Multiparticular aspects of Quantum Mechanics

Tanguy Marsault

August 12, 2024

Contents

1 Identical particles **1**
1.1 Classical geometric aspects . . . 2
1.2 Statistics: bosons, fermions and anyons . . . 3

2 Hilbert spaces **4**
2.1 Distinguishable particles . . . 4
2.2 Indistinguishable particles . . . 5

3 Angular momentum **7**
3.1 Particules indistinguables . . . 7
3.2 Espace de Fock . . . 12
3.3 Opérateurs création et annihilation . . . 13

4 Composition des moments angulaires **18**
4.1 Algèbre de Lie et construction des vecteurs propres . . . 19
4.2 Addition des moments angulaires . . . 21
4.3 Théorème de Wigner-Eckart . . . 25

References **26**

Foreword

In this short note we emphasize the importance of the study of multiparticular quantum systems. We first focus on the geometric aspects of the configuration space of identical particles. We then describe the construction of the Hilbert space for such systems. We separate our study in two different axes, depending on whether the particles are distinguishable or not. Finally, we discuss the interesting case of angular momentum for quantum systems.

1 Identical particles

Before anything else, it will be interesting for us to study systems with identical particles. In particular, we return to the origin of the *statistics* of particles. First, we expose the way in which the presence of identical particles influences the geometry of the configuration space. We then use the results obtained on this geometry to deduce the statistics that particles can respect.

1.1 Classical geometric aspects

We first focus on the geometric aspects (purely classical) that appear in the presence of n identical particles. The references for this section are numerous and we will rely in particular on the article [6].

We consider having N identical particles evolving in $\mathbb{R}^d$. For an observer, the configurations are vectors of the form,

$$(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd} \tag{1}$$

where $x_i \in \mathbb{R}^d$ is a vector indicating the position of a particle. We also assume that the particles cannot meet, that is, $x_i \neq x_j$. This hypothesis means physically that the particles repel each other and can not then occupy the same position.

Thus the vector described above is an element of $\mathbb{R}^{Nd} \backslash \Delta$ where Δ describes the set where two particles would be at the same position, that is,

$$\Delta = \left\{ (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd} \text{ s.t. } \exists i \neq j \;\; x_i = x_j \right\} \tag{2}$$

Moreover, for a vector $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd} \setminus \Delta$, as the particles are identical, for $\sigma \in \mathcal{S}_n$[1], the observer can not distinguish this state from the state $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)})$. Mathematically, by defining an action of $\mathcal{S}_n$ acting on $\mathbb{R}^{Nd} \setminus \Delta$ as described above, the space of configurations is (borrowing the notations of [6]),

$$M_N^d = (\mathbb{R}^{Nd} \setminus \Delta)/\mathcal{S}_n \tag{3}$$

At first sight, we have only changed the space of configurations from $\mathbb{R}^{Nd}$ to M_N^d, but the consequences of this change are in fact drastic. The geometry of the space has changed profoundly, in particular the space of configurations is no longer simply connected[2].

The property of simple connectedness is expressed by the *fundamental group* (also called the first homotopy group) of the space of configurations. In particular, we have[3],

$$\pi_1\left(M_N^d\right) = \begin{cases} \mathcal{S}_N & \text{if } \; d \geq 3 \\ \mathcal{B}_N & \text{if } \; d = 2 \end{cases} \tag{4}$$

where $\mathcal{B}_N$ is the *Artin's braid group* that we describe below.

Then, in dimension 3, exchanging continuously in M_N^3 particles amounts to simply choosing a permutation of the N particles[4]. In dimension 2, the group to consider is no longer the permutation group but the group $\mathcal{B}_N$ defined by[5],

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_N = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{N-1} |\; & \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ for } 1 \leq i \leq N-2, \\ & \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ for } |i-j| \geq 2 \rangle \end{aligned} \tag{5}$$

[1] $\mathcal{S}_n$ denotes the symmetric group of order n, that is, the group of permutations of order n.

[2] In *secular* language, for those who wish to preserve their mathematical virginity, between two points of M_N^d there are different continuous paths connecting these two points and which can not be continuously deformed to be equal (the paths).

[3] We mention this result without proof, not because the proof is trivial (I have no idea) but because this result has been proven by mathematicians many years ago.

[4] We will describe more precisely in the next paragraph this fact.

[5] Note that $\mathcal{S}_N$ appears as a subgroup of $\mathcal{B}_N$ by adding the condition, $\sigma_i^2 = 1$.

In quantum mechanics, as we will describe in the next paragraph, what interests us are the unitary representations of dimension 1 of these groups. The results, which we will not prove either[6], are as follows,

- $\mathcal{S}_n$ admits two unitary representations of dimension 1, the trivial representation and the signature representation defined respectively by,

$$U(\sigma) = 1 \text{ and } U(\sigma) = \text{sgn}(\sigma) \tag{6}$$

- The unitary representations of $\mathcal{B}_N$ are defined by a real parameter $\nu \in [0, 2[$ such that, for all $k \in [\![1, N-1]\!]$,

$$U(\sigma_k) = e^{-i\nu\pi} \tag{7}$$

1.2 Statistics: bosons, fermions and anyons

We then move on to the quantum aspect of the phenomenon. Indeed, so far we have only made a classical analysis of the configuration space. In quantum mechanics, we work with state vectors in a Hilbert space. Let then a state,

$$|\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N\rangle \tag{8}$$

consisting of N identical particles. As explained above, we can not differentiate this state with the state,

$$\left|\vec{p}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{p}_{\sigma(N)}\right\rangle \tag{9}$$

for any permutation σ. Thus these two states must represent the same physical state and therefore belong to the same ray of the Hilbert space. Thus,

$$\left|\vec{p}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{p}_{\sigma(N)}\right\rangle = \alpha\, |\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N\rangle \tag{10}$$

To determine this α we can imagine exchanging the particles in a continuous change in the configuration space M_N^d in a time T. This formalism is represented by the path integral[7]. However, the path integral is only defined for topologically homotopic paths (that is, within the same homotopy class)[8]. Thus the phase α can only depend on the homotopy class of the path followed, and must in particular provide a representation of it (this non-trivial result is demonstrated for example by [4] and more cleanly by [2]). Hence the appearance of different statistics in dimension 2[9].

However, in dimension 3, we are reassured to note that we have two types of particles (because two representations) corresponding to fermions (signature representation) and bosons (trivial representation).

Finally, we could have *predicted*[10] the fact that the statistics were now numerous because in dimension 2, the rotation group (which gives rise to the spin) $SO(2)$ is isomorphic to

[6] The proof for $\mathcal{S}_N$ is simple, it suffices to notice that any permutation can be written as a product of transpositions and that a transposition satisfies, $\tau^2 = 1$.

[7] We will describe this formalism when we talk about the canonical approach of quantum mechanics.

[8] See for example [8].

[9] Many arguments are actually omitted and the subject is far from being as trivial as I can make it sound. A precise discussion of the subject is offered by A. Mouchet in [7].

[10] The argument is actually here a bit circular. The spin-statistics theorem being demonstrated in quantum field theory using the representations of $SU(2)$, there is no longer any reason why in dimension 2 such an argument persists.

$U(1)$ whose irreducible representations are all of dimension 1 and indexed by $n \in \mathbb{Z}$. The spin-statistics theorem indicates then that there is no longer any reason to see two types of particles that are bosons and fermions.

2 Hilbert spaces

We focus here on particles evolving in a space of dimension $d \geq 3$. In this section, we will first expose the natural mathematical construction of the Hilbert space for several particles, that is, the *tensor product*. Then we will separate our study into two different axes depending on whether the system of particles is composed of distinguishable particles or not. This separation allows us to treat any system of particles. Indeed, suppose we are in the presence of a system with k types of different particles, each type having n_i particles for a total of N particles, that is,

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i \tag{11}$$

As we assume to work in a space of dimension greater than or equal to 3, we have two large families of particles, namely bosons and fermions. Thus, each type i of particle is associated with a statistic $s_i \in \{b, f\}$, in accordance with the notations that we will develop when we study non-distinguishable particles. We can then conceive the Hilbert space as,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{s_1}^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{s_k}^{n_k} \tag{12}$$

where $\mathcal{H}_{s_i}^{n_i}$ is the Hilbert space with n_i identical particles respecting the statistic s_i.

Finally, the study of non-distinguishable particles also allows us to construct the *Fock space* which describes a system of identical particles without knowing the number. Thus, for a system with k types of particles obeying respectively the statistic s_i, we can construct the total Hilbert space as,

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_{s_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{s_k} \tag{13}$$

where $\mathcal{F}_{s_i}$ is the Fock space for the statistic s_i.

2.1 Distinguishable particles

The tensor product of Hilbert spaces provides a natural framework for the association of several quantum systems. In particular, consider N particles all distinguishable belonging to respective Hilbert spaces $\mathcal{H}_i$, the total Hilbert space of the system will then be,

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{H}_i \tag{14}$$

In this case the study of the system is trivial, we define bases $\{|e_n^i\rangle\}$ for each of the Hilbert spaces $\mathcal{H}_i$ and we then form the basis for $\mathcal{H}$ defined by,

$$\left|e_{n_1}^1, \ldots, e_{n_N}^N\right\rangle = \left|e_{n_1}^1\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|e_{n_N}^N\right\rangle \tag{15}$$

Note here an important element, the locations of the different $|e_n^i\rangle$ in the tensor product are important. Indeed, if we permute them according to a permutation $\sigma \in \mathcal{S}_N$, we obtain a vector,

$$\left|e_{n_1}^{\sigma(1)}, \ldots, e_{n_N}^{\sigma(N)}\right\rangle = \left|e_{n_1}^{\sigma(1)}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|e_{n_N}^{\sigma(N)}\right\rangle \tag{16}$$

However, this vector is no longer an element of $\mathcal{H}$ but an element of $\mathcal{H}'$ defined by,

$$\mathcal{H}' = \bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{H}_{\sigma(i)} \tag{17}$$

However, we could have worked from the beginning with this Hilbert space $\mathcal{H}'$ and the physics would not have changed. Thus what is important to remember is that once we have fixed our Hilbert space by an order on the tensor product, we can no longer change it and we must conform to the order we have chosen when we define the *kets*.

2.2 Indistinguishable particles

We now turn to the more complex case of indistinguishable particles. In this case the Hilbert spaces $\mathcal{H}_i$ are necessarily equal to a Hilbert space that we will denote $\mathcal{H}_0$. For example, suppose,

$$\mathcal{H}_0 = L^2(\vec{p}) \tag{18}$$

That is, we represent the states of each particle by their momentum $\vec{p}$. We would be tempted to say that the total Hilbert space is then $L^2(\vec{p})^{\otimes N}$. That is, we would write our states,

$$|\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N\rangle = |\vec{p}_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\vec{p}_N\rangle \tag{19}$$

However, by defining the states in this way, there is no reason that they satisfy the relations we found in the section on Identical Particles. Indeed, we have seen that under the action of a permutation[11], the states must change only by a factor $\pm$. Thus in reality, it is necessary to identify the states that correspond to a simple permutation of the momenta. More precisely, depending on the type of particles considered, they can transform under two different representations, namely the trivial representation and the signature representation. We then define two operators[12] acting linearly on $\mathcal{H}_0^{\otimes N}$ in the form,

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} U(\sigma) \\ P_f &= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \operatorname{sgn}(\sigma) U(\sigma) \end{aligned} \tag{20}$$

where $U(\sigma) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^{\otimes N}\right)$ is the linear operator defined by,

$$U(\sigma) |\phi_{i_1}\rangle \otimes \ldots \otimes |\phi_{i_N}\rangle = \left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle \tag{21}$$

where we have taken a base $\{|\phi_i\rangle\}$ of $\mathcal{H}_0$.

Defined in this way, these operators seem to depend on the base chosen for $\mathcal{H}_0$. In reality, this is not the case, take for example another base $\{|\psi_i\rangle\}$ of $\mathcal{H}_0$. We decompose it on the base $\{|\phi_i\rangle\}$ in the form,

$$|\psi_j\rangle = \sum_i \alpha_{ji} |\phi_i\rangle \tag{22}$$

[11] Recall that we work in dimension $d \geq 3$.

[12] We follow here the discussion proposed in [1].

We can now calculate the action of $U(\sigma)$ on a state defined by the tensor product on the $|\psi_j\rangle$,

$$\begin{aligned}
U(\sigma)\left|\psi_{j_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_N}\right\rangle &= \sum_{i_1,\ldots,i_N} \alpha_{j_1 i_1} \ldots \alpha_{j_N i_N} U(\sigma) \left|\phi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_N}\right\rangle \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_N} \alpha_{j_1 i_1} \ldots \alpha_{j_N i_N} \left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_N} \alpha_{j_{\sigma(1)} i_{\sigma(1)}} \ldots \alpha_{j_{\sigma(N)} i_{\sigma(N)}} \left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle \\
&= \sum_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(N)}} \alpha_{j_{\sigma(1)} i_{\sigma(1)}} \ldots \alpha_{j_{\sigma(N)} i_{\sigma(N)}} \left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle \\
&= \left(\sum_{i_{\sigma(1)}} \alpha_{j_{\sigma(1)} i_{\sigma(1)}} \left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle\right) \otimes \ldots \otimes \left(\sum_{i_{\sigma(N)}} \alpha_{j_{\sigma(N)} i_{\sigma(N)}} \left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle\right) \\
&= \left|\psi_{j_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_{\sigma(N)}}\right\rangle
\end{aligned}$$

Note that in this previous calculation we did not use at any time the fact that the $|\psi_i\rangle$ formed a base of $\mathcal{H}_0$, so the result remains true for any family of vectors. Thus, we will remember that $U(\sigma)$ acts on the tensor products by changing the order of the elements of the product, whatever their nature.

U obviously provides a representation of the group $\mathcal{S}_N$ which however has no reason to be irreducible.

The notation P for these operators is not trivial, because as we show, they form projectors. Indeed, for example for P_f,

$$\begin{aligned}
P_f^2 &= \frac{1}{(N!)^2} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\sigma) U(\sigma) \mathrm{sgn}(\tau) U(\tau) && (23)\\
&= \frac{1}{(N!)^2} \sum_{\sigma} \left(\sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) U(\sigma \circ \tau) \right) && (24)\\
&= \frac{1}{(N!)^2} \sum_{\sigma} \left(\sum_{\tau'} \mathrm{sgn}(\tau') U(\tau') \right) && (25)\\
&= \sum_{\tau'} \mathrm{sgn}(\tau') U(\tau') = P_f && (26)
\end{aligned}$$

where we used at the third equality the fact that the application,

$$\begin{array}{rccc} l_\sigma : & \mathcal{S}_N & \longrightarrow & \mathcal{S}_N \\ & \tau & \longmapsto & \sigma \circ \tau \end{array}$$

is bijective to change the summation index.

Thus P_f and P_b are projectors whose images we respectively denote,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_f^N &= \mathrm{Im}\, P_f && (27)\\
\mathcal{H}_b^N &= \mathrm{Im}\, P_b && (28)
\end{aligned}$$

We are now equipped to define the Hilbert space of our theory depending on whether the particles we consider are bosons or fermions. The Hilbert space to consider is,

$$\mathcal{H}_f^N = P_f\left(\mathcal{H}_0^{\otimes N}\right) \quad \text{for fermions}$$
$$\mathcal{H}_b^N = P_b\left(\mathcal{H}_0^{\otimes N}\right) \quad \text{for bosons}$$

If we take for example, $\mathcal{H}_0 = L^2(\vec{p})$ and consider fermions, we then define the states,

$$|\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N\rangle = P_f\, |\vec{p}_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\vec{p}_N\rangle \tag{29}$$

We can check that the states thus defined satisfy the correct permutation rules,

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{p}_{\sigma(N)}\right\rangle &= P_f \left|\vec{p}_{\sigma(1)}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\vec{p}_{\sigma(N)}\right\rangle \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\, |\vec{p}_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\vec{p}_N\rangle \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\, |\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N\rangle\end{aligned}$$

3 Angular momentum

3.1 Particules indistinguables

Nous nous penchons désormais sur le cas plus complexe des particules indistinguables. Dans ce cas les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_i$ sont forcément égaux à un espace de Hilbert que nous noterons $\mathcal{H}_0$. Par exemple supposons

$$\mathcal{H}_0 = L^2(\vec{p}) \tag{30}$$

C'est à dire qu'on représente les états de chaque particules par leur quantité de mouvement $\vec{p}$. Nous serions tenté de dire que l'espace de Hilbert total est alors $L^2(\vec{p})^{\otimes N}$. C'est à dire que nous écririons nos états,

$$|\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N\rangle = |\vec{p}_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\vec{p}_N\rangle \tag{31}$$

Cependant, en définissant les états de cette manière, il n'y a pas de raison qu'ils vérifient les relations que nous avons trouvé dans la section sur les Particules Identiques. En effet, nous avons vu que sous l'action d'une permutation[13], les états ne doivent changer que d'un facteur $\pm$. Ainsi en réalité, il faut identifier les états qui correspondent à une simple permutation des quantités de mouvement. Plus précisément, suivant le type de particules que l'on considère, elles peuvent se transformer sous deux représentations différentes à savoir la représentation triviale et la représentation signature. On définit alors deux opérateurs[14] agissant linéairement sur $\mathcal{H}_0^{\otimes N}$ sous la forme[15],

$$\begin{aligned}P_b &= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N} U(\sigma) \\ P_f &= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)U(\sigma)\end{aligned} \tag{32}$$

[13] Rappelons que nous travaillons en dimension $d \geq 3$.
[14] Nous suivons ici la discussion proposée dans [1].
[15] Les indices f et b font respectivement référence à *fermions* et *bosons*.

où $U(\sigma) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^{\otimes N}\right)$ est l'opérateur linéaire défini par,

$$U(\sigma)\left|\phi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_N}\right\rangle = \left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle \tag{33}$$

où nous avons repris une base $\{|\phi_i\rangle\}$ quelconque de $\mathcal{H}_0$.

Définis de la sorte ces opérateurs semblent dépendre de la base choisie pour $\mathcal{H}_0$. En réalité il n'en est rien, prenons par exemple une autre base $\{|\psi_i\rangle\}$ de $\mathcal{H}_0$. Nous la décomposons sur la base $\{|\phi_i\rangle\}$ sous la forme,

$$\left|\psi_j\right\rangle = \sum_i \alpha_{ji}\left|\phi_i\right\rangle \tag{34}$$

On peut désormais calculer l'action de $U(\sigma)$ sur un état défini par le produit tensoriel sur les $\left|\psi_j\right\rangle$,

$$\begin{aligned}
U(\sigma)\left|\psi_{j_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_N}\right\rangle &= \sum_{i_1,\ldots,i_N} \alpha_{j_1 i_1}\ldots\alpha_{j_N i_N} U(\sigma)\left|\phi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_N}\right\rangle \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_N} \alpha_{j_1 i_1}\ldots\alpha_{j_N i_N}\left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_N} \alpha_{j_{\sigma(1)} i_{\sigma(1)}}\ldots\alpha_{j_{\sigma(N)} i_{\sigma(N)}}\left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle \\
&= \sum_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(N)}} \alpha_{j_{\sigma(1)} i_{\sigma(1)}}\ldots\alpha_{j_{\sigma(N)} i_{\sigma(N)}}\left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle \\
&= \left(\sum_{i_{\sigma(1)}} \alpha_{j_{\sigma(1)} i_{\sigma(1)}}\left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle\right) \otimes \ldots \otimes \left(\sum_{i_{\sigma(N)}} \alpha_{j_{\sigma(N)} i_{\sigma(N)}}\left|\phi_{i_{\sigma(N)}}\right\rangle\right) \\
&= \left|\psi_{j_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_{\sigma(N)}}\right\rangle
\end{aligned}$$

Remarquons que dans ce précédent calcul nous n'avons à aucun moment utilisé le fait que les $|\psi_i\rangle$ formaient une base de $\mathcal{H}_0$, ainsi le résultat reste vrai pour une famille quelconque de vecteurs. Ainsi, on retiendra que $U(\sigma)$ agit sur les produits tensoriels en changeant l'ordre des éléments du produit, quel que soit leur nature.

U fournit évidemment une représentation du groupe $\mathcal{S}_N$ qui n'a cependant aucune raison d'être irréductible.

La notation P pour ces opérateurs n'est pas anodine, car comme nous le montrons, ils forment des projecteurs. En effet, par exemple pour P_f,

$$P_f^2 = \frac{1}{(N!)^2}\sum_\sigma\sum_\tau \mathrm{sgn}(\sigma)U(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)U(\tau) \tag{35}$$

$$= \frac{1}{(N!)^2}\sum_\sigma\left(\sum_\tau \mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau)U(\sigma\circ\tau)\right) \tag{36}$$

$$= \frac{1}{(N!)^2}\sum_\sigma\left(\sum_{\tau'} \mathrm{sgn}(\tau')U(\tau')\right) \tag{37}$$

$$= \sum_{\tau'} \mathrm{sgn}(\tau')U(\tau') = P_f \tag{38}$$

où nous avons utilisé à la troisième égalité le fait que l'application,

$$\begin{array}{rccc} l_\sigma: & \mathcal{S}_N & \longrightarrow & \mathcal{S}_N \\ & \tau & \longmapsto & \sigma\circ\tau \end{array}$$

est bijective pour changer l'indice de sommation.

Ainsi P_f et P_b sont des projecteurs dont nous notons respectivement les images,

$$\mathcal{H}_f^N = \mathrm{Im}\, P_f \tag{39}$$

$$\mathcal{H}_b^N = \mathrm{Im}\, P_b \tag{40}$$

Nous sommes désormais armés pour définir l'espace de Hilbert de notre théorie suivant si les particules que l'on considère sont des bosons ou des fermions. L'espace de Hilbert à considérer est,

$$\mathcal{H}_f^N = P_f\left(\mathcal{H}_0^{\otimes N}\right) \quad \text{pour des fermions}$$
$$\mathcal{H}_b^N = P_b\left(\mathcal{H}_0^{\otimes N}\right) \quad \text{pour des bosons}$$

Si l'on prend par exemple, $\mathcal{H}_0 = L^2(\vec{p})$ et que l'on considère des fermions, on définit alors les états,

$$|\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N\rangle = P_f\,|\vec{p}_1\rangle\otimes\ldots\otimes|\vec{p}_N\rangle \tag{41}$$

On peut vérifier que les états ainsi définis vérifient les bonnes règles de permutation,

$$\begin{aligned}
\left|\vec{p}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{p}_{\sigma(N)}\right\rangle =& P_f\left|\vec{p}_{\sigma(1)}\right\rangle\otimes\ldots\otimes\left|\vec{p}_{\sigma(N)}\right\rangle \\
&= \frac{1}{N!}\sum_\tau \mathrm{sgn}(\tau)U(\tau)U(\sigma)\,|\vec{p}_1\rangle\otimes\ldots\otimes|\vec{p}_N\rangle \\
&= \frac{1}{N!}\sum_{\tau'} \mathrm{sgn}(\tau'\circ\sigma^{-1})U(\tau')\,|\vec{p}_1\rangle\otimes\ldots\otimes|\vec{p}_N\rangle \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})P_f\,|\vec{p}_1\rangle\otimes\ldots\otimes|\vec{p}_N\rangle \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma)\,|\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N\rangle
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé à l'avant dernière ligne l'égalité (triviale) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$. Ainsi les états tels que nous venons de les définir se transforment correctement. Remarquons que nous avons pris $\mathcal{H}_0 = L^2(\vec{p})$ par exemple, mais le processus serait le même pour un espace $\mathcal{H}_0$ quelconque accompagné d'une base $|\phi_i\rangle$ quelconque.

Supposons désormais que $\dim\mathcal{H}_0 = d$ est finie. Notons en $\{|\psi_i\rangle\}_{1\le i\le d}$ une base. Nous cherchons les dimensions de $\mathcal{H}_f^N$ et $\mathcal{H}_b^N$. Commençons par le cas le plus simple, à savoir le cas de $\mathcal{H}_f^N$. En reprenant les notations précédentes, remarquons que[16]

$$\left|\psi_{i_1},\ldots,\psi_{i_N}\right\rangle = 0 \ \text{ dès qu'il existe } \ i_k = i_l \tag{42}$$

De plus, ces vecteurs sont égaux à signe et permutation près. Ainsi pour former un vecteur de P_f il faut choisir N vecteurs différents parmi les $|\psi_i\rangle$, peu importe leur ordre. Cela correspond à choisir une partie à N éléments d'un ensemble à d éléments, soit alors,

$$\dim\mathcal{H}_f^N = \begin{cases} \binom{d}{N} & \text{si } N\le d \\ 0 & \text{si } N > d \end{cases} \tag{43}$$

[16]La démonstration est triviale, il suffit d'utiliser la transposition τ_{kl} de signature -1.

Le cas des bosons est légèrement plus compliqué. Remarquons qu'un état est uniquement identifié par le nombre de n_i de $|\psi_i\rangle$. En effet, les autres états s'obtiennent par une permutation de ce type d'états et sont donc égaux dans la représentation bosonique. On peut de plus choisir ces états pour que les $|\psi_1\rangle$ soient placés à gauche des $|\psi_2\rangle$ eux-même à gauche des ... à gauche des $|\psi_d\rangle$.

$$\left| \underbrace{\psi_1, \dots, \psi_1}_{n_1}, \underbrace{\psi_2, \dots \psi_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{\psi_d, \dots, \psi_d}_{n_d} \right\rangle \tag{44}$$

Le but est alors de déterminer les partitions de N en d entiers n_d. Ainsi présenté ce problème de dénombrement n'est pas trivial. Toutefois on peut transformer ce problème en changeant de point de vue et en cherchant alors à placer les *séparations* entre $|\psi_i\rangle$ à $|\psi_{i+1}\rangle$, ce qui revient à déterminer la valeur des n_i. Le problème se ramène alors à placer $d-1$ séparations dans $N+d-1$ *boites*[17]. Ainsi, on obtient la dimension de $\mathcal{H}_b^N$, donnée par,

$$\dim \mathcal{H}_b^N = \binom{N+d-1}{d-1} \tag{45}$$

La démonstration permettant de calculer la dimension de $\mathcal{H}_b^N$ nous indique assez remarquablement que l'on peut indexer les états bosoniques plutôt par le nombre de bosons dans chaque état. C'est le concept de *nombres d'occupation* que nous détaillons désormais.

On considère alors de nouveau une base de $\mathcal{H}_0$ (plus nécessairement de dimension finie) $\{|\psi_i\rangle\}$ orthonormale et un système à N particules. Et on définit les états

$$|n_1, \dots, n_k, \dots\rangle = c(n_i) \left| \underbrace{\psi_1, \dots, \psi_1}_{n_1}, \underbrace{\psi_2, \dots \psi_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{\psi_k, \dots, \psi_d}_{n_k} \dots \right\rangle \tag{46}$$

où les n_i représentent le nombre de particules dans l'état $|\psi_i\rangle$ et $c(n_i)$ est un coefficient dépendant seulement des n_i que l'on va déterminer par la suite. Nous avons de plus la relation,

$$\sum_i n_i = N \tag{47}$$

Notre calcul de la dimension de $\mathcal{H}_b^N$ montre que ces états forment une base de $\mathcal{H}_b^N$. Pour le cas de $\mathcal{H}_f^N$, ce résultat reste vrai si on ajoute la condition $n_i \in \{0, 1\}$, et les états multiparticulaires fermioniques sont caractérisés par une séquence de 0 et de 1(encodés en binaire!).

Pour que cette base soit plus commode, on choisit les coefficients $c(n_i)$ de sorte qu'elle soit orthonormale. L'orthogonalité de ces états se montrent facilement en revenant aux opérateurs P_s[18]. On se concentre plutôt sur le calcul des coefficients $c(n_i)$. Par exemple,

[17] Un élément est une séquence de N éléments $1, 1, 1, 2, 2, \dots, d, d, d$ et en ajoutant $d-1$ séparateurs, nous obtenons alors $N+d-1$ *boites* à remplir, le reste étant entièrement déterminé par le fait que nous ordonnons les éléments par ordre croissant d'indice.

[18] En utilisant le fait que $P_s^2 = P_s$, on se ramène à une simple somme sur des opérateurs $U(\sigma)$ et si les nombres d'occupation ne sont pas tous les mêmes il n'existe pas de permutation qui n'annule pas le produit scalaire naturel sur $\mathcal{H}_0^{\otimes N}$.

pour des bosons,

$$\begin{aligned}
1 &= \langle n_1, \dots, n_k, \dots | n_1, \dots, n_k, \dots \rangle \\
&= |c(n_i)|^2 \left\langle \underbrace{\psi_1, \dots, \psi_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\psi_k, \dots, \psi_k}_{n_k} \dots \middle| \underbrace{\psi_1, \dots, \psi_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\psi_k, \dots, \psi_k}_{n_k} \dots \right\rangle \\
&= |c(n_i)|^2 \langle \psi_1|^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \langle \psi_k|^{\otimes n_k} \otimes \dots P_b P_b |\psi_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\psi_k\rangle^{\otimes n_k} \otimes \dots \\
&= |c(n_i)|^2 \langle \psi_1|^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \langle \psi_k|^{\otimes n_k} \otimes \dots P_b |\psi_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\psi_k\rangle^{\otimes n_k} \otimes \dots \\
&= |c(n_i)|^2 \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \langle \psi_1|^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \langle \psi_k|^{\otimes n_k} \otimes \dots U(\sigma) |\psi_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\psi_k\rangle^{\otimes n_k} \otimes \dots
\end{aligned}$$

Les notations peuvent être quelque peu[19] lourdes, mais il faut se souvenir qu'en réalité, il n'y a que N facteurs dans le produit tensoriel de chacun de ces états. L'opérateur $U(\sigma)$ associe à l'indice au i-ème l'indice $\sigma(i)$. Il ne faut pas confondre cette manière d'agir avec le fait que $U(\sigma)$ transforme $|\psi_i\rangle$ en $\left|\psi_{\sigma(i)}\right\rangle$[20]. Comme la base de $\mathcal{H}_0$ est choisie orthonormale,il est évident que,

$$\langle \psi_1|^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \langle \psi_k|^{\otimes n_k} \otimes \dots U(\sigma) |\psi_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\psi_k\rangle^{\otimes n_k} \otimes \dots \in \{0,1\} \tag{48}$$

On cherche alors à déterminer le nombre de permutations pour lesquels ce résultat fait 1. Si l'on suppose le résultat d'un tel produit scalaire non nul, remarquons premièrement que σ s'écrit forcément comme un produit de permutation ,

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \dots \tag{49}$$

où σ_i est une permutation des indices $\{\sum_{k=0}^{i-1} n_k + 1, \dots, \sum_{k=0}^{i-1} n_k + n_i\}$. En effet, si ce n'était pas le cas, on permuterait au moins un des $|\phi_i\rangle$ en un $|\phi_j\rangle$ avec $i \neq j$ rendant alors directement le produit scalaire nul. Ainsi σ_i est une permutation de n_i éléments et il y en a $n_i!$. Le nombre de permutation σ qui s'écrivent de la sorte est alors $\prod_i n_i!$. Réciproquement, il est évident que toutes les permutations qui s'écrivent sous cette forme donnent bien,

$$\langle \psi_1|^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \langle \psi_k|^{\otimes n_k} \otimes \dots U(\sigma_1 \dots \sigma_k \dots) |\psi_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\psi_k\rangle^{\otimes n_k} \otimes \dots = 1 \tag{50}$$

En reprenant le calcul on trouve ainsi,

$$1 = |c(n_i)|^2 \frac{1}{N!} \prod_i n_i! \cdot 1 \tag{51}$$

d'où on peut choisir les coefficients c_i sous la forme,

$$c(n_i) = \sqrt{\frac{N!}{\prod_i n_i!}} \tag{52}$$

Le cas des bosons fournit le même résultat et nous achevons alors la construction de la base des *nombres d'occupation*.

Nous ne nous étendrons pas plus ici sur ce sujet, pour des applications orientées vers l'étude de la théorie quantique des champs, voir [5], Chapitre 3.

---

[19] Enormément

[20] Ceci ne peut pas être vrai, les indices i indexent une base de $\mathcal{H}_0$ potentiellement infinie, et $\sigma(k)$ n'est pas défini pour $k > N$!

3.2 Espace de Fock

On généralise désormais la discussion précédente à un système dont on ne connait pas le nombre de particules. On suppose alors être en présence de particules respectant la statistique $s \in \{b, f\}$. On construit *l'espace de Fock* de la manière suivante,

$$\mathcal{F}_s = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_s^k \tag{53}$$

Il faut tout de même revenir sur ce que signifie $\mathcal{H}_s^0$, qui correspond à l'espace de Hilbert lorsqu'il n'y a pas de particules, à savoir l'espace de Hilbert du vide. En général il peut y avoir plusieurs états qui sont des états du vide (peut-être même un continuum), au sens où ils minimisent l'énergie du système. L'étude de la brisure spontanée de symétrie[21] nous indique que le système va choisir préférentiellement un état de vide $|\Omega\rangle$. On peut alors identifier l'espace de Hilbert du vide sous la forme,

$$\mathcal{H}_s^0 = \mathrm{Vect}\,|\Omega\rangle \simeq \mathbb{C} \tag{54}$$

Sur l'espace de Fock le produit scalaire est défini en décomposant un élément[22] $|\phi\rangle \in \mathcal{F}_s$ sous la forme,

$$|\phi\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle \tag{55}$$

où $\phi_n \in \mathcal{H}_s^k$ et en en prenant le produit scalaire sous la forme,

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_n \langle\phi_n|\psi_n\rangle \tag{56}$$

il est facile de montrer qu'ainsi définir cette forme bilinéaire complexe définit bien un produit scalaire (au sens hermitien).

Remarquons que si $\mathcal{H}_0$ est de dimension finie d,

$$\dim \mathcal{F}_s = \begin{cases} 2^d & \text{si } s = f \\ \infty & \text{si } s = b \end{cases} \tag{57}$$

On s'intéresse alors à la dynamique de la mécanique quantique sur l'espace de Fock. Remarquons que le simple fait d'écrire notre espace de Hilbert comme un produit tensoriel présuppose que les particules n'interagissent pas entre elles[23]. Ainsi il est naturel d'écrire, pour un système à N particules identiques, que l'énergie est,

$$E = E_1 + \ldots + E_N \tag{58}$$

Ce qui s'écrit en tant qu'Hamiltonien sous la forme[24],

$$H_N = \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{\mathbb{I} \otimes \ldots \otimes \mathbb{I}}_{i} \otimes H_0 \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \ldots \otimes \mathbb{I}}_{N-1-i} \tag{59}$$

[21] Nous ne nous étendrons pas ici sur ce sujet, pour plus de détails il faut consulter des ouvrages sur la théorie quantique des champs.

[22] Remarquons qu'il n'y a pas de problème à cette définition car la décomposition est unique, par définition de la somme directe.

[23] Ou du moins interragissent très faiblement

[24] Remarquons que nous trouvons ici l'hamiltonien par *sens physique*. En réalité, nous pourrions également le trouver en considérant la représentation de l'algèbre de Lie des translations dans le temps, et en utilisant la représentation naturelle de cette algèbre de Lie sur le produit tensoriel $\mathcal{H}^{\otimes N}$. Pour un exemple de la procédure voir notre traitement de l'algèbre de Lie des rotations plus loin.

où H_0 est l'hamiltonien pour une seule particule.

L'Hamiltonien sur l'espace de Fock est alors,

$$H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n \tag{60}$$

La dynamique sur l'espace de Fock est alors décrite, suivant le point de vue, par l'équation de Schrödinger ou l'équation d'Heisenberg définie avec cet Hamiltonien.

3.3 Opérateurs création et annihilation

Nous avons désormais un espace de Hilbert nous permettant d'étudier un système avec un nombre quelconque de particules. Toutefois, nous n'avons toujours pas de moyen clair d'ajouter ou d'enlever des particules au système, c'est-à-dire de naviguer entre les espace $\mathcal{H}_s^N$. Pour un état $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_0$ et pour un nombre N quelconque de particules, on définit l'opérateur de création $a_s^\dagger(|\phi\rangle)$[25] par,

$$\begin{array}{rccc} a_s^\dagger(|\phi\rangle): & \mathcal{H}_s^N & \longrightarrow & \mathcal{H}_s^{N+1} \\ & |\psi\rangle & \longmapsto & \sqrt{N+1}P_s^{N+1}|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \end{array} \tag{61}$$

où nous avons introduit la notation P_s^n pour l'opérateur P_s agissant sur $\mathcal{H}_s^n$. L'intérêt du facteur $\sqrt{N+1}$ deviendra clair dans quelques instants. Remarquons que cet opérateur est bien défini car $\operatorname{Im} a_s^\dagger(|\phi\rangle) \subset \operatorname{Im} P_s^{N+1} = \mathcal{H}_s^{N+1}$[26]. On peut même montrer (assez facilement) l'égalité et l'on aurait alors pu construire une base de l'espace de Fock à partir de ces opérateurs de création.

Montrons dès lors une première propriété des opérateurs création. Pour rendre la démonstration plus générale, on introduit la notation $s = \pm$ respectivement pour des bosons et fermions. Soient alors deux états $|\psi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}_0$ et un état $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_s^N$ pour N quelconque et considérons par exemple $s = +$ dans un premier temps,

$$\begin{aligned} a_s^\dagger(|\psi\rangle)\, a_s^\dagger(|\phi\rangle)\,|\Psi\rangle &= \sqrt{(N+2)(N+1)}P_s^{N+2}|\psi\rangle \otimes P_s^{N+1}|\phi\rangle \otimes |\Psi\rangle \\ &= \frac{\sqrt{(N+2)(N+1)}}{(N+2)!(N+1)!} \\ &\times \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{N+2}} \sum_{\tau\in\mathcal{S}_{N+1}} U_{N+2}(\sigma)\,|\psi\rangle \otimes U_{N+1}(\tau)\,|\phi\rangle \otimes |\Psi\rangle \end{aligned}$$

On peut décomposer $|\Psi\rangle$ sous la forme,

$$|\Psi\rangle = \sum_{i_3,\ldots,i_{N+2}} \alpha_{i_3,\ldots,i_{N+2}} |\phi_{i_3}\rangle \otimes \ldots \otimes |\phi_{i_{N+2}}\rangle \tag{62}$$

où nous avons astucieusement indexé notre base de 3 à n. On définit alors, $|\psi\rangle = |\phi_{i_1}\rangle$ et $|\phi\rangle = |\phi_{i_2}\rangle$ pour rendre le calcul plus simple. On reprend le calcul en laissant de côté les

[25] La notation † sera rendue claire par la suite.

[26] Physiquement, cet opérateur *crée* bien un mode (particule) avec la statistique s.

facteurs multiplicatifs constants,

$$\sum_\sigma \sum_\tau \sum_{i_j} \alpha_{i_3 \dots i_{N+2}} U(\sigma) \left|\phi_{i_1}\right\rangle \otimes U(\tau) \left|\phi_{i_2}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_3}\right\rangle \otimes \dots \otimes \left|\phi_{i_{N+2}}\right\rangle$$
$$= \sum_\sigma \sum_\tau \sum_{i_j} \alpha_{i_3 \dots i_{N+2}} U(\sigma) \left|\phi_{i_1}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\tau(2)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\tau(3)}}\right\rangle \otimes \dots \otimes \left|\phi_{i_{\tau(N+2)}}\right\rangle$$
$$= \sum_\sigma \sum_\tau \sum_{i_j} \alpha_{i_3 \dots i_{N+2}} \left|\phi_{i_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\sigma\circ\tau(2)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\sigma\circ\tau(3)}}\right\rangle \otimes \dots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma\circ\tau(N+2)}}\right\rangle$$

Définissons $\tau' \in \mathcal{S}_{N+2}$ telle que $\tau'(1) = 1$ et $\tau'(k) = \tau(k)$ pour $k \neq 1$. La somme précédente s'écrit alors,

$$\sum_\sigma \sum_\tau \sum_{i_j} \alpha_{i_3 \dots i_{N+2}} \left|\phi_{i_{\sigma\circ\tau'(1)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\sigma\circ\tau'(2)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\sigma\circ\tau'(3)}}\right\rangle \otimes \dots \otimes \left|\phi_{i_{\sigma\circ\tau'(N+2)}}\right\rangle$$

L'application $r'_\tau \ : \ \sigma \mapsto \sigma \circ \tau'$ est bijective on peut écrire la somme précédente sous la forme,

$$\sum_\pi \sum_\tau \sum_{i_j} \alpha_{i_3 \dots i_{N+2}} \left|\phi_{i_{\pi(1)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\pi(2)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\pi(3)}}\right\rangle \otimes \dots \otimes \left|\phi_{i_{\pi(N+2)}}\right\rangle$$

On introduit désormais la transposition τ_{12} de $\mathcal{S}_{N+2}$ et on peut écrire, la dernière somme sous la forme,

$$\sum_\pi \sum_\tau \sum_{i_j} \alpha_{i_3 \dots i_{N+2}} \left|\phi_{i_{\pi\circ\tau_{12}(2)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\pi\circ\tau_{12}(1)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\pi\circ\tau_{12}(3)}}\right\rangle \otimes \dots \otimes \left|\phi_{i_{\pi\circ\tau_{12}(N+2)}}\right\rangle =$$
$$\sum_\theta \sum_\tau \sum_{i_j} \alpha_{i_3 \dots i_{N+2}} \alpha_{i_3 \dots i_{N+2}} \left|\phi_{i_{\theta(2)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\theta(1)}}\right\rangle \otimes \left|\phi_{i_{\theta(3)}}\right\rangle \otimes \dots \otimes \left|\phi_{i_{\theta(N+2)}}\right\rangle$$

où nous avons utilisé le fait que l'application $r_{\tau_{12}} \ : \ \pi \mapsto \pi \circ \tau_{12}$ pour obtenir la dernière égalité. Il n'est pas difficile de se convaincre que la dernière égalité est exactement ce que l'on aurait obtenu si l'on avait simplement inversé $|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle$ au début du calcul. Ainsi,

$$a_b^\dagger(|\psi\rangle)\, a_b^\dagger(|\phi\rangle) = a_b^\dagger(|\phi\rangle)\, a_b^\dagger(|\psi\rangle) \tag{63}$$

On reprend désormais le cas des fermions. Le calcul est le même il suffit de garder la trace des signatures. Notons qu'avec nos notations nous avons $\mathrm{sgn}(\tau') = \mathrm{sgn}(\tau)$ et $\mathrm{sgn}(\tau_{12}) = -1$. Ainsi, le calcul fait simplement apparaître un signe $-$, et alors,

$$a_f^\dagger(|\psi\rangle)\, a_f^\dagger(|\phi\rangle) = -a_f^\dagger(|\phi\rangle)\, a_f^\dagger(|\psi\rangle) \tag{64}$$

On résume ces deux équations en,

$$\left[a_s^\dagger(|\psi\rangle), a_s^\dagger(|\phi\rangle)\right]_s = a_s^\dagger(|\psi\rangle)\, a_s^\dagger(|\phi\rangle) \pm a_s^\dagger(|\phi\rangle)\, a_s^\dagger(|\psi\rangle) = 0 \tag{65}$$

Ces relations sont plus connues sous le nom de *relations de commutation canoniques*[27].

On définit également l'opérateur d'annihilation $a_s(|\phi\rangle) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_s^N, \mathcal{H}_s^{N-1}\right)$ d'un état $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_0$ sur une base de $\mathcal{H}_0^{\otimes N}$,

$$\begin{aligned} a_s(|\phi\rangle) \left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \dots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle =& \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N s^{k-1} \\ & \times P_s^{N-1} \left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \dots \left|\psi_{i_{k-1}}\right\rangle \otimes \left\langle\phi|\psi_{i_k}\right\rangle \left|\psi_{i_{k+1}}\right\rangle \otimes \dots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle \end{aligned} \tag{66}$$

[27] Ce n'en sont en réalité qu'une partie, les autres étant formulées par la suite.

De la même manière que pour l'opérateur de création, $\operatorname{Im} a_s\left(|\phi\rangle\right) = \operatorname{Im} P_s^{N-1}$ d'où la bonne définition de cet opérateur.

Nous démontrons alors que $a_s\left(|\phi\rangle\right)$ est bien l'opérateur adjoint de $a_s^\dagger\left(|\phi\rangle\right)$. Il suffit de faire le calcul pour une base orthonormée $\left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle$ de $\mathcal{H}_s^N$. Nous calculons la quantité

$$\left(\left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle, a_s^\dagger\left(|\phi\rangle\right)\left|\psi_{j_2}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_N}\right\rangle\right)$$

Nous avons astucieusement introduit à droite de cette équation les indices allant de 2 à N afin d'introduire la notation $|\phi\rangle = \left|\psi_{j_1}\right\rangle$. Effectuons ce calcul pour des fermions. Il vient alors,

$$\begin{aligned}
a_s^\dagger\left(|\phi\rangle\right)\left|\psi_{j_2}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_N}\right\rangle &= \frac{\sqrt{N}}{N!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\left|\psi_{j_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_{\sigma(N)}}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\left|\psi_{j_{\sigma(1)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_{\sigma(N)}}\right\rangle
\end{aligned}$$

Puis le produit scalaire devient alors,

$$\begin{aligned}
&\left(\left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle, a_s^\dagger\left(|\phi\rangle\right)\left|\psi_{j_2}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_N}\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\left\langle\psi_{i_1}\middle|\psi_{j_{\sigma(1)}}\right\rangle\ldots\left\langle\psi_{i_N}\middle|\psi_{j_{\sigma(N)}}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\left\langle\psi_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\middle|\psi_{j_{\sigma\circ\sigma^{-1}(1)}}\right\rangle\ldots\left\langle\psi_{i_{\sigma^{-1}(N)}}\middle|\psi_{j_{\sigma\circ\sigma^{-1}(N)}}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\left\langle\psi_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\middle|\psi_{j_1}\right\rangle\ldots\left\langle\psi_{i_{\sigma^{-1}(N)}}\middle|\psi_{j_N}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\left\langle\psi_{i_{\sigma(1)}}\middle|\psi_{j_1}\right\rangle\ldots\left\langle\psi_{i_{\sigma(N)}}\middle|\psi_{j_N}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_N\\ \sigma(1)=k}}\operatorname{sgn}(\sigma)\left\langle\psi_{i_k}\middle|\psi_{j_1}\right\rangle\ldots\left\langle\psi_{i_{\sigma(N)}}\middle|\psi_{j_N}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_N\\ \sigma(1)=k}}\operatorname{sgn}(\sigma)\times\left\langle\psi_{i_k}\middle|\phi\right\rangle\ldots\left\langle\psi_{i_{\sigma(N)}}\middle|\psi_{j_N}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_N\\ \sigma(1)=k}}\operatorname{sgn}(\sigma) \\
&\times\left(U(\sigma)\left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left\langle\phi\middle|\psi_{i_k}\right\rangle\left|\psi_{i_{k+1}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle, |\Psi\rangle\right)
\end{aligned}$$

où nous avons noté,

$$|\Psi\rangle = \left|\psi_{j_2}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_N}\right\rangle$$

Dans la somme sur σ nous faisons le changement de variable

$$\sigma' = \sigma \circ \tau_{12} \circ \tau_{23} \circ \ldots \circ \tau_{k-1k} \tag{67}$$

La somme devient donc une somme sur les σ' tels que $\sigma'(k) = k$ et $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma')(-1)^{k-1}$. Sommer sur les $\sigma' \in \mathcal{S}_N$ tels que $\sigma'(k) = k$ revient à sommer sur $\pi \in \mathcal{S}_{N-1}$ et $\operatorname{sgn}(\pi) =$

$\mathrm{sgn}(\sigma)$. Ainsi nous obtenons,

$$\begin{aligned}
&\Big(\left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle, a_s^\dagger\left(|\phi\rangle\right)\left|\psi_{j_2}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_N}\right\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_N \\ \sigma(1)=k}} \mathrm{sgn}(\sigma) \\
&\times \left(U(\sigma)\left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left\langle\phi\middle|\psi_{i_k}\right\rangle\left|\psi_{i_{k+1}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle, |\Psi\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{(N-1)!}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\sum_{\pi\in\mathcal{S}_{N-1}} \mathrm{sgn}(\pi) \\
&\times \left(U(\pi)\left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left\langle\phi\middle|\psi_{i_k}\right\rangle\left|\psi_{i_{k+1}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle, |\Psi\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{N}}P_f^{N-1}\left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \left|\psi_{i_{k-1}}\right\rangle \otimes \left\langle\phi\middle|\psi_{i_k}\right\rangle\left|\psi_{i_{k+1}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle, |\Psi\rangle\right) \\
&= \left(a_f\left(|\phi\rangle\right)\left(\left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_N}\right\rangle, \left|\psi_{j_2}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{j_N}\right\rangle\right)\right)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. On remarque que pour les bosons la démonstration est la même voire encore plus simple car la discussion sur les signatures n'a pas lieu d'être.

Un calcul similaire au cas des opérateurs créations montre que,

$$\left[a_s\left(|\phi\rangle\right), a_s\left(|\psi\rangle\right)\right]_s = 0 \tag{68}$$

On peut aussi montrer par calcul direct[28] que l'on a les relations,

$$\left[a_s^\dagger\left(|\phi\rangle\right), a_s\left(|\psi\rangle\right)\right]_s = \langle\phi|\psi\rangle\,\mathbb{I} \tag{69}$$

Ces relations forment la seconde partie des *relations de commutation canoniques*.

Remarquons que les applications

$$a_s^\dagger \ :\ |\phi\rangle \in \mathcal{H}_0 \longmapsto a_s^\dagger\left(|\phi\rangle\right) \tag{70}$$

$$a_s \ :\ |\phi\rangle \in \mathcal{H}_0 \longmapsto a_s\left(|\phi\rangle\right) \tag{71}$$

sont respectivement linéaire et antilinéaire. Ainsi nous pouvons simplement choisir une base de $\mathcal{H}_0$ et décomposer tous les opérateurs sur cette base. Soit alors par exemple $\{|\phi_i\rangle\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}_0$. Nous adoptons les notations,

$$a_{si}^\dagger = a_s^\dagger\left(|\phi_i\rangle\right) \quad \text{et} \quad a_{si} = a_s\left(|\phi_i\rangle\right) \tag{72}$$

Les relations de commutation canoniques s'écrivent alors,

$$\left[a_{si}^\dagger, a_{sj}^\dagger\right]_s = 0 = \left[a_{si}, a_{sj}\right]_s \tag{73}$$

$$\left[a_{si}^\dagger, a_{sj}\right]_s = \delta_{ij}\mathbb{I} \tag{74}$$

Dans la base des nombres d'occupation associé à la base $\{|\psi_i\rangle\}$, nous pouvons calculer explicitement les éléments de matrice de ces opérateurs. Vous pouvez être ravis (et fiers

[28]Je pense que nous (je) avons (ai) assez donné en calcul jusqu'ici et je ne pense pas me tromper en disant que tout le monde en a marre. Les calculs ne sont pas plus compliqués, certainement moins que la démonstration de l'adjoint, et les calculs précédents donnent toutes les armes pour les mener à bien.

si vous avez suivi tous les calculs jusque là), ce sont les derniers calculs lourds que nous ferons[29]. On considère alors un état fermionique sur la base des nombres d'occupation[30] $|n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle$ et on applique un opérateur $a^\dagger_{fi}$. Notons $N = \sum_i n_i$

$$\begin{aligned}
a^\dagger_{fi} |n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle &= c(n_j)\sqrt{N+1} P_f^{N+1} |\phi_i\rangle\, P_f^N |\psi_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes |\psi_k\rangle^{\otimes n_k} \otimes \ldots \\
&= \frac{c(n_j)\sqrt{N+1}}{N!(N+1)!} \\
&\times \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{N+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sng}(\pi)\text{sgn}(\sigma) U(\pi) |\psi_i\rangle \otimes U(\sigma) |\psi_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes |\psi_k\rangle^{\otimes n_k} \otimes \ldots
\end{aligned}$$

On repasse désormais avec des indices $i_1, \ldots, i_{N+1}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{c(n_j)\sqrt{N+1}}{N!(N+1)!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{N+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} U(\pi) |\psi_i\rangle \otimes U(\sigma) |\psi_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes |\psi_k\rangle^{\otimes n_k} \otimes \ldots \\
&= \frac{c(n_j)\sqrt{N+1}}{N!(N+1)!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{N+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sng}(\pi)\text{sgn}(\sigma) U(\pi) |\psi_{i_1}\rangle \otimes U(\sigma) |\psi_{i_2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_{i_{N+1}}\rangle \\
&= \frac{c(n_j)\sqrt{N+1}}{N!(N+1)!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{N+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sng}(\pi)\text{sgn}(\sigma) U(\pi) |\psi_{i_1}\rangle \otimes \left|\psi_{i_{\sigma(2)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_{\sigma(N+1)}}\right\rangle \\
&= \frac{c(n_j)\sqrt{N+1}}{N!(N+1)!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{N+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sng}(\pi)\text{sgn}(\sigma) \left|\psi_{i_{\pi(1)}}\right\rangle \otimes \left|\psi_{i_{\pi\circ\sigma(2)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_{\pi\circ\sigma(N+1)}}\right\rangle
\end{aligned}$$

De nouveau on définit $\sigma' \in \mathcal{S}_{N+1}$ tel que $\sigma'(1) = 1$ et $\sigma'(k) = \sigma(k)$ pour $k \neq 1$. On a alors la relation, $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma')$ et de plus l'application $l'_\sigma : \pi \mapsto \pi \circ \sigma'$ est bijective, d'où

$$\begin{aligned}
&\frac{c(n_j)\sqrt{N+1}}{N!(N+1)!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{N+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sng}(\pi)\text{sgn}(\sigma) \left|\psi_{i_{\pi(1)}}\right\rangle \otimes \left|\psi_{i_{\pi\circ\sigma(2)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_{\pi\circ\sigma(N+1)}}\right\rangle \\
&= \frac{c(n_j)\sqrt{N+1}}{N!(N+1)!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{N+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sng}(\pi \circ \sigma') \left|\psi_{i_{\pi\circ\sigma'(1)}}\right\rangle \otimes \left|\psi_{i_{\pi\circ\sigma'(2)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_{\pi\circ\sigma'(N+1)}}\right\rangle \\
&= \frac{c(n_j)\sqrt{N+1}}{(N+1)!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{N+1}} \text{sng}(\tau) \left|\psi_{i_{\tau(1)}}\right\rangle \otimes \left|\psi_{i_{\tau(2)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_{\tau(N+1)}}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{N!}{\prod_i n_i!}} \frac{\sqrt{N+1}}{(N+1)!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{N+1}} \text{sng}(\tau) \left|\phi_{i_{\tau(1)}}\right\rangle \otimes \left|\psi_{i_{\tau(2)}}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_{\tau(N+1)}}\right\rangle \\
&= \sqrt{n_i + 1} \sqrt{\frac{(N+1)!}{(n_i+1)! \prod_{j \neq i} n_j!}} \frac{1}{(N+1)!} \\
&\times \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{N+1}} \text{sng}(\tau) U(\tau) |\psi_{i_1}\rangle \otimes |\psi_{i_2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_{i_{N+1}}\rangle \\
&= \sqrt{n_i + 1} c\left[(n_j)_{j \neq i}, n_i + 1\right] \frac{1}{(N+1)!} \\
&\times \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{N+1}} \text{sng}(\tau) U(\tau) |\psi_{i_1}\rangle \otimes |\psi_{i_2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_{i_{N+1}}\rangle
\end{aligned}$$

[29]Pour cette partie j'entends...

[30]Le cas bosonique n'est que plus simple.

Cette formule ressemble énormément à un état de nombre d'occupation, le seul problème est l'ordre des facteurs du produit tensoriel. Nous les remettons alors dans le bon ordre avec une permutation $\theta \in \mathcal{S}_{N+1}$ de sorte que l'on place les $|\phi_1\rangle$ puis les $|\phi_2\rangle$ etc... Remarquons que pour des fermions, il n'y a qu'une seule permutation qui replace les éléments de la sorte car $n_k \in \{0,1\}$. Pour des bosons il pourrait y en avoir plusieurs, mais le résultat restera le même car nous n'aurons en réalité pas de dépendance en cette permutation (encore une fois l'absence des signature simplifie le cas des bosons).

Il vient alors,

$$
\begin{aligned}
& a^\dagger_{fi} |n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle \\
& = \sqrt{n_i+1} c\left[(n_j)_{j\neq i}, n_i+1\right] \frac{1}{(N+1)!} \sum_{\tau\in\mathcal{S}_{N+1}} \operatorname{sng}(\tau) \\
& \times U(\tau) \left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \left|\psi_{i_2}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_{N+1}}\right\rangle \\
& = \sqrt{n_i+1} c\left[(n_j)_{j\neq i}, n_i+1\right] \frac{1}{(N+1)!} \\
& \times \sum_{\tau\in\mathcal{S}_{N+1}} \operatorname{sng}(\tau\circ\theta) U(\tau\circ\theta) \left|\psi_{i_1}\right\rangle \otimes \left|\psi_{i_2}\right\rangle \otimes \ldots \otimes \left|\psi_{i_{N+1}}\right\rangle \\
& = \sqrt{n_i+1} c\left[(n_j)_{j\neq i}, n_i+1\right] \operatorname{sgn}(\theta) \frac{1}{(N+1)!} \\
& \times \sum_{\tau\in\mathcal{S}_{N+1}} \operatorname{sng}(\tau) U(\tau) |\psi_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes |\psi_i\rangle^{\otimes(n_i+1)} \otimes \ldots \\
& = \operatorname{sgn}(\theta)\sqrt{n_i+1} |n_1, \ldots, n_i+1, \ldots\rangle
\end{aligned}
$$

D'où les résultats,

$$
\begin{aligned}
a^\dagger_{fi} |n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle &= \operatorname{sgn}(\theta)\sqrt{n_i+1} |n_1, \ldots, n_i+1, \ldots\rangle \quad \text{pour des fermions} && (75) \\
a^\dagger_{bi} |n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle &= \sqrt{n_i+1} |n_1, \ldots, n_i+1, \ldots\rangle \quad \text{pour des bosons} && (76)
\end{aligned}
$$

Un calcul très similaire montre que,

$$
\begin{aligned}
a_{fi} |n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle &= \operatorname{sgn}(\theta)\sqrt{n_i} |n_1, \ldots, n_i-1, \ldots\rangle \quad \text{pour des fermions} && (77) \\
a_{bi} |n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle &= \sqrt{n_i} |n_1, \ldots, n_i-1, \ldots\rangle \quad \text{pour des bosons} && (78)
\end{aligned}
$$

ou de nouveau θ désigne la permutation qui nous permet de replacer les vecteurs du produit tensoriel dans le bon ordre pour des fermions.

Remarquons que nous avons défini les opérateurs création et annihilation pour tout nombre de particules N mais il est très facile d'étendre leur définition à l'espace de Fock tout entier par somme direct des opérateurs définis sous chaque sous espace $\mathcal{H}_s^N$.

4 Composition des moments angulaires

Il y a un aspect particulièrement intéressant pour les systèmes composé de plusieurs particules, à savoir leur spin. Dans cette partie, nous reviendrons sur la manière dont un état peut se transformer sous une rotation et construire une base de vecteur propre pour les générateurs des rotations. Nous étudierons ensuite la manière dont se comporte un état composé de plusieurs particules vis à vis des rotations et démontrerons enfin l'important *théorème de Wigner-Eckart* qui permet de trouver facilement les éléments de matrice de certains opérateurs sur une base de vecteurs propres pour les générateurs des rotations.

Nous proposons une discussion très mathématique, pour une discussion plus douce et intuitive, on peut consulter [10] ou [9].

4.1 Algèbre de Lie et construction des vecteurs propres

Nous revenons dans un premier temps sur l'algèbre de Lie des rotations et essayons de construire une base de vecteurs propres pour un de ses générateurs.

Comme expliqué dans la première section il importe en réalité de considérer des particules se transformant sous une représentation irréductible de $SU(2)$. De telles représentations sont dites de *spin j* et ont la dimension $2j+1$ pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Notons $\mathcal{H}_j$ un espace de Hilbert correspondant à une particule de spin j, soit alors,

$$\dim \mathcal{H}_j = 2j+1 \tag{79}$$

Nous avons remarqué dans la première partie que les rotations étaient caractérisées par trois paramètres réels ($SU(2)$ est une variété différentielle de dimension 3) et trois opérateurs hermitiens J_i vérifiant les relations de commutation,

$$\left[J_i, J_j\right] = i\varepsilon^{ijk} J_k \tag{80}$$

Ainsi nous pouvons choisir un des opérateurs J_i, arbitrairement nous choisissons J_3, et construisons une base orthonormée de $\mathcal{H}_j$ composée de vecteurs propres de J_3[31].

On définit également l'opérateur,

$$\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \tag{81}$$

Nous montrons que,

$$\left[\mathbf{J}^2, J_3\right] = 0 \tag{82}$$

La démonstration se fait par calcul direct,

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{J}^2, J_3\right] &= \left[J_1^2, J_3\right] + \left[J_2^2, J_3\right] + \left[J_3^2, J_3\right] \\
&= J_1[J_1, J_3] + [J_1, J_3]J_1 + J_2[J_2, J_3] + [J_2, J_3]J_2 \\
&= i\varepsilon^{13k} J_1 J_k + i\varepsilon^{13k} J_k J_1 + i\varepsilon^{23k} J_2 J_k + i\varepsilon^{23k} J_k J_2 \\
&= i\varepsilon^{132}\left(J_1 J_2 + J_2 J_1\right) + i\varepsilon^{231}\left(J_2 J_1 + J_1 J_2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\mathbf{J}^2$ et J_3 sont alors codiagonalisables et on peut construire une base orthonormale de vecteurs propres pour $\mathbf{J}^2$ et J_3.

Remarquons également que par symétrie des calculs nous avons aussi,

$$\left[\mathbf{J}^2, J_1\right] = 0 = \left[\mathbf{J}^2, J_2\right] \tag{83}$$

[31] C'est bien évidemment possible car J_3 est hermitien donc diagonalisable en base orthogonale par le théorème spectral.

Et donc $\mathbf{J}^2$ commute avec les opérateurs $J_\pm$ définis par,

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \tag{84}$$

On peut également montrer très facilement les relations,

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \tag{85}$$

Construisons alors une base orthonormale de vecteur propres pour $\mathbf{J}^2$ et J_3 que l'on note $\left|\psi_m^\lambda\right\rangle$ et telle que,

$$\mathbf{J}^2 \left|\psi_m^\lambda\right\rangle = \lambda \left|\psi_m^\lambda\right\rangle \tag{86}$$

$$J_3 \left|\psi_m^\lambda\right\rangle = m \left|\psi_m^\lambda\right\rangle \tag{87}$$

$$\tag{88}$$

Remarquons alors que pour un vecteur propre $\left|\psi_m^\lambda\right\rangle$ nous avons,

$$J_3 J_\pm \left|\psi_m^\lambda\right\rangle = (J_\pm J_3 \pm J_\pm) \left|\psi_m^\lambda\right\rangle = (m \pm 1) J_\pm \left|\psi_m^\lambda\right\rangle \tag{89}$$

Ainsi, $J_\pm \left|\psi_m^\lambda\right\rangle$ correspond à un vecteur propre associé à la valeur propre $m \pm 1$. Notons alors m_{min} et m_{max} les valeurs propres maximales et minimales de J_3[32]. Il vient alors,

$$J_- \left|\psi_{m_{\text{min}}}^\lambda\right\rangle = 0 \tag{90}$$

$$J_+ \left|\psi_{m_{\text{max}}}^\lambda\right\rangle = 0 \tag{91}$$

sinon nous pourrions construire des états avec des valeurs propres plus petites et plus grandes que m_{min} et m_{max}. Remarquons désormais que nous avons la relation,

$$J_\pm J_\mp = \mathbf{J}^2 - J_3^2 \pm J_3 \tag{92}$$

Ainsi, en appliquant ces deux équations respectivement à $\left|\psi_{m_{\text{min}}}^\lambda\right\rangle$ et $\left|\psi_{m_{\text{min}}}^\lambda\right\rangle$, nous obtenons,

$$m_{\text{max}}(m_{\text{max}} + 1) = \lambda = m_{\text{min}}(m_{\text{min}} - 1) \tag{93}$$

En alliant cette équation avec la condition, $m_{\text{min}} \leq m_{\text{max}}$, il vient forcément

$$m_{\text{max}} = -m_{\text{min}} \tag{94}$$

On peut montrer que l'on construit forcément par ces opérations $2j + 1$ vecteurs propres de $\mathbf{J}^2$ et J_3[33] dont les valeurs propres associées sont les $m \in \{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}$. Il est alors évident que,

$$\mathbf{J}^2 = j(j+1)\mathbb{I} \tag{95}$$

et nous avons donc déterminé les valeurs propres qui sont données par les relations,

$$\mathbf{J}^2 \left|\psi_m^j\right\rangle = j(j+1) \left|\psi_m^j\right\rangle \tag{96}$$

$$J_3 \left|\psi_m^j\right\rangle = m \left|\psi_m^j\right\rangle \tag{97}$$

[32] Ces valeurs existent forcément car l'espace de Hilbert est de dimension finie $2j + 1$ et il y a alors au maximum $2j + 1$ valeurs propres.

[33] L'argument se base principalement sur le fait que si ce n'était pas le cas, alors la représentation de $SU(2)$ choisie admettrait un sous espace stable non trivial et ne serait alors pas irréductible.

Nous avons déterminé ces valeurs propres en construisant des vecteurs propres par application des opérateurs $J_\pm$ aux *kets* de la base orthonormale $\left|\psi^j_m\right\rangle$. Cependant, il n'y a aucune raison que l'état $J_\pm\left|\psi^j_m\right\rangle$ soit encore normalisé. Toutefois, on sait que l'état $J_\pm\left|\psi^j_m\right\rangle$ est associé à la valeur propre $m \pm 1$ pour J_3 d'où,

$$J_\pm\left|\psi^j_m\right\rangle \propto \left|\psi^j_{m\pm1}\right\rangle \tag{98}$$

On cherche alors à déterminer ce coefficient de proportionnalité. Notons[34],

$$J_\pm\left|\psi^j_m\right\rangle = \alpha^\pm(j,m)\left|\psi^j_{m\pm1}\right\rangle \tag{99}$$

Il vient alors,

$$\left|\alpha^\pm(j,m)\right|^2 = \left(J_\pm\left|\psi^j_m\right\rangle, J_\pm\left|\psi^j_m\right\rangle\right) = \left(\left|\psi^j_m\right\rangle, J_\mp J_\pm\left|\psi^j_m\right\rangle\right) = j(j+1) - m^2 \mp m \tag{100}$$

On peut alors choisir les coefficients $\alpha^\pm(j,m)$ comme réels et positifs (il suffit d'ajuster les phases des $\left|\psi^j_m\right\rangle$) et définir,

$$J_\pm\left|\psi^j_m\right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m^2 \mp m}\left|\psi^j_{m\pm1}\right\rangle \tag{101}$$

Le moment cinétique L_i est relié aux générateurs J_i par la relation $L_i = \hbar J_i$. L'analyse précédente montre alors que pour une particule de spin j, la norme de son spin est toujours $\hbar\sqrt{j(j+1)}$ et les moments cinétiques projetés sur l'axe 3 prennent des valeurs $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$.

4.2 Addition des moments angulaires

La partie précédente ne constituait probablement que des rappels. Nous entrons ici dans le vif du sujet en étudiant ce qu'il se passe lorsque l'on considère le système de deux particules[35] se transformant sous des représentations j et j' de $SU(2)$.

Avant d'étudier ce phénomène, nous donnons quelques précisions sur la manière de définir l'espace de Hilbert pour une particule de spin j. Dans la partie précédente nous avons expliqué qu'une particule de spin j évolue dans un espace de Hilbert de dimension $2j+1$. Cependant, dans la première partie de ce propos, nous avons également mentionné que l'on pouvait choisir de dénoter les états par leur quantité de mouvement. Mais alors laquelle de ces deux affirmations est la vraie ?

En réalité ces deux affirmations sont vraies et il est plus simple de le voir en terme de fonctions d'ondes. Une particule de spin j est alors représentée par $2j+1$ composantes que l'on peut voir comme $2j+1$ fonctions d'onde dépendant de p. Ainsi, il faut réellement voir l'espace de Hilbert d'une particule de spin j comme[36],

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_j \otimes L^2(\vec{p}) \tag{102}$$

[34]Nous empruntons de nouveau les notations de Weinberg.

[35]On dit ici deux particules, mais en réalité le propos que nous exposons reste le même dès que nous voulons ajouter plusieurs moments angulaires et étudier le moment angulaire total, comme par exemple le spin et le moment cinétique classique.

[36]On se place dans le cas où l'on identifie les états par leur quantité de mouvement, la généralisation à d'autres identification est évidente.

On peut noter un état propre de cet espace pour $\mathbf{J}^2$ et J_3 par, $\left|\psi^j_m(\vec{p})\right\rangle$. Ainsi l'action d'une rotation sur le système se décompose sous deux actions différentes. La première est évidente et est l'action d'une rotation sur $L^2(\vec{p})$. Elle transforme simplement les rayons $|\vec{p}\rangle$ en des rayons $|R\vec{p}\rangle$. De plus comme la particule a un spin j, la rotation va aussi *mixer* les différentes composantes indexées par m d'un état $\left|\psi^j_m(\vec{p})\right\rangle$. Mathématiquement,

$$|\psi(\vec{p})\rangle \xrightarrow{R(\vec{\theta})} e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J}} |\psi(R\vec{p})\rangle \tag{103}$$

où les J_i forment une représentation irréductible l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ sur $\mathcal{H}_j$.

Ainsi on se rend compte que conserver la notation de la quantité de mouvement dans le produit tensoriel est inutile, car la manière dont les rotations agissent sur les espaces de quantité de mouvement du produit tensoriel est triviale. Ainsi, dans la discussion qui suit on ne considérera que les espaces vectoriels $\mathcal{H}_j$ sur lesquels les rotations ont des comportements intéressants.

Reprenons alors nos deux particules de spin respectifs j et j'. L'espace de Hilbert à étudier est naturellement,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_{j'} \tag{104}$$

dont on peut choisir une base,

$$\mathcal{B} = \left\{ \left|\psi^j_m\right\rangle \otimes \left|\psi^{j'}_{m'}\right\rangle \right\} \tag{105}$$

où $m \in \{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}$ et $m' \in \{-j', -j'+1, \ldots, j'-1, j'\}$. Sous l'effet d'une rotation, un état $|\phi_j\rangle \otimes \left|\phi_{j'}\right\rangle$ se transforme naturellement sous la forme,

$$|\phi_j\rangle \otimes \left|\phi_{j'}\right\rangle \xrightarrow{R(\vec{\theta})} e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J}^j} |\phi_j\rangle \otimes e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J}^{j'}} \left|\phi_{j'}\right\rangle \tag{106}$$

où nous avons noté J^j_i les générateurs de la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ induite sur $\mathcal{H}_j$.

Mathématiquement, on dit alors que l'espace $\mathcal{H}$ admet la représentation produit tensoriel définie par,

$$\rho_{j\otimes j'}(R)(|\phi_j\rangle \otimes \left|\phi_{j'}\right\rangle) = \rho_j(R)\,|\phi_j\rangle \otimes \rho_{j'}(R)\left|\phi_{j'}\right\rangle \tag{107}$$

En tant que représentation, on doit également pouvoir trouver des opérateurs J_i agissant sur $\mathcal{H}$, tels que

$$|\phi_j\rangle \otimes \left|\phi_{j'}\right\rangle \xrightarrow{R(\vec{\theta})} e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J}} |\phi_j\rangle \otimes \left|\phi_{j'}\right\rangle \tag{108}$$

Heureusement, nous n'avons aucun calcul à faire ici, les mathématiciens nous ont déjà préparés tous les résultats! En effet, la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ à considérer pour cette représentation sur le produit tensoriel est simplement donnée par,

$$J_i = J^j_i \otimes \mathbb{I}_{2j'+1} + \mathbb{I}_{2j+1} \otimes J^{j'}_i \tag{109}$$

Ce résultat d'origine mathématique semble assez intuitif physiquement, nous ne faisons qu'additionner les moments angulaires!

Cependant, contrairement à la section précédente, la discussion est désormais plus compliqué, la représentation $\rho_{j\otimes j'}$ n'a aucune raison d'être irréductible désormais. Cela signifie notamment que la valeur prise par la norme du moment angulaire $\mathbf{J}^2$ n'est plus constante sur tout l'espace de Hilbert. Or nous avons décidé de classer nos particules précisément par le fait qu'elles se transforment sous une représentation irréductible. Ainsi, le système de deux particules de spin j et j' donne naissance à plusieurs particules différentes. La question qui demeure encore est alors, quels en sont le spin ? Encore une fois nous faisons appel à nos très bons amis mathématiciens qui nous indiquent que,

$$\rho_{j\otimes j'} = \rho_{|j-j'|} \oplus \rho_{|j-j'|+1} \oplus \ldots \oplus \rho_{j+j'} \tag{110}$$

C'est à dire que la particule que nous obtenons peut avoir un spin compris entre $|j-j'|$ et $j+j'$ avec un pas de 1. Ainsi on ne peut pas être certain du spin de la particule que l'on crée en associant ces deux particules. Cependant, on remarque que l'on peut être certain de créer un boson ou un fermion, car pour tout k, $|j-j'|+k$ est entier ou demi entier lorsque $|j-j'|$ l'est. Remarquons déjà que cette décomposition donne le bon nombre d'états. Chaque représentation ρ_k fournit $2k+1$ états, d'où (en supposant par exemple $j \geq j'$)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j-j'}^{j+j'} (2k+1) &= 2\left(\sum_{k=0}^{j+j'} k - \sum_{k=0}^{j-j'} k\right) + 2j + 1 \\
&= \left[(j+j'+1)(j+j') + (j-j'+1)(j-j')\right] + 2j + 1 \\
&= (2j'+1)(2j+1)
\end{aligned}$$

qui est bien le nombre d'états attendus dans $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_{j'}$.

Ce qui peut désormais être intéressant est de déterminer les coefficient des vecteurs propres associés à $\mathbf{J}^2$ et J_3 sur la base $\left|\phi^j_m\right\rangle \otimes \left|\phi^{j'}_{m'}\right\rangle$. Notons alors J et M les caractéristiques du moment angulaire obtenu après addition des moments angulaires,

$$\left|\Psi^J_M\right\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \sum_{m'=-j'}^{j'} \left(\left\langle \psi^j_m\right| \otimes \left\langle \psi^{j'}_{m'}\right|, \left|\Psi^J_M\right\rangle\right) \left|\psi^j_m\right\rangle \otimes \left|\psi^{j'}_{m'}\right\rangle \tag{111}$$

On appelle les coefficients $\left\langle \psi^j_m\right| \otimes \left\langle \psi^{j'}_{m'}\middle|\Psi^J_M\right\rangle$ les coefficients de Clebsch-Gordan et on les note,

$$C_{jj'}(J, M; m, m') = \left(\left\langle \psi^j_m\right| \otimes \left\langle \psi^{j'}_{m'}\right|, \left|\Psi^J_M\right\rangle\right) \tag{112}$$

Remarquons déjà que la double somme précédente n'est en réalité qu'une simple somme, car les seuls coefficients non nuls sont ceux tels que $M = m + m'$. Physiquement cela signifie simplement que le moment angulaire projeté sur le 3ème axe est la somme des moments angulaires projetés sur cet axe. Mathématiquement, on obtient ce résultat en appliquant l'opérateur,

$$J_3 = J^j_3 \otimes \mathbb{I}_{2j'+1} + \mathbb{I}_{2j+1} \otimes J^{j'}_3 \tag{113}$$

Appliquons désormais $J_\pm$ à la somme précédente pour obtenir une relation de récurrence,

$$\begin{aligned}
J_\pm \left|\Psi^J_M\right\rangle &= \sqrt{J(J+1)-M^2\mp M}\left|\Psi^J_{M\pm1}\right\rangle \\
&= \left(J^j_\pm \otimes \mathbb{I}_{2j'+1} + \mathbb{I}_{2j+1}\otimes J^{j'}_\pm\right)\sum_{m=-j}^{j}\sum_{m'=-j'}^{j'} C_{jj'}(J,M;m,m')\left|\psi^j_m\right\rangle\otimes\left|\psi^{j'}_{m'}\right\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^{j}\sum_{m'=-j'}^{j'} C_{jj'}(J,M;m,m')\left(\sqrt{j(j+1)-m^2\mp m}\left|\psi^j_{m\pm1}\right\rangle\otimes\left|\psi^{j'}_{m'}\right\rangle\right. \\
&\left.+\sqrt{j'(j'+1)-m'^2\mp m'}\left|\psi^j_m\right\rangle\otimes\left|\psi^{j'}_{m'\pm1}\right\rangle\right)
\end{aligned}$$

Un changement d'indice dans les sommes donne alors les relations de récurrence,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{J(J+1)-M^2\mp M}\,C_{jj'}(J,M\pm1;m,m') \\
&\qquad = \sqrt{j(j+1)-m^2\mp m}\,C_{jj'}(J,M;m\mp1,m') \\
&\qquad + \sqrt{j'(j'+1)-m'^2\mp m'}\,C_{jj'}(J,M;m,m'\mp1)
\end{aligned} \tag{114}$$

En général, pour déterminer les coefficients de Clebsch-Gordan, deux méthodes sont possibles. La première est de partir de l'état maximal $\left|\Psi^{j+j'}_{j+j'}\right\rangle$ et d'appliquer successivement l'opérateur J_- pour déterminer tous les états $\left|\Psi^{j+j'}_m\right\rangle$. Ensuite il faut descendre à $J = j' + j - 1$. Pour déterminer le premier état, on utilise l'orthogonalité de cet état avec les états précédemment déterminés puis on peut de nouveau appliquer J_-. De cette manière on arrive à construire tous les états et à déterminer les coefficients correspondant. Cette méthode est très lourde de calcul, c'est pourquoi je recommande la seconde méthode, beaucoup plus maligne: consulter une table préexistante relatant les coefficients. On en propose une ci-dessous.

Enfin, remarquons une dernière propriété des coefficients de Clebsch-Gordan. Ecrivons l'orthonormalité des états $\left|\Psi^J_M\right\rangle$,

$$\delta_{JJ'}\delta_{MM'} = \left\langle\Psi^J_M\middle|\Psi^{J'}_{M'}\right\rangle = \sum_{mm'} C_{jj'}(J,M;m,m')C_{jj'}(J',M';m,m') \tag{115}$$

Autrement dit, la matrice carrée $C_{jj'}$ vérifie,

$$C_{jj'}C^T_{jj'} = 1 \tag{116}$$

Ainsi $C_{jj'}$ est inversible d'inverse $C^T_{jj'}$, on a donc également,

$$C^T_{jj'}C_{jj'} = 1 \tag{117}$$

Qui s'écrit également,

$$\sum_{JM} C_{jj'}(J,M;m_1,m'_1)C_{jj'}(J',M';m_2,m'_2) = \delta_{m_1m'_1}\delta_{m_2m'_2} \tag{118}$$

Et on peut aussi inverser la relation sur les états,

$$\left|\psi^j_m\right\rangle \otimes \left|\psi^{j'}_{m'}\right\rangle = \sum_{JM} C_{jj'}(J,M;m,m') \left|\Psi^J_M\right\rangle \tag{119}$$

Ces relations n'ont rien de physique et ne sont que des conséquences mathématiques de l'algèbre linéaire[37].

Cette manière de combiner les spins donne naissance à une gigantesque classification des différentes particules en physique des particules. Pour plus d'informations sur ce sujet, n'hésitez pas à consulter [3].

4.3 Théorème de Wigner-Eckart

Dans cette dernière partie, nous donnons un avant-goût de la puissance de la théorie des groupes et de ses applications en physique. Nous montrons alors le théorème de Wigner-Eckart qui montre que l'on peut dans certains cas *factoriser* la dépendance en le groupe $SU(2)$ des éléments de matrice.

Soit $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. On dit qu'une famille d'opérateurs $\{O^j_m\}_{-j\leq m\leq j}$ est de spin j, si ces opérateurs se transforment sous une représentation irréductible j de $SU(2)$. On se propose d'être plus précis sur cette définition.

Les rotations définissent une représentation unitaire de $SU(2)$ sur l'espace de Hilbert,

$$\begin{array}{rccc} \rho_{\mathcal{H}}: & SU(2) & \longrightarrow & GL(\mathcal{H}) \\ & R & \longmapsto & \rho_{\mathcal{H}}(R) \end{array} \tag{120}$$

Le fait de faire une rotation ne doit pas changer la mesure, et en particulier les éléments de matrice d'un opérateur O quelconque doivent rester les mêmes après transformation des rayons par une rotation. Ainsi, par une rotation les opérateurs se transforment sous la forme,

$$O \xrightarrow{R} \rho_{\mathcal{H}}(R) O \rho_{\mathcal{H}}(R)^\dagger \tag{121}$$

Ainsi il y a également une représentation de $SU(2)$ qui est induite sur les espace d'opérateurs

$$\rho_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} : SU(2) \longrightarrow GL\left(\mathcal{L}(\mathcal{H})\right) \tag{122}$$

et cette représentation est définie par,

$$\rho_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(R) O = \rho_{\mathcal{H}}(R) O \rho_{\mathcal{H}}(R)^\dagger \tag{123}$$

De la même manière que sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on peut décomposer cette représentation en somme directe de représentations irréductibles indexées par $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ de dimension respective $2j+1$. Cette décomposition, crée une base de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en groupes de $2j+1$ opérateurs qui se transforment entre eux, c'est à dire en opérateurs O^j_m pour $m \in \{-j, -j+1, \ldots, j\}$ tels que,

$$\rho_{\mathcal{H}}(R) O^j_m \rho_{\mathcal{H}}(R)^\dagger = \sum_{m'=-j}^{j} D^j_{mm'}(R) O^j_{m'} \tag{124}$$

[37] Si cette phrase, vous parait méprisante, j'en suis désolé, bien au contraire je tiens à souligner la manière impressionnante dont les maths nous guident dans notre étude de la physique.

Ce sont ces opérateurs que l'on appelle *opérateurs de spin j*.

En étudiant une rotation infinitésimale, on peut montrer que les opérateurs O^j_m vérifient les relations de commutation,

$$\left[J_3, O^j_m\right] = mO^j_m \tag{125}$$
$$\left[J_\pm, O^j_m\right] = \sqrt{j(j+1) - m^2 \mp m}O^j_{\pm 1} \tag{126}$$
$$\tag{127}$$

Retournons dès lors au sujet principal qu'est le théorème de Wigner-Eckart. En règle générale, nous pouvons indexer les états propres du système (c'est-à-dire états propres de l'Hamiltonien), sous la forme $\{|j, m, \alpha\rangle$ où α se réfère aux autres degrés de libertés possibles que le moment angulaire. Considérons une famille d'opérateurs O^J_M de spin J. Le théorème de Wigner-Eckart indique que,

$$\langle j', m', \alpha' | \, O^J_M \, | j, m, \alpha\rangle = C_{jJ}(j', m'; M, m) \left(j', \alpha' \| O^J_M \| j, \alpha\right) \tag{128}$$

où le coefficient $\left(j', \alpha' \| O^J_M \| j, \alpha\right)$ est appelé élément de matrice réduit et ne dépend pas de m et m'.

Les opérateurs de spin 1 sont appelés *opérateurs vecteurs*. Remarquons que $\mathbf{J}$ est lui-même un opérateur vecteur. Si l'on considère un autre opérateur vecteur $\mathbf{V}$ dont les éléments de matrice réduits sont non nuls, il vient alors directement, et remarquablement,

$$\langle j', m', \alpha' | \, V_i \, | j, m, \alpha\rangle = \frac{(j', \alpha' \| V_i \| j, \alpha)}{(j', \alpha' \| V_i \| j, \alpha)} \langle j', m', \alpha' | \, J_i \, | j, m, \alpha\rangle \tag{129}$$

Cela signifie que tout opérateur vecteur a des éléments de matrices qui se déduisent de ceux de $\mathbf{J}$ par un coefficient de proportionnalité qui ne dépend pas de m ou m'.

References

[1] Michael Astwood. *Lecture notes of Advanced Quantum Theory by Tobias Osborne*. 2021.

[2] J S Dowker. "Quantum mechanics and field theory on multiply connected and on homogeneous spaces". In: *Journal of Physics A: General Physics* 5.7 (July 1972), p. 936. DOI: 10.1088/0305-4470/5/7/004. URL: https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/5/7/004.

[3] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles, Second Edition*. Wiley-VCH, 2010.

[4] Michael G. G. Laidlaw and Cécile Morette DeWitt. "Feynman Functional Integrals for Systems of Indistinguishable Particles". In: *Phys. Rev. D* 3 (6 Mar. 1971), pp. 1375–1378. DOI: 10.1103/PhysRevD.3.1375. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.3.1375.

[5] Tom Lancaster and Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2021.

[6] J.M. Leinaas and J. Myrheim. "On the Theory of Identical Particles". In: (1976).

[7] Amaury Mouchet. "Path integrals in a multiply-connected configuration space (50 years after)". In: (2021). URL: arXiv:2010.01504.

[8] Lawrence Schulman. "A Path Integral for Spin". In: *Phys. Rev.* 176 (5 Dec. 1968), pp. 1558–1569. DOI: 10.1103/PhysRev.176.1558. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.176.1558.

[9] Steven Weinberg. *Lecture on Quantum Mechanics, Cambridge*. Cambridge University Press, 2013. ISBN: 978-1-107-02872-2.

[10] Anthony Zee. *Group theory in a nutshell for physicists*. Princeton University Press, 2016.