Spontaneous symmetry breaking in QFT

Tanguy Marsault

May 29, 2024

Foreword

In this short note we shall describe the process of symmetry breaking in Quantum Field Theory. We shall see that it leads to the appearance of massless bosons, the so-called Nambu-Goldstone bosons. We shall also see how the Higgs mechanism allows for the absorption of these bosons by the gauge bosons, giving them mass. Finally, we should generalize the results to the case of a general symmetry group G and show how the masses of the bosons can be computed.

1 What is symmetry breaking ?

In this first and introductory section we explain the concept of symmetry breaking. We shall see that it is a fundamental concept in physics, and that it leads to rather peculiar phenomena. But before one asks what is symmetry breaking in physics, one should ask what is symmetry in physics.

1.1 Symmetries

In physics, a symmetry is a transformation that leaves the laws of physics invariant. In other words, if a physical system is symmetric under a certain transformation, we shall say that this transformation is a *symmetry* of the system. Mathematically, this translates into an invariance of the action, or of the Lagrangian or Lagrangian density, under the transformation.

Let us make this more precise and denote by $\mathcal{L}$ the Lagrangian density (that we should now refer to simply as Lagrangian) of a system and S the associated action. Denoting by $\mathcal{C}$ the set of fields configurations, a symmetry of the system is a transformation $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ such that

$$S[T(\mathcal{C})] = S[\mathcal{C}] \tag{1}$$

or equivalently

$$\mathcal{L}[T(\mathcal{C})] = \mathcal{L}[\mathcal{C}] \tag{2}$$

1.2 Canonical quantization

Moving from a field theory to a quantum field theory is a rather simple process. We should not detail it deeply here, but we shall give a brief overview of the process.

In a field theory, the fields are promoted to operators acting on a space called *Fock space*. This way the fields are quantized in terms of creation and annihilation operators that allow to create and destroy free particle states.

Let us consider the ground state of the system, denoted by $|\Omega\rangle$. The fields may have an arbitrary *vacuum expectation value* (VEV) in this state. However, canonical quantization only allows to have fields quantized around a VEV of 0. Hence if one where to have a field ϕ with a VEV $\langle\phi\rangle = v \neq 0$, on shoudl rather work with the field $\varphi = \phi - v$, so that $\langle\varphi\rangle = 0$, whence the canonical quantization would make sense.

The apparition of this VEV and the fact that it might not be invariant under the transformation of the fields is the essence of symmetry breaking.

The point of view used here is the canonical quantization where fields are operators. In a path integral formalism, the same phenomenom would appear when considering fields as classical fields and using the fact that fields satisfy certain differential equation for the action or the effective action. We shall stick with the canonical point of view in the following, not that it would change much.

1.3 Symmetry breaking

Let us directly consider an example of symmetry breaking. We consider a single field describe by the Lagrangian,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi)^2 - \mu^2\varphi^2\right] - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2\right)^2$$

The derivative part is the kinetic part while the second part is the potential,

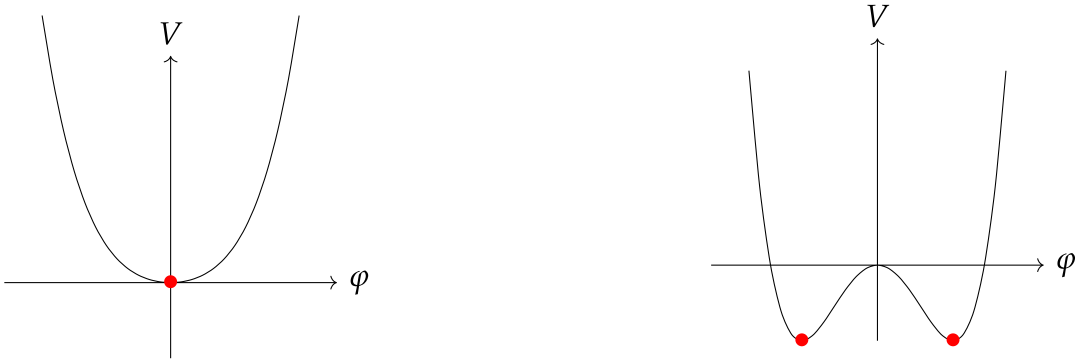
$$V(\varphi^2) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2\right)^2$$

The Lagrangian is invariant under the transformation $\varphi \longrightarrow -\varphi$, which is a $\mathbb{Z}_2$ symmetry. (For the mathematically inclined, and foreseeing the next sections, we say that there is a $\mathbb{Z}_2$ symmetry group acting on the fields).

Let us plot this potential, for two diffrent values of μ^2, depending on whether it is positive or negative. μ^2 should be seen as a notation and not as a real squared value. The square is conventional because it usually represents the squared mass of the particle.

The red dots in Figure 1 refer to the minima of the potential *i.e.* the values of ϕ for which $V(\varphi)$ is minimal, which would then correspond to a ground state of the system.

Let us first take a look at the case $\mu^2 > 0$ in Figure 1a. In this case, the field minimum is at $\varphi = 0$, this means that has an operator, in the ground state, the field we acquire the VEV $v = \langle\varphi\rangle = 0$. What is important to notice here is the fact that the action of $\mathbb{Z}_2$ on the VEV is



(a) $\mu^2 > 0$ (b) $\mu^2 < 0$

Figure 1: Shapes of the potential depending on the sign of μ^2

trivial, *i.e.* $v = -v = 0$. This Lagrangian can then be quantified as usual and gives rise to a scalar particle (a meson) of mass μ. Nothing too fancy here. Let us rewrite the Lagrangian so that we can refer to it later,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \mu^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4,\ \mu^2 > 0 \tag{3}$$

Let us now consider the case $\mu^2 < 0$ in Figure 1b. In this case, there are two minimas of the potential, determined by the equation,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} = 0 \iff \mu^2\varphi + \lambda\varphi^3 = 0 \iff \varphi = 0 \text{ or } \varphi\pm = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Only $\varphi_\pm$ correspond to minima of the potential. Hence the system will end up in one of those vacua in the ground state. Since the Lagrangian is invariant under the $\mathbb{Z}_2$ transformation, the physics should not depend on which minima we choose since $\phi_\pm = -\phi_\mp$.

To make things clear let us suppose that the system chooses φ_+ as its VEV,

$$\langle\varphi\rangle = \varphi_+ = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = v$$

Then, as explained in the previous sections, one should work with the fieldss $\phi = \varphi - v$ and the Lagrangian becomes,

$$\mathcal{L} = \frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \mu^2\phi^2 + O(\phi^3)$$

where we ignored terms of order ϕ^3 and higher for now.

A few things should be noticed

2 Brisure de symétrie

Considérons un Lagrangien (densité lagrangienne) de la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi)^2 - \mu^2\varphi^2\right] - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2\right)^2 \tag{4}$$

où l'on a noté $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, un vecteur de champs scalaires.
Le potentiel s'écrit alors

$$V\left(\varphi^2\right) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2\right)^2 \tag{5}$$

Ce type de potentiel est dessiné Figure 2 où l'on a noté $\phi = |\varphi|$. Ce potentiel a un minimum

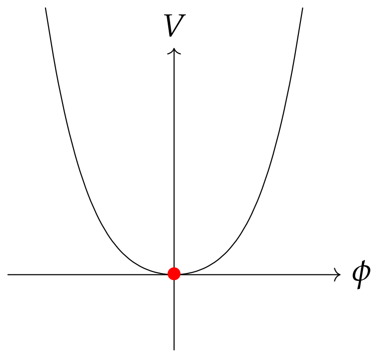


Figure 2: $V(\phi)$

unique situé en $\phi = 0$ (donc dans l'espace complet des phases ce minimum correspondant à $(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = (0, \dots, 0)$). Ainsi, le vide, cherchant alors à minimiser l'énergie potentielle V, choisis préférentiellement la configuration $\phi = 0$.
Considérons désormais

$$V'\left(\varphi^2\right) = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2\right)^2 \tag{6}$$

qui est déormais dessiné Figure 3. Cette fois-ci il y a deux minima dont on peut déterminer

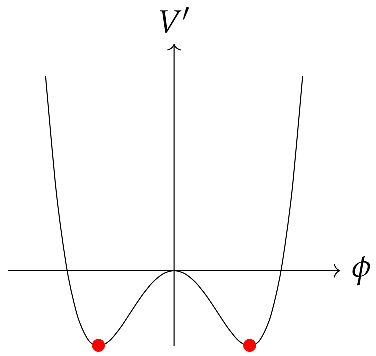


Figure 3: $V'(\phi)$

la valeur.

$$\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}\phi} = 0 \iff \mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \iff \phi = 0 \text{ ou } \phi = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Comme on s'intéresse aux minima du potentiel, $\phi = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$. On note $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$. Finalement, deux minima sont possibles. C'est ce qu'on appelle la brisure de symétrie spontanée, l'état de plus basse énergie ne respecte pas la symétrie du Lagrangien $\mathbb{Z}_2$. Ce mécanisme qui s'applique ici à la théorie quantique des champs provient originellement des phénomènes magnétiques qui apparaissent dans les supraconducateurs.

2.1 $N = 1$

Concentrons nous sur le cas $N = 1$ pour le moment : $\varphi = \phi$.
Dans ce cas le système est contraint de choisir un des deux minima. En effet, en mécanique quantique, le système pourrait passer de l'un à l'autre des minima par effet tunnel, mais en théorie quantique des champs l'énergie potentiel est en réalité $\int \mathrm{d}^D x V(\phi)$ pour D dimensions d'espace (la mécanique quantique correspond à la TQC en dimension $d = 0 + 1$). Ainsi la barrière de potentiel est

$$\Delta E = [V(0) - V(\pm v] \int \mathrm{d}^D x \tag{7}$$

et l'effet tunnel est impossible (ou du moins de plus en plus faible lorsque la taille du système augmente) à cause des D dimensions d'espace.
Toutefois, grâce à la symétrie $\mathbb{Z}_2$ du Lagrangien, la physique ne doit pas changer si l'on choisit n'importe lequel des deux minima, et on choisit donc v pour la suite des calculs.
Le champ ϕ s'écrit alors de la forme $\phi = \phi' + v$ et le lagrangien devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[(\partial\phi')^2 + \mu^2 v^2 + 2\mu^2\phi' v + \mu^2(\phi')^2\right] - \frac{\lambda}{4}(v+\phi')^4 \\
&= \frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi')^2 + \mu^2\phi' v \\
&\quad - \frac{\lambda}{4}(v^4 + 4v^3\phi' + 6v^2\phi'^2 + 4v\phi'^3 + \phi'^4) \\
&= \frac{\mu^4}{2\lambda} - \frac{\lambda}{4}v^4 + \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 + (\mu^2 v - \lambda v^3)\phi' + \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{\lambda}{v^2}\right)\phi'^2 - \lambda v\phi'^3 - \frac{\lambda}{4}\phi'^4 \\
&= \frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - \mu^2\phi'^2 - \sqrt{\lambda}\mu\phi'^3 - \frac{\lambda}{4}\phi'^4
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'espression $v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$.
Finalement, le Lagrangien se remet sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - \mu^2\phi'^2 + O(\phi'^3) \tag{8}$$

Le terme constant ne nous intéresse pas et montre juste que le champ ϕ a acquis une valeur d'énergie non nulle en moyenne. Le lagrangien se remet alors sous la forme de l'équation (1), et le champ ϕ' représente une particule de masse $\sqrt{2}\mu$.
Remarquons que ce Lagragien n'adment plus la symétrie interne $\mathbb{Z}_2$. En réalité, cette symétrie est caché. En effet, l'action par $\mathbb{Z}_2$ $\phi \longrightarrow -\phi$ transforme $v \longrightarrow -v$ et $\phi' \longrightarrow -\phi'$, et ces deux transformations laissent bien $\mathcal{L}$ invariant.

2.2 $N \geq 2$

Penchons nous désormais sur le cas $N = 2$ (qui soulignera toute la physique intéressante pour $N \geq 2$). Le potentiel est décrit Figure 4.

Le potentiel est minimisé pour $\varphi^2 = v^2$ et il y a donc une infinité d'état du vide possible. Evidemment, à cause de la présence de termes comme $(\partial\varphi)^2$ dans l'énergie, les états du vide correspondant à l'état fondamental sont donc ceux qui conservent φ_1 et φ_2 constants. Grâce à la symétrie $O(2)$ de $\mathcal{L}$, tous les états du vide sont équivalents et on peut se ramener à l'état de vide $\varphi_1 = v$ et $\varphi_2 = 0$. Nous montrons désormais cette assertion.

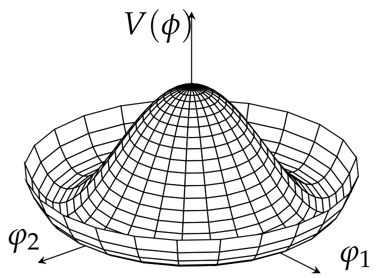


Figure 4: Potentiel pour $N = 2$, on parle souvent de chapeau mexicain

Supposons que l'on choisisse un vide $\varphi = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ avec $v_1^2 + v_2^2 = v^2$. On effectue alors la transformation sur le Lagrangien $\varphi \longrightarrow \varphi' = R_\theta \varphi$ où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation.
On a toujours $\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(\varphi')$ donc la physique n'est pas impactée par cette transformation globale.
Prenons $\theta = -\arctan\frac{v_1}{v_2}$, l'état du vide de φ' est alors :
$\varphi' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} & \frac{\frac{v_2}{v_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} \\ -\frac{\frac{v_2}{v_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ Les nouveaux champs au voisinage du point $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ s'écrivent alors $\varphi_1 = \phi_1 + v$ et $\varphi_2 = \phi_2 + v$. Le Lagrangien devient alors,

$$\mathcal{L} = \frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2}\left[(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2\right] - \mu^2\phi_1^2 + O(|\phi|^3) \tag{9}$$

ϕ_1 a acquis la masse $\sqrt{2}\mu$, comme dans le cas $N = 1$. Cependant ϕ_2, demeure sans masse.
Si l'on avait considéré N composantes, $\mathcal{L}$ aurait admis $O(N)$ comme symétrie globale et aurait alors choisi un minimum de la forme $\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (ou du moins on pourait si ramener par une transformation de jauge globale de $O(N)$). On aurait alors trouvé

$$\mathcal{L} = \frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\partial\phi_i)^2 - \mu^2\phi_1 + O(|\phi|^3)$$

et de la même manière seul un des bosons (champs scalaires) aurait acquis la masse $\sqrt{2}\mu$.
Ce résultat très général s'énonce sous la forme du théorème de Goldstone:

Théorème 2.2.1. (Théroème de Goldstone)
On considère un Lagrangien admettant G pour groupe de symétrie continu et son état fondamental (vide) qui n'admet que $H \subset G$, sous groupe de G, comme groupe de symétrie.
C'est à dire que $\mathcal{L}(\varphi)$ est invariant pour φ se transformant sous une représentation de G et que $|0\rangle$ l'état fondamental est invariant sous l'action d'une représentation de H.
On note $n(G)$ et $n(H)$ les générateurs respectivement de G et H alors il apparait $n(G) - n(H)$ bosons sans masse dits de Nambu-Goldstone.

Proof. Pour montrer ce théorème on utilise une approche de quantification canonique. Par le théorème de Noether, l'invariance du Lagrangien sous la représentation d'un groupe G implique la présence de $n(G)$ charges conservées. Il y a $n(G) - n(H)$ charges $\widehat{Q}_\alpha$, $\alpha \in [\![1, n(G) - n(H)]\!]$ telles que $\widehat{Q}_\alpha |0\rangle \neq 0$ (pour le formalisme canonique les charges conservées sont aussi des générateurs du groupe de symétrie, si le vide est n'est pas invariante sous action des éléments $G - H$ alors pour Q générateur de G mais pas de H, $e^{i\theta Q} |0\rangle \neq |0\rangle$ et donc $Q|0\rangle \neq 0$).
Soit $\alpha \in [\![1, n(G) - n(H)]\!]$.
Le formalisme canonique nous place sous le point de vue de Heisenberg et il vient alors

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{Q}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\left[\widehat{H}, \widehat{Q}_\alpha\right]$$

Ainsi la conservation des charges implique $\left[\widehat{H}, \widehat{Q}_\alpha\right] = 0$.
Choisissons le vide tel que $\widehat{H}|0\rangle = |0\rangle$. On a alors $\left[\widehat{H}, \widehat{Q}_\alpha\right]|0\rangle = \widehat{H}\widehat{Q}_\alpha|0\rangle = 0$. D'où $\widehat{Q}_\alpha|0\rangle$ a même énergie que $|0\rangle$ mais est bien un état différent.
Pour le formalisme canonique,

$$\widehat{Q}_\alpha = \int \mathrm{d}^D x \; J^0_\alpha(x,t), \quad \forall t$$

Considérons alors l'état

$$|s_\alpha\rangle = \int \mathrm{d}^D x \; e^{-ik\cdot x} \; J^0_\alpha(x,t)\,|0\rangle \tag{10}$$

a pour impulsion k (facile à montrer en utilisant les opérateurs impulsions dans le formalisme canonique).
Quand $k \to 0$, $|s_\alpha\rangle \to \widehat{Q}_\alpha|0\rangle$ qui a pour énergie 0 (ou du moins la même que celle du vide) et donc $|s_\alpha\rangle$ correspond bien a une particule scalaire sans masse. □

Vérifions alors que les résultats obtenus sont cohérents. Rappelons d'abord que $n(O(N)) = n(SO(N)) = \frac{1}{2}N(N-1)$ et $n(U(N)) = N^2$ et $n(SU(N)) = N^2 - 1$.
Ainsi pour un Lagrangien de symétrie interne globale $O(N)$, l'état fondamental n'est plus symétrique que par $O(N-1)$ (tous les champs qui valent 0 peuvent être interchangés), et donc il apparait $n(O(N)) - n(O(N-1)) = N - 1$ bosons sans masse, ce qui est bien le résultat que nous avions trouvé.
Reprenons le cas $N = 2$. Dans le Lagrangien obtenu finalement (1.6), le champs massife ϕ_1 ne peut pas s'éloigner facilement de sa valeur fondamental $\phi_1 = 0$ à cause du terme de masse qui montre directement que cela couterait de l'énergie au système. Cependant, qu'en est-il pour ϕ_2 ? Etudions, du point de vue de l'intégrale de chemin, les fluctuations statistiques de ϕ_2. Comme $\langle\phi_2(x)\rangle = 0$, la quantité à étudier est à $\left\langle\phi_2(x)^2\right\rangle$. Par homogénéité, on peut l'étudier pour $x = 0$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \phi_2(0)^2 \right\rangle &= \frac{1}{Z}\int^\Lambda D\;\phi e^{iS[\phi]}\phi_2(0)^2 \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{Z}\int^\Lambda D\phi\; e^{iS[\phi]}\phi_2(x)\phi_2(0) \\
&= \lim_{x\to 0} G(x,0) \\
&= \lim_{x\to 0}\int^\Lambda \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\frac{e^{ikx}}{k^2}
\end{aligned}$$

où l'on a noté $Z = \int^{\Lambda} D\phi \; e^{iS[\phi]}$. L'intégrale a été renormalisée à une échelle d'énergie Λ et l'on a reconnu les propagateur d'un champ scalaire $G(x,0)$.
Ainsi, grâce à Λ, il ne peut pas y avoir de problème de convergence UV. Toutefois, comme ϕ_2 est sans masse, le propagateur (de la forme $\frac{1}{k^2+\mu^2}$ pour une particule massive) peut diverger à faibles énergies.
Pour $d > 2$, la convergence est assurée. Cependant pour $d \leq 2$, les fluctuations de ϕ_2 autour de sa valeur d'équilibre deviennent infinies. C'est une conséquence du plus large théorème de Coleman-Mermin-Wagner qui indique qu'il n'y a pas de brisure spontanée de symétrie à l'équilibre possible en dimension $d \leq 2$.

3 Mécanisme de Higgs-Anderson

On considère désormais travailler sur une théorie jaugée en introduisant un champ vectoriel A^μ sans masse. La prescription de couplage minimal indique

$$\partial_\mu \varphi \longrightarrow D_\mu \varphi = \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right) \varphi \tag{11}$$

Le Lagrangien devient alors

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \left(D^\mu \varphi\right)^\dagger \left(D_\mu \varphi\right) + \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda \left(\varphi^\dagger \varphi\right)^2 \tag{12}$$

En écrivant $\varphi = \rho e^{i\theta}$, ce Lagrangien est désormais invariant par transformation de jauge locale $U(1)$:$\left\{ \begin{array}{ccc} \theta & \longrightarrow & \theta + \alpha(x) \\ A_\mu & \longrightarrow & A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha \end{array} \right.$. Avec ces deux nouveaux champs réels ρ et θ, le Lagrangien peut se réécrire,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \rho^2 \left(\partial_\mu \theta - eA_\mu\right)^2 + \left(\partial\rho\right)^2 + \mu^2 \rho^2 - \lambda \rho^4$$

En absorbant le champ θ dans le champ de jauge A_μ, on obtient un nouveau champ $B_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta$. Remarquons que B_μ est invariant par transformation de jauge et $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ et l'on écrit finalement

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \rho^2 e^2 B^\mu B_\mu + \left(\partial\rho\right)^2 + \mu^2 \rho^2 - \lambda \rho^4 \tag{13}$$

Effectuons désormais la brisure spontanée de symétrie en écrivant $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi + v)$, avec $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$. (Encore une fois on est libre de choisir le point θ=0 comme état fondamental, mais remarquons de toute façon que le champ θ a été absorbé dans le champ B_μ, cachant alors la symétrie $U(1)$).
Le Lagrangien devient alors

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} e^2 v^2 B_\mu^2 + \frac{1}{2} \left(\partial\chi\right)^2 + e^2 v \chi B_\mu^2 + \frac{1}{2} e^2 \chi^2 B_\mu^2 - \mu^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda} \mu \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 \tag{14}$$

où l'on a enlevé le terme constant, qui ne sert à rien pour la suite de la discussion.
Ainsi, on remarque que comme précédemment le meson χ a acquis la masse $\sqrt{2}\mu$ (terme $-\frac{1}{2}(\sqrt{2}\mu)\chi^2$), mais le champ vectoriel B_u a aussi acquis une masse $M = ev$ (terme $+\frac{1}{2}(ev)^2 B_\mu B^\mu$, le signe est l'opposé du champ scalaire, c'est le bon signe pour un champ vectoriel).
Le boson de Nambu-Goldstone θ a été absorbé par le champ vectoriel B_μ et ce dernier a acquis une masse. N'a-t-on alors pas perdu de degrés de liberté ?

Au début nous avions deux degrés de liberté associés au champ scalaire complexe φ et deux degrés de libertés associés au champ vectoriel sans masse A_μ. A la fin nous avons un champ scalaire réel χ, soit un degré de liberté, et un champ massif vectoriel B_μ, soit 3 degrés de liberté.

$$\begin{array}{c} 2 \text{ (champ scalaire complexe)} + 2 \text{ (champ vectoriel sans masse)} \\ \Big\downarrow \\ 1 \text{ (champ scalaire réel)} + 3 \text{ (champ vectoriel massif)} \end{array}$$

Nous avons donc le bon nombre de degrés de liberté.

4 Spectre de masse des bosons

On se place dans un cas plus général avec un Lagrangien admettant un groupe G comme groupe de symmétrie interne, avec $\varphi \in \mathbb{R}^{\dim R}$ un champ qui se transforme selon une réprésentation R de ce groupe. On suppose la théorie jaugée avec des champs A_μ^a, avec $1 \leq a \leq n(G)$. On suppose qu'il y a brisure spontanée de symétrie et l'état fondamental n'est symétrique que pour un sous groupe $H \subset G$.
Ainsi le Lagrangien fait intervenir un terme de la forme $\frac{1}{2}\left(D_\mu\varphi\right)^\dagger\left(D^\mu\varphi\right)$, avec

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - igA_\mu^a T^a(R)\varphi \tag{15}$$

où l'on a noté $T^a(R)$ les matrices des générateurs du groupe G dans la représentation R. Elles sont hermitiennes. Sous brisure de symétrie spontanée, φ prend une valeur moyenne non nulle $v \in \mathbb{R}^{\dim R}$ et le terme $\frac{1}{2}\left(D_\mu\varphi\right)^\dagger\left(D^\mu\varphi\right)$, donne naissance à un terme

$$\frac{1}{2}g^2 v^\dagger T^a(R)^\dagger T^b(R) v A_\mu^a A^{\mu b} \tag{16}$$

Soit alors $\mu \in \mathcal{M}_{n(G)}(\mathbb{R})$ la matrice carrée définie par

$$\mu^{ab} = \frac{1}{2}g^2\left\langle T^a(R)v\ ,\ T^b(R)v\right\rangle \tag{17}$$

μ est hermitienne : $\left(\mu^{ab}\right)^* = \mu^{ba}$. A ce titre, elle admet des valeurs propres réelles. De plus, μ est positive.
En effet, soit $x = x^a \in \mathbb{C}^{n(G)}$

$$\begin{aligned} x^\dagger\mu x &= \frac{1}{2}g^2\sum_{a,b} x_a^*\left\langle T^a(R)v\ ,\ T^b(R)v\right\rangle x_b \\ &= \frac{1}{2}g^2\left\langle \sum_a x_a T^a(R)v\ ,\ \sum_b x_b T^b(R)v\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}g^2\left\langle Xv\ ,\ Xv\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}g^2\|Xv\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

où l'on a noté $X = \sum_a x_a T^a(R)$.
Ainsi, les valeurs propres de μ sont positives ou nulles.

Comme μ est hermitienne, par le théorème spectral, elle est diagonalisable en base unitaire. C'est à dire qu'il existe, $m_1, \dots, m_{n(G)}$ et $U \in U(n(G))$ tels que $\mu = U^\dagger \operatorname{diag}(m_1, \dots, m_{n(G)})\ U$. Ainsi, trouver les masses des bosons suite à la brisure de symétrie spontanée revient simplement à diagonaliser la matrice μ. Les masses sont alors les m_i et la transformation de jauge à faire sur les champs A_μ pour les faire apparaître explicitement les termes de masse dans le Lagrangien est donnée par la matrice unitaire U. Quand le Lagrangien est écrit sous cette forme on parle de jauge unitaire.
On peut montrer facilement que μ a $n(H)$ valeurs propres nulles. En effet, notons les générateurs de $n(H)$ les $T^c(R)$ pour $c \in [\![n(G) - n(H) + 1, n(G)]\!]$. Comme l'état fondamental est invariant par H, il vient $T^c(R)v = 0$, $\forall c \in [\![n(G) - n(H) + 1, n(G)]\!]$. Ainsi la matrice μ se met sous la forme

$$\mu = \left(\begin{array}{c|c} \mu_{G-H} & \mathbb{O}^{(n(G)-n(H))\times n(H)} \\ \hline \mathbb{O}^{(n(H)\times(n(G)-n(H))} & \mathbb{O}^{n(H)\times n(H)} \end{array}\right) \tag{18}$$

où $\mathbb{O}$ désigne la matrice nulle des dimensions correspondantes.
Ainsi, il est évident que μ admet 0 pour valeur propre avec multiplicité $n(H)$, ce qui correspond aux $n(H)$ bosons qui restent (logiquement) sans masse.

Ainsi, si l'on compte désormais les degrés de liberté du système, nous en avions initialement $\dim R$ pour le champ φ et $2n(G)$ pour les bosons sans masse. A la fin nous en avons $\dim R - (n(G) - n(H))$ pour le champ scalaire (ce qui montre d'ailleurs qu'il faut que $\dim R \geq n(G) - n(H)$ pour que cette brisure de symétrie ait lieu), $3(n(G) - n(H))$ pour les bosons qui ont acquis une masse et $2n(H)$ pour ceux qui sont restés sans masse. Soit alors $\dim R + 2n(G)$ comme initialement.