p[E_i]} \hat{\varphi}_j(\vec{\xi}) \quad (\text{B.10})$$

désigne la fonction de base d'élément de bord.

Nous définissons aussi le vecteur tangent à  $\partial K$  comme

$$\vec{t}^{\partial K}(\vec{x}) = \left[\mathbf{J}(\vec{\xi})\right] \sum_{i=0}^{n_e[K]} \left| \widehat{\varphi}_{E_i}(\vec{\xi}) \right| \vec{t}_i^{\partial \hat{K}}(\vec{\xi}) \quad \text{où} \quad \vec{\xi} = \mathcal{T}_{\hat{K}}^K(\vec{x}) \quad (\text{B.11})$$

où  $\vec{t}_i^{\partial \hat{K}}$  désigne le vecteur tangent associé à l'élément de bord  $E_i^{\hat{K}}$  sur l'élément de référence  $\hat{K}$ . Au regard des définitions précédentes, nous pouvons établir les correspondances suivantes

$K$	$\iff$	$\partial K$
$\vec{t}_1^K$	$\iff$	$\vec{n}^{\partial \hat{K}}$
$\vec{t}_2^K$	$\iff$	$\vec{t}^{\partial \hat{K}}$
$\vec{n}^K := \vec{t}_1^K \otimes \vec{t}_2^K$	$\iff$	$\vec{c}^{\partial \hat{K}} = \vec{n}^{\partial \hat{K}} \otimes \vec{t}^{\partial \hat{K}}$

TABLE B.1 – Correspondance des vecteurs entre  $K$  et  $\partial K$ .

où  $\vec{n}^K$  désigne le vecteur normal sortant de  $K$  lorsqu'il existe, et dans ce cas là  $\vec{\tau}^{\partial K}$  désigne le vecteur normal sortant sur  $\partial K$  en tant que surface.

### B.1.4 Liste des éléments

#### Élément Emp0N0DDL

Code Soliton	Emp0N
► Type	0D
► Type physique	TYPE_EMPTY
► Mesure de référence	0
► POINTS	
• Nombre	0
• Liste	$\emptyset$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	0
• Type	$\emptyset$
• Liste	$\emptyset$
• $\vec{n}$	$\emptyset$
• $\vec{\tau}$	$\emptyset$

TABLE B.2 – Élément physique : Emp0N.

Code Soliton	Emp0N0DDL
► Élément physique	Emp0N
► Classe $P_k$	$P_0$
► Ordre de convergence	0
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\emptyset$
► $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\emptyset$

TABLE B.3 – Élément Lagrange : Emp0N0DDL

#### Élément Ver1N1DDL

Code Soliton	Ver1N
► Type	1D
► Type physique	TYPE_VERTEX
► Mesure de référence	0
► POINTS	
• Nombre	1
• Liste	$p_0 = (0, 0, 0)$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	0
• Type	$\emptyset$
• Liste	$\emptyset$
• $\vec{n}$	$\emptyset$
• $\vec{\tau}$	$\emptyset$

TABLE B.4 – Élément physique : Ver1N.

Code Soliton	Ver1N1DDL
► Élément physique	Ver1N
► Classe $P_k$	$P_0$
► Ordre de convergence	0
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\varphi}_0 = 1$
► $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\nabla}\hat{\varphi}_0 = (0, 0, 0)^T$

TABLE B.5 – Élément Lagrange : Ver1N1DDL

## Élément Lin2N2DDL

Code Soliton	Lin2N
► Type	2D
► Type physique	TYPE_LINE
► Mesure de référence	2
► POINTS	
• Nombre	2
• Liste	$p_0 = (-1, 0, 0)$ $p_1 = (1, 0, 0)$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	2
• Type	Ver1N
• Liste	$p_0$ $p_1$
• $\vec{n}$	$\vec{n}_0 = (-1, 0, 0)$ $\vec{n}_1 = (+1, 0, 0)$
• $\vec{\tau}$	$\vec{\tau}_0 = (+1, 0, 0)$

TABLE B.6 – Élément physique : Lin2N.

## Élément Lin3N3DDL

Code Soliton	Lin3N
► Type	2D
► Type physique	TYPE_LINE
► Mesure de référence	2
► POINTS	
• Nombre	3
• Liste	$p_0 = (-1, 0, 0)$ $p_1 = (+1, 0, 0)$ $p_2 = (0, 0, 0)$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	2
• Type	Ver1N
• Liste	$p_0$ $p_1$
• $\vec{n}$	$\vec{n}_0 = (-1, 0, 0)$ $\vec{n}_1 = (+1, 0, 0)$
• $\vec{\tau}$	$\vec{\tau}_0 = (+1, 0, 0)$

TABLE B.8 – Élément physique : Lin3N.

Code Soliton	Lin2N2DDL
► Élément physique	Lin2N
► Classe $P_k$	$P_1$
► Ordre de convergence	2
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\varphi}_0 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$ $\hat{\varphi}_1 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$
► $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\nabla}\hat{\varphi}_0 = (-\frac{1}{2}, 0, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_1 = (+\frac{1}{2}, 0, 0)^T$

TABLE B.7 – Élément Lagrange : Lin2N2DDL

Code Soliton	Ver3N3DDL
► Élément physique	Lin3N
► Classe $P_k$	$P_0$
► Ordre de convergence	0
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\varphi}_0 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$ $\hat{\varphi}_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$ $\hat{\varphi}_2 = 1 - \xi^2$
► $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\nabla}\hat{\varphi}_0 = (\xi - \frac{1}{2}, 0, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_1 = (\xi + \frac{1}{2}, 0, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_2 = (-2\xi, 0, 0)^T$

TABLE B.9 – Élément Lagrange : Lin3N3DDL

## Élément Tri3N3DDL

Code Soliton	Tri3N
► Type	2D
► Type physique	TYPE_TRIANGLE
► Mesure de référence	$\frac{1}{2}$
► POINTS	
• Nombre	3
• Liste	$p_0 = (0, 0, 0)$ $p_1 = (1, 0, 0)$ $p_2 = (0, 1, 0)$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	3
• Type	Lin2N
• Liste	$p_0 \rightarrow p_1$ $p_1 \rightarrow p_2$ $p_2 \rightarrow p_0$ $\vec{n}_0 = (0, -1, 0)$ $\vec{n}_1 = (+1, +1, 0)$ $\vec{n}_2 = (-1, 0, 0)$ $\vec{e}_0 = (+1, 0, 0)$ $\vec{e}_1 = (-1, +1, 0)$ $\vec{e}_2 = (0, -1, 0)$

TABLE B.10 – Élément physique : Tri3N.

## Élément Tri6N6DDL

Code Soliton	Tri6N
► Type	2D
► Type physique	TYPE_TRIANGLE
► Mesure de référence	$\frac{1}{2}$
► POINTS	
• Nombre	6
• Liste	$p_0 = (0, 0, 0)$ $p_1 = (1, 0, 0)$ $p_2 = (0, 1, 0)$ $p_3 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ $p_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ $p_5 = (0, \frac{1}{2}, 0)$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	2
• Type	Lin3N
• Liste	$p_0 \rightarrow p_3 \rightarrow p_1$ $p_1 \rightarrow p_4 \rightarrow p_2$ $p_2 \rightarrow p_5 \rightarrow p_0$ $\vec{n}_0 = (0, -1, 0)$ $\vec{n}_1 = (+1, +1, 0)$ $\vec{n}_2 = (-1, 0, 0)$ $\vec{e}_0 = (+1, 0, 0)$ $\vec{e}_1 = (-1, +1, 0)$ $\vec{e}_2 = (0, -1, 0)$

TABLE B.12 – Élément physique : Tri6N.

Code Soliton	Tri3N3DDL
► Élément physique	Tri3N
► Classe $P_k$	$P_1$
► Ordre de convergence	2
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\varphi}_0 = 1 - \xi - \eta$ $\hat{\varphi}_1 = \xi$ $\hat{\varphi}_2 = \eta$
► $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\nabla} \hat{\varphi}_0 = (-1, -1, 0)^T$ $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_1 = (1, 0, 0)^T$ $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_2 = (0, 1, 0)^T$

TABLE B.11 – Élément Lagrange : Tri3N3DDL

Code Soliton	Tri6N6DDL
► Élément physique	Tri3N
► Classe $P_k$	$P_2$
► Ordre de convergence	3
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\varphi}_0 = \lambda(2\lambda - 1)$ $\hat{\varphi}_1 = \xi(2\xi - 1)$ $\hat{\varphi}_2 = \eta(2\eta - 1)$ $\hat{\varphi}_3 = 4\xi\lambda$ $\hat{\varphi}_4 = 4\xi\eta$ $\hat{\varphi}_5 = 4\eta\lambda$
► $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\nabla} \hat{\varphi}_0 = (1 - 4\lambda, 1 - 4\lambda, 0)^T$ $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_1 = (4\xi - 1, 0, 0)^T$ $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_2 = (0, 4\eta - 1, 0)^T$ $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_3 = (4(\lambda - \xi), -4\xi, 0)^T$ $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_4 = (4\eta, 4\xi, 0)^T$ $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_5 = (-4\eta, 4(\lambda - \eta), 0)^T$
► $\lambda = 1 - \xi - \eta$	

TABLE B.13 – Élément Lagrange : Tri6N6DDL

## Élément Quad4N4DDL

Code Soliton	Quad4N
► Type	2D
► Type physique	TYPE_QUADRANGLE
► Mesure de référence	1
► POINTS	
• Nombre	4
• Liste	$p_0 = (-1, -1, 0)$ $p_1 = (+1, -1, 0)$ $p_2 = (+1, +1, 0)$ $p_3 = (-1, +1, 0)$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	4
• Type	Lin2N
• Liste	$p_0 \rightarrow p_1$ $p_1 \rightarrow p_2$ $p_2 \rightarrow p_3$ $p_3 \rightarrow p_0$

TABLE B.14 – Élément physique : Quad4N.

Code Soliton	Quad4N4DDL
► Élément physique	Quad4N
► Classe $P_k$	$P_1$
► Ordre de convergence	2
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\varphi}_0 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$ $\hat{\varphi}_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$ $\hat{\varphi}_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$ $\hat{\varphi}_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$
► $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\nabla}\hat{\varphi}_0 = \frac{1}{4}(\eta - 1, \xi - 1, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_1 = \frac{1}{4}(1 - \eta, -1 - \xi, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_2 = \frac{1}{4}(1 + \eta, 1 + \xi, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_3 = \frac{1}{4}(-1 - \eta, 1 - \xi, 0)^T$

TABLE B.15 – Élément Lagrange : Quad4N4DDL

## Élément Quad8N8DDL

Code Soliton	Quad8N
► Type	2D
► Type physique	TYPE_QUADRANGLE
► Mesure de référence	1
► POINTS	
• Nombre	8
• Liste	$p_0 = (-1, -1, 0)$ $p_1 = (+1, -1, 0)$ $p_2 = (+1, +1, 0)$ $p_3 = (-1, +1, 0)$ $p_4 = (0, -1, 0)$ $p_5 = (+1, 0, 0)$ $p_6 = (0, +1, 0)$ $p_7 = (-1, 0, 0)$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	4
• Type	Lin3N
• Liste	$p_0 \rightarrow p_4 \rightarrow p_1$ $p_1 \rightarrow p_5 \rightarrow p_2$ $p_2 \rightarrow p_6 \rightarrow p_3$ $p_3 \rightarrow p_7 \rightarrow p_0$

TABLE B.16 – Élément physique : Quad8N.

Code Soliton	Quad8N8DDL
► Élément physique	Quad8N
► Classe $P_k$	$P_2$
► Ordre de convergence	3
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\varphi}_0 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)$ $\hat{\varphi}_1 = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)$ $\hat{\varphi}_2 = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta)$ $\hat{\varphi}_3 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)$ $\hat{\varphi}_4 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$ $\hat{\varphi}_5 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$ $\hat{\varphi}_6 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$ $\hat{\varphi}_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$
► $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\nabla}\hat{\varphi}_0 = \frac{1}{4}((1 - \eta)(2\xi + \eta), (1 - \xi)(\xi + 2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_1 = \frac{1}{4}((1 - \eta)(2\xi - \eta), -(1 + \xi)(\xi - 2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_2 = \frac{1}{4}((1 + \eta)(2\xi + \eta), (1 + \xi)(\xi + 2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_3 = \frac{1}{4}((1 + \eta)(2\xi - \eta), -(1 - \xi)(\xi - 2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_4 = -\frac{1}{2}(2\xi(1 - \eta), 1 - \xi^2, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_5 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2, -\eta(1 + \xi), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_6 = \frac{1}{2}(-2\xi(1 + \eta), 1 - \xi^2, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_7 = -\frac{1}{2}(1 - \eta^2, \eta(1 - \xi), 0)^T$

TABLE B.17 – Élément Lagrange : Quad8N8DDL



## Élément Quad9N9DDL

Code Soliton	Quad9N
► Type	2D
► Type physique	TYPE_QUADRANGLE
► Mesure de référence	1
► POINTS	
• Nombre	9
• Liste	$p_0 = (-1, -1, 0)$ $p_1 = (+1, -1, 0)$ $p_2 = (+1, +1, 0)$ $p_3 = (-1, +1, 0)$ $p_4 = (0, -1, 0)$ $p_5 = (+1, 0, 0)$ $p_6 = (0, +1, 0)$ $p_7 = (-1, 0, 0)$ $p_8 = (0, 0, 0)$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	4
• Type	Lin3N
• Liste	$p_0 \rightarrow p_4 \rightarrow p_1$ $p_1 \rightarrow p_5 \rightarrow p_2$ $p_2 \rightarrow p_6 \rightarrow p_3$ $p_3 \rightarrow p_7 \rightarrow p_0$

TABLE B.18 – Élément physique : Quad9N.

Code Soliton	Quad9N9DDL
► Élément physique	Quad9N
► Classe $P_k$	$P_2$
► Ordre de convergence	3
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\varphi}_0 = \frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1-\eta)$ $\hat{\varphi}_1 = -\frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1-\eta)$ $\hat{\varphi}_2 = \frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1+\eta)$ $\hat{\varphi}_3 = -\frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1+\eta)$ $\hat{\varphi}_4 = -\frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(1-\eta)$ $\hat{\varphi}_5 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)(1-\eta^2)$ $\hat{\varphi}_6 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(1+\eta)$ $\hat{\varphi}_7 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)(1-\eta^2)$ $\hat{\varphi}_8 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$
► $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\nabla}\hat{\varphi}_0 = \frac{1}{4}(\eta(1-2\xi)(1-\eta), \xi(1-\xi)(1-2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_1 = -\frac{1}{4}(\eta(1+2\xi)(1-\eta), \xi(1+\xi)(1-2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_2 = \frac{1}{4}(\eta(1+2\xi)(1+\eta), \xi(1+\xi)(1+2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_3 = -\frac{1}{4}(\eta(1-2\xi)(1+\eta), \xi(1-\xi)(1+2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_4 = -\frac{1}{2}(-2(1-\eta)\xi\eta, (1-\xi^2)(1-2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_5 = \frac{1}{2}((1+2\xi)(1-\eta^2), -2(1+\xi)\xi\eta, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_6 = \frac{1}{2}(-2(1+\eta)\xi\eta, (1-\xi^2)(1+2\eta), 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_7 = -\frac{1}{2}((1-2\xi)(1-\eta^2), -2(1-\xi)\xi\eta, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_8 = -2((1-\eta^2)\xi, (1-\xi^2)\eta, 0)^T$

TABLE B.19 – Élément Lagrange : Quad9N9DDL

## Élément Tet4N4DDL

Code Soliton	Tet4N
► Type	2D
► Type physique	TYPE_TETRAHEDRON
► Mesure de référence	1
► POINTS	
• Nombre	4
• Liste	$p_0 = (0, 0, 0)$ $p_1 = (1, 0, 0)$ $p_2 = (0, 1, 0)$ $p_3 = (0, 0, 1)$
► ÉLÉMENT DE BORD	
• Nombre	6
• Type	Lin2N
• Liste	$p_0 \rightarrow p_1$ $p_0 \rightarrow p_2$ $p_0 \rightarrow p_3$ $p_1 \rightarrow p_2$ $p_1 \rightarrow p_3$ $p_2 \rightarrow p_3$

TABLE B.20 – Élément physique : Tet4N.

Code Soliton	Tet4N4DDL
► Élément physique	Tet4N
► Classe $P_k$	$P_2$
► Ordre de convergence	3
► $\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\varphi}_0 = 1 - \xi - \eta - \zeta$ $\hat{\varphi}_1 = \xi$ $\hat{\varphi}_2 = \eta$ $\hat{\varphi}_3 = \zeta$
► $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i(\text{rel}.p_i)$	$\hat{\nabla}\hat{\varphi}_0 = (-1, -1, -1)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_1 = (+1, 0, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_2 = (0, +1, 0)^T$ $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_3 = (0, 0, +1)^T$

TABLE B.21 – Élément Lagrange : Tet4N4DDL

## B.2 Quadratures

### B.2.1 Quadrature sur un élément de référence de type ligne

n	Points d'intégration $\xi_i$	Poids d'intégration $w_i$	Degré de précision
1	0	2	1
2	- 0,577 350 269 189 625 + 0,577 350 269 189 625	1	3
3	- 0,774 596 669 241 483 0,0 + 0,774 596 669 241 483	0,555 555 555 555 556 0,888 888 888 888 889 0,555 555 555 555 556	5
4	- 0,861 136 311 594 052 - 0,339 981 043 584 856 + 0,339 981 043 584 856 + 0,861 136 311 594 052	0,347 854 845 137 454 0,652 145 154 862 545 0,652 145 154 862 545 0,347 854 845 137 454	7
5	- 0,906 179 845 938 664 - 0,538 469 310 105 683 0,0 + 0,538 469 310 105 683 + 0,906 179 845 938 664	0,236 926 885 056 189 0,478 628 670 499 365 0,568 888 889 888 889 0,478 628 670 499 365 0,236 926 885 056 189	9

TABLE B.22 – Quadrature de Gauss-Legendre (1D) (source Fortin and Garon [8])

### B.2.2 Quadrature sur un élément de référence de type triangle

n	Points d'intégration $\xi_i$		Poids d'intégration $w_i$	Degré de précision
1	+0,333 333 333 333 3333	+0,333 333 333 333 3333	+0,500 000 000 000 0000	1
3	+0,666 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667	+0,166 666 666 666 6667 +0,666 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667	+0,166 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667	2
4	+0,333 333 333 333 3333 +0,2 +0,2 +0,6	+0,333 333 333 333 3333 +0,2 +0,6 +0,2	-0,281 250 000 000 0000 +0,260 416 666 666 6667 +0,260 416 666 666 6667 +0,260 416 666 666 6667	3
6	+0,108 103 018 168 070 +0,445 948 490 915 965 +0,445 948 490 915 965 +0,816 847 572 980 459 +0,091 576 213 509 771 +0,091 576 213 509 771	+0,445 948 490 915 965 +0,108 103 018 168 070 +0,445 948 490 915 965 +0,091 576 213 509 771 +0,816 847 572 980 459 +0,091 576 213 509 771	+0,111 690 794 839 0055 +0,111 690 794 839 0055 +0,111 690 794 839 0055 +0,054 975 871 827 6610 +0,054 975 871 827 6610 +0,054 975 871 827 6610	4
12	+0,873 821 971 016 996 +0,063 089 014 491 502 +0,063 089 014 491 502 +0,501 426 509 658 179 +0,249 286 745 170 910 +0,249 286 745 170 910 +0,249 286 745 170 910 +0,636 502 499 121 399 +0,636 502 499 121 399 +0,310 352 451 033 785 +0,310 352 451 033 785 +0,053 145 049 844 816 +0,053 145 049 844 816	+0,063 089 014 491 502 +0,873 821 971 016 996 +0,063 089 014 491 502 +0,249 286 745 170 910 +0,501 426 509 658 179 +0,249 286 745 170 910 +0,249 286 745 170 910 +0,310 352 451 033 785 +0,053 145 049 844 816 +0,636 502 499 121 399 +0,053 145 049 844 816 +0,310 352 451 033 785 +0,636 502 499 121 399	+0,025 422 453 185 1035 +0,025 422 453 185 1035 +0,025 422 453 185 1035 +0,058 393 137 863 1895 +0,058 393 137 863 1895 +0,058 393 137 863 1895 +0,058 393 137 863 1895 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870	6

TABLE B.23 – Quadrature de Hammer (2D) (source Fortin and Garon [8])