

1. Consider a forward SDE

$$dx_t = f(x_t, t) dt + g(x_t, t) dW_t,$$

show that the corresponding probability flow ODE is written as

$$dx_t = \left[f(x_t, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2(x_t, t) - \frac{g^2(x_t, t)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log p(x_t, t) \right] dt.$$

$dx_t = f(x_t, t) dt + g(x_t, t) dW_t$ 相對應的 Fokker-Planck equation 為

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (fp) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2 p) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(fp - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (g^2 p) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(fp - g \frac{\partial g}{\partial x} p - \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[p \left(f - g \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{p} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[p \left(f - g \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} g^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right) \right) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[p \left(f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2 - \frac{1}{2} g^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \log p \right) \right) \right] \end{aligned}$$

\Rightarrow The corresponding probability flow ODE is

$$dx_t = \left[f(x_t, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2(x_t, t) - \frac{1}{2} g^2(x_t, t) \frac{\partial}{\partial x} \log p(x_t, t) \right] dt$$

2. AI 的未來與機器學習的基石

請以 1-2 頁 (約 600-800 字) 為限。

1. AI 的未來能力

請具體描述一件你認為 目前 AI 無法做到，但 20 年後有可能做到 的重要事情。

- 這件事應該是「你認為對人類、社會、科學或文化具有重大意義」的。
- 請具體描述該能力的內容與應用場景 (例如「自動發現新的物理定律」、「全自動醫學診斷並能解釋理由」等) 。
- 盡量避免空泛描述 (如「AI 會更聰明」)，而要明確指出「做什麼」、「為什麼重要」。

2. 涉及的機器學習類型

根據你對問題一的構想，判斷該能力的實現主要涉及哪一類機器學習方法：

- 監督式學習 (Supervised Learning)
- 非監督式學習 (Unsupervised Learning)
- 強化學習 (Reinforcement Learning)
或是以上幾者的組合。
請簡述你的理由：
- 為什麼需要這類學習？
- 該任務中的「資料來源」與「目標訊號」分別是什麼？
- 是否存在學習回饋或環境互動？

3. 第一步的「模型化」

假設要讓 AI 在 20 年後達到問題一的能力，請思考並設計出 能夠作為第一個研究步驟的「簡化模型問題 (model problem)」。

說明以下幾點：

- 這個簡化問題在概念上如何代表你理想中的最終能力？
- 它的可測試性 (你如何知道模型是否成功？)
- 需要哪些數學或機器學習工具來解決？

此部分只是記錄想法,可跳過.正文在下頁★

想法：

當一件事情或是一個外來的刺激發生時，每個人都會有不同的感受和情緒，那些可能是錯縱複雜的，可能參雜了一些開心、一點釋然、大量惆悵等等，或是複雜到無法用言語形容，甚至一瞬間可能會有成千上萬種感受。然而，隨著時間的過去，我們的心情、思緒、經歷和環境等等，都會影響著記憶中當時感受到的一切。因此當我們在回憶起這些時，往往會失真。(這稱為記憶扭曲或重構性記憶，也就是記憶中的感受會隨時間改變、模糊或重新詮釋。)

但那些本能反應和情緒是最真實且直接的，或許也是能夠代表一個人內在靈魂的象徵。(我認為人到這世上，重要的任務之一是知道自己到底是誰。這是這幾年經歷些事情後，我有所體悟認為的。)

而接在反應和情緒的後面我認為可能是想法，這與人生所經歷的一切有關，是在本能反應後所演化出的。像是小嬰兒肚子餓了就哭，這是當下的本能反應；或許長大經歷哭了就被打，可能就會故意哭的更大聲，或就不哭了。這就是演化出來的，是一種想法。

當人生累積夠多的想法，想法與想法之間的跳躍，我認為就形成了思維。而每個人都有不同的思維，但等年紀變大後，基本上大概就固定了。(就像我現在大概是理工腦，寫下這些也是藉由已經固定的思維去想，甚至連這句話也是，甚至連我說甚至連這句話也是，....，無窮下去)



我希望未來AI能夠做到捕捉大部分甚至紀錄下每個人在某些時刻的所有感受和想法，甚至是能有一種裝置戴上後，可以暫時完全地感受當時有紀錄時所感受到的一切。就像是強制做了一場很真實的夢一樣，而這個夢是真實發生過的(類似有時聽到一些舊歌，可以瞬間回到以前當下聽到這首歌的感覺。但這很容易被新的感受蓋過去或是漸漸淡化掉。在這想要的是盡可能的保留那些。)，且可以選擇你要進入哪個角色。

好處：

1. 可以更了解自己是誰，如何更快樂。(例如：當你有一個創傷，以往透過心理諮商想要試圖治癒時，會有上述說的記憶扭曲或重構性記憶的情況。如果可以被記錄下來，有助於釐清並較精準的修復傷口。)
2. 有時那些被我們遺棄或遺忘的想法或念頭，或許是很重要的，(例如：這幾天我在想這個主題時(我還沒看到題目，只想著20年後我希望AI會有什麼能力)，我腦中在不同時間會有很多不同的想法冒出來。不過當我在寫這個作業的當下，很多想法也被我遺忘了(記不了太多)，也被我自動遺棄了(為了要回答問題和比較符合框架)。如果能夠被記錄下來，就可以回頭去一個個看，或許我能表達得更豐富。也或許很多數學上的問題早就被解開了，只是想法常常稍縱即逝，數學家來不及捕捉(意識)到。)
3. 人類可以更有同理心。(例如當一對情侶因金錢價值觀不同在吵架，若能戴上裝置的變成對方，體會對方因經歷一切所產生的反應和想法，就更能理解對方為什麼會這樣想。)
4. 可以提升和改善既有的思維，透過完整被記錄下來的所有想法，可以幫助我們去找出既有思維的路徑(想法與想法之間的連結)，進而去做修正和改善；也能夠觀摩高人的思維，去學習，如此人類或許會更有智慧。有了紀錄，我們就能知道更細微的東西。例如戴耳機聽音樂比用喇叭可以聽到更多細小的聲音，感受可能會截然不同。雖然只是很細微的東西，累積起來卻可能會有很不相同的感受。或許世上的文明和科學的進步，關鍵點就在這些細微上。)
5. 能夠短暫的回到過去。在戴上裝置後的那段時間，能夠回到過去快樂的時光。或是當失去親人後，當想念時，可以回到親人還在時的感受。

但以上想法我不認為20年後 AI 有可能做得到，因此將退而求其次的改成，用一個模型來描述一個人的情緒。如同上述，我認為人有一個任務是要了解自己，因此人就像一個黑盒子，所接觸到的人事物就是 input，而這個人會產生的最真實的情緒就是 output。透過人生所經歷的所有事件，用來理解這個黑盒子(自己)是什麼(誰)。但當中難的是人要怎麼知道當下的情緒是由哪些情緒所組成的。所以再改成希望AI有以下能力：

這項能力可以大致分成兩個部分，第一部分是建構模型來模擬一個人的想法或行為，第二部分是透過這些預測出的想法和行為回推和預測當事人當下的感受會是由什麼組成，我想這應該需要些心理學相關的專業知識。

第一部份是一種監督式學習，需要這類學習是因為一個 input，我們會有個大致明確的 output。資料來源是已知事後反應的生活上發生的事情，而目標訊號是正確的想法或行為。沒有存在學習回饋。

第二部分每個人必須先定義自己的感受，例如怎樣叫快樂、悲傷等(每個人都不相同)，並給出 level。

模型化：

Q：這個簡化問題在概念上如何代表你理想中的最終能力？ A：看預測成不成功。

Q：它的可測試性(你如何知道模型是否成功？) A：當可以90%以上大致預測成功，就可認為此模型成功了(當不同年齡，不同心情等也會導致已訂好的標準更動，所以應該是個很難的目標；而我到這個年齡了，我也都覺得我不了解自己，因此 training data 應該要非常非常多才能夠提升準度)

Q：需要哪些數學或機器學習工具來解決？ A：以我目前所接觸到和現有的知識，我只想到類神經網路(第一部分)和SDE(第二部分)

3. Unanswered Questions

There are unanswered questions from the lecture, and there are likely more questions we haven't covered.

- Take a moment to think about these questions.
- Write down the ones you find important, confusing, or interesting.
- You do **not** need to answer them—just state them clearly.

Q1: 為什麼給一 SDE, 透過 Fokker-Plank equation 寫成 $\partial_t P = -\partial_x(\tilde{f}P)$ 的形式後, 則 PE-ODE 即為 $dx_t = \tilde{f}dt$?
(不確定上課是否有提到, 可能是我漏聽了)

Q2: 在 Itô's Lemma, 因推導有省略掉超過 $o(dt)$ 的項,

$$\begin{aligned} \text{e.g.: } (dt)^2 &= \cancel{f^2(dt)^2} + \cancel{2fgdt dW_t} + g^2(dW_t)^2 \\ &= g^2 dt \quad \text{省略} \end{aligned}$$

最後推導出 $dY_t = (\phi_t + \frac{g^2}{2}\phi_{xx})dt + \phi_x dW_t$
要如何理解此等號?

Q3: $\because U_0 = 0$

$$\therefore \frac{1}{U_t^2} \rightarrow \infty \text{ as } t \rightarrow 0^+$$

\Rightarrow 在 reverse 時, T 不能走到 0

那要走到多靠近 0? 有個定論嗎? 為什麼?