

Introduction à la théorie quantique des champs

Tanguy Marsault

9 avril 2024

Avant propos

Cette note a été écrite principalement pour moi-même, afin de faire le point sur ma compréhension de l'approche canonique de la théorie quantique des champs. Elle essaie de décrire aussi précisément que possible le développement canonique de cette théorie. J'ai essayé de mettre un point d'honneur sur la rigueur du raisonnement pour ne parachuter aucun résultat. Naturellement, j'appuie, dans le propos, sur les points qui ne me sont pas parus simples lors de mon apprentissage du sujet. Ainsi, certains points qui me paraissent faciles à comprendre, ne sont peut-être pas aussi développés qu'ils le devraient. C'est une évidence que chacun aura des difficultés différentes à appréhender les différents concepts présentés. Pour autant, si un concept n'est pas détaillé, cela ne veut en aucun cas dire qu'il est *facile*, cela signifie simplement que je n'avais pas buté dessus lorsque j'ai appris cette théorie. Ainsi, si un concept vous perturbe à la lecture, il est toujours préférable de s'en référer à la littérature plus avancée sur la théorie quantique des champs. Les ouvrages à ce sujet sont nombreux et il est facile de s'y perdre, pour cette raison je décris ceux qui me semblent les plus intéressants ci-dessous.

- S.Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* Volume 1, ce livre est tout simplement excellent. Les notations adoptés et la lourdeur des calculs peuvent parfois rendre la compréhension opaque, ainsi ce n'est peut-être pas le meilleur livre en première approche du sujet. Il suit une approche différente de celle adoptée ici, dans laquelle il part des particules pour arriver aux champs. Son raisonnement est toujours rigoureux et soigneusement justifié. Presque n'importe quelle question qu'il est possible de se poser sur l'approche canonique a sa réponse dans ce livre. Les Volumes 2 et 3 sont tout aussi enrichissants, mais dépassent largement la portée de cette note.
- D.Tong, *Introduction to Quantum Field Theory* sont des notes de cours très enrichissantes et faciles à lire (seulement une centaine de pages). Elles ne traitent pas le sujet de manière très poussée mais permettent à n'importe qui parlant anglais d'en saisir les tenants et aboutissants sur un ton très agréable à la lecture.
- T.Lancaster & T.J.Blundell, *Quantum Field theory for the gifted amateur*. Ce livre n'est probablement pas le plus précis et le plus rigoureux sur le sujet. En outre, il offre une approche très guidée et intuitive sur les bases de la théorie quantique des champs. Il présente aussi de nombreuses applications autant à la physique des hautes énergies qu'à la physique de la matière condensée. C'est probablement un des meilleurs ouvrages pour commencer à étudier la théorie quantique de champs en n'ayant qu'une connaissance académique de la mécanique quantique.

-
- M.E.Peskin & D.V.Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory* a été utilisé dans de nombreux cours comme ouvrage de référence. S'il y a dans le titre le mot "Introduction", cet ouvrage s'intéresse tout de même à de très nombreux domaines actuels de la physique moderne. Il traite de nombreux sujets différents et appuie fortement sur la renormalisation, qui apparaît comme un concept naturel de la théorie quantique des champs.

J'ajoute aussi que cette note n'a en aucun cas la prétention d'égaler en explications aucun des ouvrages que je viens de citer. La plupart d'entre eux ont été écrits par des professeurs, physiciens professionnels voire même prix Nobel, alors que je ne reste qu'un étudiant, n'ayant jamais eu de cours sur le sujet et ayant appris tout ce que j'expose de moi-même (la plupart par les ressources que je viens de citer). J'estime quand même que cette note est un bon point d'entrée pour étudier plus en profondeur la théorie quantique des champs. J'ai essayé de la garder concise, pour qu'elle ne reste qu'une introduction permettant de s'attaquer à des sujets beaucoup plus poussés. J'espère qu'elle saura vous être utile et qu'elle donnera goût à étudier plus profondément cette théorie à certains d'entre vous.

Pour tous commentaires, questions, remarques, plaintes, n'hésitez pas à me contacter à l'adresse mail tanguy.marsault02@gmail.com

Table des matières

1	Notations et remarques préliminaires	4
1.1	Notations	4
1.2	Unités physiques	4
2	Théorie classique des champs	5
2.1	Equations dynamiques	5
2.2	Symétries continues	7
2.3	Approche hamiltonienne	10
3	Champs scalaires	12
3.1	Quantification	12
3.2	Hamiltonien	14
3.3	Énergie du vide	15
3.4	Espace de Hilbert	17
3.5	Point de vue d'Heisenberg	20
3.6	Invariance de Lorentz	23
3.7	Causalité et propagateurs	24
4	Champs scalaires complexes	29
4.1	Quantification	29
4.2	Charge conservée	30
4.3	Champ non relativiste	31
4.4	Mécanique quantique	32
5	Interactions	36
5.1	Fondements	36
5.1.1	Lagrangiens	36
5.1.2	Point de vue d'interaction	37
5.1.3	Espace de Hilbert	38
5.1.4	Propagateurs	39
5.2	Aspects théoriques	40
5.2.1	Les mondes simple et compliqué	40
5.2.2	Formule de Dyson	41
5.2.3	Développement perturbatif	42
5.2.4	Théorème de Wick	43
5.2.5	Diagrammes de Feynman	47
5.2.6	Propagateurs en présence d'interactions	49
5.3	Quelques applications	53
5.3.1	La théorie ϕ^4	53
5.3.2	Potentiel de Yukawa	55
6	Conclusion	58

1 Notations et remarques préliminaires

1.1 Notations

Le propos suppose³ une connaissance des bases du calcul tensoriel et de la relativité restreinte. On dénote classiquement par η la métrique de Minkowsky,

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

On réservera les indices grecs (μ, ν, \dots) pour des indices variant de 0 à 3 et les indices latins (i, j, \dots) pour des indices variant de 1 à 3.

La convention de sommation d'Einstein sera utilisée de sorte que :

$$ab = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

définisse un produit scalaire (au sens large, la positivité n'étant pas incluse dans cette définition) pour les quadrivecteurs. Le produit scalaire (euclidien) naturel de \mathbb{R}^3 sera noté avec un \cdot ,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i = a^i b^i$$

Rappelons qu'à cause du signe de η pour les composantes spatiales

$$a_i = -a^i$$

(en règle générale, $a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$.)

1.2 Unités physiques

Nous utiliserons les unités naturelles définie par

$$\hbar = c = 1 \quad (1.2.1)$$

qui nous permettront alors d'exprimer toutes les distances, masses et énergies en unités d'énergie (typiquement GeV) ou de distance. Par exemple, on dira que la masse d'un électron est environ $m_e = 511\text{keV}$.

2 Théorie classique des champs

Avant d'étudier plus en profondeur la théorie quantique des champs (TQC), nous revenons sur quelques concepts fondamentaux de la théorie classique (relativiste) des champs.

2.1 Equations dynamiques

On appelle champ toute application $\phi(\vec{x}, t)$ définie en tout point de l'espace-temps, possédant alors une infinité de degrés de liberté.

Ce champ peut être *a priori* à valeurs dans une variété N . Les cas les plus classiques sont le champ scalaire ($N = \mathbb{R}$), le champ scalaire complexe ($N = \mathbb{C}$), les vecteurs (au sens de Lorentz) ou les multiplets scalaires ($N = \mathbb{R}^n$).

À partir de ces champs, il est possible de construire une densité lagrangienne (que l'on nommera par abus de langage lagrangien) en tout point de l'espace-temps dépendant alors de ces champs. Si l'on note \mathcal{C} l'espace de configuration des champs, la densité lagrangienne définit une application $\mathcal{L} : \mathcal{M} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$, où l'on a noté \mathcal{M} la variété représentant l'espace-temps et munie de la métrique de Minkowsky.

Dans notre cadre d'étude on se restreint à des densités lagrangiennes *locales* (qui font intervenir les valeurs des champs en un point unique de l'espace-temps), ne dépendant pas explicitement de l'espace-temps et ne dépendant que des dérivées premières des champs : $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$.

On définit alors le lagrangien comme

$$L(t) = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.1.1)$$

Puis on définit l'action d'une configuration de champ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ par

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.1.2)$$

Pour trouver la configuration réellement prise par les champs, on utilise le principe de moindre action :

$$\delta S = 0 \quad (2.1.3)$$

Supposons que le Lagrangien dépende de champs ϕ_a , il vient alors (la somme sur a est implicite)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta (\partial_\mu \phi_a) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \right] \delta \phi_a + \text{termes de bord} \end{aligned}$$

En supposant les termes de bord nuls¹, pour que $\delta S = 0$ quelle que soit la variation $\delta \phi_a$, il faut que les équations d'Euler-Lagrange soient satisfaites,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \quad (2.1.4)$$

1. Des théories plus avancées essaient de modifier les équations d'Euler-Lagrange en prenant en compte les termes de bord

On peut déjà s'intéresser à quelques exemples de Lagrangien :

- Klein-Gordon

On considère un champ scalaire ϕ et le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.1.5)$$

On applique les équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial(\partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} (\partial_\rho \phi \delta_\sigma^\mu + \partial_\sigma \phi \delta_\rho^\mu) \\ &= \partial^\mu \phi \end{aligned}$$

Soit alors l'équation de Klein-Gordon,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (2.1.6)$$

- Électromagnétisme

On considère le lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.1.7)$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ le tenseur de Faraday et $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ le 4-vecteur de Lorentz composé du potentiel électrique et du potentiel vecteur. Il vient alors,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} \eta^{\sigma\alpha} \frac{\partial((\partial_\rho A_\sigma)(\partial_\lambda A_\alpha))}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \partial_\mu A^\mu \eta^{\rho\lambda} \frac{\partial(\partial_\rho A_\lambda)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} \eta^{\sigma\alpha} (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu \partial_\lambda A_\alpha + \delta_\lambda^\mu \delta_\alpha^\nu \partial_\rho A_\sigma) + \partial_\sigma A^\sigma \eta^{\rho\lambda} \delta_\rho^\mu \delta_\lambda^\nu \\ &= -\partial^\mu A^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial_\sigma A^\sigma \end{aligned}$$

Puis les équations d'Euler-Lagrange donnent,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu \partial_\sigma A^\sigma = 0$$

soit alors (en remplaçant l'indice muet σ par μ),

$$-\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.8)$$

qui s'avèrent donner deux des équations de Maxwell²

2. Les deux autres s'obtiennent à partir de l'antisymétrie du tenseur $F_{\mu\nu}$ en utilisant le tenseur dual $F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$, où ϵ est le tenseur de Levi-Civita.

2.2 Symétries continues

En théorie quantique des champs, les symétries continues jouent un rôle très important car elles donnent naissance à des charges conservées qui ont des interprétations physiques et mathématiques profondes.

On commence par définir une symétrie continue comme une transformation sur les champs, qui peut s'exprimer sous forme infinitésimale, et qui modifie le lagrangien d'une dérivée complète $\partial_\mu K^\mu$,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu \quad (2.2.1)$$

De cette manière l'action d'une configuration de champs subit la transformation

$$S[\phi] \rightarrow S[\phi] + \int d^4x \partial_\mu K^\mu \quad (2.2.2)$$

Et donc, en supposant que la fonction K est assez décroissante pour $x \rightarrow \infty$, S est invariant.

Montrons alors l'important théorème de Noether,

Toute symétrie continue du Lagrangien induit un courant qui est conservé lorsque les équations d'Euler-Lagrange sont vérifiées.

Supposons les équations d'Euler-Lagrange vérifiées pour un Lagrangien \mathcal{L} et une transformation infinitésimale $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$ (où $\delta\phi = f(\phi)$). Cette dernière induit sur le lagrangien la transformation $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu(\phi)$. Il vient alors,

$$\begin{aligned} \partial_\mu K^\mu(\phi) &= \delta\mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \\ &\stackrel{\text{E-L}}{=} \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}f(\phi) \right) \end{aligned}$$

Et alors

$$j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}f(\phi) - K_\mu(\phi) \quad (2.2.3)$$

vérifie la relation $\partial_\mu j^\mu = 0$ et est donc bien un courant conservé. (Le résultat reste vrai pour plusieurs champs, il suffit de sommer les transformations induites sur chaque champ, voir le dernier exemple de la section.)

Ce courant conservé n'est en général pas si utile en lui-même mais il induit cependant une charge conservée qui a d'intéressantes applications en théorie quantique des champs. En effet, si l'on développe l'équation $\partial_\mu j^\mu = 0$, on obtient

$$\partial_t j^0(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.2.4)$$

Ainsi, considérons $Q = \int d^3\vec{x} j^0(\vec{x}, t)$.

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \int d^3\vec{x} \partial_t j^0(\vec{x}, t) \\ &= \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) \\ &= \oint_{S_\infty^2} d\vec{S} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) \\ &= 0\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de Stokes en choisissant $\partial\mathbb{R}^3 \simeq S_\infty^2$ comme contour d'intégration et en supposant que \vec{j} décroît assez rapidement quand $\vec{x} \rightarrow \infty$. Q définit alors bien une charge conservée. Ces charges s'identifient mathématiquement en théorie quantique des champs comme les générateurs du groupe de symétrie sous la représentation à laquelle appartient le champ.

Remarquons que nous ne nous sommes intéressés ici qu'aux transformations continues infinitésimales. De celles-ci se déduit le cas général pour des symétries continues (par exemple $R(\theta) = (R(\theta/N))^N$). Toutefois, certains systèmes peuvent admettre des groupes de symétrie discrets (par exemple on retrouvera souvent \mathbb{Z}_2) qui eux ne donnent pas naissance à une charge conservée³.

Désormais nous nous intéressons à trois exemples particuliers de symétries différentes. Nous étudions premièrement, les symétries liées à l'invariance par translation et transformation de Lorentz, puis un cas de symétrie n'agissant que sur les champs et pas sur l'espace-temps lui-même, dite symétrie *interne*.

- Translation dans l'espace temps

On considère la transformation infinitésimale sur l'espace-temps $x^\nu \rightarrow x^\nu - \varepsilon^\nu$ qui induit sur les champs une transformation

$$\phi(x^\nu) \rightarrow \phi(x + \varepsilon) = \phi(x) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

Cette dernière induit sur le lagrangien une transformation

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x + \varepsilon) = \mathcal{L}(x) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \varepsilon^\nu \partial_\mu \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (2.2.5)$$

Il y a donc au total 4 transformations qui sont des symétries du lagrangien correspondant aux 4 coordonnées $\nu = 0, 1, 2, 3$ de ε .

Il apparaît alors 4 courants conservés,

$$(j^\mu)_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \triangleq T_\nu^\mu \quad (2.2.6)$$

où l'on a défini le tenseur d'énergie-impulsion,

$$T^{\mu\nu} = \eta^{\rho\nu} (j^\mu)_\rho \quad (2.2.7)$$

3. Pour être plus précis il faudrait faire la distinction entre groupe de symétrie et transformation laissant le Lagrangien invariant. La différence est qu'un groupe admet une représentation agissant sur les champs ϕ , transformant le Lagrangien. Un groupe de symétrie agit sur les champs par une représentation qui laisse le Lagrangien invariant.

qui vérifie alors la relation (lorsque les équations du mouvement sont vérifiées et que les courants sont conservés),

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.2.8)$$

Les charges conservées correspondent à l'énergie,

$$E = \int d^3\vec{x} T^{00} \quad (2.2.9)$$

et la quantité de mouvement dans chaque direction $i = 1, 2, 3$

$$P^i = \int d^3\vec{x} T^{0i} \quad (2.2.10)$$

- Transformation de Lorentz et moment cinétique

Une transformation de Lorentz sur l'espace-temps est une transformation $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ telle que Λ vérifie

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \iff \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \quad (2.2.11)$$

En s'intéressant de nouveau aux transformations infinitésimales⁴, on écrit $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$, puis la relation (19) entraîne,

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \quad (2.2.12)$$

fournissant alors bien 6 coefficients non nuls correspondant aux 3 boosts et 3 rotations.

Sous une telle transformation,

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \phi(x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu) \\ &= \phi(x^\mu) - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) \end{aligned}$$

Le Lagrangien devient,

$$\mathcal{L}(x) \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) = \underbrace{\mathcal{L} - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \mathcal{L}}_{\delta\mathcal{L}} \quad (2.2.13)$$

D'où

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -\omega^\mu_\nu \partial_\mu (x^\nu \mathcal{L}) + \omega^\mu_\nu \mathcal{L} \partial_\mu x^\nu \\ &= -\omega^\mu_\nu \partial_\mu (x^\nu \mathcal{L}) + \omega^\mu_\nu \mathcal{L} \delta^\nu_\mu \\ &= -\omega^\mu_\nu \partial_\mu (x^\nu \mathcal{L}) + \cancel{\omega^\mu_\mu \mathcal{L}} \\ &= -\omega^\rho_\sigma \partial_\mu (\delta^\mu_\rho x^\sigma \mathcal{L}) \end{aligned}$$

Le courant conservé est alors,

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \omega^\rho_\sigma x^\sigma \partial_\rho \phi - \omega^\rho_\sigma x^\sigma \delta^\mu_\rho \mathcal{L} = -\omega^\rho_\sigma T^\mu_\rho x^\sigma \quad (2.2.14)$$

4. Il est légitime de se demander si l'on obtient toutes les transformations de Lorentz en étudiant celles définies infinitésimalement. La réponse est non, nous n'étudions que celles dans la même composante connexe que l'identité, à savoir les transformations de Lorentz orthochrones à déterminant positif. On peut inclure les autres transformations grâce aux opérateurs de parité et renversement du temps. Nous n'élaborerons pas ici sur ce sujet.

Il y a donc 6 courants conservés au total, un pour chaque composante non nulle de ω . On peut les réécrire,

$$(\mathcal{J}^\mu)^{\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho} \quad (2.2.15)$$

Ces courants donnent naissance à 6 charges conservées. Dans le cas où $\rho = 0$,

$$Q^{0i} = \int d^3\vec{x} (x^0 T^{0i} - x^i T^{00}) \quad (2.2.16)$$

Elles vérifient,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dQ^{0i}}{dt} = \int d^3\vec{x} T^{0i} + t \int d^3\vec{x} \frac{\partial T^{0i}}{\partial t} - \frac{d}{dt} \int d^3\vec{x} x^i T^{00} \\ &= P^i + t \frac{dP^i}{dt} - \frac{d}{dt} \int d^3\vec{x} x^i T^{00} \end{aligned}$$

Mais P^i est conservé, donc la conservation des charges Q^{0i} donne $\frac{d}{dt} \int d^3\vec{x} x^i T^{00}$ est constant. La conservation des Q^{0i} s'interprète donc comme le fait que le centre d'inertie du système se déplace à vitesse constante, résultat qui fait écho à la première loi de Newton.

Dans le cas où ρ et σ sont des coordonnées spatiales,

$$Q^{ij} = \int d^3\vec{x} (x^i T^{0j} - x^j T^{0i}) \quad (2.2.17)$$

qui correspondent au moment cinétique.

- Symétrie interne globale (de phase)

On considère cette fois un champ complexe ψ auquel on associe typiquement un Lagrangien

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - V(|\psi|^2) \quad (2.2.18)$$

Ce lagrangien est invariant par la transformation agissant sur ψ , $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ (qui induit la transformation $\psi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \psi^*$). Infinitésimalement, la transformation s'écrit $\psi \rightarrow \psi + i\alpha\psi$. Le courant conservé est alors,

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \delta\psi^* \\ &= i \frac{\partial(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi^* \partial_\nu \psi)}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi - i\psi^* (\partial^\mu \psi) \\ &= i(\delta^\mu_\nu \partial^\nu \psi^*) \psi - i\psi^* (\partial^\mu \psi) \\ &= i(\partial^\mu \psi^*) \psi - i\psi^* (\partial^\mu \psi) \end{aligned}$$

Nous ne calculerons pas la charge conservée ici, car elle ne représente pas d'intérêt à ce stade. Elle se révélera intéressante lorsque nous étudierons le champ scalaire complexe.

2.3 Approche hamiltonienne

En physique classique, on définit le plus souvent le Lagrangien comme $L = T - V$, où V est l'énergie potentielle, et $T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$ est l'énergie cinétique. Puis est défini l'Hamiltonien par $H = p\dot{q} - \mathcal{L}$, où $p = \partial_{\dot{q}} L$ (nous présentons ici le cas avec une seule coordonnée q , mais cas général $\{q_i\}$ est identique par somme).

Ainsi, en théorie classique des champs, nous travaillerons avec une densité Hamiltonienne \mathcal{H} que l'on définit naturellement par

$$\mathcal{H} = \pi^a(\vec{x}, t) \dot{\phi}_a(\vec{x}, t) - \mathcal{L}(\vec{x}, t) \quad (2.3.1)$$

où $\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}$.

On définit alors l'hamiltonien représentant l'énergie par

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H} \quad (2.3.2)$$

Par exemple, prenons le Lagrangien $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \mathcal{V}(\phi)$. Ainsi, naturellement l'énergie cinétique est $T = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$ et l'énergie potentielle est $V = \int d^3\vec{x} [\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \mathcal{V}(\phi)]$.

On en déduit le moment conjugué,

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

puis le calcul de la densité hamiltonienne,

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \mathcal{V}(\phi)$$

et enfin une expression simplifiée de l'hamiltonien,

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H} = T + V$$

qui est bien en accord avec la définition classique de l'énergie $E = E_c + E_p$.

3 Champs scalaires

Avant d'étudier les champs quantiques, nous revenons sur les principales raisons qui justifient l'introduction d'une théorie quantique des champs. La théorie quantique des champs s'identifie comme le rassemblement des deux théories principales de la physique moderne, à savoir la relativité restreinte et la mécanique quantique.

L'idée d'introduire des champs se basent sur la méthode (assez générale) d'étendre la dualité ondes-particules, qui s'était révélée utile pour les photons puis par la suite pour les électrons. Elle s'appuie aussi sur une observation fondamentale qu'une particule est identique à n'importe quelle autre particule du même type qu'elle. En effet, il est impossible de différencier un électron sur la Lune, d'un électron généré sur Terre au LHC. Ceci suggère l'existence d'une quantité plus fondamentale à l'origine de chaque type de particules élémentaires que nous observons (et de l'anti-particule associée comme nous le verrons).

Un deuxième argument est que la relativité restreinte implique forcément que le nombre de particules n'est pas conservé, la mécanique quantique ne suffisant alors plus à décrire le système. En effet, la relation d'Heisenberg nous indique que $\Delta p \Delta x \leq \hbar$ et ainsi lorsque Δp devient trop grand, il est possible de créer des paires particules/antiparticules.

Nous commençons par étudier les champs les plus simples à savoir les champs $\phi : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}$. Ils permettront d'introduire toutes les notions importantes pour étudier des champs plus complexes. Nous quantifions ce champ scalaire selon un processus appelé *quantification canonique*.

3.1 Quantification

Commençons par faire quelques rappels sur la quantification canonique en mécanique quantique. Pour un Hamiltonien classique dépendant de coordonnées q_a avec des moments associés p^a , on le promeut en un Hamiltonien quantique en transformant ces quantités en opérateurs et en transformant le crochet de Poisson classique $\{\cdot, \cdot\}$ en un commutateur quantique $[\cdot, \cdot]$. On impose alors les relations de commutations

$$\begin{aligned} [q_a, q_b] &= [p^a, p^b] = 0 \\ [q_a, p^b] &= i\delta_a^b \end{aligned}$$

On étend naturellement ce processus aux champs, que l'on promeut en opérateurs avec les relations de commutations

$$[\phi_a(\vec{x}), \phi_b(\vec{y})] = [\pi^a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = 0 \quad (3.1.1)$$

$$[\phi_a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = i\delta_a^b \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.1.2)$$

Notons que les champs ne dépendent pas ici du temps car nous nous sommes placés du point de vue de Schrödinger (nous y reviendrons par la suite), où toute dépendance temporelle est incluse dans les états physiques $|\psi\rangle$.

On se concentre dans cette section sur un champ scalaire dont l'équation de la dynamique provient du Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (3.1.3)$$

et est donnée par l'équation de Klein-Gordon,

$$(\partial^2 + m^2)\phi(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.1.4)$$

On note ici qu'il y a encore la présence de t dans le champ. En effet, on considère ici (et jusqu'à ce que l'on ait réussi à le quantifier) que ϕ n'est que la généralisation de variables dynamiques classiques $q_i(t)$. La transformée de Fourier spatiale donne alors,

$$(\partial_t^2 + (\vec{p}^2 + m^2))\phi(\vec{p}, t) = 0 \quad (3.1.5)$$

Et à \vec{p} fixé, $\phi(\vec{p}, t)$ est solution d'un oscillateur harmonique. Pour un oscillateur harmonique quantique, la quantification des q_i et p^i donne les expressions

$$q = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(a + a^\dagger) \quad \text{et} \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad (3.1.6)$$

Il paraîtrait alors naturel de définir (avec $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$)

$$\phi(\vec{p}) = \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}}(a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger)$$

Il faut cependant prendre en compte le fait que ϕ est un champ réel et que sa transformée de Fourier doit vérifier $\phi^*(\vec{p}) = \phi(-\vec{p})$. La bonne quantification du champ est alors

$$\phi(\vec{p}) = \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}}(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger) \quad (3.1.7)$$

De même,

$$\pi(\vec{p}) = -i\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}(a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger) \quad (3.1.8)$$

Les expressions de ϕ et π s'obtiennent par transformée de Fourier inverse,

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}} [a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger] e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}} [a_{\vec{p}} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}] \quad (3.1.9)$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} [a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger] e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} [a_{\vec{p}} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}] \quad (3.1.10)$$

On définit alors classiquement le vide $|0\rangle$ tel que $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$, $\forall \vec{p}$ et normalisé par $\langle 0|0\rangle$.

Écrits de la sorte, les opérateurs a et a^\dagger ne représentent rien. Nous déduisons alors les relations de commutation qui font écho aux relations de commutation que l'on peut trouver pour un oscillateur harmonique quantique.

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0 \quad (3.1.11)$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (3.1.12)$$

Pour montrer ces relations, il suffit d'isoler les opérateurs a et a^\dagger en utilisant les bonnes combinaisons linéaires de ϕ et π et en faisant une transformée de Fourier inverse, puis d'utiliser les relations de commutation entre ϕ et π .

Le processus par lequel nous avons réussi à quantifier le champ ϕ est nommé *quantification canonique*.

3.2 Hamiltonien

Suite au processus de quantification, les champs deviennent des opérateurs. Puis alors toute quantité dépendant de ces champs est aussi naturellement transformée en un opérateur. C'est notamment le cas de l'Hamiltonien défini par,

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (3.2.1)$$

En utilisant les expressions trouvées pour ϕ et π , on étend alors cette définition classique de l'Hamiltonien à un opérateur quantique que l'on peut calculer en fonction des opérateurs a et a^\dagger .

Les calculs ci-dessous sont assez lourds de notations mais relativement simples à suivre. En effet, il suffit d'injecter les développements de ϕ et π .

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \iint \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} (-i)^2 \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}{4}} \left(a_{\vec{p}} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \left(a_{\vec{q}} e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right) \\ &\quad + i^2 \sqrt{\frac{1}{4\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} \left(\vec{p} a_{\vec{p}} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} - \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \left(\vec{q} a_{\vec{q}} e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}} - \vec{q} a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right) \\ &\quad + m^2 \sqrt{\frac{1}{4\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \left(a_{\vec{q}} e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \iint \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} (-1) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}{4}} \left[a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{+i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger e^{+i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right] \\ &\quad - \sqrt{\frac{1}{4\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} \left[\vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{+i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} - \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger e^{+i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right] \\ &\quad + m^2 \sqrt{\frac{1}{4\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} \left[a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{+i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger e^{+i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right] \end{aligned}$$

Ce qui est physiquement intéressant et mesurable est l'énergie totale d'un système, soit son hamiltonien (nous continuons à confondre, dans le langage, hamiltonien et densité hamiltonienne) $H = \int d^3x \mathcal{H}$. Encore une fois les calculs, bien que volumineux, sont assez simples à suivre. Il suffit d'utiliser (abondamment) la relation $\int d^3x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p})$ et de se souvenir que $\omega_{\vec{p}} = \omega_{-\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. En poursuivant les calculs, il vient alors,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \iint \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} (-) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}{4}} \left[a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) \right. \\
&\quad \left. - a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \right] \\
&\quad - \sqrt{\frac{1}{4\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} \left[\vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) + \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) - \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) - \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \right] \\
&\quad + m^2 \sqrt{\frac{1}{4\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} \left[a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) + a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (-1) \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} \left[a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger - a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left[-\vec{p}^2 a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} - \vec{p}^2 a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger - \vec{p}^2 a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger - \vec{p}^2 a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \\
&\quad + m^2 \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left[a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} \left[-a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \\
&\quad + \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} \left[a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} \left[a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right]
\end{aligned}$$

Puis finalement, en faisant apparaître le commutateur $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger]$, nous obtenons,

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right] \quad (3.2.2)$$

3.3 Énergie du vide

Les deux termes de cette expression nous sont familiers. Le premier est l'analogie des modes excités d'un oscillateur harmonique quantique, tandis que le second correspond aux modes fondamentaux des oscillateurs harmoniques $\frac{\hbar\omega}{2}$. Toutefois, le deuxième terme nous pose problème car il est "doublement" infini. En effet, $\delta^{(3)}(0)$ est un premier infini que nous intégrons sur tout l'espace des quantités de mouvement.

Une première approche⁵, consiste à insister sur le fait que nous ne mesurons que des différences d'énergie. Ainsi, nous pouvons définir un nouvel Hamiltonien $H - E_0$ en soustrayant la deuxième partie infinie de l'Hamiltonien obtenu. Cette opération de soustraire un infini a un sens plus profond que juste "cacher un infini sous le tapis". En effet, si nous revenons à l'Hamiltonien classique d'un oscillateur harmonique avant quantification,

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} q^2 \quad (3.3.1)$$

5. La pertinence de cette approche est remise en cause par le problème de la constante cosmologique. L'énergie du vide devrait apparaître en relativité générale dans la constante cosmologique Λ , mais les ordres de grandeur calculés ne correspondent pas.

Nous pouvons aussi écrire cet Hamiltonien sous la forme $H = \frac{1}{2}(q - ip)(q + ip)$. Puis en le quantifiant sous cette forme nous obtiendrions, $\hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ et les modes fondamentaux n'apparaîtraient pas. Nous pourrions aussi trouver $H = \hat{a} \hat{a}^\dagger$. Ainsi la présence des modes fondamentaux repose simplement sur l'ambiguïté du processus de quantification. Soustraire les infinis revient alors à faire le choix de quantifier en plaçant directement tous les opérateurs de création sur la gauche et ceux d'annihilation sur la droite.

On définit ainsi l'opération de classement normal comme le processus qui permet de placer à gauche tous les opérateurs de création et à droite tous les opérateurs d'annihilation. On note cette opération par $N[\cdot]$ (cette opération peut aussi être notée $:\cdot:$).

Il est aussi possible (et c'est bien souvent ce qu'il importe de faire pour comprendre le sens physique de ces infinis) d'étudier plus profondément l'origine des quantités infinies. Remarquons premièrement que

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} d^3 \vec{x} e^{i \vec{x} \cdot \vec{p}} \Big|_{\vec{p}=0} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} d^3 \vec{x} = V$$

Le premier infini provenant de $\delta^{(3)}(0)$ provient du simple fait que nous avons considéré un espace infini, il serait alors plus judicieux de s'intéresser à la densité d'énergie,

$$\mathcal{E}_0 = \frac{E_0}{V} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}} \quad (3.3.2)$$

Toutefois cette quantité demeure infinie, et il n'y a pas moyen de la rendre finie mathématiquement. En réalité il faut revenir au modèle physique que nous avons développé. Nous avons supposé notre théorie vraie à des échelles d'énergie (ou de distance) arbitraires. Mais il n'y a pas de raison que cette théorie soit vraie à des distances arbitrairement petites. Il faut donc admettre notre ignorance et exprimer le fait que cette théorie n'a pas de raison de rester valable pour des énergies plus grandes qu'une échelle Λ ⁶. Nous écrivons alors,

$$\mathcal{E}_0 = \frac{E_0}{V} = \int^\Lambda \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}} \quad (3.3.3)$$

Nous n'irons pas plus loin dans les détails de la signification de ce Λ ⁷. Ainsi, nous ne considérerons ici que des opérateurs soumis à l'opération de classement normal.

Toutefois, puisque le vide a effectivement une énergie, on devrait être en mesure de calculer la force exercée par le vide sur une plaque métallique qui y serait introduite. C'est l'*effet Casimir* que nous détaillons ici.

On identifie l'espace avec une boîte de longueur L et de surface A . On introduit 2 plaques séparées de $d \ll L$. On considère un champ scalaire sans masse ϕ tel que $\phi(0, y, z) = 0 = \phi(d, y, z) = \phi(L, y, z)$ ce qui impose alors $\vec{p} = (\frac{n\pi}{d}, p_y, p_z)$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$ pour le champ compris entre 0 et d , et $\vec{p} = (\frac{n\pi}{L-d}, p_y, p_z)$ pour le champ compris en d et L . Ainsi, la densité surfacique d'énergie entre 0 et d est,

$$\frac{E(d)}{A} = d \frac{E(d)}{V} = d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{d} \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

6. Λ définit ici n'a pas de rapport avec la constante cosmologique évoquée précédemment.

7. Ce sont des sujets compliqués sur la régularisation et la renormalisation qui dépassent la portée de ces notes d'introduction.

(la somme n'inclut pas le terme $n = 0$). Soit,

$$\frac{E(d)}{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (3.3.4)$$

Cette quantité est encore infinie. Il nous suffit alors de la régulariser physiquement. En effet, nous avons placé deux plaques métalliques parfaitement conductrices, mais il paraît absurde que ces plaques soient conductrices pour tous les modes électromagnétiques. Il est facile d'imaginer qu'à très haute énergie, les plaques métalliques sont invisibles pour certains modes ce qui nous pousse à introduire un facteur régularisant dépendant d'un paramètre a^8 ,

$$\frac{E(d)}{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2} e^{-a \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2}} \quad (3.3.5)$$

Le facteur régularisant choisi peut paraître arbitraire. En réalité, le calcul que nous faisons ci-dessous reste vrai pour une grande classe de régularisations⁹.

Pour un calcul plus simple nous nous plaçons en dimension 1 avec un champ scalaire. En réalité, l'expérience est réalisée avec un champ électromagnétique (disposant de 2 modes de polarisation) et avec 3 dimensions d'espace. Avec une dimension d'espace seulement, nous calculons,

$$E(d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{n\pi}{d} e^{-a \frac{n\pi}{d}} = -\frac{\pi}{2d} \frac{d}{\pi} \frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a \frac{n\pi}{d}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \frac{e^{-\frac{a\pi}{d}}}{1 - e^{-\frac{a\pi}{d}}} = \frac{\pi}{2d} \frac{e^{a\pi/d}}{(e^{a\pi/d} - 1)^2}$$

Faisons désormais tendre a vers 0.

$$E(d) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{d}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{2d} \frac{1}{12} + O(a^2)$$

L'énergie totale du système est donc,

$$E = E(d) + E(L - d) = \frac{L}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{L - d} \right) = \frac{L}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24} \quad (3.3.6)$$

En faisant tendre L vers l'infini, la force ressentie par la plaque est alors,

$$F = -\frac{\partial E}{\partial d} = \frac{\pi}{24d^2} \quad (3.3.7)$$

Le résultat obtenu pour un calcul avec 3 dimensions d'espace avec le champ électromagnétique donne,

$$\frac{1}{A} \frac{\partial E}{\partial d} = \frac{\pi^2}{480d^4} \quad (3.3.8)$$

3.4 Espace de Hilbert

Jusqu'ici, nous avons défini des opérateurs qui agissent sur un espace de Hilbert mais n'avons toujours pas défini cet espace proprement. En mécanique quantique, pour un système avec une particule, on peut définir l'espace de Hilbert par

$$\mathcal{H}_1 = \text{span}\{|\vec{p}\rangle, \vec{p} \in \mathbb{R}^3\} \quad (3.4.1)$$

8. On peut calculer a pour certains matériaux métalliques en électromagnétisme classique. Cette distance caractéristique est liée à la fréquence plasma du conducteur considéré.

9. Voir *QFT in a nutshell*, A.Zee

(En réalité, on définirait ici une "base" de l'espace de Hilbert physique, qui lui n'est qu'un sous-espace de l'espace que l'on vient de définir. Il doit en général prendre en compte des considérations symétriques et probabilistes.)

De la même manière pour un système à i particules (sous certaines hypothèses sur l'Hamiltonien) nous pouvons définir l'espace de Hilbert par,

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \dots \otimes \mathcal{H}_1 = \text{span}\{|\vec{p}_1\rangle \otimes |\vec{p}_2\rangle \dots \otimes |\vec{p}_i\rangle, \vec{p}_k \in \mathbb{R}^3\} \quad (3.4.2)$$

$$= \text{span}\{|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_i\rangle, \vec{p}_k \in \mathbb{R}^3\} \quad (3.4.3)$$

Le point important à noter pour ces espaces est qu'ils contiennent un nombre fixe de particules, qui ne peut pas changer au cours du temps.

Par analogie avec la mécanique quantique, nous définissons en TQC ,

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = a_{\vec{p}_n}^\dagger a_{\vec{p}_{n-1}}^\dagger \dots a_{\vec{p}_1}^\dagger |0\rangle \quad (3.4.4)$$

Et l'espace de Hilbert prenant en compte la possibilité de créer et annihiler des particules, est donc *l'espace de Fock* défini par,

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i \quad (3.4.5)$$

où $\mathcal{H}_0 = \{|0\rangle\}$.

Cependant, rien ne prouve que les états définis ainsi ont encore le sens d'états à n particules de quantité de mouvement $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$. Pour ce faire, on vérifie qu'un état $|\vec{p}\rangle$ correspond bien à une particule de quantité de mouvement \vec{p} , ce qui se traduirait par $\vec{P}|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle$, où \vec{P} est l'opérateur quantité de mouvement en théorie quantique des champs.

Pour déterminer la forme de \vec{P} , on revient au concept de la première partie où nous avons trouvé (Équation (20)),

$$P^i = \int d^3\vec{x} T^{0i} \quad (3.4.6)$$

Rappelons aussi que le tenseur énergie-impulsion vérifie :

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$P^i = \int d^3\vec{x} \pi \partial^i \phi$$

puis,

$$\vec{P} = - \int d^3\vec{x} \pi \vec{\nabla} \phi \quad (3.4.7)$$

(Le signe - provient du fait que $\vec{\nabla} = \partial_i$ et $\partial_i = -\partial^i$.)

On calcule alors \vec{P} en injectant les développements de ϕ et π ,

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= - \int d^3\vec{x} \iint \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \frac{(-i)}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{q}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \left(i\vec{q} a_{\vec{q}} e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}} - i\vec{q} a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right) \\
&= - \frac{1}{2} \iint \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{q}}}} \left(\vec{q} a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) \right. \\
&\quad \left. - \vec{q} a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) - \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} (a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}})
\end{aligned}$$

Puis après classement normal,

$$\vec{P} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \quad (3.4.8)$$

Il vient alors,

$$\begin{aligned}
\vec{P} |\vec{p}\rangle &= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \vec{q} a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \vec{q} a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} |0\rangle + \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \vec{q} a_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) |0\rangle \\
&= \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \vec{p} |\vec{p}\rangle
\end{aligned}$$

L'espace de Fock ainsi défini donne bien naissance à des particules de quantité de mouvement fixée. Encore une fois ce n'est pas l'espace de Hilbert des états physiques, qui lui en est un sous-espace dont les états ne peuvent pas avoir une quantité de mouvement fixée par le principe d'incertitude d'Heisenberg. Si on calcule la normalisation de ces états, nous sommes confrontés au même problème que pour la base $|x\rangle$ en mécanique quantique.

On peut également vérifier que les états ainsi définis ont bien la bonne énergie $\omega_{\vec{p}}$. Le calcul suivant le démontre,

$$\begin{aligned}
H |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{p}_1}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \left(a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_1) \right) a_{\vec{p}_2}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{p}_2}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle + \omega_{\vec{p}_1} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \\
&= \dots \\
&= \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{p}_i} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle
\end{aligned}$$

qui est bien le résultat attendu.

L'opérateur quantité de mouvement n'est pas le seul que l'on peut étudier, et n'est d'ailleurs pas le plus remarquable. En effet, il est encore plus intéressant d'étudier le moment angulaire et d'effleurer une première fois le théorème spin-statistique. L'opérateur de moment angulaire dans la direction i est,

$$J^i = \epsilon^{ijk} \int d^3\vec{x} \left(\mathcal{J}^0 \right)^{jk} \quad (3.4.9)$$

En calculant, le moment angulaire d'une particule (champ) scalaire au repos ($\vec{p} = 0$), on trouve qu'il est nul. Le calcul n'est pas détaillé ici car très lourd et un peu plus compliqué que les calculs précédents, en effet, l'intégrale sur \vec{x} ne fait pas apparaître des Dirac aussi simplement que dans les autres calculs.

Ceci prouve que quantifier un champ scalaire donne naissance à une particule bosonique de spin 0. Nous savions déjà que la particule était bosonique grâce aux relations sur les commutateurs des opérateurs création et annihilation.

Un autre opérateur, qui ici ne se révélera pas très important, est l'opérateur donnant le nombre de particules d'un état,

$$N = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \quad (3.4.10)$$

Remarquons que cet opérateur compte bien le nombre de particules en le faisant agir sur un état $|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle$.

$$\begin{aligned} N |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{p}_1}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger \left(a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_1) \right) a_{\vec{p}_2}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{p}_2}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle + 1 |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \\ &= \dots \\ &= n |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \end{aligned}$$

Pour les théories libres que nous étudions pour le moment, on postule que $[N, H] = 0$, c'est-à-dire que le nombre de particules est conservé. C'est à dire que si $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_i$ à un instant t , alors $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_i$ à tout instant ultérieur. Ce résultat se montre très facilement,

$$\begin{aligned} [N, H] &= \iint \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \omega_{\vec{q}} \left[a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} \right] \\ &= \iint \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \omega_{\vec{q}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} - a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right) \\ &= \iint \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \omega_{\vec{q}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} + (2\pi)^3 a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) - a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} a_{\vec{p}} + (2\pi)^3 a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, si $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_i$ à un instant t , alors $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_i$ à tout instant ultérieur.

3.5 Point de vue d'Heisenberg

En première approche, la mécanique quantique est généralement étudiée en utilisant des états dépendant du temps et dont la dynamique est régie par l'équation de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S = H |\psi(t)\rangle_S \quad (3.5.1)$$

On fait référence à cette approche avec la dénomination *point de vue de Schrödinger*.

Ce n'est pas l'unique manière d'étudier la mécanique quantique. En effet, le physicien Heisenberg a développé un point de vue totalement différent pour lequel un état ne dépend

pas du temps et toute dépendance temporelle est incluse dans les opérateurs. On choisit alors un temps (ici $t = 0$) auquel les deux descriptions coïncident, puis alors les états dans les deux descriptions sont reliés par

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-iHt/\hbar} |\psi\rangle_H \quad (3.5.2)$$

et les opérateurs dans chacune des descriptions se déduisent par,

$$O_H(t) = e^{iHt/\hbar} O_S e^{-iHt/\hbar} \quad (3.5.3)$$

Ainsi il n'importe plus d'étudier la dynamique des états (qui n'en n'ont plus !) mais plutôt celle des opérateurs, dont l'équation d'évolution est,

$$\frac{d}{dt} O_H(t) = \frac{i}{\hbar} [H, O_H(t)] \quad (3.5.4)$$

(Cette équation est très simple à montrer, il suffit de développer le calcul en utilisant l'équation de Schrödinger.)

En TQC, l'idée est alors d'inclure la dépendance temporelle potentielle d'un état dans les opérateurs ϕ et π définis précédemment. On définit alors,

$$\phi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt} \quad (3.5.5)$$

$$\pi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \pi(\vec{x}) e^{-iHt} \quad (3.5.6)$$

Les relations de commutation deviennent des relations de commutation valables uniquement à temps égaux,

$$[\phi_a(\vec{x}, t), \pi^b(\vec{y}, t)] = i\delta_a^b \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.5.7)$$

Nous pouvons alors étudier l'évolution dynamique de ϕ , et nous nous attendons évidemment à retrouver l'équation de Klein-Gordon. Pour les calculs on note $x = (t, \vec{x})$ et $y = (t, \vec{y})$.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= i[H, \phi] \\ &= \frac{i}{2} \int d^3\vec{y} [\pi(y)^2 + (\nabla\phi(y))^2 + m^2\phi(y)^2, \phi(x)] \end{aligned}$$

Il faut calculer 3 commutateurs, dont un est évident : $[\phi(y)^2, \phi(x)] = 0$. Le deuxième l'est moins et nous en détaillons le calcul. Remarquons déjà que l'opérateur ∇ n'agit que sur les quantités dépendant de y , ce que l'on précise par la suite avec la notation ∇_y .

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{y} [(\nabla_y\phi(y))^2, \phi(x)] &= \int d^3\vec{y} \nabla_y\phi(y) [\nabla_y\phi(y), \phi(x)] + [\nabla_y\phi(y), \phi(x)] \nabla_y\phi(y) \\ &= \int d^3\vec{y} \nabla_y\phi(y) \nabla_y[\phi(y), \phi(x)] + \nabla_y[\phi(y), \phi(x)] \nabla_y\phi(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le dernier commutateur à calculer est enfin,

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{y} [\pi(y)^2, \phi(x)] &= \int d^3\vec{y} \pi(y) [\pi(y), \phi(x)] + [\pi(y), \phi(x)] \pi(y) \\ &= -2i \int d^3\vec{y} \pi(y) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= -2i\pi(x) \end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\dot{\phi} = \pi \quad (3.5.8)$$

On peut de même étudier la dynamique de π .

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= i[H, \pi] \\ &= \frac{i}{2} \int d^3\vec{y} \left[\pi(y)^2 + (\nabla\phi(y))^2 + m^2\phi(y)^2, \pi(x) \right] \\ &= \frac{i}{2} \int d^3\vec{y} \nabla_y \phi(y) [\nabla_y \phi(y), \pi(x)] + [\nabla_y \phi(y), \pi(x)] \nabla_y \phi(y) \\ &\quad + \phi(y) [\phi(y), \pi(x)] + [\phi(y), \pi(x)] \phi(y) \\ &= \frac{i}{2} \int d^3\vec{y} \nabla_y \phi(y) \nabla_y [\phi(y), \pi(x)] + \nabla_y [\phi(y), \pi(x)] \nabla_y \phi(y) + 2im^2\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\phi(y) \\ &= -m^2\phi(x) - \int d^3\vec{y} \nabla_y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \nabla_y \phi(y) \\ &= -m^2\phi(x) + \int d^3\vec{y} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \nabla_y^2 \phi(y) \\ &= -m^2\phi(x) + \nabla^2 \phi(x) \end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats, on retrouve effectivement l'équation de Klein-Gordon,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (3.5.9)$$

Toutefois, ce n'est pas l'équation de Klein-Gordon de la théorie classique des champs. En effet, c'est ici une équation sur les opérateurs quantiques ϕ . Cette équation, qui tire son existence de la relativité, implique l'existence de modes d'énergies négatives. On interprète ces modes d'énergies négatives comme les modes d'énergies positives des antiparticules. C'est en ce sens qu'on entend souvent que la relativité restreinte implique l'existence d'antiparticules.

On peut aussi expliciter le développement de $\phi(\vec{x}, t)$. Pour cela il suffit de remarquer que,

$$e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} = e^{-iE_{\vec{p}}t} a_{\vec{p}} \quad (3.5.10)$$

$$e^{iHt} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-iHt} = e^{iE_{\vec{p}}t} a_{\vec{p}}^\dagger \quad (3.5.11)$$

Remarquons que nous avons changé notre notation de $\omega_{\vec{p}}$ à $E_{\vec{p}}$, mais ces deux quantités sont égales.

Les équations (72) et (73) se montrent assez facilement par calcul direct en utilisant les commutateurs $[H, a_{\vec{p}}]$ et $[H, a_{\vec{p}}^\dagger]$. Par exemple en utilisant $[a_{\vec{p}}, H] = E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$,

$$\begin{aligned} e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} &= e^{iHt} a_{\vec{p}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-it)^k}{k!} H^k \\ &= e^{iHt} \sum_{k \geq 0} \frac{(-it)^k}{k!} (H + E_{\vec{p}})^k a_{\vec{p}} \\ &= e^{iHt} e^{-it(H + E_{\vec{p}})} a_{\vec{p}} \\ &= e^{-iE_{\vec{p}}t} a_{\vec{p}} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $e^A e^B = e^{A+B}$ si $[A, B] = 0$.

On peut alors facilement écrire le développement de $\phi(x) = \phi(\vec{x}, t)$,

$$\phi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{+ipx} \right) \quad (3.5.12)$$

On remarquera que dans cette expression les signes dans les exponentielles semblent avoir changé, cela est dû au fait que $px = E_{\vec{p}}t - \vec{p} \cdot \vec{x}$.

Pour une théorie qui se veut la conjonction de la mécanique quantique et de la relativité restreinte, nous sommes heureux de remarquer que cette théorie semble de plus en plus être invariante par transformation de Lorentz. C'était d'ailleurs un des problèmes principaux lorsque nous avons formulé cette théorie du point de vue hamiltonien. Le temps et l'espace n'étaient pas placés sur un pied d'égalité, ce qui semble désormais être le cas ici.

3.6 Invariance de Lorentz

En mécanique quantique, on demande que les transformations sur les états aient une représentation unitaire¹⁰. Par exemple, pour un état $|a\rangle$, si l'on effectue une transformation par action d'un élément $g \in G$ d'un groupe sur le système, on souhaite que

$$|a\rangle \longrightarrow |a'\rangle = |ga\rangle = U(g) |a\rangle \quad (3.6.1)$$

où U est unitaire.

Revenons aux états que nous avons étudié jusqu'ici, tels que l'état $|\vec{p}\rangle$. Prenons une transformation de Lorentz Λ telle que $\vec{p}' \xrightarrow{\Lambda} \vec{p}$. Sur des quadrivecteurs cette transformation s'écrit, $p \longrightarrow p' = \Lambda p$, mais il n'y a aucune raison *a priori* que la transformation induite sur les états quantiques $|\vec{p}\rangle$ ait une représentation unitaire pour les états tels qu'on les a définis. Il faut donc trouver des états $|p\rangle$, qui se transforment correctement sous une transformation de Lorentz. Pour déterminer cette quantité, l'idée est de partir d'une quantité que nous savons invariante de Lorentz puis d'en déduire les états correctement normalisés.

Nous savons que l'opérateur,

$$I = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|$$

se transforme correctement par transformée de Lorentz. Toutefois, les deux termes de l'intégrande ne sont pas eux-mêmes des invariants de Lorentz.

En outre la mesure,

$$d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \quad (3.6.2)$$

(où θ désigne la fonction de Heaviside) est un invariant de Lorentz (au sens invariant pour les transformations orthochrones de Lorentz).

Utilisons la relation,

$$\delta[f(x)] = \sum_{y|f(y)=0} \frac{1}{|f'(y)|} \delta(x - y) \quad (3.6.3)$$

On considère l'application $f(p^0) = p^2 - m^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 - m^2$, qui admet pour zéros $\pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E_{\vec{p}}$. Il vient alors,

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[\delta(p^0 - E_{\vec{p}}) + \delta(p^0 + E_{\vec{p}}) \right] \quad (3.6.4)$$

Finalement,

$$d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) = \frac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} \quad (3.6.5)$$

10. En réalité, les opérateurs peuvent être antiunitaire et antilinéaire, c'est le théorème de Wigner. Toutefois pour des transformations d'un groupe de Lie dans la même composante connexe que l'identité, les représentations sont bien unitaires.

et donc la mesure $\frac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}}$ est invariante de Lorentz.

On en déduit que des états correctement normalisés sont les états

$$|p\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle \quad (3.6.6)$$

3.7 Causalité et propagateurs

Si nous avons réussi à renormaliser les états pour qu'ils soient cohérents avec la relativité restreinte, il reste un point fondamental à vérifier, à savoir la causalité. En effet, si deux points de l'espace-temps sont séparés par un intervalle d'espace (*i.e* $(x - y)^2 < 0$), il faut que les valeurs du champ en ces deux points n'aient pas de relation causale, ce que l'on traduit par une relation de commutativité entre eux :

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad (3.7.1)$$

Montrons que c'est bien le cas, en calculant, pour deux points x, y de l'espace-temps quelconques cette quantité,

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \iint \frac{d^3\vec{p}d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{q}}}} \left[\left(a_{\vec{p}}e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \left(a_{\vec{q}}e^{-iqx} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqx} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(a_{\vec{q}}e^{-iqx} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqx} \right) \left(a_{\vec{p}}e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \right] \\ &= \iint \frac{d^3\vec{p}d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{q}}}} \left[a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{ipx-iqy} + a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger e^{-ipx+iqy} \right. \\ &\quad \left. - a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} e^{-ipx+iqy} - a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx-iqy} \right] \\ &= \iint \frac{d^3\vec{p}d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{q}}}} \left[[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] e^{-ipx+iqy} - [a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}^\dagger] e^{ipx-iqy} \right] \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right] \end{aligned}$$

Grâce à la mesure que nous avons déterminée la section précédente, cette quantité est un scalaire de Lorentz, on la note $\Delta(x - y)$.

On peut alors calculer la valeur de $\Delta(x - y)$ suivant la nature de l'intervalle $(x - y)$.

Si c'est un intervalle spatial : $(x - y)^2 < 0$, il y a deux manières de montrer que cette quantité s'annule

- la plus simple est de se souvenir que pour un intervalle spatial, il existe une transformation de Lorentz Λ telle que $\Lambda(x - y) = (0, \vec{z})$, puis

$$\Delta(x - y) = \Delta(\Lambda(x - y)) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[e^{-i\vec{p}\cdot\vec{z}} - e^{i\vec{p}\cdot\vec{z}} \right] \quad (3.7.2)$$

Il suffit alors de faire le changement de variable $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ (qui laisse $E_{\vec{p}}$ invariant) dans le deuxième terme pour montrer que $\Delta(x - y) = 0$.

- Une autre manière de montrer que cette quantité est nulle est de remarquer que dans un référentiel correctement choisi on peut toujours écrire $(x - y) = (t, d, 0, 0)$ avec

$\frac{t}{d} < 1$. L'idée est alors simplement de booster $(x - y)$ dans la direction x avec un paramètre $\beta = \frac{t}{d}$. Il vient alors,

$$(t, d, 0, 0) \rightarrow (\gamma(t - \beta d), \gamma(d - \beta t), 0, 0) = \left(0, \frac{d}{\gamma}, 0, 0\right) \quad (3.7.3)$$

On effectue alors une rotation (qui fait partie du groupe de Lorentz), pour obtenir le vecteur $(0, -\frac{d}{\gamma}, 0, 0)$, puis en reboostant avec $\beta = -\frac{t}{d}$, on obtient finalement le vecteur $(\gamma(0 + \beta \frac{d}{\gamma}), \gamma(-\frac{d}{\gamma} - \beta \cdot 0), 0, 0) = -(t, x, 0, 0)$. Et alors $(x - y)$ et $(y - x)$ sont reliés par une transformation de Lorentz. Les deux intégrales composant $\Delta(x - y)$ sont des invariants de Lorentz, on peut alors transformer, par exemple, le deuxième terme grâce à transformation dont nous venons de prouver l'existence. Ce terme s'annule alors avec le premier.

Notre théorie pour les champs scalaires libres préservent donc la causalité!

Nous n'avons pour le moment utilisé que des états définis par la quantité de mouvement. Nous pouvons aussi définir des états de position $|x\rangle$. Cependant, ils n'ont rien avoir avec la base classique de la mécanique quantique, on les définit par,

$$|x\rangle = \phi(x) |0\rangle \quad (3.7.4)$$

On peut alors étudier l'amplitude de démarrer avec une particule en y et de la mesurer en x , on s'attend naturellement à trouver 0 pour $(x - y)^2 < 0$, d'après le principe de causalité

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \iint \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{q}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{q}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \left(a_{\vec{q}} e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy} \right) | 0 \rangle \\ &= \iint \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{q}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{q}}}} \langle 0 | \left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right) a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy} | 0 \rangle \\ &= \iint \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{q}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{q}}}} \langle 0 | a_{\vec{p}} e^{-ipx} a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy} | 0 \rangle \\ &= \iint \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{q}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{q}}}} e^{i(qy - px)} \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{ip(y-x)} \end{aligned}$$

Ainsi, $D(x - y)$ est invariant par transformation de Lorentz. En particulier, si $(x - y)^2 <$

0, il existe un référentiel tel que la coordonnée temporelle de $x - y$ soit nulle, d'où

$$\begin{aligned}
D(x - y) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2(\vec{p}^2 + m^2)} e^{+i\vec{p}(\vec{y} - \vec{x})} \\
&= \int_0^\infty \frac{d|\vec{p}|}{2(2\pi)^3} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{|\vec{p}|^2}{|\vec{p}|^2 + m^2} e^{+i|\vec{p}||\vec{y} - \vec{x}| \cos \theta} \\
&= \int_0^\infty \frac{d|\vec{p}|}{2(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}|^2 + m^2} \frac{1}{i} \left(e^{i|\vec{p}||\vec{y} - \vec{x}|} - e^{-i|\vec{p}||\vec{y} - \vec{x}|} \right) \\
&= \frac{1}{2i(2\pi)^2 |\vec{y} - \vec{x}|} \int_{-\infty}^\infty d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}|^2 + m^2} e^{i|\vec{p}||\vec{y} - \vec{x}|} \\
&= \frac{1}{2i(2\pi)^2 |\vec{y} - \vec{x}|} \oint dz \frac{z}{z^2 + m^2} e^{iz|\vec{y} - \vec{x}|}
\end{aligned}$$

où l'intégrale est effectuée sur le demi-cercle \mathcal{C} à l'infini de la partie supérieure $\text{Im} > 0$ du plan complexe (assurant alors que les termes tel que $\text{Im} z > 0$ soient bien nuls, prouvant ainsi l'égalité des deux intégrales). On utilise alors le théorème des résidus. L'intégrande admet le pôle $+im$ (pôle simple) qui entouré par \mathcal{C} , dont le résidu est,

$$\lim_{z \rightarrow im} (z - im) \frac{z}{z^2 + m^2} e^{iz|\vec{y} - \vec{x}|} = \frac{im}{2im} e^{iim|\vec{y} - \vec{x}|}$$

Il vient enfin,

$$D(x - y) = \frac{1}{2i(2\pi)^2 |\vec{y} - \vec{x}|} 2i\pi \frac{im}{2im} e^{iim|\vec{y} - \vec{x}|} = \frac{1}{8\pi |\vec{y} - \vec{x}|} e^{-m|\vec{y} - \vec{x}|} \quad (3.7.5)$$

Étonnamment, le résultat est différent de 0. Pour le comprendre il faut revenir à la définition des états $|x\rangle$ que nous avons introduits plus tôt. En réalité, contrairement à la mécanique quantique, les états $|x\rangle$ définis en TQC ne sont pas localisés et sont déjà des paquets d'ondes. Ainsi, le fait que $D(x - y)$ soit non nul est le simple reflet de l'inégalité d'Heisenberg qui indique que nous n'avons pas réellement accès à la position de la particule préparée dans l'état $\phi(x) |0\rangle$.

Si nous revenons à la quantité $\Delta(x - y)$ que nous avons définie précédemment, nous remarquons que,

$$\Delta(x - y) = [\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = D(x - y) - D(y - x) \quad (3.7.6)$$

Ainsi le fait que Δ soit nul pour $(x - y)^2 < 0$ s'interprète par le fait que l'amplitude que la particule se propage de x à y est la même que l'amplitude que la particule se propage de y vers x . Ce résultat est conforme à nos attentes car ces deux événements x, y étant séparés par un intervalle d'espace, il n'y aurait pas de sens à définir lequel a lieu avant ou après.

Pour un intervalle temporel $(x - y)^2 > 0$, la quantité d'intérêt est plutôt,

$$\Delta_F(x - y) = \begin{cases} D(x - y) & \text{si } x^0 > y^0 \\ D(y - x) & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases} \quad (3.7.7)$$

Pour simplifier la notation on définit l'opérateur de ré-arrangement temporel T , tel que

$$T\phi(x_1) \dots \phi(x_N) = \phi(x_{\sigma(1)}) \dots \phi(x_{\sigma(N)}) \quad (3.7.8)$$

où $\sigma \in \mathcal{S}_N$ est la permutation telle que $x_{\sigma(1)}^0 > \dots > x_{\sigma(N)}^0$.

Nous voulons désormais montrer qu'il y a une forme plus pratique à utiliser, et reflétant plus facilement l'invariance de Lorentz, pour $\Delta_F(x - y)$, donnée par

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (3.7.9)$$

dans la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$.

La fonction rationnelle $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ en tant que fonction de p^0 , admet deux pôles, qui (dans la limite où ε est petit) sont $E_{\vec{p}} - i\varepsilon$ et $-E_{\vec{p}} + i\varepsilon$.

Supposons alors par exemple $x^0 > y^0$ (le deuxième cas se traite de manière similaire, en fermant le contour d'intégration vers le haut).

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\ &= \oint dz \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{i}{(z)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-iz(x^0 - y^0)} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \end{aligned}$$

où l'intégrale sur z est effectuée sur le demi-cercle inférieur du plan complexe, de sorte que $e^{-iz(x^0 - y^0)} \xrightarrow[|z| \rightarrow \infty, \text{Im } z < 0]{} 0$.

Ainsi seul le pôle $E_{\vec{p}} - i\varepsilon$ est encerclé par le contour d'intégration dans le sens anti-trigonométrique et le théorème des résidus donne,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} &= -2i\pi \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{i}{2E_{\vec{p}}} e^{-iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} \\ &= D(x - y) \end{aligned}$$

où l'on a pris la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

On nomme la quantité $\Delta_F(x - y)$ le *propagateur de Feynman* (ou parfois plus simplement propagateur, mais il faut savoir qu'il en existe d'autres). Cette quantité exprime l'amplitude pour une particule de se propager de y à x . On retiendra, et utilisera souvent, sa formule dans l'espace des quantités de mouvement,

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (3.7.10)$$

Les propagateurs sont en général les quantités fondamentales qui permettent de calculer les amplitudes de processus en théorie quantique des champs. Nous y reviendrons quand nous étudierons des théories non libres donnant naissance à des interactions entre les champs.

D'un point de vue plus théorique, on peut remarquer que le propagateur de Feynman

remplit le rôle d'une fonction de Green pour l'équation de Klein-Gordon,

$$\begin{aligned} \left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2 \right) \Delta_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} \\ &= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \\ &= -i\delta(x-y) \end{aligned}$$

4 Champs scalaires complexes

Les champs scalaires réels sont très certainement les champs les plus simples qu'il est possible d'étudier. Nous nous intéressons ici à un champ légèrement plus compliqué, qui n'est pour autant pas si différent du champ scalaire réel.

4.1 Quantification

Pour faire le lien entre champ scalaire réel et champ scalaire complexe, il suffit d'imaginer deux champs scalaires ϕ_1 et ϕ_2 de même masse m . Le Lagrangien libre que l'on associerait naturellement est,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2] - \frac{1}{2} [m^2\phi_1^2 + m^2\phi_2^2] \quad (4.1.1)$$

On peut alors écrire cette équation autrement en définissant le champ scalaire complexe,

$$\psi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad (4.1.2)$$

et le Lagrangien s'écrit alors,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi \quad (4.1.3)$$

Nous sommes alors invités à considérer les deux champs ψ et ψ^\dagger comme indépendants. On peut alors définir le moment conjugué à ψ par,

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}^\dagger \quad (4.1.4)$$

On souhaiterait alors avoir la relation de commutation,

$$[\psi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.1.5)$$

Ce qui se montre assez facilement en utilisant les relations de commutations définies pour ϕ_1 et ϕ_2 ,

$$\begin{aligned} [\psi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] &= \frac{1}{2} [\phi_1 + i\phi_2, \dot{\phi}_1 - i\dot{\phi}_2] \\ &= \frac{1}{2} ([\phi_1, \dot{\phi}_1] - i[\phi_1, \dot{\phi}_2] + i[\phi_2, \dot{\phi}_1] + [\phi_2, \dot{\phi}_2]) \\ &= \frac{1}{2} (i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + 0 + 0 + i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})) \\ &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

qui est bien le résultat attendu.

Notons que nous avons défini le champ scalaire complexe à partir de deux champs scalaires réels. Cela a été fait pour aider à la compréhension, mais nous aurions directement pu définir le champ scalaire complexe à partir du Lagrangien précédent, puis le quantifier en forçant la relation de commutation.

Il est alors naturel de développer le champ scalaire complexe en modes propres,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(b_{\vec{p}} e^{-ipx} + c_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \quad (4.1.6)$$

Contrairement au champ scalaire réel, nous avons ici besoin de deux ensembles d'opérateurs création et annihilation, b et c . Cela vient du fait que ψ n'est pas hermitien (en pensant aux champs ϕ_1 et ϕ_2 , qui ne créent pas nécessairement la même particule, il est assez naturel d'avoir deux types d'opérateurs pour créer deux types de particules).

Il vient alors,

$$\pi = \dot{\psi}^\dagger = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left(b_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} - c_{\vec{p}} e^{-ipx} \right) \quad (4.1.7)$$

On peut alors interpréter ce résultat comme,

$$\begin{aligned} \psi &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[\left(\begin{array}{c} \text{Annihilation de} \\ \text{modes d'énergies} \\ \text{positives} + E_{\vec{p}} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Création de} \\ \text{modes d'énergies} \\ \text{négatives} - E_{\vec{p}} \end{array} \right) \right] \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[\left(\begin{array}{c} \text{Annihilation} \\ \text{de particules} \\ \text{d'énergie } E_{\vec{p}} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Création} \\ \text{d'antiparticules} \\ \text{d'énergie } E_{\vec{p}} \end{array} \right) \right] \end{aligned}$$

Nous avons donc bien deux types de particules qui sont antiparticules l'une de l'autre. En comparaison avec le cas du champ scalaire réel, il n'y avait qu'une seule particule qui était aussi son antiparticule. Si nous comptons les degrés de liberté, nous avons 1 particule pour ϕ_1 , 1 particule pour ϕ_2 et nous avons 2 particules pour ψ , le résultat est donc tout à fait logique.

Les relations de commutation sur ψ impliquent naturellement les relations de commutation sur b et c ,

$$[b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (4.1.8)$$

$$[c_{\vec{p}}, c_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (4.1.9)$$

tous les autres commutateurs étant nuls.

4.2 Charge conservée

Nous avons déjà rencontré le Lagrangien,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi \quad (4.2.1)$$

lors de nos rappels sur la théorie classique des champs. Nous avons vu que sous la transformation de $U(1)$, telle que $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ et $\psi^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha} \psi^\dagger$, il apparaissait un courant conservé de Noether de la forme,

$$j^\mu = i(\partial^\mu \psi^\dagger) \psi - i\psi^\dagger (\partial^\mu \psi) \quad (4.2.2)$$

La charge conservée qui en découle est alors naturellement,

$$Q = \int d^3\vec{x} j^0 = \int d^3\vec{x} [i\pi\psi - i\psi^\dagger \pi^\dagger] \quad (4.2.3)$$

On exprime cette charge en fonction des opérateurs b et c ,

$$\begin{aligned}
Q &= i \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\vec{q}}}{4E_{\vec{p}}}} \left[i \left(b_{\vec{q}}^\dagger e^{iqx} - c_{\vec{q}} e^{-iqx} \right) \left(b_{\vec{p}} e^{-ipx} + c_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \right. \\
&\quad \left. + i \left(b_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} + c_{\vec{p}} e^{-ipx} \right) \left(b_{\vec{q}} e^{-iqx} - c_{\vec{q}}^\dagger e^{iqx} \right) \right] \\
&= - \int \frac{d^3\vec{p}d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\vec{q}}}{4E_{\vec{p}}}} \left[b_{\vec{q}}^\dagger b_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + b_{\vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) - c_{\vec{q}} b_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) \right. \\
&\quad \left. - c_{\vec{q}} c_{\vec{p}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) - b_{\vec{p}}^\dagger c_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) + c_{\vec{p}} b_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) - c_{\vec{p}} c_{\vec{q}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \right] \\
&= - \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left[2b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} - 2c_{\vec{p}} c_{\vec{p}}^\dagger \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (c_{\vec{p}}^\dagger c_{\vec{p}} - b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}) \\
&= N_c - N_b
\end{aligned}$$

(où l'on a utilisé le classement normal à l'avant dernière ligne).

Ainsi est conservé le nombre de particules moins le nombre d'antiparticules. Dans cette théorie libre sans interaction, ce n'est en réalité rien de très spécial car on pourrait montrer que le nombre de particules et le nombre d'antiparticules sont conservés individuellement en étudiant ϕ_1 et ϕ_2 . Dans des théories avec interaction, ce résultat pourra se révéler intéressant.

4.3 Champ non relativiste

Nous n'avons pas encore déterminé l'équation de la dynamique de ψ . Pour cela il suffit de prendre l'équation d'Euler-Lagrange en faisant varier le Lagrangien par rapport à ψ^\dagger .

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} \iff \partial_\mu \partial^\mu \psi = -m^2 \psi \\
&\iff (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, ψ obéit aussi à l'équation de Klein-Gordon (cela nous semble cohérent en repensant aux champs ϕ_1 et ϕ_2 qui obéissaient aussi à cette équation).

On souhaite désormais s'intéresser à ce que devient une telle théorie lorsque l'on en prend la limite non relativiste. Dans la limite non relativiste, $|\vec{p}| < m$. On écrit alors le champ sous la forme $\psi(\vec{x}, t) = e^{-imt} \tilde{\psi}(\vec{x}, t)$, en factorisant la partie de l'énergie correspondant à l'énergie de masse. L'équation de Klein-Gordon devient alors,

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 \psi - \nabla^2 \psi + m^2 \psi &= e^{-imt} \left[m^2 \tilde{\psi} - \nabla^2 \tilde{\psi} \right] + \partial_t \left[e^{-imt} (-im \tilde{\psi} + \partial_t \tilde{\psi}) \right] \\
&= e^{-imt} \left[m^2 \tilde{\psi} - \nabla^2 \tilde{\psi} + (-im)^2 \tilde{\psi} - im \partial_t \tilde{\psi} - im \partial_t \tilde{\psi} + \partial_t^2 \tilde{\psi} \right] \\
&= e^{-imt} \left[\partial_t^2 \tilde{\psi} - 2im \partial_t \tilde{\psi} - \nabla^2 \tilde{\psi} \right]
\end{aligned}$$

Il faut désormais réfléchir à ce que la limite non relativiste $|\vec{p}| < m$ signifie pour $\tilde{\psi}$. La partie massive de l'énergie a été factorisé en dehors de $\tilde{\psi}$, ce qui signifie qu'en dérivant par

rapport au temps $\tilde{\psi}$, il sort une énergie très inférieure à m . Ainsi, $\partial_t^2 \tilde{\psi} \ll m \partial_t \tilde{\psi}$. L'équation de la dynamique dans la limite non relativiste est alors,

$$2im\partial_t \tilde{\psi} + \nabla^2 \tilde{\psi} = 0$$

ou encore,

$$i\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 \tilde{\psi} \quad (4.3.1)$$

qui ressemble énormément à l'équation de Schrödinger mais qui ne peut pas l'être car cette équation n'a rien de quantique, c'est une équation sur un champ classique dans la limite non relativiste.

En général, nous préférons travailler à partir du Lagrangien et ne repassons que très rarement par les équations de la dynamique. Voyons si nous pouvons retrouver ce résultat en passant par le Lagrangien.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi \\ &= \partial_t \psi^\dagger \partial_t \psi - \nabla \psi^\dagger \nabla \psi - m^2 \psi^\dagger \psi \\ &= \partial_t \tilde{\psi}^\dagger \partial_t \tilde{\psi} + m^2 \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} + im\tilde{\psi}^\dagger \partial_t \tilde{\psi} - im\tilde{\psi} \partial_t \tilde{\psi}^\dagger - \nabla \tilde{\psi}^\dagger \nabla \tilde{\psi} - m^2 \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \\ &= \partial_t \tilde{\psi}^\dagger \partial_t \tilde{\psi} - \nabla \tilde{\psi}^\dagger \nabla \tilde{\psi} + 2im\tilde{\psi}^\dagger \partial_t \tilde{\psi} - im\partial_t (\tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}) \end{aligned}$$

De la même manière que précédemment, dans la limite non relativiste, $\partial_t \tilde{\psi}^\dagger \partial_t \tilde{\psi} \ll 2im\tilde{\psi}^\dagger \partial_t \tilde{\psi}$. De plus le dernier terme est une dérivée totale, en se souvenant que ce qui importe réellement est l'action, en passant à l'intégrale ce terme se transformera en terme de bord en $t = \pm\infty$ que l'on peut supposer nul. Enfin, nous avons tout à fait le droit de changer le Lagrangien en $\alpha\mathcal{L}$, pour un scalaire α , sans changer les équations de la dynamique. Ainsi le Lagrangien que nous pouvons utiliser dans la limite non relativiste est,

$$\mathcal{L} = i\tilde{\psi}^\dagger \partial_t \tilde{\psi} - \frac{1}{2m}\nabla \tilde{\psi}^\dagger \nabla \tilde{\psi} \quad (4.3.2)$$

4.4 Mécanique quantique

Nous souhaitons désormais retrouver la formulation de Schrödinger de la mécanique quantique¹¹ sur les fonction d'onde, à partir de cette limite non relativiste. Il faut alors quantifier le champ $\tilde{\psi}$, que nous noterons par simplicité ψ . On commence par trouver le moment conjugué de ψ ,

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger \quad (4.4.1)$$

Nous imposons alors la relation de commutation (nous utilisons les opérateurs du point de vue de Schrödinger),

$$[\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})] = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.4.2)$$

Cette fois la développement de ψ qui convient est,

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (4.4.3)$$

Avec les relations de commutation,

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (4.4.4)$$

11. La discussion que nous présentons ici suit fortement celle de D.Tong *Introduction to quantum field theory*

Ce résultat ne devrait pas nous étonner, car c'est en effet la relativité qui force l'apparition des antiparticules.

La densité hamiltonienne est,

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \nabla\psi^\dagger \nabla\psi \quad (4.4.5)$$

Et l'Hamiltonien du système est alors,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} \mathcal{H} = \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{q}d^3\vec{p}}{(2\pi)^6} a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} e^{i\vec{x}(\vec{p}-\vec{q})} \\ &= \frac{1}{2m} \int \frac{d^3\vec{q}d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p}^2 a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \end{aligned}$$

On définit les états classiquement avec un état fondamental $|0\rangle$ tel que $\langle 0|0\rangle = 1$, $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ et $a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle = |\vec{p}\rangle$. De même on définit les états localisés en \vec{x} par $|\vec{x}\rangle = \psi^\dagger(\vec{x})|0\rangle$.

On peut alors vérifier que les états ont la bonne énergie,

$$\begin{aligned} H|\vec{p}\rangle &= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m} |\vec{p}\rangle \end{aligned}$$

qui est bien l'énergie que l'on s'attend à obtenir pour un état $|\vec{p}\rangle$ en mécanique quantique.

Nous pourrions aussi (re-)vérifier que l'opérateur quantité de mouvement, $\vec{P} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$, vérifie bien la relation $\vec{P}|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle$.

Nous définissons aussi naturellement l'opérateur de position,

$$\vec{X} = \int d^3\vec{x} \vec{x} \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \quad (4.4.6)$$

Dont nous vérifions la bonne définition,

$$\begin{aligned} \vec{X}|\vec{x}\rangle &= \int d^3\vec{y} \vec{y} \psi^\dagger(\vec{y}) \psi(\vec{y}) \psi^\dagger(\vec{x}) |0\rangle \\ &= \int d^3\vec{y} \vec{y} \psi^\dagger(\vec{y}) \left(\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) + \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{y}) \right) |0\rangle \\ &= \vec{x} |\vec{x}\rangle \end{aligned}$$

Enfin nous pouvons définir des états physiques sous la forme,

$$|\varphi\rangle = \int d^3\vec{x} \varphi(\vec{x}) |\vec{x}\rangle \quad (4.4.7)$$

où $\varphi(\vec{x})$ est alors la fonction d'onde classique en mécanique quantique. On peut alors vérifier que \vec{X} et \vec{P} agissent correctement sur les fonctions d'onde.

$$\begin{aligned} X^i |\varphi\rangle &= \int d^3\vec{y} d^3\vec{x} y^i \psi^\dagger(\vec{y}) \psi(\vec{y}) \varphi(\vec{x}) \psi^\dagger(\vec{x}) |0\rangle \\ &= \int d^3\vec{y} d^3\vec{x} y^i \varphi(\vec{x}) \psi^\dagger(\vec{y}) \left(\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) + \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{y}) \right) |0\rangle \\ &= \int d^3\vec{x} x^i \varphi(\vec{x}) |\vec{x}\rangle \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
P^i |\varphi\rangle &= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} p^i a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \varphi(\vec{x}) \psi^\dagger(\vec{x}) |0\rangle \\
&= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} p^i a_{\vec{p}}^\dagger \varphi(\vec{x}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |0\rangle \\
&= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger \varphi(\vec{x}) \frac{1}{-i} \partial_i e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |0\rangle \\
&= i \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger \varphi(\vec{x}) \partial_i e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |0\rangle \\
&= -i \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \partial_i \varphi(\vec{x}) \\
&= \int d^3\vec{x} \left(-i \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(\vec{x}) \right) \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |0\rangle \\
&= \int d^3\vec{x} \left(-i \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(\vec{x}) \right) |\vec{x}\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi \vec{X} et \vec{P} agissent comme souhaité sur les fonctions d'onde.

Nous voudrions de plus que $H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Est-ce bien le cas ?

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{p}^2}{2m} &= \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} \\
&= \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger \left((2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} \right) a_{\vec{q}} \\
&= H + \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \vec{p} \cdot \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}
\end{aligned}$$

Ainsi il semblerait que $H \neq \frac{\vec{p}^2}{2m}$. En réalité, pour les états physiques $|\varphi\rangle$ que nous avons considérés, le deuxième terme est identiquement nul. Ainsi dans notre cadre d'étude, $H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$.

Il suffit alors désormais d'appliquer l'équation de Schrödinger à $|\varphi\rangle$ pour trouver effectivement,

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi \quad (4.4.8)$$

qui correspond bien cette fois-ci à l'équation de Schrödinger sur les fonctions d'onde.

Tout ce qui a été présenté ici a été fait en l'absence de potentiel, le calcul n'est en réalité pas plus compliqué en ajoutant un potentiel $V(x)\psi^\dagger(x)\psi(x)$ au Lagrangien. Ce calcul est laissé à l'intention du lecteur¹².

Le Lagrangien non relativiste admet toujours la transformation $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ comme symétrie interne. Le courant conservé associé est alors,

$$\begin{cases} j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} i\psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^\dagger)} i\psi^\dagger = & -\psi^\dagger \psi \\ \vec{j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \psi)} i\psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \psi^\dagger)} i\psi^\dagger = & \frac{i}{2m} (\psi^\dagger \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\dagger) \end{cases} \quad (4.4.9)$$

12. Voir *Quantum Field theory for the gifted amateur*, T. Blundell & S.J. Lancaster chapitre 12 pour un traitement précis

La charge conservée associée est alors,

$$Q = \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \quad (4.4.10)$$

Cette charge (qui en théorie quantique des champs devient un opérateur), prend la valeur dans l'état $|\varphi\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \varphi | Q | \varphi \rangle &= \langle 0 | \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} d^3\vec{z} \psi(\vec{z}) \varphi^\dagger(\vec{z}) \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \varphi(\vec{y}) \psi^\dagger(\vec{y}) | 0 \rangle \\ &= \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} d^3\vec{z} \varphi^\dagger(\vec{z}) \varphi(\vec{y}) \langle 0 | \psi(\vec{z}) \psi^\dagger(\vec{x}) \left(\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}) + \psi^\dagger(\vec{y}) \psi(\vec{x}) \right) | 0 \rangle \\ &= \int d^3\vec{x} d^3\vec{z} \varphi^\dagger(\vec{z}) \varphi(\vec{x}) \langle 0 | \psi(\vec{z}) \psi^\dagger(\vec{x}) | 0 \rangle \\ &= \int d^3\vec{x} d^3\vec{z} \varphi^\dagger(\vec{z}) \varphi(\vec{x}) \langle 0 | \left(\delta^{(3)}(\vec{z} - \vec{x}) + \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{z}) \right) | 0 \rangle \\ &= \int d^3\vec{x} |\varphi(\vec{x})|^2 \end{aligned}$$

qui correspond donc à la conservation de la probabilité en mécanique quantique.

5 Interactions

5.1 Fondements

5.1.1 Lagrangiens

Jusque maintenant nous ne nous sommes intéressés qu'à des théories dites *libres*, où le Lagrangien fait intervenir, en plus du terme cinétique, seulement des termes de la forme ϕ^2 . On réfère parfois à ces Lagrangien par la dénomination *harmoniques*. Ces Lagrangien fournissent une quantifications du champ qui est simple, et permettent de construire facilement l'espace de Hilbert des états physiques (espace de Fock).

Toutefois, si nous ne considérons que des Lagrangiens harmoniques, il n'y aurait pas grand intérêt à étudier la théorie quantique des champs, et elle ne mériterait certainement pas l'attention qui lui est portée par la physique moderne. En effet, nous avons montré précédemment que pour des théories harmoniques le nombre de particules est préservé. Ainsi il n'y a dans ces théories qu'un nombre fixé de particules, n'interagissant pas entre elles, ne faisant que se propager dans l'espace-temps.

On s'intéresse alors à une classe beaucoup plus large de Lagrangiens qui font intervenir des termes d'ordre supérieurs à 2, à l'origine, comme nous le verrons, d'interactions. Par exemple, si on ne considère qu'un champ scalaire ϕ , on peut s'intéresser aux Lagrangiens de la forme,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2] - \sum_{n \geq 3} \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n \quad (5.1.1)$$

(La présence du $n!$ est conventionnelle et permet parfois de simplifier les calculs.)

Trouvons la dimension des constantes de couplage λ_n . Pour ce faire, nous nous rappelons que l'action $S = \int d^4x \mathcal{L}$ est sans dimension, forçant alors pour le Lagrangien une dimension $[\mathcal{L}] = 4$ (on compte ici en dimension d'énergie, ou de masse, donc $[d^4x] = -4$). Il vient alors,

$$[\phi] = \frac{1}{2}[\phi^2] = \frac{1}{2}[m^2\phi^2] - \frac{1}{2}[m^2] = \frac{1}{2}4 - \frac{1}{2}2 = 1 \quad (5.1.2)$$

Le champ scalaire considéré a alors la dimension d'une énergie. Nous trouvons enfin,

$$[\lambda_n] = [\lambda_n\phi^n] - [\phi^n] = 4 - n \quad (5.1.3)$$

Ainsi, les constantes de couplage adimensionnées qu'il importe d'étudier sont plutôt les

$$G_n = \frac{\lambda_n}{\Lambda^{4-n}} \quad (5.1.4)$$

où Λ est une échelle d'énergie jusqu'à laquelle notre théorie est valide (par exemple une échelle de GUT).

Pour comprendre l'importance de ces constantes de couplage, faisons le lien avec la théorie des perturbations en mécanique quantique. On écrit typiquement,

$$H = H_0 + \varepsilon H_I \quad (5.1.5)$$

où H_0 est un hamiltonien libre que l'on sait résoudre exactement et H_I est un hamiltonien d'interaction accompagné d'un facteur adimensionné ε considéré comme petit. On développe alors en générale toute les quantités, sans se soucier de l'analytité, comme des séries

de ε . De la même manière, sans détailler plus le lien entre Lagrangien et hamiltonien, les constantes de couplage sont considérées comme des $o(1)$. On développe alors typiquement les quantités d'intérêts comme des séries analytiques des G_i .

Si l'on s'intéresse désormais à un processus ayant lieu à une énergie $E \ll \Lambda$, les constantes de couplage que nous souhaitons étudier sont les,

$$g_n = \frac{\lambda_n}{E^{4-n}} = G_n \left(\frac{\Lambda}{E} \right)^{4-n} \quad (5.1.6)$$

Ainsi trois cas apparaissent,

- $n < 4$: dans ce cas les constantes de couplage que l'on étudie à l'échelle d'énergie E peuvent devenir très grande, on parle alors de constantes *significatives*
- $n = 4$: la constante de couplage d'intérêt ne change pas avec l'énergie, on la nomme *marginale*
- $n > 4$: les constantes de couplage sont à toute échelle d'énergie $E \ll \Lambda$ de l'ordre $g_n \sim o(1)$, elles ont alors une influence faible sur le système, on parle de constante *non-significatives*

Ainsi, suivant le Lagrangien considéré et l'échelle d'énergie étudiée, les termes d'interaction peuvent être significatifs ou non, nous permettant d'utiliser la théorie des perturbations ou pas¹³.

Dans notre cadre d'étude on s'intéressera principalement à deux théories d'interaction faiblement couplées qui sont,

- La théorie ϕ^4 ¹⁴

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2 \right] - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (5.1.7)$$

- Potentiel de Yukawa :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2 \right] + \partial_\mu\psi^\dagger\partial^\mu\psi - M^2\psi^\dagger\psi - g\psi^\dagger\psi\phi \quad (5.1.8)$$

où ϕ est un champ scalaire et ψ un champ scalaire complexe.

5.1.2 Point de vue d'interaction

Nous avons déjà étudié la mécanique quantique de deux points de vue différent, celui d'Heisenberg et celui de Schrödinger. Il en existe un troisième qui se révèle être très utile lorsque l'on étudie des interactions, c'est la raison pour laquelle on le nomme simplement *point de vue d'interaction*.

Considérons un Hamiltonien de la forme,

$$H = H_0 + H' \quad (5.1.9)$$

13. Pour une discussion plus précise sur le sujet il faut s'intéresser à la *renormalisation* et en particulier au *groupe de renormalisation* introduit par Wilson. Les exemples les plus simples à étudier sont ceux de la théorie statistique des champs, voir par exemple *Statistical field theory* de D.Tong

14. Nous n'étudions pas la théorie avec un terme de couplage ϕ^3 car elle pose des problèmes quant à la définition d'un état de plus basse énergie $|\Omega\rangle$ et n'est donc pas physique, voir *Quantum Field theory* M.Sredinicki. Toutefois, la plupart des raisonnements que nous ferons pourrait s'appliquer à cette théorie (diagrammes et règles de Feynman, matrice S , ...)

où H_0 est l'Hamiltonien libre que nous avons étudié jusqu'à présent. On choisit alors un temps $t = 0$ pour faire coïncider les points de vue d'interaction, de Schrödinger et d'Heisenberg. On définit alors les opérateurs,

$$O_I(t) = e^{iH_0t} O_S e^{-iH_0t} \quad (5.1.10)$$

qui dépendent désormais du temps. Pour que la quantité $\langle \psi | O | \phi \rangle$ soit indépendante du point de vue adopté, il faut nécessairement que les états pour le point de vue d'interaction soient définis par,

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0t} |\psi\rangle_S \quad (5.1.11)$$

De cette façon, les états et les opérateurs dépendent du temps et on peut déterminer l'équation de leur dynamique,

$$\begin{aligned} i \frac{d|\psi\rangle_I}{dt} &= i H_0 e^{iH_0t} |\psi\rangle_S + i e^{iH_0t} \frac{d|\psi\rangle_S}{dt} \\ &= -H_0 |\psi\rangle_I + e^{iH_0t} H |\psi\rangle_S \\ &= -e^{iH_0t} H_0 e^{-iH_0t} |\psi\rangle_I + e^{iH_0t} (H_0 + H') e^{-iH_0t} |\psi\rangle_I \\ &= e^{iH_0t} H' e^{-iH_0t} |\psi\rangle_I \end{aligned}$$

Puis en notant $H_I(t)$ l'Hamiltonien d'interaction du point de vue d'interaction, l'équation de la dynamique des états est,

$$i \frac{d|\psi\rangle_I}{dt} = H_I(t) |\psi\rangle_I \quad (5.1.12)$$

On peut aussi faire le calcul pour les opérateurs,

$$\begin{aligned} \frac{dO_I}{dt} &= i H_0 O_I - i O_I H_0 \\ &= i [H_0, O_I] \end{aligned}$$

Ainsi, du point de vue d'interaction, les opérateurs évoluent selon la même équation que les opérateurs du point de vue d'Heisenberg de la théorie libre, et il vient alors,

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \phi_I = 0 \quad (5.1.13)$$

On peut alors développer ϕ_I comme nous l'avons fait précédemment pour les champs d'Heisenberg,

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \quad (5.1.14)$$

Les relations de commutation sur ϕ_I et sur $\pi_I = \dot{\phi}_I$ sont les mêmes que sur ϕ_S et π_S (le calcul est très simple), ainsi nous avons de nouveau les relations de commutation sur les opérateurs a et a^\dagger ,

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (5.1.15)$$

5.1.3 Espace de Hilbert

La section précédente nous montre alors que l'on peut écrire le champ du point de vue d'interaction comme le champ d'Heisenberg pour une théorie libre. C'est alors à se demander s'il y a une difficulté à passer de la théorie libre à la théorie interactive. Nous avons en réalité omis 2 choses. La première est que même si nous avons réussi à construire un champ

avec les opérateurs de création et annihilation $a_{\vec{p}}^\dagger$ et $a_{\vec{p}}$, il n'y a aucune raison que ces opérateurs se comportent correctement avec l'Hamiltonien complet H , c'est-à-dire qu'en règle général ces opérateurs ne permettront pas de diagonaliser H .

En effet, même si on suppose que les espaces de Hilbert qui décrivent la théorie libre et la théorie en présence d'interaction sont les mêmes¹⁵, en général l'état fondamental $|\Omega\rangle$ de la théorie interactive sera différent de l'état fondamental $|0\rangle$ de la théorie libre. Ainsi, les états propres à une particule de la théorie en présence d'interactions peuvent en général être engendrés par d'autres opérateurs $q_{\vec{p}}^\dagger$ qui créent une particule de quantité de mouvement \vec{p} . Notons alors ces nouveaux états $|\vec{p}_\lambda\rangle$. Toute la difficulté de la théorie réside alors dans le fait que nous ne connaissons pas les opérateurs $q_{\vec{p}}^\dagger$. Toutefois, notre théorie restant invariante par translation, nous savons quand même que la quantité de mouvement est conservée. En général, nous aurons alors,

$$a_{\vec{p}}^\dagger |\Omega\rangle = Z_{\vec{p}} |\vec{p}_\lambda\rangle \sum_i \prod_{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_i} z_{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_i} \delta^{(3)} \left(\sum_j \vec{p}_j - \vec{p} \right) q_{\vec{p}_1}^\dagger \dots q_{\vec{p}_i}^\dagger |\Omega\rangle \quad (5.1.16)$$

Agir avec $a_{\vec{p}}^\dagger$ ne crée alors qu'une *quasiparticule* $Z_{\vec{p}} |\vec{p}_\lambda\rangle$ et des termes multi-particulaires.

Pour la suite de notre étude des théories interactives, nous considérerons quand même que l'espace de Hilbert de la théorie libre est le même que celui de la théorie interactive. Nous verrons alors comment procéder pour trouver les amplitudes des processus qui nous intéressent.

5.1.4 Propagateurs

Le second point qui différencie profondément les théories libres des théories avec interactions est la notion de propagateur¹⁶. Nous avons vu précédemment que les quantités qui nous intéressent et nous permettent de comprendre la manière dont la présence de particules vient perturber le vide sont les propagateurs de la forme,

$$G(x, y) = \langle \Omega | T \phi_H^\dagger(x) \phi_H(y) | \Omega \rangle \quad (5.1.17)$$

(dans le cas du champ scalaire réel, $\phi_H^\dagger(x) = \phi_H(x)$).

Pour un intervalle $(x - y)^2 > 0$, cette quantité représente la manière dont se propage une particule que l'on créerait en y (si $y^0 < x^0$, sinon en x) et que l'on annihilerait en x . Ces quantités sont définies en utilisant les champs du point de vue d'Heisenberg, permettant alors de garder l'état fondamental $|\Omega\rangle$ fixe, expliquant réellement comment le champ perturbe le vide en évoluant par rapport à l'Hamiltonien complet $H = H_0 + H'$. Pour une théorie sans interaction, cette quantité était très simple à calculer, les particules passaient d'un point x à un point y , sans interagir. Désormais, on peut visuellement se représenter le propagateur comme une suite de propagation sans interaction interrompue ponctuellement par des interactions. Schématiquement, on peut décrire cela par,

15. Cette assertion est en réalité elle-même fautive par le théorème de Haag.

16. La discussion présentée ici n'est pas très précise. Elle n'a pour but que de donner un avant-goût de la réelle difficulté de la théorie quantique des champs et ne se veut pas spécialement rigoureuse ou justifiée. Les concepts que nous évoquons ici seront traités plus précisément par la suite.

$$\begin{aligned}
G = & \text{---} \xrightarrow{G_0} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{G_0} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{G_0} \text{---} \\
& + \text{---} \xrightarrow{G_0} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{G_0} \text{---} + \dots
\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on connaît le propagateur libre $G_0(p)$ et que l'on connaît quelle quantité associer aux points d'interaction $\Gamma(p)$, on peut déterminer le propagateur réel du système,

$$G(p) = G_0(p) + G_0(p)\Gamma(p)G_0(p) + \dots = G_0(p) \sum_{n \geq 0} (G_0(p)\Gamma(p))^n = \frac{G_0(p)}{1 - \Gamma(p)G_0(p)} \quad (5.1.18)$$

5.2 Aspects théoriques

Dans cette section nous développons les aspects théoriques qui sont nécessaires au calcul de quantités physiques telles que la *section efficace* d'un processus de diffusion ou le *temps de vie* d'une particule. Nous étudierons premièrement comment les états propres de l'Hamiltonien libre peuvent être liés aux états propres de l'Hamiltonien total par l'intermédiaire des champs du point de vue d'interaction. Nous expliquerons ensuite comment calculer les quantités utiles avant d'exposer l'approche schématique des diagrammes de Feynman. Finalement, nous nous intéresserons aux propagateurs réels du système.

5.2.1 Les mondes simple et compliqué

Nous avons donc désormais sous nos yeux deux théories,

- La première est celle d'un *monde simple* dans lequel l'Hamiltonien H_0 ne présente pas de termes d'interaction. On note les états du monde simple $|\phi_\alpha\rangle$ (de l'espace de Fock)
- La deuxième est celle d'un *monde compliqué* pour lequel l'Hamiltonien $H = H_0 + H'$ fait intervenir des termes d'interaction qui ne permettent pas de diagonaliser simplement l'Hamiltonien. On note les états du monde compliqué par $|\psi_\alpha\rangle$

L'idée que nous développons ici permet de relier ces deux mondes afin que nous puissions calculer les quantités d'intérêt dans le monde compliqué. Le principe est simple, nous partons du postulat que longtemps avant le processus d'interaction et longtemps après ce dernier, les états du système sont très éloignés et permettent alors de considérer le système comme s'il n'y avait effectivement pas d'interaction¹⁷.

On adopte le point de vue d'interaction développé précédemment pour les états du monde compliqué et on choisit $t = 0$ pour faire coïncider les différents points de vue (pour le monde simple on utilise exclusivement le point de vue d'Heisenberg). Ainsi l'hypothèse que nous avons faite s'écrit,

$$|\phi_\alpha\rangle = |\psi_{\alpha I}(\pm\infty)\rangle \quad (5.2.1)$$

Dans le monde compliqué la quantité qui nous intéresse consiste toujours à passer d'un état $|\psi_{\alpha H}\rangle$ à un état $|\psi_{\beta H}\rangle$, où les états sont décrits du point de vue d'Heisenberg. Nous avons alors,

$$\langle\psi_{\beta H}|\psi_{\alpha H}\rangle = \langle\psi_{\beta I}(0)|\psi_{\alpha I}(0)\rangle \quad (5.2.2)$$

17. Remarquons que ce postulat ne peut pas tout le temps être vrai. Par exemple dès que l'état final est un état lié stable tel que l'atome d'hydrogène, notre postulat tombe à l'eau. Toutefois, cette idée fonctionne bien pour des processus de diffusion assez simples

Pour relier $|\psi_{\alpha I}(0)\rangle$ à $|\phi_\alpha\rangle$, il suffit donc de trouver l'opérateur $U_I(t_1, t_2)$ qui permet de faire évoluer un état $|\psi_{\alpha I}\rangle$ dans le temps, c'est-à-dire tel que,

$$|\psi_{\alpha I}(t_2)\rangle = U_I(t_2, t_1) |\psi_{\alpha I}(t_1)\rangle \quad (5.2.3)$$

auquel cas nous aurons alors,

$$|\psi_{\alpha I}(0)\rangle = U_I(0, -\infty) |\psi_{\alpha I}(-\infty)\rangle = U_I(0, -\infty) |\phi_\alpha\rangle \quad (5.2.4)$$

5.2.2 Formule de Dyson

Si U_I existe, alors,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt_2} |\psi_{\alpha I}(t_2)\rangle &= i \frac{dU_I(t_2, t_1)}{dt_2} |\psi_{\alpha I}(t_1)\rangle, \quad \forall |\psi_\alpha\rangle \\ \iff i H_I(t_2) |\psi_{\alpha I}(t_2)\rangle &= i \frac{dU_I(t_2, t_1)}{dt_2} |\psi_{\alpha I}(t_1)\rangle, \quad \forall |\psi_\alpha\rangle \\ \iff i \frac{dU_I(t_2, t_1)}{dt_2} &= H_I(t_2) U_I(t_2, t_1) \end{aligned}$$

Ainsi nous avons l'équation de la dynamique de U_I . A ce stade, il serait tentant d'écrire

$$U_I(t_2, t_1) = \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t) \right)$$

Toutefois, cette formulerait ne prendrait pas en compte le fait qu'en général,

$$[H_I(t), H_I(t')] \neq 0 \quad (5.2.5)$$

Ainsi la formule correcte est plutôt,

$$U_I(t_2, t_1) = T \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t) \right) \quad (5.2.6)$$

où T est l'opérateur d'ordonnement temporel que nous avons défini précédemment. Il est facile de vérifier que cette formule convient,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt_2} T \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t) \right) &= iT \left[\sum_{n \geq 0} \frac{(-i)^n}{n!} \frac{d}{dt_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t) \right)^n \right] \\ &= T \left[\sum_{n \geq 1} \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} H_I(t_2) \frac{d}{dt_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t) \right)^{n-1} \right] \\ &= H_I(t_2) T \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t) \right) \end{aligned}$$

où nous avons pu dériver sans se soucier des relations de commutation à la deuxième ligne grâce à l'opérateur T qui ordonnera correctement les opérateurs après coup. A la dernière ligne nous avons simplement utilisé le fait qu'un opérateur dépendant de t_2 serait toujours placé à gauche, t_2 étant l'instant le plus tard. Ce résultat élégant est connu sous le nom de *formule de Dyson*.

En revenant à notre problème initial, il vient alors,

$$\langle \psi_{\beta I}(0) | \psi_{\alpha I}(0) \rangle = \langle \psi_{\beta I}(\infty) | U_I(\infty, 0) U_I(0, -\infty) \psi_{\alpha I}(-\infty) = \langle \phi_\beta | U_I(\infty, -\infty) | \phi_\alpha \rangle \quad (5.2.7)$$

Nous notons,

$$S = U_I(\infty, -\infty) \quad (5.2.8)$$

que nous nommons la *matrice-S* (le nom vient originellement de *Scattering*). Ainsi, calculer S , permet de calculer les amplitudes de transition d'états dans le monde compliqué à partir des états du monde simple.

5.2.3 Développement perturbatif

Remarquons que jusqu'ici nous n'avons toujours pas utilisé la théorie quantique des champs¹⁸, c'est d'ailleurs en introduisant le formalisme de la théorie quantique des champs que nous avons développé que la véritable magie apparaît.

En effet, remplaçons désormais l'hamiltonien H' par la densité hamiltonienne $\mathcal{H}'(x)$. En réalité, la quantité qui nous intéresse réellement est plutôt,

$$H_I(t) = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \quad (5.2.9)$$

On définit alors,

$$\mathcal{H}_I = e^{iH_0 t} \mathcal{H}' e^{-iH_0 t} \quad (5.2.10)$$

Dans cette dernière équation, H' est encore un opérateur au sens de Schrödinger et ne dépend alors pas du temps. Pour un champ $\phi(\vec{x})$ du point de vue de Schrödinger, nous avons vu que nous avons typiquement un Lagrangien de la forme,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2] - \sum_{n \geq 3} \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n \quad (5.2.11)$$

Puis l'hamiltonien est alors,

$$\mathcal{H} = \pi\phi - \mathcal{L} = \mathcal{H}_0 + \sum_{n \geq 3} \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n \quad (5.2.12)$$

Ainsi,

$$\mathcal{H}' = \sum_{n \geq 3} \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n \quad (5.2.13)$$

Avec des champs ϕ encore décrits du point de vue de Schrödinger.

Nous avons ici écrit l'hamiltonien pour un seul champ ϕ mais ce que nous présentons par la suite se généralise très facilement pour des champs ϕ_j quelconques (pas forcément scalaires) qui interagiraient par l'intermédiaire de polynômes évalués en $\phi_j(\vec{x})$. Le point important étant que les champs soient évalués au même point \vec{x} , assurant alors une interaction locale et permettant d'écrire l'Hamiltonien d'interaction comme une intégrale sur la variable \vec{x} . Il vient alors,

$$\mathcal{H}_I = \sum_{n \geq 3} \frac{\lambda_n}{n!} \phi_I(x)^n \quad (5.2.14)$$

Ainsi, l'opérateur \mathcal{H}_I agit par l'intermédiaire du champ ϕ_I du point de vue d'interaction, dont nous connaissons le développement en mode propre et donc l'action sur l'espace de

18. D'ailleurs S. Weinberg, dans *The Quantum theory of Fields, Foundations* développe ce formalisme avant même de parler de champs quantiques. Son étude de la matrice S est très enrichissante bien que très calculatoire.

Fock.

Résumons ce que nous avons montré jusque ici. Si nous partons d'un état propre de H_0 , disons $|p_1, p_2\rangle$, considéré *effectivement* comme état propre de H (en prenant pour image le fait que les deux particules soient très éloignées au début de l'expérience), et que nous souhaitons calculer l'amplitude d'obtenir un nouvel état $|p_3, p_4\rangle$ (de la même manière état propre de H_0 mais considéré comme état propre de H) à la fin de l'expérience, il nous suffit de calculer la quantité,

$$\langle p_3, p_4 | S | p_1, p_2 \rangle \quad (5.2.15)$$

où S est l'opérateur (matrice) donné par la relation,

$$S = T \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right) \quad (5.2.16)$$

Sous cette forme élégante, la formule de Dyson n'est en réalité pas très pratique. Nous allons plutôt utiliser un développement perturbatif en supposant les constantes de couplage petites. Notons g le vecteur des constantes de couplage de la théorie, alors

$$\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n) = O(|g|^n) \quad (5.2.17)$$

On développe alors S sous la forme,

$$S = T \left[1 - i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) + \frac{i^2}{2!} \int \int d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) + \dots \right] \quad (5.2.18)$$

Ainsi, en général on calculera l'amplitude d'un processus seulement jusqu'à un certain ordre en les constantes de couplage.

5.2.4 Théorème de Wick

Pour alléger les notations, nous cesserons de noter l'indice I sur les champs du point de vue d'interaction. Si nous voulons changer de point de vue, nous préciserons de nouveau quels champs sont utilisés.

Suite à la discussion précédente, en général nous serons amenés à calculer des quantités de la forme $\langle f | S | i \rangle$, où $|f\rangle$ et $|i\rangle$ sont des états (final et initial) de l'espace de Fock \mathcal{F} . On peut par exemple écrire,

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\vec{q}_1}} \dots \sqrt{2E_{\vec{q}_l}} a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger |0\rangle \quad (5.2.19)$$

$$|f\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \dots \sqrt{2E_{\vec{p}_k}} a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_k}^\dagger |0\rangle \quad (5.2.20)$$

Et alors il nous faudra calculer des quantités de la forme,

$$\int d^4x_1 \dots d^4x_p \langle 0 | a_{p_1} \dots a_{p_k} T [\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_p)] a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger |0\rangle \quad (5.2.21)$$

Il faut donc que nous trouvions un moyen de calculer ces produits d'opérateurs ordonnés dans le temps.

Pour ce faire nous commençons par définir la notion de contraction. En notant $\phi_p = \phi(x_p)$ (on considère ici qu'il n'y a qu'un champ mais cette définition se généralise facilement à des champs de type différents), on définit la *contraction de Wick* de ϕ_i et ϕ_j par

$$\phi_1 \dots \phi_{i-1} \overbrace{\phi_i \phi(x_{i+1})} \dots \phi_{j-1} \phi_j \phi_{j+1} \dots \phi_n = \phi_1 \dots \phi_{i-1} \phi_{i+1} \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n \Delta_F(x_i - x_j) \quad (5.2.22)$$

On peut alors désormais montrer le résultat,

$$T[\phi_1 \dots \phi_n] = N[\phi_1 \dots \phi_n + \text{toutes les contractions possibles}] \quad (5.2.23)$$

où le deuxième terme se réfère à toutes les manières de contracter les champs ϕ_p (seul 1 champ n'est pas contracté dans le cas où n est impair).

On montre ce résultat par récurrence¹⁹, en commençant par $n = 2$.

Commençons par écrire $\phi_1 = \phi_1^+ + \phi_1^-$ où le signe $+$ correspond au développement en mode de création et le $-$ au développement en mode d'annihilation. Supposons par exemple $x_1^0 > x_2^0$. Il vient alors,

$$\begin{aligned} T[\phi_1 \phi_2] &= \phi_1 \phi_2 \\ &= (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-) \\ &= \phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^+ \phi_2^- + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^- \\ &= \phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^- + \phi_2^+ \phi_1^- + \phi_1^+ \phi_2^- + [\phi_1^-, \phi_2^+] \\ &= N[\phi_1 \phi_2] + [\phi_1^-, \phi_2^+] \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que $[\phi_1^-, \phi_2^+]$ n'est qu'un nombre complexe (parfois appelé *c-nombre*, d'où $[\phi_1^-, \phi_2^+] = \langle 0 | \phi_1^- \phi_2^+ | 0 \rangle$). Aussi,

$$\begin{aligned} \Delta_F(x_1 - x_2) &= \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi_1^- \phi_2^+ | 0 \rangle \end{aligned}$$

Le cas $x_2^0 > x_1^0$ se traite de la même manière, d'où

$$T[\phi_1 \phi_2] = N[\phi_1 \phi_2] + \Delta_F(x_1 - x_2) \quad (5.2.24)$$

Supposons désormais le résultat acquis pour toute combinaison de n champs. On souhaite calculer,

$$T[\phi_1 \dots \phi_{n+1}]$$

Par exemple, on peut supposer $x_{n+1}^0 < x_k^0, \forall k$. Il vient alors,

$$\begin{aligned} T[\phi_1 \dots \phi_{n+1}] &= T[\phi_1 \dots \phi_n] \phi_{n+1} \\ &\stackrel{\text{H.R.}}{=} N[\phi_1 \dots \phi_n] \phi_{n+1} + N[\text{toutes les contractions de } \phi_1 \dots \phi_n] \phi_{n+1} \end{aligned}$$

De nouveau on écrit $\phi_{n+1} = \phi_{n+1}^+ + \phi_{n+1}^-$. Il vient évidemment,

$$N[\phi_1 \dots \phi_n] \phi_{n+1}^- = N[\phi_1 \dots \phi_n \phi_{n+1}^-]$$

L'autre terme est plus compliqué,

$$\begin{aligned} N[\phi_1 \dots \phi_n] \phi_{n+1}^+ &= \phi_{n+1}^+ N[\phi_1 \dots \phi_n] + [N[\phi_1 \dots \phi_n], \phi_{n+1}^+] \\ &= N[\phi_1 \dots \phi_n \phi_{n+1}^+] + N \left[\sum_j \phi_1 \dots \phi_{j-1} [\phi_j^-, \phi_{n+1}^+] \phi_{j+1} \dots \phi_n \right] \end{aligned}$$

19. On suit ici le raisonnement de Peskin et Schroeder *Introduction to Quantum Field Theory*

Puis en additionnant ces deux derniers résultats,

$$N[\phi_1 \dots \phi_n] \phi_{n+1} = N[\phi_1 \dots \phi_n \phi_{n+1}] + N\left[\sum_j \overline{\phi_j} \phi_{n+1} \prod_{i \neq j} \phi_i\right] \quad (5.2.25)$$

Nous avons alors le premier terme de l'expression de Wick ainsi que le terme impliquant toutes les contractions n'impliquant qu'une seule contraction entre ϕ_{n+1} et un autre champ. Il n'est pas difficile de se convaincre que le terme restant va faire apparaître toutes les contractions restantes (il est cependant plutôt difficile et ennuyeux de l'écrire et nous ne le détaillerons pas ici).

Revenons désormais à la quantité qui nous intéresse réellement, à savoir

$$\langle 0 | a_{p_1} \dots a_{p_k} T[\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_p)] a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger | 0 \rangle \quad (5.2.26)$$

Ecrivons de plus,

$$\mathcal{H}_I(x) = \phi(x)^n \quad (5.2.27)$$

Les quantités que nous aurons à calculer seront donc de la forme,

$$\langle 0 | a_{p_1} \dots a_{p_k} T[\phi_1 \dots \phi_n] a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | a_{p_1} \dots a_{p_k} N[\phi_1 \dots \phi_n + \text{toutes les contractions possibles}] a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger | 0 \rangle$$

Les points d'évaluation de ϕ ne sont d'aucune importance pour la suite de la discussion, nous étudions donc plutôt,

$$\langle 0 | a_{p_1} \dots a_{p_k} N[\phi(x)^n + \text{toutes les contractions possibles}] a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger | 0 \rangle \quad (5.2.28)$$

Ecrivons désormais de nouveau,

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad (5.2.29)$$

Il vient évidemment,

$$N[\phi(x)^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\phi^+(x))^{n-j} (\phi^-(x))^j \quad (5.2.30)$$

Les termes apparaissant grâce aux contractions sont de la même forme en remplaçant n par $n-2, n-4, \dots$

Il est évident que,

$$(\phi^-(x))^j a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger | 0 \rangle \in \mathcal{H}_{l-j} \quad (5.2.31)$$

et est alors non nul uniquement pour les termes tels que $j \leq l$. De la même manière,

$$\langle 0 | a_{p_1} \dots a_{p_k} (\phi^+(x))^{n-j} \in (\mathcal{H}_{k-n+j})^* \quad (5.2.32)$$

Ainsi pour que la contribution d'un terme sous la forme ϕ^n soit non nul, il faut que

$$j_n = \frac{n-k+l}{2} \quad (5.2.33)$$

forçant notamment $n-k+l$ à être pair. Ainsi à n fixé, il n'y a la contribution que d'un terme donné par l'équation précédente, qui contribue alors avec un poids $\binom{n}{j_n}$. Les termes de

contraction correspondent à $n - 2, n - 4, \dots$ jusqu'à ce que $n - 2p = 0$ ou 1. Ainsi le nombre total de termes qui contribuera est alors,

$$\sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n-2p}{j_{n-2p}} \times \text{Nombre de contraction à } 2p \text{ éléments}$$

Pour calculer le nombre de contraction à $2p$ éléments d'une expression à n éléments, on commence par choisir $2p$ éléments parmi les n possibles soit un facteur $\binom{n}{2p}$. Ensuite, les $2p$ éléments sont tous contractés entre eux ce qui laisse un calcul assez simple, le premier à $2p - 1$ choix pour se contracter, le deuxième $2p - 3, \dots$ jusqu'au p -ième qui lui n'en a plus qu'un. Il vient alors,

$$\begin{aligned} \text{Nombre de contraction à } 2p \text{ éléments} &= \binom{n}{2p} (2p - 1) \cdot (2p - 3) \dots 3 \cdot 1 \\ &= \binom{n}{2p} \frac{(2p) \cdot (2p - 1) \cdot (2p - 2) \cdot (2p - 3) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2p) \cdot (2p - 2) \dots 4 \cdot 2} \\ &= \binom{n}{2p} \frac{(2p)!}{2^p p!} \end{aligned}$$

Puis alors le nombre de termes contribuant au calcul de l'amplitude initial est,

$$\sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n-2p}{j_{n-2p}} \binom{n}{2p} \frac{(2p)!}{2^p p!} \quad (5.2.34)$$

Ce que l'on peut retenir de cette discussion, c'est que, à n fixé, il n'y a qu'un seul terme qui peut contribuer à l'expression $\langle 0 | a_{p_1} \dots a_{p_k} N[\phi(x)^n] a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger | 0 \rangle$ et il est donné par le fait de faire agir j_n fois les opérateurs ϕ en tant qu'opérateur d'annihilation sur le ket initial et de faire agir le reste des opérateurs ϕ (soit $n - j_n$ opérateurs) en tant qu'opérateur de création sur le bra final. Il devient alors naturel de définir une contraction entre un opérateur $a_{\vec{p}}^\dagger$ et un opérateur ϕ . On le définit par,

$$\overline{\phi(x)} a_{\vec{p}}^\dagger = \langle 0 | \phi(x) a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-ipx} \quad (5.2.35)$$

De la même manière on définit,

$$\overline{a_{\vec{p}} \phi(x)} = \langle 0 | a_{\vec{p}} \phi(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{+ipx} \quad (5.2.36)$$

Ainsi la discussion précédente indique que calculer les seuls termes non nuls pour une expression revient à $\langle 0 | a_{p_1} \dots a_{p_k} N[\phi(x)^n] a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger | 0 \rangle$ contracter exactement j_n champs ϕ avec les opérateurs de création, et à contracter exactement $n - j_n$ champs ϕ avec les opérateurs d'annihilation.

Le cas où tous les champs ϕ ne sont pas évalués au même points x (ce qui est forcément le cas quand on regarde un terme à un ordre supérieur à 2 en $\mathcal{H}_I(x)$) se traite exactement de la même manière, les contractions s'effectuent simplement à des points différents de l'espace-temps.

Il reste un point à aborder que nous n'avons pas du tout traité (et qui se révèle important par la suite quand nous étudierons les diagrammes de Feynman). Dans la discussion précédente, nous avons utilisé les opérateurs ϕ afin d'amener les états initiaux et finaux dans le même espace de Hilbert à i particules (plus précisément le ket dans \mathcal{H}_i et le bra dans son dual $(\mathcal{H}_i)^*$). Ainsi en règle général, nous aurons finalement à calculer des quantités du genre,

$$\langle p_1, \dots, p_i | q_1, \dots, q_i \rangle \quad (5.2.37)$$

A première vue, on peut vouloir écrire,

$$\langle p_1, \dots, p_i | q_1, \dots, q_i \rangle = \prod_k \sqrt{4E_{\vec{p}_k} E_{\vec{q}_k}} (2\pi)^i \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{q}_1) \dots \delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{q}_i)$$

Mais la mécanique quantique nous dit qu'il n'y a aucune différence entre l'état $|q_1, \dots, q_i\rangle$ et l'état $|q_{\sigma(1)}, \dots, q_{\sigma(i)}\rangle$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_i$ ²⁰. La normalisation correcte est alors plutôt²¹,

$$\langle p_1, \dots, p_i | q_1, \dots, q_i \rangle = \prod_k \sqrt{4E_{\vec{p}_k} E_{\vec{q}_k}} (2\pi)^i \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_i} \prod_{j=0}^i \delta^{(3)}(\vec{p}_j - \vec{q}_{\sigma(j)}) \quad (5.2.38)$$

Pour ignorer cette subtilité, on peut définir aussi les contractions entre opérateurs de créations et annihilations, par

$$\overline{a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger} = \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (5.2.39)$$

$$\overline{a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}} = \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} | 0 \rangle = 0 \quad (5.2.40)$$

$$\overline{a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger} = \langle 0 | a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger | 0 \rangle = 0 \quad (5.2.41)$$

Ainsi, les seuls termes non nuls dans le développement de Dyson sont les termes où chaque champ et opérateur de création et annihilation sont *tous* contractés. En particulier, si $n + k + l$ est impair, l'amplitude est identiquement nulle, ce qui nous permet de retrouver le fait que $n - k + l$ est pair ($n - k + l = n + k + l - 2k$ a même parité que $n + k + l$).

5.2.5 Diagrammes de Feynman

La section précédente nous a montré le cadre théorique qui nous permet de calculer les amplitudes de processus. Cependant, les méthodes développées n'ont rien de pratique. Nous développons ici l'approche schématique des *diagrammes de Feynman*, en regard des résultats que nous venons de montrer.

Dans cette section on considère un Lagrangien de la forme,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2] - \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n \quad (5.2.42)$$

On choisit un état final et un état initial comme définis précédemment,

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\vec{q}_1}} \dots \sqrt{2E_{\vec{q}_l}} a_{q_1}^\dagger \dots a_{q_l}^\dagger |0\rangle \quad (5.2.43)$$

$$|f\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \dots \sqrt{2E_{\vec{p}_k}} a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_k}^\dagger |0\rangle \quad (5.2.44)$$

20. Nous continuer à nous intéresser ici à des états bosoniques, pour des états fermioniques cette égalité serait vraie au signe près. Pour plus de détails, voir S. Weinberg *The Quantum Theory of Fields* Vol. 1

21. Ce résultat se montre facilement en utilisant les relations de commutation des opérateurs création et annihilation

On commence alors le dessin du digramme en dessinant l lignes *entrantes* et k lignes *sortantes* avec les bons indices \vec{q}_i et \vec{p}_j respectivement. Il importe en suite de déterminer à quel ordre de la théorie des perturbations nous voulons étudier le processus,

$$\langle k | S | i \rangle \quad (5.2.45)$$

Supposons que nous voulons l'étudier à l'ordre p , c'est à dire en $O(\lambda_n^p)$. Le terme apparaissant dans le développement de Dyson est alors de la forme,

$$\frac{1}{p!} \left(-i \frac{\lambda_n}{n!} \right)^p \int d^4x_1 d^4x_p T [\phi(x_1)^n \dots \phi(x_p)^n] \quad (5.2.46)$$

Ainsi, on dessine p sommets placés en des points x_1, \dots, x_p de l'espace-temps auxquels on associe la quantité $-i\lambda_n \int d_i^x$. On pourrait se dire ici qu'il faut associer un facteur $-i \frac{\lambda_n}{n!} \int d_j^x$ à chaque sommet²². Chaque sommet est relié à n lignes, correspondant aux n champs $\phi(x_j)$.

Il ne reste désormais plus qu'à dessiner toutes les contractions. Pour une contraction entre $\phi(x)$ et $\phi(y)$, il suffit de dessiner un point reliant le sommet en x au sommet en y et de lui associer une quantité, $\Delta_F(x - y)$.

Pour une contraction entre $\phi(x)$ et $a_{\vec{p}}$, on relie la ligne sortante de quantité de mouvement p au sommet placé en x en associant une quantité e^{+ipx} (on omet ici le facteur $\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}$ car ce facteur s'annule avec le facteur de normalisation relativiste des états $|p\rangle$). Pour une contraction entre $\phi(x)$ et $a_{\vec{p}}^\dagger$, on relie la ligne entrante de quantité de mouvement p au sommet placé en x en associant une quantité e^{-ipx} . Enfin, pour une contraction entre $a_{\vec{p}}^\dagger$ et $a_{\vec{q}}$, on relie les deux lignes correspondantes et on associe un facteur $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$.

Ainsi pour obtenir l'amplitude de $\langle k | S | i \rangle$ à l'ordre $O(\lambda^p)$, il suffit de dessiner tous les diagrammes à 1, 2, ..., p sommets d'interaction, de calculer et sommer leurs amplitudes selon les règles précédentes.

Toutefois, travailler dans l'espace-temps n'est en général pas le plus pratique, on préfère alors calculer les amplitudes en faisant les transformées de Fourier de toutes les quantités intervenant dans les amplitudes telles que Δ_F . Rappelons que,

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (5.2.47)$$

Ainsi à chaque sommet d'interaction situé en x , il y a n lignes faisant toutes apparaître un facteur $e^{\pm ipx}$. En intégrant alors sur tous l'espace $\int d^4x$ ces facteurs il apparaît un Dirac $\delta^{(4)}\left(\sum_f p_f - \sum_i p_i\right)$ où les quantités de mouvement ont été orientées correctement entre les différents sommets, le i représentant alors les quantités de mouvement entrantes et le f les quantités de mouvement sortantes. Ainsi dans l'espace des phases, chaque sommet vient avec un facteur

$$-i\lambda_n \delta^{(4)}\left(\sum_f p_f - \sum_i p_i\right) \quad (5.2.48)$$

22. En réalité nous anticipons un peu, et remarquons que lorsque qu'il faudra calculer les contractions il y aura souvent $n!$ permutations possibles des $\phi(x_j)$, annulant alors le facteur $n!$ du sommet d'interaction

Les lignes internes, qui correspondent à des propagateurs $\Delta_F(x - y)$, font apparaître des facteurs

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (5.2.49)$$

Il y a un aspect que nous avons omis jusqu'ici. En effet, un même digramme peut provenir de plusieurs termes différents dans le développement de Dyson. C'est pour cette raison *a priori*, que nous associons à chaque sommet un facteur $-i\lambda_n$ et pas $-i\frac{\lambda_n}{n!}$. De la même manière, le développement de Dyson fait apparaître un terme $\frac{1}{p!}$, qui va s'annuler avec le fait de considérer toutes les permutations de sommets possibles. En réalité, ces "annulations" ne sont pas exactes. Par exemple, un champ $\phi(x)$ contracté avec lui même ne laisse plus $4!$ permutations des champ possible au sommet x mais seulement 4.3. Ainsi, il faut diviser l'amplitude obtenue par un *facteur de symétrie* 2. Les facteurs de symétrie sont assez difficiles à obtenir intuitivement et nous ne nous étendrons pas sur le sujet ici²³. Il n'est en général pas utile d'avoir exactement les bons facteurs de symétrie pour comprendre le phénomène physique qui a lieu dans un diagramme.

Nous n'avons considéré ici une théorie d'interaction avec une seule constante de couplage (λ_n) et un seul type de champ (le champ scalaire ϕ). Il n'est pas difficile d'ajouter des constantes de couplage $\{\lambda_i\}$ et d'ajouter des champs de différents types à la théorie (champs scalaires complexes, spineurs de Dirac, etc). Il suffit alors d'associer à chaque sommet le bon nombre et le bon type de champs, d'associer à chaque ligne interne le propagateur correspondant au champ considéré et de calculer les différentes contractions des champs possibles avec les opérateurs création et annihilation. Nous étudierons un exemple plus poussé par la suite en s'intéressant au potentiel de Yukawa.

5.2.6 Propagateurs en présence d'interactions

Nous revenons ici à notre problème initial, à savoir que les quantités qui nous intéressent vraiment sont plutôt les

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle$$

où les champs ϕ_H sont les champs d'Heisenberg de la théorie interactive et $|\Omega\rangle$ en est l'état fondamental.

Nous montrons ici que nous pouvons calculer ces quantités en passant par le formalisme développé précédemment par l'équation,

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (5.2.50)$$

Supposons par exemple, $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0$. Soit t_0 tel que les points de vue d'Heisenberg, de Schrödinger et d'interaction coïncident. Il vient alors,

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi_S(\vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_H(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi_S(\vec{x}) e^{-iH(t-t_0)} \quad (5.2.51)$$

Puis on peut relier les champs d'Heisenberg et d'interaction entre eux par,

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \phi_H(t, \vec{x}) e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (5.2.52)$$

Notons,

$$V(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \quad (5.2.53)$$

23. Peskin et Schroeder développe un peu plus le problème au Chapitre 4.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t}(t, t_0) &= iH_0 e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} - i e^{iH_0(t-t_0)} H e^{-iH(t-t_0)} \\
&= i e^{iH_0(t-t_0)} (H_0 - H) e^{-iH(t-t_0)} \\
&= i e^{iH_0(t-t_0)} H' e^{-iH(t-t_0)} \\
&= i e^{iH_0(t-t_0)} H' e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\
&= iH_I(t) V(t, t_0)
\end{aligned}$$

Et alors,

$$V(t, t_0) = U_I(t, t_0) \quad (5.2.54)$$

Finalement, on relie ϕ_I et ϕ_H par,

$$\phi_I(t, \vec{x}) = U_I(t, t_0) \phi_H(t, \vec{x}) U_I(t, t_0)^\dagger \quad (5.2.55)$$

Notons également que,

$$\begin{aligned}
S &= U_I(-\infty, \infty) \\
&= T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right) \\
&= T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{x_n^0} dt H_I(t) \right) \exp \left(-i \int_{x_n^0}^{x_{n-1}^0} dt H_I(t) \right) \dots \exp \left(-i \int_{x_1^0}^{\infty} dt H_I(t) \right) \right] \\
&= U_I(\infty, x_1^0) \dots U(x_{n-1}^0, x_n^0) U(x_n^0, -\infty)
\end{aligned}$$

L'avant dernière égalité peut paraître étonnante car en général $e^A e^B \neq e^{A+B}$. Tout repose sur le fait que cette quantité est à l'intérieur d'un opérateur T qui de toute manière réordonnera temporellement les éléments. La dernière égalité vient simplement de l'hypothèse $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0$. Il vient alors,

$$\langle 0 | T \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) S | 0 \rangle = \langle 0 | U_I(\infty, x_1^0) \phi_I(x_1) \dots U(x_{n-1}^0, x_n^0) \phi_I(x_n) U(x_n^0, -\infty) | 0 \rangle$$

En remplaçant ϕ_I par ϕ_H , en chaque x_j , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\phi_I(x_j) U_I(x_j, x_{j+1}) \phi_I(x_{j+1}) &= U_I(x_j^0, t_0) \phi_H(x_j) U_I(x_j^0, t_0)^\dagger U_I(x_j^0, x_{j+1}^0) \\
&\times U_I(x_{j+1}^0, t_0) \phi_H(x_{j+1}) U_I(x_{j+1}^0, t_0)^\dagger \\
&= U_I(x_j^0, t_0) \phi_H(x_j) U_I(t_0, x_j^0) U_I(x_j^0, x_{j+1}^0) U_I(x_{j+1}^0, t_0) \\
&\times \phi_H(x_{j+1}) U_I(t_0, x_{j+1}^0) \\
&= U_I(x_j^0, t_0) \phi_H(x_j) \phi_H(x_{j+1}^0) U_I(t_0, x_{j+1}^0)
\end{aligned}$$

puis en injectant ce résultat,

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) S | 0 \rangle &= \langle 0 | U_I(\infty, x_1^0) U_I(x_1^0, t_0) \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) U_I(t_0, x_n^0) U(x_n^0, -\infty) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | U_I(\infty, t_0) \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) U(t_0, -\infty) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

Il reste donc calculer,

$$\begin{aligned}
U_I(t, -\infty) | 0 \rangle &= \lim_{T \rightarrow -\infty} U_I(t, T) | 0 \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow -\infty} U_I(T, t)^\dagger | 0 \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow -\infty} e^{iH(t-T)} e^{-iH_0(t-T)} | 0 \rangle = \lim_{T \rightarrow -\infty} e^{iH(t-T)} | 0 \rangle
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $H_0 |0\rangle = 0$.

Insérons une résolution de l'identité sous la forme d'une base propre de H ,

$$I = |\Omega\rangle \langle\Omega| + \int d\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| \quad (5.2.56)$$

Le calcul donne,

$$\begin{aligned} U_I(t, -\infty) |0\rangle &= \lim_{T \rightarrow -\infty} e^{iH(t-T)} \left[|\Omega\rangle \langle\Omega| + \int d\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| \right] |0\rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow -\infty} e^{iE_\Omega(t-T)} |\Omega\rangle \langle\Omega|0\rangle + \lim_{T \rightarrow -\infty} \int d\alpha e^{iE_\alpha(t-T)} |\alpha\rangle \langle\alpha|0\rangle \end{aligned}$$

Si on suppose que $\langle\alpha|0\rangle$ se comporte assez bien, Riemann-Lebesgue nous indique que

$$\int d\alpha e^{iE_\alpha(t-T)} \langle\alpha|0\rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (5.2.57)$$

Ainsi, le terme dominant est le terme en $|\Omega\rangle$. Toutefois pour faire ce raisonnement nous avons dû supposer qu'il existait une quantité V strictement positive telle que $E_\alpha - E_\Omega > V$ quelque soit l'état $|\alpha\rangle$. On travaille donc ici dans une théorie avec *mass gap*²⁴.

En utilisant cette expression,

$$\langle 0 | T \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) S | 0 \rangle = \langle \Omega | \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle |\Omega 0|^2 \lim_{T \rightarrow -\infty} e^{-2iE_\Omega T}$$

Pour $T \rightarrow \infty$,

$$\langle 0 | U(T, t_0) U(t_0, -T) | 0 \rangle = e^{-2iE_\Omega T} |\Omega 0|^2 \langle \Omega | \Omega \rangle \quad (5.2.58)$$

Nous pouvons finalement terminer la démonstration,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) S | 0 \rangle &= \langle \Omega | \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle \lim_{T \rightarrow -\infty} \langle 0 | U(T, t_0) U(t_0, -T) | 0 \rangle \\ &= \langle \Omega | \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle \langle 0 | S | 0 \rangle \end{aligned}$$

Ce qui est plus intéressant est d'interpréter ce résultat en terme de diagrammes de Feynman. Remarquons qu'en règle général un diagramme est constitué de plusieurs composantes connexes, certaines étant *connectées*, d'autres *déconnectées*, c'est à dire reliées ou non à des lignes externes. Soient deux diagrammes Γ_1 et Γ_2 , on définit naturellement un produit sur les diagrammes en définissant le diagramme $\Gamma_1 \Gamma_2$ comme le diagramme composé de Γ_1 et Γ_2 , sans que l'ordre ne compte. Définissons les Γ_i comme les diagrammes élémentaires de fluctuations du vide, c'est à dire les diagrammes déconnectés et connexes avec 0 lignes externes. On représente de plus par $\mathcal{A}(\Gamma)$ l'amplitude associée à un diagramme Γ . Nous savons déjà que,

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = \sum \left(\begin{array}{c} \text{Tous les diagrammes} \\ \text{connectés ou non} \\ \text{sans lignes externes} \end{array} \right) \quad (5.2.59)$$

Soit un diagramme Γ avec 0 ligne externes, nous pouvons le décomposer sous la forme

$$\Gamma = \prod_i (\Gamma_i)^{k_i} \quad (5.2.60)$$

24. C'est à dire que nous avons une différence d'énergie finie entre l'état fondamental sans excitation et n'importe quel état impliquant une excitation, ce qui s'interprète par une masse lorsque les excitations sont des particules. L'énergie passe alors de $E = 0$ à $E = m$

L'amplitude associée à un diagramme $(\Gamma_i)^{k_i}$ est,

$$\mathcal{A}[(\Gamma_i)^{k_i}] = \frac{\mathcal{A}[(\Gamma_i)]^{k_i}}{k_i!} \quad (5.2.61)$$

car échanger les k_i copies du diagramme ne le change pas et fait donc apparaître un facteur de symétrie $\frac{1}{k_i!}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle 0 | S | 0 \rangle &= \sum_{\Gamma} \mathcal{A}(\Gamma) \\ &= \sum_{\{k_i\}} \prod_i \frac{\mathcal{A}[(\Gamma_i)]^{k_i}}{k_i!} \\ &= \prod_i \left(\sum_{k_i} \frac{\mathcal{A}[(\Gamma_i)]^{k_i}}{k_i!} \right) \\ &= \prod_i e^{\mathcal{A}(\Gamma_i)} \\ &= \exp \left(\sum_i \mathcal{A}(\Gamma_i) \right) \end{aligned}$$

Soit alors finalement,

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = \exp \left[\sum \left(\begin{array}{c} \text{Tous les diagrammes} \\ \text{connectés} \\ \text{du vide} \end{array} \right) \right] \quad (5.2.62)$$

Le deuxième terme est à peine plus compliqué à calculer,

$$\langle 0 | T \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) S | 0 \rangle = \sum \left(\begin{array}{c} \text{Tous les diagrammes} \\ \text{connectés ou non} \\ \text{avec } n \text{ lignes externes} \end{array} \right) \quad (5.2.63)$$

Soit un diagramme quelconque avec n lignes externes. Ecrivons ce diagramme comme,

$$\Gamma = \Gamma_e \prod_i (\Gamma_i)^{k_i} \quad (5.2.64)$$

C'est à dire en une partie de diagrammes de vide sans lignes externes et une partie Γ_e contenant toutes les composantes connexes avec des lignes externes (diagramme connecté). Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) S | 0 \rangle &= \sum_{\Gamma_e} \sum_{\{k_i\}} \Gamma_e \prod_i (\Gamma_i)^{k_i} \\ &= \exp \left(\sum_i \mathcal{A}(\Gamma_i) \right) \sum_{\Gamma_e} \Gamma_e \end{aligned}$$

Ou encore,

$$\langle 0 | T \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) S | 0 \rangle = \sum \left(\begin{array}{c} \text{Tous les diagrammes} \\ \text{entièrement connectés} \\ \text{avec } n \text{ lignes externes} \end{array} \right) \exp \left[\sum \left(\begin{array}{c} \text{Tous les diagrammes} \\ \text{connexes} \\ \text{du vide} \end{array} \right) \right] \quad (5.2.65)$$

Dans la première somme, remarquons qu'il n'y a aucune contrainte sur la connexité du diagramme. La seule contrainte est que chaque composant connexe du diagramme soit connectée. Le résultat final qui nous intéresse est alors,

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle = \sum \left(\begin{array}{l} \text{Tous les diagrammes} \\ \text{entièrement connectés} \\ \text{avec } n \text{ lignes externes} \end{array} \right) \quad (5.2.66)$$

Remarquons que lorsque l'on calcule les amplitudes des diagrammes précédents, les lignes externes sont aussi associées à une quantité

$$\Delta_F(x - y) \quad (5.2.67)$$

car les champs sont contractés avec des champs entiers et pas avec des opérateurs de création ou annihilation seulement.

5.3 Quelques applications

Dans cette section, on s'intéresse plus particulièrement à deux théories qui ont leur importance dans la physique moderne.

5.3.1 La théorie ϕ^4

La théorie ϕ^4 est définie par la Lagrangie suivant,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2 \right] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (5.3.1)$$

Ce modèle apparaît typiquement en physique des hautes énergies lors du phénomène de brisure de symétrie du potentiel du boson de Higgs.²⁵ Nous présentons ici les implications basiques de cette théorie telles que les diagrammes de Feynman qu'elle fait apparaître et donnons un avant-goût de la renormalisation.

Les règles de Feynman (dans l'espace des quantités de mouvement) sont relativement simples et nous n'avons pas à travailler plus pour les obtenir, tout a déjà été fait précédemment. Elles sont données par,

- A chaque sommet on associe une quantité $-i\lambda$ (Figure 1a)
- A chaque sommet on associe un Dirac $\delta^{(4)}(\sum_i p_i - \sum_f p_f)$
- A chaque ligne interne on associe un propagateur $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ (Figure 1b)
- A chaque ligne externe un facteur 1 est associé (si deux lignes externes sont associées directement, il faut inclure un Dirac de conservation $\delta^{(4)}(p_i - p_f)$)
- On divise l'amplitude obtenu par le facteur de symétrie du diagramme

²⁵. En réalité c'en est un modèle simplifié, le modèle complet étant donné par le célèbre modèle Weinberg-Salam



FIGURE 1 – Composants des diagrammes de Feynman pour la théorie ϕ^4

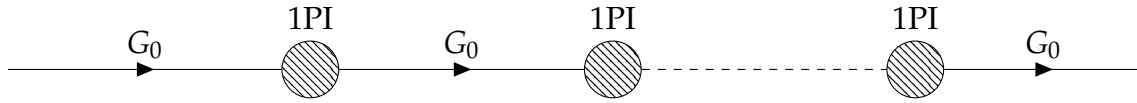
La partie plus intéressante à étudier est ce que devient réellement le propagateur à deux champs en présence d'interaction,

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) | \Omega \rangle \quad (5.3.2)$$

Nous avons déjà l'équation,

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) | \Omega \rangle = \sum \left(\begin{array}{l} \text{Tous les diagrammes} \\ \text{entièrement connectés} \\ \text{avec 2 lignes externes} \end{array} \right) \quad (5.3.3)$$

Or un diagramme de Feynman avec deux lignes externes est forcément connexe. Il est toujours possible de l'écrire comme une succession de la forme,



où la partie hachurée est telle que si l'on en coupe une ligne interne, le diagramme reste connexe. On définit un tel diagramme comme un diagramme 1PI (en anglais 1-part irreducible). Il vient alors que,

$$G(p) = G_0(p) + G_0(p)(-i\Gamma(p))G_0(p) + G_0(p)(-i\Gamma(p))G_0(p)(-i\Gamma(p))G_0(p) + \dots \quad (5.3.4)$$

où l'on a défini

$$-i\Gamma(p) = \sum \left(\begin{array}{l} \text{Tous les diagrammes} \\ \text{1PI amputés} \\ \text{avec 2 lignes externes} \end{array} \right) \quad (5.3.5)$$

où nous avons défini les diagrammes amputés comme le fait d'avoir un diagramme avec deux lignes externes mais de ne pas compter la contribution des deux lignes externes dans l'amplitude du diagramme.

Nous obtenons alors,

$$G(p) = G_0(p) \sum_{k \geq 0} (-i\Gamma(p)G_0(p))^k = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 - \frac{\Gamma(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Gamma(p) + i\epsilon} \quad (5.3.6)$$

Ainsi, les interactions se comportent effectivement comme si elles avaient transformé la masse de la particule de,

$$m^2 \longrightarrow m_P^2 = m^2 - \text{Re}(\Gamma(p)) \quad (5.3.7)$$

Nous pouvons ensuite décider d'évaluer $-i\Gamma(p)$ à un certain ordre en théorie des perturbations pour obtenir le propagateur et la masse correspondante.

Nous pourrions aussi étudier la manière dont les interactions changent les sommets d'interaction mais le sujet est plus compliqué et nous ne nous étendrons pas sur ce sujet ici. De la même manière, on pourrait s'intéresser à la signification de $\text{Im}(\Gamma(p))$ qui est lié à la stabilité de la particule. Toutefois, ces sujets étant plus avancés et le but du propos n'étant pas de s'étendre sur la renormalisation, nous omettons ici ces résultats.

5.3.2 Potentiel de Yukawa

On s'intéresse ici au Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2 \right] + \partial_\mu\psi^\dagger\partial^\mu\psi - M^2\psi^\dagger\psi - g\psi^\dagger\psi\phi \quad (5.3.8)$$

où ϕ est un champ scalaire et ψ un champ scalaire complexe. On l'appelle *Lagrangien de Yukawa*. Il représente typiquement l'interaction entre un fermion et le champ scalaire de Higgs²⁶.

Nous développons ici la manière de construire et calculer les diagrammes de Feynman de cette théorie et exposons également la manière dont celle-ci donne naissance à une force. Les règles de Feynman sont légèrement plus compliquées car cette théorie fait intervenir deux propagateurs et que le champ ψ donne naissance à deux types de particules différentes. Pour cette dernière raison, il faut ajouter des flèches sur les lignes de propagation de ψ et ψ^\dagger . En chaque sommet, le nombre de flèches entrantes doit être égal au nombre de flèches sortantes. Cette nouvelle conservation provient du courant conservé de Noether que nous avons calculé précédemment. Les règles de Feynman de cette théorie sont comme suit,

- Chaque sommet a l'amplitude $-ig$ (Figure 2a)
- Chaque sommet est associée avec $\delta^{(4)}(\sum_i p_i - \sum_f p_f)$ et une conservation des flèches définies précédemment
- Une ligne interne pour ϕ est associée à la quantité $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ (Figure 2c)
- Une ligne interne avec une flèche pour ψ ou ψ^\dagger est associée à la quantité $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$ (Figure 2b)
- Les lignes externes contribuent avec un simple facteur 1
- Il n'y a pas de facteur de symétrie à prendre en compte

Ce dernier point vient du fait que nous n'avons pas ici *triché* contrairement aux théories en ϕ^n où nous avons supposé à l'avance que chaque terme allait apparaître $n!$ fois. Ici nous avons gardé la constante de couplage g telle qu'elle apparait directement dans le Lagrangien.

Nous voulons nous intéresser au potentiel qui fait interagir deux particules ψ lorsqu'elles se croisent en présence du champ ϕ . Les diagrammes de Feynman associée sont alors,

26. En réalité les fermions sont représentés par des spineurs de Dirac et donc nous étudions de nouveau un modèle simplifié, le champ complexe ψ étant aussi un champ scalaire de spin 0 bosonique.

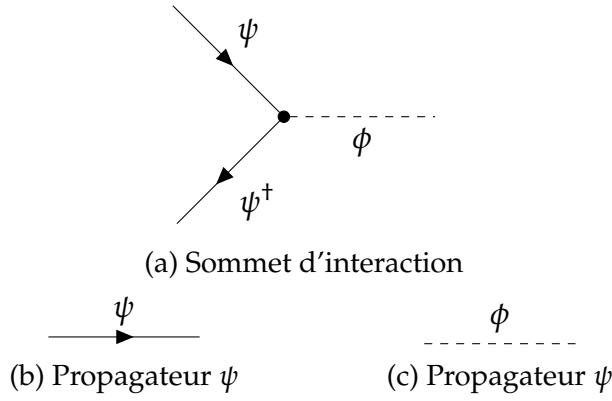


FIGURE 2 – Composants des diagrammes de Feynman pour la théorie $\psi^\dagger\psi\phi$

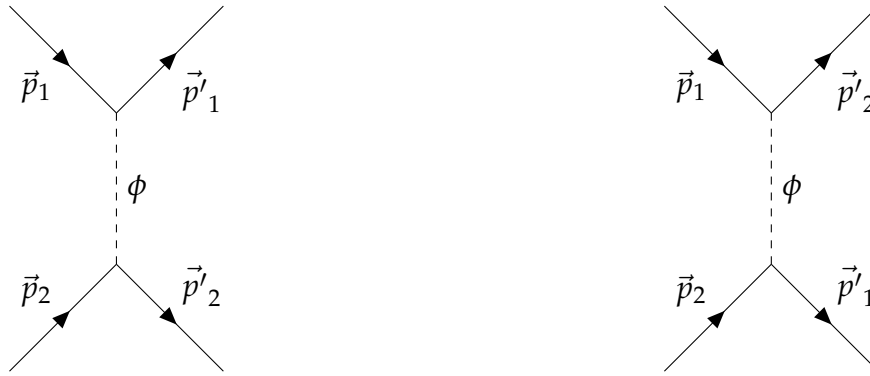


FIGURE 3 – Diffusion $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$

Les règles de Feynman pour ces diagrammes donnent,

$$\begin{aligned} i\mathcal{A} &= (-ig)^2 \left[\frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} + \frac{i}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} \right] \\ &= ig^2 \left[\frac{1}{-(p_1 + p_2)^2 + m^2} + \frac{1}{-(p_1 - p'_1)^2 + m^2} \right] \end{aligned}$$

Etudions par exemple le deuxième terme dans le référentiel du centre de masse $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Dans ce référentiel, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ et alors $E_1 = E_2$. Dans n'importe quel référentiel nous avons,

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad (5.3.9)$$

D'où dans le référentiel du centre de masse, $|\vec{p}'_1| = |\vec{p}'_2|$, puis $E'_2 = E'_1$. Il vient alors, $2E_1 = 2E'_1$, soit $|\vec{p}_1| = |\vec{p}'_1|$. Ainsi,

$$(p_1 - p'_1) = (0, \vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \quad (5.3.10)$$

Puis l'amplitude s'écrit alors,

$$ig^2 \frac{1}{(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2 + m^2} \quad (5.3.11)$$

Pour déterminer la forme du potentiel du potentiel qui fait interagir deux particules de quantité de mouvement \vec{p} et \vec{q} nous utilisons l'approximation de Born qui stipule que, pour une particule arrivant avec \vec{p}_1 et repartante avec \vec{p}'_1 , le potentiel vérifie la relation

$$\langle \vec{p}'_1 | U(\vec{r}) | \vec{p}_1 \rangle = -i \int d^3\vec{r} U(\vec{r}) e^{-i(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \cdot \vec{r}} \quad (5.3.12)$$

Remarquons qu'ici, avec cette approximation venant de la mécanique quantique, nous utilisons des états non relativistes, il apparait donc dans notre cas d'étude un facteur supplémentaire $\sqrt{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}'_1}} \simeq (2M^2)$ dans la limite non relativiste. Ainsi dans notre cas, le potentiel vérifie,

$$-i \int d^3\vec{r} U(\vec{r}) e^{-i(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \cdot \vec{r}} = \frac{-(g/2M)^2}{(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2 + m^2} \quad (5.3.13)$$

Puis en prenant la transformée de Fourier inverse,

$$U(\vec{r}) = - \left(\frac{g}{2M} \right)^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}}{\vec{p}^2 + m^2}$$

Nous avons déjà calculé une telle intégrale, le résultat est,

$$U(\vec{r}) = - \left(\frac{g}{2M} \right)^{\frac{1}{4\pi r}} e^{-mr} \quad (5.3.14)$$

qui est le célèbre *potentiel de Yukawa*. Le signe $-$ indique que le champ ϕ donne naissance à une force d'interaction attractive entre les particules ψ .

6 Conclusion

Cette note touche à sa fin. J'espère qu'elle aura été claire et utile à ceux qui l'auront lue. Comme expliqué dans l'avant-propos, la discussion présentée n'a rien d'exhaustif sur le sujet abordé. En effet, je dirais même qu'elle ne fait qu'en effleurer la surface et ne s'intéresse qu'aux concepts les plus simples. Toutefois, elle constitue la base nécessaire à une étude approfondie de n'importe quel sujet dérivant de la théorie quantique des champs.

Ainsi, si le propos vous a plus, vous n'êtes pas au bout de vos réjouissances (ou peines), car il reste énormément de sujets à étudier. Le premier étant probablement de s'intéresser réellement à la manière dont les fermions sont décrits en théorie quantique des champs. Nous n'avons parlé jusqu'ici que de particules de spin 0, et de nombreux développements apparaissent lorsque l'on étudie des particules de spin demi-entier. Le thème le plus propice pour s'en apercevoir est certainement l'électrodynamique quantique (QED). Les nombreux travaux réalisés sur ce sujet sont très instructifs pour l'étude de la plupart des concepts de la mécanique quantique (théorie de jauge, renormalisation, ...).

Enfin, l'approche canonique développée ici n'est pas la seule utilisée en théorie quantique des champs, et il est extrêmement enrichissant d'étudier l'autre grande approche qu'est l'intégrale de chemin. Ces deux approches sont en général complémentaires. Le grand intérêt de l'intégrale de chemin est l'aspect non perturbatif qu'elle peut apporter. En effet, l'approche canonique nous a permis de calculer de nombreuses quantités de manière perturbative. Cependant, de nombreux sujets avancés en TQC, ne peuvent pas être compris de manière exclusivement perturbative. C'est notamment le cas de la chromodynamique quantique (QCD).

En conclusion, la route est encore longue pour comprendre cette vaste théorie, et les chemins pour s'y perdre sont nombreux. Le plus excitant est sûrement que la plupart des routes sont encore à construire !