



Shifted Boundary Method pour un problème d'ondes linéaire avec zones de congestion

Rapport de stage

PANNETIER VALENTIN
sous la direction de MR MARIO RICCHIUTO.

Table des matières

1	Considérations théoriques	2
1.1	Notations	2
1.1.1	Opérateurs et coordonnées	2
1.1.2	Quantités physique	3
1.2	L'équation d'état (EOS)	3
1.3	Les lois de conservation	4
1.3.1	La dérivée particulaire	4
1.3.2	La conservation de la masse (équation de continuité)	5
1.3.3	La conservation de la quantité de mouvement	5
1.3.4	La conservation de l'énergie	6
1.4	Les équations d'Euler	7
1.5	Les équations de Saint-Venant	7
1.5.1	Conservation de la masse	7
1.5.2	Conservation de la quantité de mouvement	8
1.6	L'équation des ondes linéaire	11
1.6.1	Présentation du problème	11
1.6.2	Réécriture des équations	12
	La surface libre	12
	L'influence du flotteur sur la surface libre	13
1.6.3	Vers l'équation des ondes	15
1.7	L'équation des ondes linéaire	16
1.7.1	Présentation du problème	16
1.7.2	Réécriture des équations	17
	La surface libre	17
	Table des figures	18
	Bibliographie	19
A	Opérateurs	20
A.1	ddd	21
A.2	ddd	21
A.3	ddd	21
A.4	ddd	21

Chapitre 1

Considérations théoriques

1.1 Notations

1.1.1 Opérateurs et coordonnées

Dans ce rapport nous utiliserons un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) orthonormée sur \mathbb{R}^3 et une variable temporelle désignée par t . Les systèmes de coordonnées *sphériques* et *cylindriques* peuvent être obtenus par simple dérivation à l'aide de la formule de dérivées en chaîne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Soit la quantité ϕ qui dépend des coordonnées spatiales et temporelle dénotée

$$\phi(x, y, z, t).$$

Les équations qui gouvernent les phénomènes physiques peuvent faire apparaître des *dérivées partielles* de ϕ et en conséquence elles seront abrégées **PDEs** pour **partial differential equations**.

Nous utiliserons donc les notations suivantes

$$\phi_\alpha = \partial_\alpha \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \quad \text{et} \quad \partial_\alpha^2 \phi = \partial_{\alpha\alpha} \phi = \partial_\alpha \phi_\alpha = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} \quad \alpha = x, y, z, t$$

Ainsi que de multiples opérateurs, tels que

— le **produit scalaire** entre $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3,$$

— le **produit vectoriel** entre \vec{v} et \vec{u}

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} v_2 u_3 - v_3 u_2 \\ v_3 u_1 - v_1 u_3 \\ v_1 u_2 - v_2 u_1 \end{bmatrix},$$

— le **produit tensoriel** entre \vec{v} et \vec{u}

$$\vec{v} \otimes \vec{u} = \begin{bmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & v_1 u_3 \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & v_2 u_3 \\ v_3 u_1 & v_3 u_2 & v_3 u_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} \otimes \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2^2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

— l'opérateur **gradient** pour une quantité scalaire ϕ

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z),$$

— l'opérateur de **divergence** appliqué à un vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3,$$

— l'opérateur **rotationnel** appliqué à \vec{v}

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{bmatrix},$$

— l'opérateur **laplacien**

$$\Delta \vec{v} = \partial_x^2 v_1 + \partial_y^2 v_2 + \partial_z^2 v_3.$$

— l'opérateur **d'advection**

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \partial_x v_1 + v_2 \partial_y v_1 + v_3 \partial_z v_1 \\ v_1 \partial_x v_2 + v_2 \partial_y v_2 + v_3 \partial_z v_2 \\ v_1 \partial_x v_3 + v_2 \partial_y v_3 + v_3 \partial_z v_3 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Quantités physique

Pour un fluide nous pouvons être amené à étudier différentes quantités physiques telles que

- sa masse notée m ,
- sa densité ou densité massique ρ ,
- sa vitesse $\vec{u} = (u, v, w)$,
- la quantité de mouvement $\vec{p} = \rho \vec{u}$,
- la pression thermodynamique P ,
- l'énergie total par unité de masse, notée E ,
- l'énergie interne massique e ,
- l'entropie s ,
- l'enthalpie h ,
- la température T , et
- l'accélération gravitationnelle terrestre g de 9.81 m/s^2 .

La pression P , le volume et la température T forment les **variables d'état** d'un système. Chacune de ces variables peut être extensive ou intensive, respectivement définie sur l'ensemble du système considéré ou considérée égale en tout point du système.

Les autres variables apparaissant dans le système peuvent toujours être exprimée à partir des variables d'état par une **fonction d'état**.

1.2 L'équation d'état (EOS)

Selon le livre de Toro [9], un système en état d'équilibre thermodynamique peut être complètement décrit à l'aide des variables thermodynamiques de base comme la pression P et un volume massique \mathcal{V} . Une famille d'états dans un équilibre thermodynamique peut être décrit par une courbe dans un plan $P - \mathcal{V}$, chacun caractérisé par une valeur particulière de la variable T qui représente la température : le système décrit est appelé un système $P - \mathcal{V} - T$.

Une façon de relier ces variables est sous la forme de *l'équation thermique d'état*

$$T = T(P, \mathcal{V}), \text{ ou } P = P(T, \mathcal{V}), \text{ ou } \mathcal{V} = \mathcal{V}(T, P) \quad (1.1)$$

Cette relation d'état change de nature selon le fluide que nous étudions. Selon le premier principe de la thermodynamique, dans le cas d'un système fermé¹, l'énergie interne e d'un système, fonction d'état (donc exprimable à l'aide des variables d'état) vérifie la relation suivante établie pour une transformation élémentaire

$$de = \delta W + \delta Q$$

où W est la travail mécanique et Q la quantité de chaleur reçue. Cette relation est important en thermodynamique, et définit la première loi de la thermodynamique

$$de = Tds - Pd\mathcal{V} \quad (1.2)$$

1. échange d'énergie, mais pas de matière, avec le milieu extérieur.

avec de la variation d'énergie interne massique, ds la variation d'entropie, $d\mathcal{V}$ la variation de volume massique, T la température et P la pression.

Dans le cas d'un fluide adiabatique², seule l'équation d'état calorifique est nécessaire, c'est-à-dire que

$$e = e(P, \mathcal{V}) = \frac{P\mathcal{V}}{\gamma - 1} = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)}$$

Cette relation est appelé équation d'état pour les gaz polytropiques³. La quantité γ est appelé l'**indice adiabatique** du système définit comme $\gamma := \frac{C_P}{C_V}$ avec les capacités calorifiques C_P (à pression constante) et C_V (à volume constant).

Ainsi, nous pouvons décomposer l'énergie totale E comme une fonction de l'énergie potentielle E_p , de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie interne massique.

De plus d'après le théorème de Bernoulli, qui traduit le principe d'énergie adapté aux fluides parfaits⁴ en mouvement, nous avons

$$\frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + \rho gz + P = P_{tot} \quad (1.3)$$

avec les unités habituelles, P la pression thermodynamique, z la dénivelé vertical et P_{tot} est la pression totale constante le long d'une ligne de courant. Le terme ρgz est la pression de pesanteur ou énergie potentielle, $P + \rho gz$ est la pression statique et $\frac{1}{2}\rho\vec{u}^2$ la pression dynamique ou énergie cinétique.

Ainsi l'énergie totale E_{tot} est

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + \rho gz \quad (1.4)$$

er l'énergie interne massique est

$$e = \frac{P}{\gamma - 1} \quad (1.5)$$

Selon LeVeque [5], dans le cas d'un fluide isentropique (c'est-à-dire à entropie s constante partout) la pression P s'écrit comme

$$P = \hat{k}\rho^\gamma$$

avec \hat{k} une constante dépendant uniquement de l'entropie initiale et γ le coefficient adiabatique. Et cette relation est valable *partout* dans le système.

1.3 Les lois de conservation

Les équations d'Euler sont issues des lois de conservations de certaines quantités physiques importantes, et elles permettent, par exemple, l'étude de la dynamique des gaz ou dans le cas présent l'étude d'écoulement de fluide. Ainsi, dans la suite, nous détaillerons les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

1.3.1 La dérivée particulaire

Selon [9], si nous considérons un champs scalaire ϕ dépendant de l'espace et du temps, les variations temporelle de ϕ peuvent être obtenue en regardant les variations par rapport à la vitesse du fluide \vec{u} . Nous obtenons la relation suivante

$$\frac{D\phi}{Dt} = \partial_t \phi + \vec{u} \cdot \text{grad } \phi \quad (1.6)$$

La quantité $\frac{D\phi}{Dt}$ désigne la dérivée particulaire de ϕ par rapport au temps t . Notons que cette relation peut être étendue et appliqué à n'importe quel champ vectoriel \vec{w} .

Posons maintenant

$$\psi(t) := \iiint_V \phi(x, y, z, t) dV \quad (1.7)$$

2. sans aucun transfert thermique.

3. échange thermique partiel entre le système et l'extérieur.

4. viscosité et conduction thermique non pris en compte.

avec ϕ un champ scalaire et un volume d'intégration V dont la surface A est considérée lipschitzienne au moins par morceaux. Et la dérivée particulière (ou matérielle) de cette fonction est

$$\frac{D\psi}{Dt} = \iiint_V \partial_t \phi dV + \iint_A (\vec{n} \cdot \phi \vec{u}) dA, \quad (1.8)$$

avec $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normal sortant. Cette relation peut être aussi étendue à un champ vectoriel $\psi(x, y, z, t)$.

Selon le théorème de Gauss (auss appelé formule de Green), nous avons

$$\iint_A \vec{n} \cdot \vec{\psi} dA = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\psi} dV \quad (1.9)$$

où $\vec{\psi}$ est un champ vectoriel.

1.3.2 La conservation de la masse (équation de continuité)

La loi de conservation de la masse peut maintenant être établie, et la masse $m(t)$ dans un volume V peut être exprimée comme

$$m(t) = \iiint_V \rho dV.$$

où ρ est la masse volumique du fluide.

La conservation de la masse implique que

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

et donc par (1.8) que

$$\frac{Dm}{Dt} = \iiint_V \partial_t \rho dV + \iint_A \vec{n} \cdot \rho \vec{u} dA = 0 \quad (1.10)$$

ou encore par (1.9)

$$\iiint_V [\partial_t \rho + \operatorname{div} (\rho \vec{u})] dV = 0. \quad (1.11)$$

Or le volume V est purement arbitraire et donc nous obtenons **l'équation de conservation de la masse** suivante

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.12)$$

avec ρ la masse volumique et \vec{u} la vitesse du fluide.

1.3.3 La conservation de la quantité de mouvement

Passons maintenant à la conservation de la quantité de mouvement \vec{p} . La quantité de mouvement est exactement

$$\vec{p} = \rho \vec{u}. \quad (1.13)$$

Cela nous conduit donc à poser la fonction suivante

$$\psi(t) = \iiint_V \rho \vec{u} dV.$$

D'après la loi du Newton

$$\frac{D\psi}{Dt} = f_S + f_V, \quad (1.14)$$

où f_S et f_V désignent respectivement les forces surfaciques et volumiques en jeu.

En pratique, selon Toro [9], nous avons

$$f_S = \iint_A \vec{n} \cdot S dA \quad f_V = \iiint_V \rho \vec{g} dV. \quad (1.15)$$

avec $S = -P\mathcal{I} + \Pi$ (voir Toro [9] pour plus de détails) avec Π un terme de forces visqueuses.

Remarquons déjà que \vec{p} n'est plus un champ scalaire mais un champ vectoriel et cela nous conduit à utiliser une version généralisée de (1.8)

$$\frac{D\psi}{Dt} = \iiint_V \partial_t \phi \, dV + \iint_A \phi (\vec{n} \cdot \vec{u}) \, dA. \quad (1.16)$$

Ainsi par (1.14) et (1.16), nous avons

$$\iiint_V \partial_t (\rho \vec{u}) \, dV + \iint_A (\vec{n} \cdot \rho \vec{u}) \vec{u} \, dA = f_S + f_A \quad (1.17)$$

Or nous avons

$$(\vec{n} \cdot \rho \vec{u}) \vec{u} = \vec{n} \cdot \rho \vec{u} \otimes \vec{u} \quad (1.18)$$

Par application directe de la formule de Green (1.9), en remplaçant $f_S + f_V$ par la relation établie en (1.15) et comme nous intégrons sur un volume V arbitraire alors **l'équation de conservation de la quantité de mouvement** est

$$\partial_t (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot [\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P\mathcal{I} - \Pi] = \rho \vec{g} \quad (1.19)$$

Cette relation forme les équations de **Navier-Stokes** pour les fluides compressibles. Dans le cas d'un fluide parfait incompressible nous avons simplement

$$\partial_t (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot [\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P\mathcal{I}] = \rho \vec{g} \quad (1.20)$$

1.3.4 La conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie totale (E_{tot}) au cours du temps peut aussi être exprimée, c'est-à-dire que nous pouvons définir

$$\psi(t) = \iiint_V E_{tot} \, dV. \quad (1.21)$$

Rappelons qu'une force \vec{f} produit un travail $\vec{u} \cdot \vec{f}$ homogène à une énergie (selon Toro [9]). Donc si nous nous référons aux forces établies à (1.15), et que nous rajoutons un effet thermique alors nous pouvons définir

- l'énergie issue des forces de pression et de viscosité :

$$E_{surf} = \iint_A P (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dA + \iint_A \vec{u} \cdot (\vec{n} \cdot \Pi) \, dA, \quad (1.22a)$$

- l'énergie issue du poids :

$$E_{volu} = \iiint_V \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}) \, dV, \quad (1.22b)$$

- le flux d'énergie \vec{Q} qui traverse la surface A :

$$E_{infl} = - \iint_A \vec{n} \cdot \vec{Q} \, dA. \quad (1.22c)$$

Nous avons donc, toujours par application de la loi de Newton,

$$\frac{D\psi}{Dt} = E_{surf} + E_{volu} + E_{infl}. \quad (1.23)$$

Sous forme détaillée, selon Toro [9], nous obtenons

$$\begin{aligned} \iiint_V \partial_t E_{tot} \, dV + \iint_A \vec{n} \cdot E_{tot} \vec{u} \, dA = \\ \iint_A P (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dA + \iint_A \vec{u} \cdot (\vec{n} \cdot \Pi) \, dA + \iiint_V \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}) \, dV - \iint_A \vec{n} \cdot \vec{Q} \, dA. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Grâce à la formule de Green (1.9), et comme nous intégrons sur un volume V purement arbitraire, nous avons **l'équation de conservation de l'énergie totale**

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot [(E_{tot} + P) \vec{u} - \vec{u} \cdot \Pi + Q] = \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}). \quad (1.25)$$

Dans le cas d'un fluide parfait incompressible nous avons simplement que

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot [(E_{tot} + P) \vec{u}] = \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}). \quad (1.26)$$

1.4 Les équations d'Euler

Les équations d'Euler sont ni plus ni moins que le regroupement des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale dans le cadre d'un fluide parfait incompressible adiabatique.

Nous pouvons donc les regrouper sous la forme d'un système comme suit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot [\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P \mathcal{I}] = \rho \vec{g}, \\ \partial_t E_{tot} + \nabla \cdot [(E_{tot} + P) \vec{u}] = \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}). \end{cases} \quad (1.27a)$$

En notant $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$, nous avons

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_{tot} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_{tot} + P) u \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ (E_{tot} + P) v \end{bmatrix}_y + \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + P \\ (E_{tot} + P) w \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}) \end{bmatrix} \quad (1.27b)$$

1.5 Les équations de Saint-Venant

Les équations de Barré de Saint-Venant sont obtenues en 1871 par le mathématicien français du même nom⁵. Ce système d'équations visant l'étude **des écoulements en eau peu profonde** donnera le nom communément admis en anglais pour les désigner : *shallow water*. Elles permettent notamment l'étude de plusieurs phénomènes physiques associés à des ondes tels que les courants de marée ou les tsunamis.⁶

Lors de l'étude d'écoulement en eau peu profonde, le système obtenu est similaire aux équations d'Euler puisque ce sont les mêmes quantités qui sont conservées. Rappelons en premier lieu que dans ce modèle nous étudions un écoulement incompressible à structure horizontale et que la *vitesse verticale* du fluide est négligée.

Le vecteur de force gravitationnelle \vec{g} est tel que $\vec{g} = (0, 0, -g)$ avec l'accélération gravitationnelle. Le point d'équilibre du système est établi à $z = h_0$ et un vecteur vitesse $\vec{u} = (0, 0, \cdot)$.

1.5.1 Conservation de la masse

Un fluide incompressible est caractérisé par la relation suivante (équation de continuité associé)

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1.28)$$

5. Ingénieur, physicien et mathématicien français du XIX^{ème} siècle (1797-1886).

6. Source **Wikipedia**.

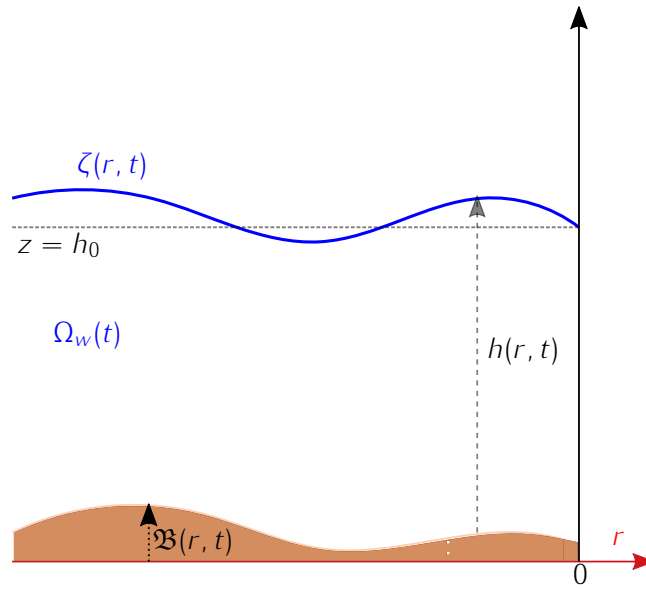


FIGURE 1.1 – Coupe 1D : Saint-Venant.

Ainsi, l'équation de conservation de la masse (1.12) devient

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \partial_t \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} \stackrel{(1.28)}{=} \partial_t \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (1.29)$$

1.5.2 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.20) devient quant à elle

$$\partial_t (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot [\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P\mathcal{I}] = \rho \vec{g} \quad (1.30)$$

$$\iff \rho \partial_t \vec{u} + \vec{u} \partial_t \rho + \rho \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{u}) \nabla \cdot \rho = \rho \vec{g} - \nabla \cdot (P\mathcal{I}) \quad (1.31)$$

La masse volumique (densité) ρ étant constant en espace et en temps, nous avons alors

$$\iff \partial_t \vec{u} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1.32)$$

$$\iff \partial_t \vec{u} + \vec{u} (\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1.33)$$

$$\iff \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1.34)$$

Deux conditions de bords sont requises (voir figure 1.1) :

— En $z = h(x, y, t) + \mathfrak{B}(x, y) = h_0 + \zeta(x, y, t)$, qui correspond à la surface :

$$\frac{D(h - z)}{Dt} = \frac{D(h_0 + \zeta - z)}{Dt} = 0, \quad P = P_{atm}. \quad (1.35)$$

avec P_{atm} désigne la pression atmosphérique, prise à 0 en pratique.

En vertu de la formule des dérivées particulières (1.6), nous avons

$$\frac{D(h_0 + \zeta - z)}{Dt} = \partial_t (h_0 + \zeta - z) + \vec{u} \cdot \text{grad} (h_0 + \zeta - z) \quad (1.36)$$

Or $\partial_z \zeta = 0$ car ζ ne dépend pas de la coordonnée z , donc nous avons

$$\implies u \partial_x \zeta + v \partial_y \zeta - (w - \partial_t \zeta) = 0 \quad (1.37)$$

Nous évaluons maintenant cette expression en $z = h_0 + \zeta(x, y, t)$, c'est-à-dire que

$$(u \partial_x \zeta + v \partial_y \zeta - (w - \partial_t \zeta))|_{z=h_0+\zeta} = 0 \quad (1.38)$$

— En $z = \mathfrak{B}(x, y)$

$$\frac{D(\mathfrak{B} + z)}{Dt} = 0. \quad (1.39)$$

Grâce à (1.6), nous avons

$$\frac{D(\mathfrak{B} + z)}{Dt} = \partial_t(\mathfrak{B} + z) + \vec{u} \cdot \text{grad}(\mathfrak{B} + z) = 0 \quad (1.40)$$

Donc nous avons

$$(u\partial_x \mathfrak{B} + v\partial_y \mathfrak{B} + w)|_{z=\mathfrak{B}} = 0 \quad (1.41)$$

Si nous négligeons la vitesse verticale, nous avons dans l'équation de la coordonnée z du système (1.34), nous obtenons

$$\partial_z P = -g\rho \quad (1.42)$$

Sous la condition $P = P_{atm}$ en $z = h_0 + \zeta$ nous avons

$$P(z) = \rho g (\zeta + h_0 - z) + P_{atm} \quad (1.43)$$

Cette relation définit ce qui est appelé la **relation de pression hydrostatique** selon Toro [9]. Cette relation découle directement du principe de Blaise Pascal⁷.

Ainsi nous avons

$$\begin{cases} \partial_x P = \rho g \partial_x \zeta \\ \partial_y P = \rho g \partial_y \zeta \end{cases} \quad (1.44a)$$

$$(1.44b)$$

Ainsi l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.34) devient

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u = -g\partial_x \zeta \quad (1.45a)$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v = -g\partial_y \zeta \quad (1.45b)$$

Passons à une méthode importante décrite dans LeVeque [5] et dans Toro [9] : intégrer l'équation de continuité (1.28) selon l'axe z (verticalement). Nous obtenons donc

$$\int_{\mathfrak{B}}^{h_0+\zeta} \partial_x u \, dz + \int_{\mathfrak{B}}^{h_0+\zeta} \partial_y v \, dz + w|_{z=\mathfrak{B}}^{z=h_0+\zeta} = 0. \quad (1.46)$$

Qui regroupé avec les conditions de bords (1.38) (et de surface) et (1.41) (de sol) donne

$$\int_{\mathfrak{B}}^{h_0+\zeta} \partial_x u \, dz + \int_{\mathfrak{B}}^{h_0+\zeta} \partial_y v \, dz + (u\partial_x \zeta + v\partial_y \zeta + \partial_t \zeta)|_{z=h_0+\zeta} - (u\partial_x \mathfrak{B} + v\partial_y \mathfrak{B})|_{z=\mathfrak{B}} = 0 \quad (1.47)$$

Or nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathfrak{B}(x,y)}^{h_0+\zeta(x,y,t)} u \, dz &= \int_{\mathfrak{B}(x,y)}^{h_0+\zeta(x,y,t)} \partial_x u \, dz + (u\partial_x \zeta)|_{z=h_0+\zeta} - (u\partial_x \mathfrak{B})|_{z=\mathfrak{B}} \\ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\mathfrak{B}(x,y)}^{h_0+\zeta(x,y,t)} v \, dz &= \int_{\mathfrak{B}(x,y)}^{h_0+\zeta(x,y,t)} \partial_y v \, dz + (v\partial_y \zeta)|_{z=h_0+\zeta} - (v\partial_y \mathfrak{B})|_{z=\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Ainsi (1.47) devient

$$\partial_t \zeta + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathfrak{B}(x,y)}^{h_0+\zeta(x,y,t)} u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\mathfrak{B}(x,y)}^{h_0+\zeta(x,y,t)} v \, dz = 0. \quad (1.48)$$

Selon Toro [9], l'équation (1.48) peut être simplifiée en remarquant que les coordonnées u et v du vecteur \vec{u} sont indépendantes de z et réécrit comme

$$\partial_t \zeta + \partial_x [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B})u] + \partial_y [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B})v] = 0. \quad (1.49)$$

7. Mathématicien, physicien, philosophe et théologien français du XVIIIème siècle (1623-1662).

Nous avons précédemment posé $h = h_0 + \zeta - \mathfrak{B}$, et nous avons $\partial_t \zeta = \partial_t (h_0 + \zeta - \mathfrak{B})$, donc l'équation est strictement équivalente à

$$\partial_t (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) + \partial_x [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) u] + \partial_y [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) v] = 0. \quad (1.50)$$

En multipliant cette équation par u et en l'ajoutant à l'équation (1.45a) auparavant multipliée par $h_0 + \zeta - \mathfrak{B}$ nous obtenons après réduction des produits dérivés

$$\partial_t [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) u] + \partial_x [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) u^2] + \partial_y [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) uv] = -g (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \partial_x \zeta. \quad (1.51)$$

De manière analogue avec (1.45b) nous avons

$$\partial_t [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) v] + \partial_x [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) uv] + \partial_y [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) v^2] = -g (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \partial_y \zeta. \quad (1.52)$$

Nous pouvons réécrire les termes de droite comme

$$-g (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \partial_x \zeta = g (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \partial_x \mathfrak{B} - g \frac{1}{2} \partial_x [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B})^2] \quad (1.53)$$

$$-g (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \partial_y \zeta = g (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \partial_y \mathfrak{B} - g \frac{1}{2} \partial_y [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B})^2] \quad (1.54)$$

qui permettent de réécrire (1.51) comme

$$\partial_t (hu) + \partial_x \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) + \partial_y (huv) = gh \partial_x \mathfrak{B} \quad (1.55)$$

et (1.52) comme

$$\partial_t (hv) + \partial_x (huv) + \partial_y \left(hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) = gh \partial_y \mathfrak{B} \quad (1.56)$$

Ainsi **les équations de Saint-Venant** peuvent être écrites comme

$$(SW) \begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot \vec{q} = 0, & (1.57a) \\ \partial_t \vec{q} + \nabla \cdot \left(\vec{q} \otimes \vec{u} + \frac{1}{2} gh^2 \mathcal{I} \right) = gh \nabla \mathfrak{B}, & (1.57b) \end{cases}$$

avec $\vec{q} = h\vec{u}$, $h := h_0 + \zeta - \mathfrak{B}$, $\vec{u} = (u, v, w)$, h la profondeur totale depuis la surface $h_0 + \zeta$ et jusqu'au sol \mathfrak{B} . Sous forme de système nous obtenons

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \\ huv \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix}_y = gh \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{B} \\ 0 \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathfrak{B} \end{bmatrix}_y \right). \quad (1.58)$$

1.6 L'équation des ondes linéaire

1.6.1 Présentation du problème

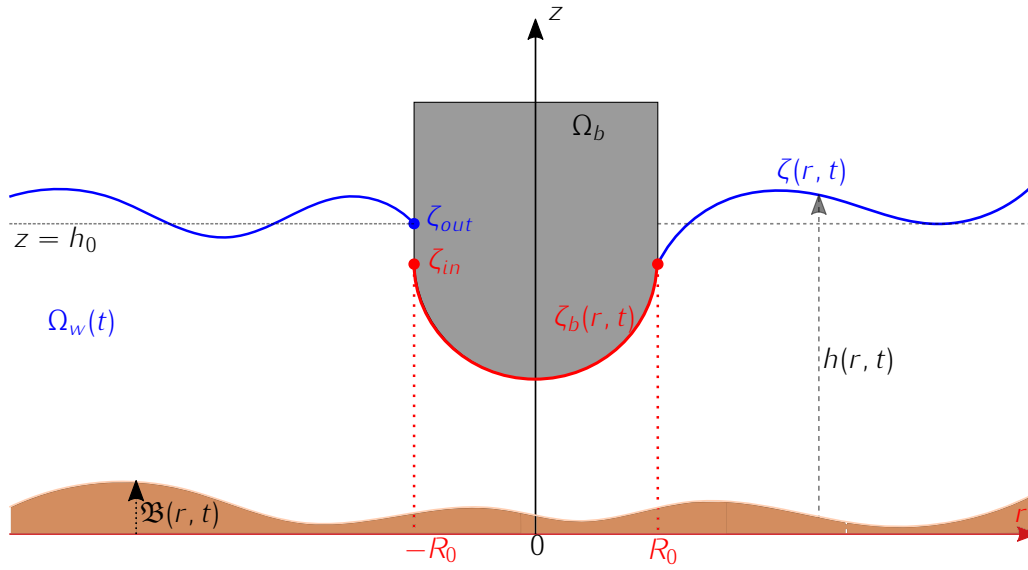


FIGURE 1.2 – Modèle 1D bathymétrique : flotteur.

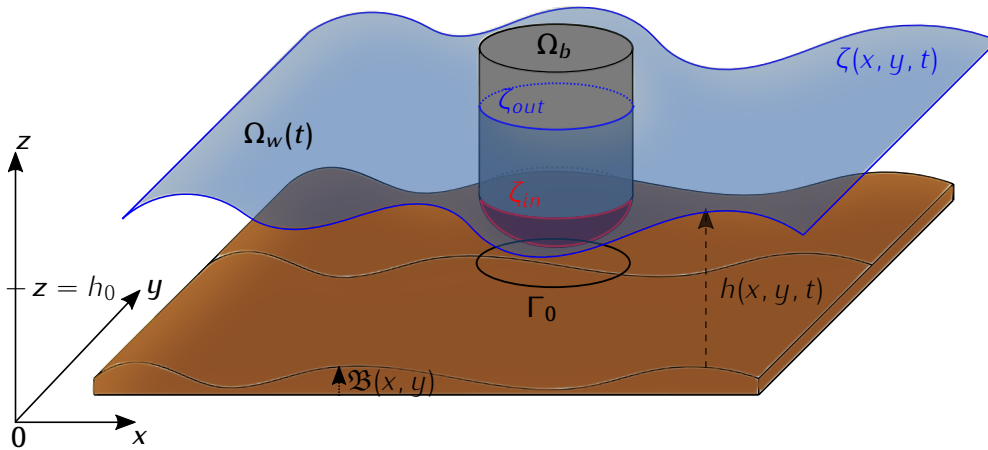


FIGURE 1.3 – Situation 2D : flotteur et fond variable.

Nous nous plaçons dans un problème 2D, cette configuration est similaire à un problème de Saint-Venant 1.1 comme dans la section 1.5.

L'étude de ce problème sur un domaine Ω_f doit être divisée en deux parties distinctes mais qui doivent être **couplées** :

- une surface libre référencée par w pour *water* sur un domaine $\Omega_w := \Omega_f \setminus \Omega_b$ définissant le *domaine extérieur*, et
- le flotteur, corps flottant sur la surface libre (fixé ou non), référencé par b pour *body*, et nous définissons le *domaine intérieur* $\Omega_b := [-R_0, R_0]$ représentant la *position* de ce corps.

Nous avons donc

$$\Omega_f = \Omega_b \cup \Omega_w, \text{ dans le cas présent } \mathbb{R}.$$

Nous notons aussi h_0 une constante positive qui représentera la hauteur d'eau moyenne sur Ω_f (axe z croissant) à l'instant $t = 0$, et ζ la taille de la perturbation verticale par rapport à la hauteur totale

$h(x, t)$ de la surface libre dans Ω_f depuis le fond \mathfrak{B} de sorte que, comme dans la section 1.5 nous ayons

$$h(\vec{x}, t) = h_0 + \zeta(\vec{x}, t) - \mathfrak{B}(\vec{x}) \quad (1.59)$$

La perturbation ζ est soumise à un hypothèse essentielle : elle doit être négligeable devant h_0 .

Nous pouvons aussi définir ζ_b comme la restriction de ζ à Ω_b et nous supposons qu'il est tel que l'interface fluide-structure soit exactement contre le flotteur. Un problème survient alors lorsque nous regardons ζ sur tout le domaine Ω_f : il n'est plus continu car il y a des **sauts** à la jonction des deux domaines.

1.6.2 Réécriture des équations

La surface libre

Reprenons donc l'équation de conservation de la masse du problème de Saint-Venant (1.57a)

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h \vec{u}) \stackrel{(1.92)}{=} \partial_t \zeta + \nabla \cdot [(h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \vec{u}] = 0. \quad (1.60)$$

En développant la divergence (rappelons quelle ne dépend que de x et de y), nous avons

$$\partial_t \zeta + (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) = 0 \quad (1.61)$$

Or $|h_0| \gg |\zeta|$ donc nous avons $h_0 + \zeta \approx h_0$, par suite

$$\partial_t \zeta + (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla (\zeta - \mathfrak{B}) = 0 \quad (1.62)$$

Ce qui nous donne que

$$\partial_t \zeta + (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla (\zeta - \mathfrak{B}) = 0. \quad (1.63)$$

Reformulé comme tel sur le domaine Ω_w ,

$$\partial_t \zeta + h_0 \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta - \nabla \cdot (\mathfrak{B} \vec{u}) = 0. \quad (1.64)$$

Remarquons que dans le cas où $\mathfrak{B} \equiv 0$, cette équation est simplement

$$\partial_t \zeta + h_0 \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta = 0. \quad (1.65)$$

Reprenons maintenant l'équation de conservation de la quantité de mouvement du problème de Saint-Venant (1.57b),

$$\partial_t (h \vec{u}) + \nabla \cdot \left[h \vec{u} \otimes \vec{u} + \frac{1}{2} g h^2 \mathcal{I} \right] = g h \nabla \mathfrak{B} \quad (1.66)$$

En remplaçant q par son expression $q := gh$, et en divisant par g , nous obtenons

$$\partial_t (h \vec{u}) + \nabla \cdot \left[h \vec{u} \otimes \vec{u} + \frac{1}{2} g h^2 \mathcal{I} \right] = g h \nabla \mathfrak{B} \quad (1.67)$$

Ce qui formellement décomposé, en posant $\underline{\vec{u}} := \vec{u} \otimes \vec{u}$ s'écrit

$$\vec{u} \partial_t h + h \partial_t \vec{u} + h \nabla \cdot \underline{\vec{u}} + \underline{\vec{u}} \cdot \nabla h + g h \nabla h = g h \nabla \mathfrak{B} \quad (1.68)$$

En remplaçant h par $h_0 + \zeta - \mathfrak{B}$,

$$\begin{aligned} \vec{u} \partial_t \zeta + (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \partial_t \vec{u} + (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \nabla \cdot \underline{\vec{u}} + \underline{\vec{u}} \cdot \nabla (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \\ + g (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \nabla (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) = g (h_0 + \zeta - \mathfrak{B}) \nabla \mathfrak{B} \end{aligned} \quad (1.69)$$

et sous l'hypothèse $h_0 + \zeta \approx h_0$

$$\vec{u} \partial_t \zeta + (h_0 - \mathfrak{B}) \partial_t \vec{u} + (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla (\zeta - \mathfrak{B}) + g (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla (\zeta - \mathfrak{B}) = g (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla \mathfrak{B} \quad (1.70)$$

Par (1.62), nous pouvons déduire que

$$\partial_t \zeta = (\mathfrak{B} - h_0) \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla (\mathfrak{B} - \zeta). \quad (1.71)$$

Ce qui insérer dans (1.70) donne

$$\vec{u} (\mathfrak{B} - h_0) \nabla \cdot \vec{u} + (h_0 - \mathfrak{B}) \partial_t \vec{u} + (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla \cdot \vec{u} + g (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla (\zeta - \mathfrak{B}) = g (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla \mathfrak{B} \quad (1.72)$$

Mais nous avons

$$\nabla \cdot \vec{u} = \text{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{u} (\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

Donc (1.72) devient

$$(h_0 - \mathfrak{B}) \partial_t \vec{u} + (h_0 - \mathfrak{B}) (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + g (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla (\zeta - \mathfrak{B}) = g (h_0 - \mathfrak{B}) \nabla \mathfrak{B} \quad (1.73)$$

Sous la condition $h_0 - \mathfrak{B} \neq 0$ (ce qui est vrai tant que le fond \mathfrak{B} ne dépasse jamais la surface), nous avons

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + g \nabla (\zeta - \mathfrak{B}) = g \nabla \mathfrak{B} \quad (1.74)$$

Remarquons que l'opérateur d'advection appliqué au champ de vitesse \vec{u} peut être décomposé sous la forme de Lamb

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{2} \nabla \vec{u}^2 + (\text{rot } \vec{u}) \times \vec{u} \quad (1.75)$$

Si le fluide est **irrotationnel** alors $\text{rot } \vec{u} = 0$ et donc que $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{2} \nabla \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$. La vitesse du fluide, selon LeVeque [5] étant considérée constante pour n'importe quelle section verticale.

Par ailleurs, le terme convectif $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ peut être négligé. En effet

Ainsi (1.74) sur le domaine Ω_w devient

$$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + g \nabla \zeta = -2g \nabla \mathfrak{B}. \quad (1.76)$$

Remarquons que dans le cas où $\mathfrak{B} \equiv Cst$, cette équation est simplement

$$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + g \nabla \zeta = \vec{0}. \quad (1.77)$$

Si nous regroupons les équations (1.64) et (1.76) sous la forme du système sur le domaine Ω_w

$$(S_w) \begin{cases} \partial_t \zeta + h_0 \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta - \nabla \cdot (\mathfrak{B} \vec{u}) = 0 & (1.78a) \\ \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + g \nabla \zeta = -2g \nabla \mathfrak{B} & (1.78b) \end{cases}$$

L'influence du flotteur sur la surface libre

Concernant le domaine Ω_b , c'est-à-dire à l'emplacement du corps, il nous faut rajouter le terme de pression \vec{P}_A de la surface libre sur le flotteur ; plus communément connue comme **la poussée d'Archimède**. Elle est habituellement exprimée comme

$$\vec{P}_A(t) = -\rho \mathcal{V}_F(t) \vec{g} \quad (1.79)$$

où $\mathcal{V}_F(t)$ désigne le volume du fluide déplacé par le flotteur. Ou plus simplement dans la direction z

$$P_A(t) = -\rho g \mathcal{V}_F(t). \quad (1.80)$$

Cette pression est une pression *globale* du fluide sur le flotteur et elle ne peut pas être exprimée en terme de coordonnées spatiales (x, y) .

Reprenons l'équation de la pression (1.43) et ajoutons-y un terme de pression $\tilde{\Pi}$ du flotteur sur la surface libre. Ainsi nous avons

$$P(z) = \rho g (h_0 + \zeta_b - z) + P_{atm} + \tilde{\Pi} \quad (1.81)$$

En conséquence nous avons en remplacement de (1.44a) et de (1.44b),

$$\begin{cases} \partial_x P = \rho g \partial_x \zeta_b + \partial_x \tilde{\Pi} \\ \partial_y P = \rho g \partial_y \zeta_b + \partial_y \tilde{\Pi} \end{cases} \quad (1.82a)$$

$$\quad (1.82b)$$

Suite à cette modification, l'équation de conservation de la masse ne change pas, mais les équations de conservation de la quantité de mouvement (1.45a) et (1.45b) deviennent

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = -g \partial_x \zeta_b + \partial_x \tilde{\Pi} \quad (1.83a)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v = -g \partial_y \zeta_b + \partial_y \tilde{\Pi} \quad (1.83b)$$

Avec la même démarche que nous avons appliquée, c'est-à-dire notamment en intégrant entre le fond \mathfrak{B} et la surface $h_0 + \zeta_b$ (surface ici qui "colle" au flotteur), nous obtenons des **équations de Saint-Venant** différentes dans Ω_b

$$(SW) \begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot \vec{q} = 0, \\ \partial_t \vec{q} + \nabla \cdot \left(\vec{q} \otimes \vec{u} + \frac{1}{2} g h^2 \mathcal{I} \right) = g h \nabla \mathfrak{B} + \nabla \tilde{\Pi}, \end{cases} \quad (1.84a)$$

$$\quad (1.84b)$$

toujours avec $\vec{q} = h \vec{u}$, $h := h_0 + \zeta_b - \mathfrak{B}$, $\vec{u} = (u, v, w)$, h la profondeur totale depuis la surface $h_0 + \zeta_b$ et jusqu'au sol \mathfrak{B} . Sous forme de système nous obtenons

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 \\ huv \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2} g h^2 \end{bmatrix}_y = g h \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_x \mathfrak{B} \\ \partial_y \mathfrak{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_x \tilde{\Pi} \\ \partial_y \tilde{\Pi} \end{bmatrix}. \quad (1.85)$$

Nous obtenons alors le système dans Ω_b suivant

$$(S_b) \begin{cases} \partial_t \zeta + h_0 \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta - \nabla \cdot (\mathfrak{B} \vec{u}) = 0 \\ \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + g \nabla \zeta = -2g \nabla \mathfrak{B} + \nabla \tilde{\Pi} \end{cases} \quad (1.86a)$$

$$\quad (1.86b)$$

Remarquons que si $\mathfrak{B} \equiv 0$, alors nous avons

$$(S_w) \begin{cases} \partial_t \zeta + h_0 \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta = 0 \\ \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + g \nabla \zeta = \vec{0} \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_b) \begin{cases} \partial_t \zeta_b + h_0 \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta_b = 0 \\ \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + g \nabla \zeta_b = \nabla \tilde{\Pi} \end{cases}$$

Remarquons ensuite que si l'objet est fixé, c'est-à-dire que sa position en dépend pas du temps, alors $\partial_t \zeta_b = 0$ et donc le système (S_b) précédent se reformule simplement comme

$$(S_b^*) \begin{cases} h_0 \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta_b = 0 \\ \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + g \nabla \zeta_b = \nabla \tilde{\Pi} \end{cases} \quad (1.87)$$

1.6.3 Vers l'équation des ondes

Par (??) dans Ω_f , nous avons que

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{h_0} \partial_t \zeta \quad (1.88)$$

sous la condition $h_0 \neq 0$ (qui est vérifiée).

De plus, en prenant la divergence de part et d'autres dans l'équation (??) et comme le champ de vitesse \vec{u} est supposé continu sur Ω_f , alors nous avons

$$\nabla \cdot (\partial_t \vec{u} + g \nabla \zeta + \mathbf{1}_{\Omega_b} \nabla \Pi) = 0 \iff \partial_t \nabla \cdot \vec{u} + g \Delta \zeta_b + \mathbf{1}_{\Omega_b} \Delta \Pi = 0$$

Mais par (1.88)

$$\mathbf{1}_{\Omega_b} \Delta \Pi = \frac{1}{h_0} \partial_{tt} \zeta_b - g \Delta \zeta_b \quad (1.89)$$

En posant $c_0^2 := gh_0$ et en multipliant par h_0 , nous avons que

$$\iff h_0 \mathbf{1}_{\Omega_b} \Delta \Pi = \partial_{tt} \zeta_b - c_0^2 \Delta \zeta_b \iff \mathbf{1}_{\Omega_b} \nabla \cdot (h_0 \nabla \Pi) = \partial_{tt} \zeta_b - c_0^2 \Delta \zeta_b \quad (1.90)$$

Donc nous avons

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - h_0 \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \partial_{tt} \zeta - c_0^2 \Delta \zeta = \mathbf{1}_{\Omega_b} \nabla \cdot (h_0 \nabla \Pi) \end{cases} \quad (1.91)$$

Toro [9, chap 2]

1.7 L'équation des ondes linéaire

1.7.1 Présentation du problème

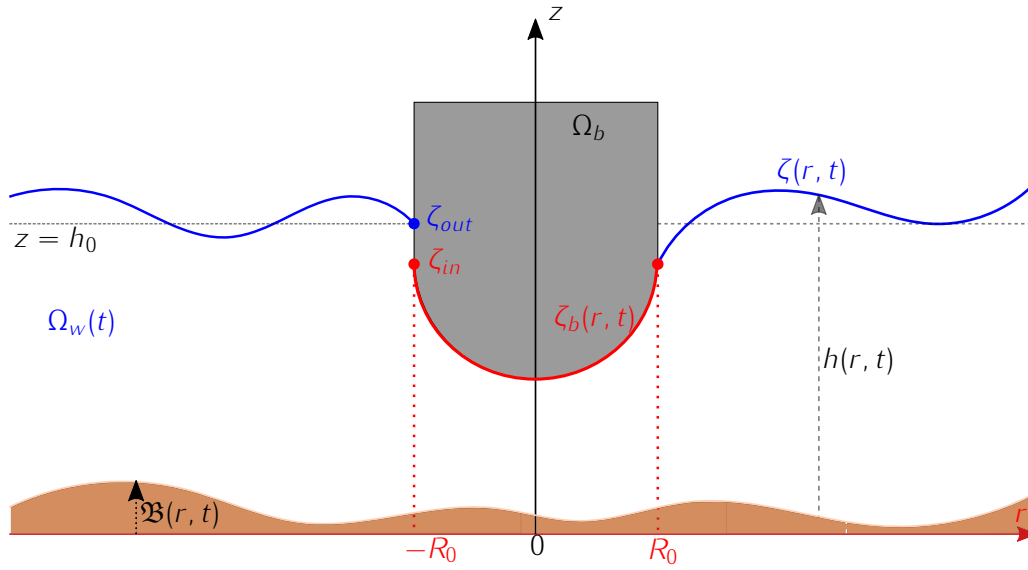


FIGURE 1.4 – Modèle 1D bathymétrique : flotteur.

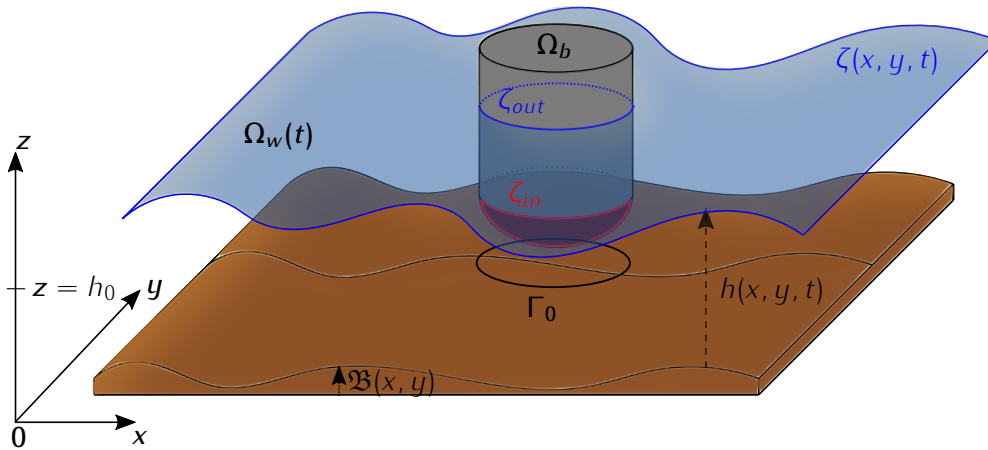


FIGURE 1.5 – Situation 2D : flotteur et fond variable.

Nous nous plaçons dans un problème 2D, cette configuration est similaire à un problème de Saint-Venant 1.1 comme dans la section 1.5.

L'étude de ce problème sur un domaine Ω_f doit être divisée en deux parties distinctes mais qui doivent être **couplées** :

- une surface libre référencée par w pour *water* sur un domaine $\Omega_w := \Omega_f \setminus \Omega_b$ définissant le *domaine extérieur*, et
- le flotteur, corps flottant sur la surface libre (fixé ou non), référencé par b pour *body*, et nous définissons le *domaine intérieur* $\Omega_b := [-R_0, R_0]$ représentant la *position* de ce corps.

Nous avons donc

$$\Omega_f = \Omega_b \cup \Omega_w, \text{ dans le cas présent } \mathbb{R}.$$

Nous notons aussi h_0 une constante positive qui représentera la hauteur d'eau moyenne sur Ω_f (axe z croissant) à l'instant $t = 0$, et ζ la taille de la perturbation verticale par rapport à la hauteur totale

$h(x, t)$ de la surface libre dans Ω_f depuis le fond \mathfrak{B} de sorte que, comme dans la section 1.5 nous ayons

$$h(\vec{x}, t) = h_0 + \zeta(\vec{x}, t) - \mathfrak{B}(\vec{x}) \quad (1.92)$$

La perturbation ζ est soumise à un hypothèse essentielle : elle doit être négligeable devant h_0 .

Nous pouvons aussi définir ζ_b comme la restriction de ζ à Ω_b et nous supposons qu'il est tel que l'interface fluide-structure soit exactement contre le flotteur. Un problème survient alors lorsque nous regardons ζ sur tout le domaine Ω_f : il n'est plus continu car il y a des **sauts** à la jonction des deux domaines.

Remarquons que

$$\partial_t h = \partial_t h_0 + \partial_t \zeta + \partial_t \mathfrak{B} = \partial_t \zeta \quad (1.93)$$

1.7.2 Réécriture des équations

La surface libre

Reprenons donc l'équation de conservation de la masse du problème de Saint-Venant (1.57a)

$$\partial_t h + \nabla \cdot \vec{q} \stackrel{(1.93)}{=} \partial_t \zeta + \nabla \cdot \vec{q} = 0. \quad (1.94)$$

Reprenons maintenant l'équation de conservation de la quantité de mouvement du problème de Saint-Venant (1.57b)

$$\partial_t \vec{q} + \nabla \cdot \left(\vec{q} \otimes \vec{u} + \frac{1}{2} g h^2 \mathcal{I} \right) = g h \nabla \mathfrak{B} \quad (1.95)$$

Par (A.1),

$$h \partial_t \vec{u} + \vec{u} \partial_t h + \vec{u} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{q} \right) + \left(\vec{q} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + g h \nabla h = g h \nabla \mathfrak{B} \quad (1.96)$$

Par (1.94) nous avons

$$\partial_t \vec{u} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + g \nabla h = g \nabla \mathfrak{B} \quad (1.97)$$

Bocchi [1] Main and Scovazzi [6] Nouveau et al. [7] Song et al. [8] Bosi [2] LeVeque [5] Darrozès and Francois [4] Casulli and Walters [3]

Table des figures

1.1	Coupe 1D : Saint-Venant.	8
1.2	Modèle 1D bathymétrique : flotteur.	11
1.3	Situation 2D : flotteur et fond variable.	11
1.4	Modèle 1D bathymétrique : flotteur.	16
1.5	Situation 2D : flotteur et fond variable.	16

Bibliographie

- [1] Bocchi, Edoardo : *Compressible-incompressible transitions in fluid mechanics : waves-structures interaction and rotating fluids*, Université de Bordeaux, PhD dissertation, 2019. – URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02371058>
- [2] Bosi, Umberto : *A unified spectral/hp element depth-integrated Boussinesq model for nonlinear wavefloating body interaction*, Université de Bordeaux, PhD dissertation, 2019. – URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02297587>
- [3] CASULLI, Vincenzo ; WALTERS, Roy A. : An unstructured grid, three-dimensional model based on the shallow water equations. In : *International journal for numerical methods in fluids* 32 (2000), Nr. 3, S. 331–348
- [4] DARROZÈS, Jean-Sylvestre ; FRANCOIS, Claude : *Mécanique des fluides incompressibles*. 1998. – OCLC : 494019189. – ISBN 9782722509009
- [5] LEVEQUE, Randall J. : *Numerical methods for conservation laws*. 2nd ed. Basel ; Boston : Birkhauser Verlag, 1992 (Lectures in mathematics ETH Zurich). – ISBN 9783764327231 9780817627232
- [6] MAIN, A. ; SCOVAZZI, G. : The shifted boundary method for embedded domain computations. Part I : Poisson and Stokes problems. In : *Journal of Computational Physics* 372 (2018), November, S. 972–995. – ISSN 00219991
- [7] NOUVEAU, L. ; RICCHIUTO, M. ; SCOVAZZI, G. : High-order gradients with the shifted boundary method : An embedded enriched mixed formulation for elliptic PDEs. In : *Journal of Computational Physics* 398 (2019), December, S. 108898. – ISSN 00219991
- [8] SONG, T. ; MAIN, A. ; SCOVAZZI, G. ; RICCHIUTO, M. : The shifted boundary method for hyperbolic systems : Embedded domain computations of linear waves and shallow water flows. In : *Journal of Computational Physics* 369 (2018), September, S. 45–79. – ISSN 00219991
- [9] TORO, E. F. : *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. 3rd ed. Dordrecht ; New York : Springer, 2009. – OCLC : ocn401321914. – ISBN 9783540252023 9783540498346

Annexe A

Opérateurs

Divergence d'un produit tensoriel :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{u}) = \vec{u} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (\text{A.1})$$

Décomposition de Lamb :

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{2} \nabla \vec{u}^2 + (\text{rot } \vec{u}) \times \vec{u} \quad (\text{A.2})$$

A.1 ddd

A.2 ddd

A.3 ddd

A.4 ddd