Canonical Approach to Quantum Mechanics and Path Integrals

Tanguy Marsault

August 12, 2024

Contents

Introduction

Une approche purement Hamiltonienne de la mécanique quantique, bien que fonctionnelle la plupart du temps, peut parfois s'avérer lourde ou bien même cacher des subtilités qui ne devraient pas être négligées. Dans cette section nous développons alors l'approche Langrangienne de la mécanique quantique. Cette approche tire son origine principalement de la mécanique classique (ou mécanique analytique) et c'est donc naturellement que nous commençons par en donner un bref aperçu.

1 Rappels classiques

En mécanique classique, la dynamique est régi par les *équations du mouvement*. Dans une première approche elles sont données comme un postulat sous le nom de *principe fondamental de la dynamique* ou *deuxième loi de Newton*. Dans une seconde étude plus poussée de la mécanique, on préfère dire que ces derniers résultats ne sont pas des postulats, mais sont eux-mêmes obtenus à partir d'un principe plus fondamental connu sous le nom de *principe variationnel* ou *principe du maximum d'entropie*. Le principe est comme suit.

Considérons un système régi par des variables dynamiques, $q_N(t)$. On postule alors l'existence d'une quantité, $L(q, \dot{q}, t)$[1] appelée *Lagrangien* telle que les équations du mouvement soient données par les points stationnaires de *l'action* définie par,

$$S[q] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; L(q, \dot{q}, t) \tag{1}$$

1.1 Approche Lagrangienne

Notre but est alors de trouver les variables dynamiques q_N qui extremisent l'action $S[q]$. La manière de procéder est assez simple. Considérons des coordonnées q_N qui extremisent l'action S. Par définition, l'action S est stationnaire au point q_N, ainsi, pour un changement de coordonnées $q_N + \delta q_N$, le changement de l'action δS doit être nul. Soit alors,

$$S + \delta S = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; L(q + \delta q, \dot{q} + \dot{\delta q}, t) = S \tag{2}$$

D'où au première ordre en la variation δ[2]

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \sum_N \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_N} \delta \dot{q}_N \right] \\ &= \sum_N \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_N} \delta q_N - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_N} \delta q_N \right] + \sum_N \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_N} \delta q_N \right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

En supposant que le terme de bord s'annule (par exemple en considérant que les chemins q_N et $q_N + \delta q_N$ démarrent et terminent au même point) et en utilisant le fait que cette égalité doit être vraie quelque soit la variation δq choisie, nous obtenons les équations,

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_N} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_N} \tag{3}$$

Ces équations sont précisément les *équations du mouvement* ou les *équations d'Euler-Lagrange*.

L'étude de plusieurs cas classiques permet de déterminer qu'il faut en général choisir,

$$L = T - V \tag{4}$$

où T est l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle.

[1]Techniquement on pourrait avoir des formules plus générales, mais on se restreint ici au cas où le Lagrangien ne dépend que de la dérivée première des coordonnées dynamiques.

[2]Nous ne somme pas mathématiquement rigoureux ici, mais tous les résultats peuvent s'obtenir de manière plus rigoureuse, mais plus lourde.

1.2 Symétries

L'intérêt de l'approche canonique apparait clairement lorsque l'on étudie les symétries du système. Considérons une transformation infinitésimale[3] s'écrivant sous la forme,

$$q_N \to q_N + \varepsilon f_N[q;t] \tag{5}$$

où ε est une quantité infinitésimale (c'est à dire qu'il faudra toujours partir du principe que nous la faisons tendre vers 0). On appelle alors *symétrie continue*, une telle transformation qui laisse invariante l'action $S[q]$, c'est à dire telle que

$$\delta S = \varepsilon \sum_N \int \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q_N} f_N[q;t] + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \frac{\mathrm{d}f_N[q;t]}{\mathrm{d}t} \right] = 0 \tag{6}$$

Evidemment la considération des symétries se fait sans impliquer les équations du mouvement, c'est à dire que l'action reste invariante même si les équations du mouvement ne sont pas satisfaites (sinon l'égalité précédente est triviale, c'est un cas particulier de l'étude précédente). Remarquons dès lors que les transformations qui transforment le Lagrangien sous la forme,

$$\delta L = \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G \tag{7}$$

où G est une fonction décroissant assez rapidement en $t \to \pm\infty$, sont des symétries du systèmes. En effet, nous avons,

$$\delta S = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \delta L = \varepsilon \left[G(t) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{8}$$

Dans le cas particulier où $G = 0$, on dit que la transformation est aussi une symétrie du Lagrangien.

Tout l'intérêt du formalisme canonique est de produire naturellement des quantités conservées lorsque les équations du mouvement sont satisfaites. Ce résultat est connue sous le nom du *théorème de Noether*.

Considérons une symétrie continue telle que $\delta L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G$. Nous avons alors,

$$\delta L = \varepsilon \sum_N \left[\frac{\partial L}{\partial q_N} f_N[q;t] + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \frac{\mathrm{d}f_N[q;t]}{\mathrm{d}t} \right] = \varepsilon \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

Si l'on suppose de plus que les équations du mouvement sont satisfaites, il vient également,

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \sum_N \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \right) f[q;t] + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \frac{\mathrm{d}f[q;t]}{\mathrm{d}t} \right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} f[q;t] \right) \tag{10}$$

soit alors la loi de conservation,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} f[q;t] - G \right) = 0 \tag{11}$$

[3]On se restreint ici à l'étude des symétries continues qui peuvent s'exprimer comme l'action d'un groupe de Lie sur les coordonnées q_N, contrairement aux symétries discrètes qui s'expriment comme l'action d'un groupe discret, par exemple la symétrie $q_N \to -q_N$ associée au groupe $\mathbb{Z}_2$. En toute généralité une symétrie est alors une transformation quelconque du système laissant l'action invariante.

1.3 Approche Hamiltonienne

A partir du formalisme Lagrangien, nous pouvons développer le formalisme Hamiltonien en prenant la transformée de Legendre du Lagrangien,

$$H = \sum_N \dot{q}_N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} - L \tag{12}$$

L'intérêt de cette définition est de remarquer que si L ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire ne dépend du temps que par q et $\dot{q}$, alors H est une quantité conservée lorsque les équations du mouvement sont satisfaites. Ce résultat est assez facile à démontrer, calculons simplement la dérivée de H par rapport au temps,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_N \left[\ddot{q}_N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} + \dot{q}_N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \right] - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

La dérivée de L par rapport au temps s'écrit,

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_N \left[\frac{\partial L}{\partial q_N} \dot{q}_N + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \ddot{q}_N \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{14}$$

En injectant cette forme dans l'expression de $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ et l'utilisation des équations du mouvement donne alors très facilement,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{15}$$

Ainsi H est conservé si L ne dépend pas explicitement du temps.

En général les équations du mouvement sont d'ordre 2 en t. Il est plus simple de travailler avec des équations d'ordre 1, on introduit alors les variables *canoniques conjuguées* p_N aux q_N sous la forme,

$$p_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \tag{16}$$

C'est à dire qu'au lieu d'avoir des équations d'ordre 2 en temps, nous doublons le nombre de variables et donc le nombre d'équations mais obtenons des équations d'ordre 1 en temps. Les variables à étudier sont alors les p_N et q_N, et $\dot{q}_N$ est à remplacer par son expression en fonction des p et q. L'Hamiltonien est désormais à regarder comme une fonction $H(p, q)$ des p_N et q_N.

Nous pouvons désormais exprimer les équations du mouvement en dérivant l'expression de l'Hamiltonien par rapport à q_N et p_N. Commençons par q_N,

$$\frac{\partial H}{\partial q_N} = \sum_M \frac{\partial \dot{q}_M}{\partial q_N} p_M - \sum_M \left[\frac{\partial L}{\partial q_M} \frac{\partial q_M}{\partial q_N} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_M} \frac{\partial \dot{q}_M}{\partial q_N} \right] = -\frac{\partial L}{\partial q_N} \tag{17}$$

En utilisant désormais les équations du mouvement pour L,

$$\dot{p}_N = -\frac{\partial H}{\partial q_N} \tag{18}$$

Un calcul très similaire donne également,

$$\dot{q}_N = \frac{\partial H}{\partial p_N} \tag{19}$$

Ces équations portent le nom d'*équations d'Hamilton*.

2 Aspects quantiques

De manière très brève, nous venons de passer en revu les aspects les plus importants du formalisme canonique en mécanique classique. Nous passons désormais aux aspects quantiques de la théorie, en particulier à la manière dont nous pouvons trouvons les relations de commutation canoniques lorsque nous promouvons les variables q_N et p_N au rang d'opérateurs agissant sur l'espace de Hilbert.

2.1 Variables canoniques

Il n'y a probablement pas de *bonne* justification expliquant la manière dont nous nous permettons de promouvoir les variable canoniques en opérateurs. Cependant, je trouve la discussion de Weinberg dans [1], Chapitre 9.4 élégante et c'est celle que nous suivons ici.

Reprenons le cas d'une symétrie continue du système, et imposons de plus que ce soit une symétrie du Lagrangien,

$$q_N \to q_N + \varepsilon f_N[q;t] \tag{20}$$

En mécanique quantique[4] cette transformation est représentée, au sens mathématique du terme, par un opérateur U qui est unitaire[5]. De plus supposons que ces transformations forment un groupe de Lie, alors cette transformation peut s'écrire infinitésimalement sous la forme,

$$U = 1 - i\varepsilon\frac{F}{\hbar} + \dots \tag{21}$$

où F est un élément de l'algèbre de Lie associée (appelé *générateur* en physique). Nous imposons de plus que la transformation effectue bien l'effet attendu, à savoir,

$$U^{-1} q_N U = q_N + \varepsilon f_N[q;t] \tag{22}$$

où q_N est ici à considérer comme un opérateur agissant sur l'espace de Hilbert quantique du système. En développant cette dernière expression de manière infinitésimale, l'opérateur F, vérifie,

$$[F, q_N] = -i\hbar f_N[q;t] \tag{23}$$

On peut assez naturellement supposer que F est la quantité conservée associée à la symétrie que nous avons calculée précédemment, c'est-à-dire,

$$F = \sum_N p_N f_N[q;t] \tag{24}$$

Ainsi, la relation de commutation est directement vérifiée si nous imposons les relations de commutation,

$$[q_N(t), p_M(t)] = i\hbar\delta_{NM} \tag{25}$$
$$[q_N(t), q_M(t)] = [p_N(t), p_M(t)] = 0 \tag{26}$$

Remarquons que grâce à ces relations de commutation, on peut toujours placer tous les opérateurs q_N à gauche des opérateurs p_N. C'est la convention que nous adoptons

[4] Se référer au théorème de Wigner et aux discussions de la Partie I.

[5] On exclue le cas antiunitaire car les transformations infinitésimales sont dans la composante connexe de l'identité.

désormais. On peut alors obtenir les relations de commutation suivantes pour une fonction quelconque $f(q,p)$ des q_N et p_N,

$$[f(q,p),q_N] = -i\hbar\frac{\partial f(q,p)}{\partial p_N} \tag{27}$$

$$[f(q,p),p_N] = i\hbar\frac{\partial f(q,p)}{\partial q_N} \tag{28}$$

Démontrons ce résultat en considérant un monome,

$$f(q,p) = q_{i_1}\dots q_{i_r}p_{j_1}\dots p_{j_t} \tag{29}$$

On fait passer le terme q_N dans $f(q,p)q_N$ à gauche de tous les termes en p en utilisant les relations de commutation,

$$\begin{aligned}
f(q,p)q_N &= q_{i_1}\dots q_{i_r}p_{j_1}\dots p_{j_t}q_N \\
&= q_{i_1}\dots q_{i_r}p_{j_1}\dots p_{j_{t-1}}q_N p_{j_t} - i\hbar q_{i_1}\dots q_{i_r}p_{j_1}\dots p_{j_{t-1}}\delta_{j_t N} \\
&= q_{i_1}\dots q_{i_r}q_N p_{j_1}\dots p_{j_t} - i\hbar\sum_{k=1}^{t}\prod_{s\neq t}p_{j_s}\delta_{j_s N} \\
&= q_N f(q,p) - i\hbar\frac{\partial f(q,p)}{\partial p_N}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. La démonstration de l'autre commutateur se démontre de manière similaire.

Remarquons alors que nous obtenons alors les équations d'Heisenberg à partir des équations d'Hamilton,

$$\dot{p}_N = -\frac{\partial H}{\partial q_N} = \frac{i}{\hbar}[H,p_N] \tag{30}$$

$$\dot{q}_N = \frac{\partial H}{\partial p_N} = \frac{i}{\hbar}[H,q_N] \tag{31}$$

Cela prouve également de nouveau que l'Hamiltonien est le générateur des translations dans le temps. Ainsi pour une fonction quelconque $f(q,p)$, nous avons la relation,

$$\dot{f}(q,p) = \frac{i}{\hbar}[H,f(q,p)] \tag{32}$$

Des calculs similaires montrent également que pour des fonctions quelconques $f(q,p)$ et $g(q,p)$, nous avons,

$$[f(q,p),g(q,p)] = i\hbar\sum_N\left[\frac{\partial f}{\partial q_N}\frac{\partial g}{\partial p_N} - \frac{\partial g}{\partial q_N}\frac{\partial f}{\partial p_N}\right] \tag{33}$$

Cette dernière quantité est connue en mécanique classique sous le nom de *crochet de Poisson* et est notée, $[\cdot,\cdot]_P$. Ainsi le commutateur en mécanique quantique hérite de toutes les propriétés du crochet de Poisson. L'antisymétrie,

$$[f,g] = -[g,f] \tag{34}$$

La composition,

$$[f,gh] = [f,g]h + g[f,h] \tag{35}$$

et l'identité de Jacobi

$$[f,[g,h]] + [h,[f,g]] + [g,[h,f]] = 0 \tag{36}$$

3 Intégrale de chemin

L'approche que nous allons développer dans ce propos se base sur *l'intégrale de chemin* développée par Feynman en mécanique quantique. Nous revenons dans cette première partie sur la formulation de la mécanique quantique à l'aide de l'intégrale de chemin. Nous décrivons alors la manière dont nous pouvons appliquer ces idées à des champs quantiques, puis faisons le lien avec la formulation canonique de la théorie quantique des champs.

3.1 L'idée de Feynman

Avant d'entrer dans la description mathématique du sujet, expliquons l'intuition de Feynman quant à l'intégrale de chemin. Pensons premièrement, à une expérience de type trous de Young, avec une source S, deux trous A_i, et un écran sur lequel on mesure l'amplitude reçu en un point O (Figure 1). La mécanique quantique nous indique que l'amplitude totale reçue est,

$$\mathcal{A}(S \to O) = \mathcal{A}(S \to A_1 \to O) + \mathcal{A}(S \to A_2 \to O) \tag{37}$$

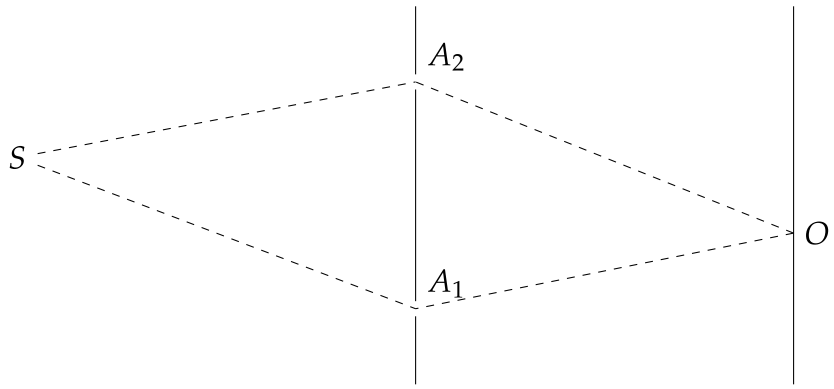

Figure 1: Expérience des trous de Young

Jusqu'ici rien ne devrait vous paraître nouveau ni révolutionnaire. L'expérience devient plus intéressante si l'on imagine ajouter plus de trous sur l'écran intermédiaire, disons un nombre n. L'amplitude obtenue sera alors :

$$\mathcal{A}(S \to O) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(S \to A_i \to O) \tag{38}$$

Cette formule est une simple généralisation de la formule précédentes avec n trous au lieu de 2.

Compliquons encore légèrement l'expérience et ajoutons plus d'écrans intermédiaires, disons par exemple un nombre k. Sur chaque écran, il y a plusieurs trous, pas forément le même nombre, disons par exemple avoir n_k trous sur l'écran k. Géométriquement, on note ces trous A_{li}, avec $l \in [\![1, k]\!]$ et $i \in [\![1, n_l]\!]$, l représentant l'écran, et i la position du trou sur l'écran l. La nouvelle amplitude obtenue en O pour cette expérience devient,

$$\mathcal{A}(S \to O) = \sum_{i_1 \dots i_k} \mathcal{A}(S \to A_{1i_1} \to A_{2i_2} \to \dots \to A_{ki_k} \to O) \tag{39}$$

Faisons un dernier effort, et supposons désormais faire tendre le nombre d'écrans et le nombre de trous par écran vers l'infini. Chaque écran ayant une infinité de trous, tout se passe comme si il n'yavait simplement pas d'écrans, la particule se propage dans le vide! C'est là l'essence de l'idée de Feynman. On ne paramètre plus le chemin suivi par la particule par un ensemble de point A_{li} mais désormais par une fonction

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{40}$$

telle que $\gamma(0) = S$ et $\gamma(1) = O$. L'amplitude que l'on mesure en O est alors donnée par,

$$\mathcal{A}(S \to O) = \sum_{\gamma} \mathcal{A}(S \xrightarrow{\gamma} O) \tag{41}$$

Nous tentons désormais d'expliciter *mathématiquement*[6] le principe que nous venons de décrire. Pour traiter plus facilement ce problème, il est confortable d'utiliser le formalisme d'Heisenberg dont nous faisons quelques rappels ci-dessous.

Du point de vue de Schrödinger, les états $|\psi\rangle$ dépendent du temps et les opérateurs n'en dépendent pas (mises à part les dépendances explicites). Les états évoluent selon l'équation de Schröginger,

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle_S = \widehat{H} |\psi(t)\rangle_S \tag{42}$$

Du point de vue de Heisenberg, toute la dépendance temporelle est inclue dans les opérateurs et les états sont considérés comme constants. On choisit $t = 0$, comme point de coïncidence des deux descriptions, de sorte qu'à $t = 0$, $|\psi\rangle_H = |\psi(t)\rangle_S$. On a alors $\forall t$, $|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\widehat{H}t/\hbar} |\psi\rangle_H$. De la même manère, si un opérateur indépendant du temps est dans la description de Schrödinger, on le définit du point de vue d'Heisenberg par

$$\widehat{O}_H(t) = e^{i\widehat{H}t/\hbar}\, \widehat{O}_S\, e^{-i\widehat{H}t/\hbar} \tag{43}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{O}_H(t) &= \frac{i\widehat{H}}{\hbar}\widehat{O}_H(t) - \widehat{O}_H(t)\frac{i\widehat{H}}{\hbar} \\ &= \frac{i}{\hbar}\left[\widehat{H}, \widehat{O}_H(t)\right] \end{aligned}$$

qui est l'équation d'Heisenberg pour les opérateurs. Notons au passage qu'avec cette définition $\widehat{H}_H = \widehat{H}_S$.

Désormais, s'il n'y a pas de dépendance en temps explicite des états (ou d'indice H ou S), nous considérons des états du point de vue de Heisenberg.

Revenons au problème qui nous intéresse. On considère avoir une particule dans l'état de position $|q_I\rangle$ à $t = 0$, nous voulons connaitre l'amplitude de trouver cette particule en un état de position $|q_F\rangle$ après un temps T. En mécanique quantique cette amplitude est donnée par,

$$\langle q_F | q_I(T) \rangle = \langle q_F | \, e^{-i\widehat{H}T/\hbar} \, |q_I\rangle \tag{44}$$

Pour implémenter l'idée de l'intégrale de chemin que nous venons de décrire, nous remarquons qu'il faut segmenter la trajectoire de la particule en une infinité de petits trajets

[6] Nous écrivons ce mot en itallique pour appuyer sur le fait que le gros mot *maths* ne va pas forcément de pair avec *rigueur*. En effet, ici nous ne donnons qu'un avant-goût de rigueur mathématique et présentons l'intégrale de chemin de manière peu précise. Nous obtiendrons plus précisément ces résultats dans la section suivante.

élémentaires. Pour ce faire, nous divisions l'intervalle de temps T en N intervalles de temps $\Delta t = T/N$ (N sera voué à tendre vers l'infini à la fin du calcul) et nous insérons $N-1$ résolutions de l'identité $\widehat{I} = \int \mathrm{d}q \ |q\rangle \langle q|$. L'amplitude précédente devient,

$$\begin{aligned}
\langle q_F | q_I(T) \rangle &= \langle q_F | \, e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \dots e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \, |q_I\rangle \\
&= \langle q_F | \, e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \int \mathrm{d}q_{N-1} \ |q_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}| \, e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \dots \int \mathrm{d}q_1 \ |q_1\rangle \langle q_1| \, e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \, |q_I\rangle \\
&= \int \prod_i \mathrm{d}q_i \ \langle q_F | \, e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \, |q_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}| \dots |q_1\rangle \langle q_1| \, e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \, |q_I\rangle
\end{aligned}$$

Nous décrivons ici un calcul en 1 dimension d'espace par simplicité. Cependant, le calcul en 3 dimension d'espace ne change rien en complexité simplement en lourdeur des notations. Il est laissé comme exercice au lecteur.

Renommons $|q_I\rangle = |q_0\rangle$ et $|q_F\rangle = |q_N\rangle$, et étudions chaque amplitude élementaire $\langle q_{j+1} | \, e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \, |q_j\rangle$. Décomposons classiquement l'Hamiltonien en énergie cinétique et énergie potentielle,

$$\widehat{H} = \widehat{T} + \widehat{V} = \frac{\hbar^2 \widehat{p}^2}{2m} + \widehat{V}(q) \tag{45}$$

Dans la limite ou Δt est petit (N est grand), l'opérateur $e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar}$ devient ,

$$e^{-i\left(\widehat{T}+\widehat{V}(q)\right)\Delta t/\hbar} = e^{-i\widehat{T}\Delta t/\hbar} \ e^{-i\widehat{V}(q)\Delta t/\hbar} + O(\Delta t^2) \tag{46}$$

Ainsi pour $N \to \infty$, l'amplitude élémentaire $\langle q_{j+1} | \, e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \, |q_j\rangle$ se calcule alors par,

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1} | \, e^{-i\widehat{H}\Delta t/\hbar} \, |q_j\rangle &= \langle q_{j+1} | \, e^{-i\widehat{T}\Delta t/\hbar} \ e^{-i\widehat{V}(q)\Delta t/\hbar} \, |q_j\rangle \\
&= \langle q_{j+1} | \, e^{-i\widehat{T}\Delta t/\hbar} \, |q_j\rangle \, e^{-i\widehat{V}(q_j)\Delta t/\hbar} \\
&= \langle q_{j+1} | \, e^{-i\hbar\frac{\widehat{p}^2}{2m}\Delta t/} \int \mathrm{d}p \, |p\rangle \, \langle p | q_j \rangle \, e^{-i\widehat{V}(q_j)\Delta t/\hbar} \\
&= \int \mathrm{d}p \, \langle q_{j+1} | p \rangle \, \frac{e^{-ipq_j}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\hbar\Delta t\frac{p^2}{2m}} e^{-i\widehat{V}(q_j)\Delta t/\hbar} \\
&= \frac{e^{-i\widehat{V}(q_j)/\hbar}}{2\pi} \int \mathrm{d}p e^{-i\hbar\Delta t\frac{p^2}{2m} + ip(q_j - q_{j+1})} \\
&= \sqrt{\frac{-im}{2\pi\Delta t\hbar}} e^{\frac{im}{2\hbar}\frac{(q_j - q_{j+1})^2}{\Delta t}} e^{-i\widehat{V}(q_j)/\hbar}
\end{aligned}$$

Puis on peut calculer l'amplitude totale,

$$\langle q_F | q_I(T) \rangle = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{-im}{2\pi\Delta t\hbar}\right)^{N/2} \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{d}q_i \ e^{\frac{im}{2\hbar}\frac{(q_{i+1}-q_i)^2}{\Delta t}} e^{-i\widehat{V}(q_i)/\hbar} \tag{47}$$

Or, en considérant toujours N qui tend vers l'infini, $\Delta t \to 0$, d'où $\frac{(q_j - q_{j+1})^2}{\Delta t} \to \frac{m\dot{q}^2}{2}\Delta t$ et $\sum_i \Delta t \to \int \mathrm{d}t$. Nous obtenons finalement

$$\langle q_F | q_I(T) \rangle = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{-im\hbar}{2\pi\Delta t}\right)^{N/2} \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{d}q_i \ e^{i\int_0^T \mathrm{d}t \left[\frac{m\hbar\dot{q}^2}{2} - V(q)\right]} = \int Dq(t) \ e^{i\int_0^T \mathrm{d}t \left[\frac{m\dot{q}^2}{2\hbar} - V(q)/\hbar\right]} \tag{48}$$

Où l'on a noté,

$$\int Dq(t) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{-im}{2\pi\Delta t\hbar}\right)^{N/2} \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{d}q_i \tag{49}$$

Il est important à ce stade d'admettre qu'en tant que physicien nous avons cruellement manqué de rigueur et de faire quelques mises en garde. La première est assez simple, nous avons fait tendre N vers l'infini sans jamais se soucier de la convergence des intégrales complexes mises en jeu. De plus, nous n'avons jamais précisé sur quels chemins $q(t)$ nous *intégrons*. A ce stade nous savons seulement que les chemins sont tels que $q(0) = q_I$ et $q(T) = q_F$, ce qui n'est pas une information très restrictive. Les chemins considérés sont-ils continues, dérivables, réguliers ? Ce qui nous amène au troisième aspect problématique, cette intégrale est-elle définie ? En particulier, la quantité $\int Dq(t)$ est-elle réellement une mesure, et sur quel espace ? Nous ne répondrons pas ici à ces questions et, à vrai dire, je ne suis même pas sûr que qui que ce soit en ait les réponses, du moins pas dans le cas général[7]. Nous faisons déjà l'effort d'admettre notre ignorance et ne cachons même pas, pour une fois, nos défauts sous le tapis, ne nous demandons pas non plus de résoudre ces défauts!

Remarquons également que $L(q,\dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)$ est le Lagrangien et que $\int \mathrm{d}t\ L(q,\dot{q}) = S[q]$ définit l'action sur le chemin q. On peut finalement réécrire l'intégrale de chemin sous la forme,

$$\langle q_F | q_I(T)\rangle = \int Dq(t)\ e^{\frac{iS[q]}{\hbar}} \tag{50}$$

3.2 Formalisme pour les bosons

L'introduction précédente permet de comprendre *intuitivement*, mais vaguement le fonctionnement et la portée de l'intégrale de chemin. Elle constitue une introduction suffisante pour une compréhension *culturelle* du sujet, et permet déjà au lecteur d'entrevoir la puissance de ce formalisme. Cependant, l'introduction précédente est peu précise et générale. Nous donnons dans cette section une description beaucoup plus précise de l'intégrale de chemin. Une étude précise de cette description plus précise de l'intégrale de chemin est nécessaire pour une compréhension de sujets plus avancés dans de nombreux domaines (théorie quantique des champs et physique de la matière condensée). Ainsi, suivre rigoureusement cette section sera extrêment gratifiant pour n'importe quel physicien en devenir.

Pour rendre les calculs plus lisibles nous travaillons en unité,

$$\hbar = 1 \tag{51}$$

Nous restaurerons $\hbar$ là où il apparait en temps voulu.

Commençons par introduire quelques notations. Nous considérons un système décrit par des variables canoniques Q_a dont les moments conjugués sont notés P_a. Ces variables vérifient,

$$[Q_a, P_b]_- = i\delta_{ab} \tag{52}$$

$$[Q_a, Q_b]_- = [P_a, P_b]_- = 0 \tag{53}$$

[7] Pour les fonctions continues, on peut montrer que nous réussissons bien à définir une mesure dite mesure de Wiener.

Nous avons ajouté l'indice $-$ pour appuyer sur le fait que ces crochets sont des commuatauers et non pas des anti-commutateurs. Cela signifie simplement que nous étudions des variables bosoniques et non pas fermioniques.

Les Q_a commutent entre eux et nous pouvons alors choisir une base commune de diagonalisation pour eux que l'on note $|q\rangle$. Elle vérifie,

$$Q_a |q\rangle = q_a |q\rangle \tag{54}$$

où les q_a décrivent le spectre de Q_a (ses valeurs propres). Les Q_a étant également hermitiens cette base est également choisie orthonormale. C'est-à-dire,

$$\langle q'|q\rangle = \prod_a \delta(q'_a - q_a) \tag{55}$$

La même procédure peut être effectuée pour P_a et nous obtenons une base $|p\rangle$ telle que,

$$P_a |p\rangle = p_a |p\rangle \tag{56}$$

$$\langle p'|p\rangle = \prod_a \delta(p'_a - p_a) \tag{57}$$

$$\tag{58}$$

Nous pouvons également exprimer les q_a sur la base des p_a. Nous trouvons facilement,

$$\langle q|p\rangle = \prod_a \frac{e^{ip_a q_a}}{\sqrt{2\pi}} \tag{59}$$

Nous nous plaçons comme d'habitude du point de vue d'Heisenberg de la mécanique quantique, les opérateurs Q_a et P_a évoluent alors alors dans le temps selon,

$$Q_a(t) = \exp(iHt) Q_a \exp(-iHt) \tag{60}$$

$$P_a(t) = \exp(iHt) P_a \exp(-iHt) \tag{61}$$

A chaque instant t nous pouvons alors contruire des base orthonormales de vecteurs propres pour Q_a et P_a que l'on note (en empruntant les notations de Weinberg [2]),

$$|q;t\rangle = \exp(iHt) |q\rangle \tag{62}$$

$$|p;t\rangle = \exp(iHt) |p\rangle \tag{63}$$

Il est évident que le produit scalaire en reste inchangé,

$$\langle q;t|p;t\rangle = \langle q|p\rangle \tag{64}$$

Notre but est alors de calculer l'amplitude de trouver une particule dans un état $|q';t'\rangle$ à un instant t', sachant qu'elle était dans l'état $|q;t\rangle$ à l'instant t. C'est à dire nous souhaitons calculer la quantité,

$$\mathcal{A} = \langle q';t'|q;t\rangle \tag{65}$$

Nous commençons par calculer *l'amplitude infinitésimale*[8],

$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \langle q';t+\mathrm{d}t|q;t\rangle \tag{66}$$

[8]Nous utilisons ici le mot *infinitésimal* au sens l'amplitude obtenu pour une durée infinitésimale, ce qui ne veut pas dire que cette quantité est infitésimale en elle-même. Ceci n'a pas de sens c'est un nombre complexe!

où dt est une durée infinitésimalement petite. En utilisant la définition des états propres, il vient,

$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \left\langle q'; t \right| e^{-iH\mathrm{d}t} \left| q; t \right\rangle \tag{67}$$

Tel qu'elle H est une fonction fixée de Q et P et non de $Q(t)$ et $P(t)$. Cepedant, comme H commute avec lui même, il est évident que,

$$H = H(Q, P) = H(Q(t), P(t)) \tag{68}$$

De plus, nous utilisons les relations dee commutation sur Q et P afin de placer les opérateur Q toujours à gauche des opérateurs P, de sorte que,

$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \left\langle q'; t \right| e^{-iH\mathrm{d}t} \left| q; t \right\rangle = \left\langle q'; t \right| e^{-iH(q'(t), P(t))\mathrm{d}t} \left| q; t \right\rangle \tag{69}$$

On insère désomrais une résolution de l'identité sous la forme,

$$\mathbf{1} = \int \prod_a \mathrm{d}p_a \left| p; t \right\rangle \left\langle p; t \right| \tag{70}$$

Il vient alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathcal{A} &= \int \prod_a \mathrm{d}p_a \left\langle q'; t \right| e^{-iH(q'(t), P(t))\mathrm{d}t} \left(\left| p; t \right\rangle \left\langle p; t \right| \right) \left| q; t \right\rangle \\
&= \int \prod_a \mathrm{d}p_a e^{-iH(q'(t), p(t))\mathrm{d}t} \left\langle q'; t \middle| p; t \right\rangle \left\langle p; t \middle| q; t \right\rangle \\
&= \int \prod \frac{\mathrm{d}p_a}{2\pi} \exp\left(-iH(q'(t), p(t)\mathrm{d}t + i \sum_a (q'_a - q_a) p_a \right)
\end{aligned}$$

Imaginons désormais revenir au problème de départ où nous étudions l'évolution sur une durée finie $t' - t$. On sépare cet intervalle en $\tau_0 = t,\ \tau_1, \ldots,\ \tau_N,\ \tau_{N+1} = t'$ tels que,

$$\mathrm{d}\tau = \tau_{k+1} - \tau_k = \frac{t' - t}{N + 1} \tag{71}$$

N est bien entendu considéré comme tendant vers l'infini de sorte que ces intervalles de temps soient infinitésimaux et que l'on puisse utiliser le résultat précédent. En effet, il nous suffit désormais d'insérer N résolutions de l'identité sous la forme,

$$\mathbf{1} = \int \prod_a \mathrm{d}q_{k,a}\ \left| q_k; \tau_k \right\rangle \left\langle q_k; \tau_k \right| \tag{72}$$

L'amplitude $\mathcal{A}$ devient alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \int &\left(\prod_{k=1}^{N} \prod_a \mathrm{d}q_{k,a} \right) \left(\prod_{k=0}^{N} \prod_a \frac{\mathrm{d}p_{k,a}}{2\pi} \right) \\
&\times \exp\left[i \sum_{k=1}^{N+1} \left(\sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) \mathrm{d}\tau \right) \right]
\end{aligned}$$

où l'on a noté $q_0 = q$ et $q_{N+1} = q'$.
On choisit des fonctions $q_a(t)$, $p_a(t)$ telles que,

$$q_a(\tau_k) = q_{k,a} \ \text{ et } \ p_a(\tau_k) = p_{k,a} \tag{73}$$

Lorsque l'on passe à la limite $N \to \infty$, soit alors $\mathrm{d}\tau \to 0$, l'expression précédente devient,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = &\int_{q(t)=q,\, q(t')=q'} \prod_{t,a} \mathrm{d}q_a(t) \prod_{t,a} \frac{\mathrm{d}p_a(t)}{2\pi} \\ &\times \exp\left[-i\int \mathrm{d}t \left(\sum_a \dot{q}_a(t)p_a(t) - H(q(t),p(t))\right)\right]\end{aligned}$$

où l'on a défini la *mesure* sur les chemins $q(t)$ et $p(t)$ par,

$$\prod_{t,a} \mathrm{d}q_a(t) \prod_{t,a} \frac{\mathrm{d}p_a(t)}{2\pi} = \lim_{\mathrm{d}\tau\to 0} \prod_{k=1}^{N}\prod_a \mathrm{d}q_{k,a} \prod_{k=0}^{N}\prod_a \frac{\mathrm{d}p_{k,a}}{2\pi} \tag{74}$$

Remarquons que la méthode précédente permet de calculer bien plus que des amplitudes. En effet nous pouvons calculer les éléments de matrice de n'importe quel produit d'opérateurs $O_1(Q(t_1),P(t_1))\ldots O_i(Q(t_i),P(t_i))$. Contrairement à l'Hamiltonien, nous plaçons tous les opérateur P à gauche des opérateurs Q dans les expressions de $O_1,\ldots,O_i$. Pour,

$$t' > t_1 > \ldots > t_i > t \tag{75}$$

il vient alors,

$$\begin{aligned}&\left\langle q';t'\right| O_i\left(Q(t_i),P(t_i)\right)\ldots O_1\left(Q(t_1),P(t_1)\right)|q;t\rangle = \\ &\qquad\int_{q(t)=q,\, q(t')=q'} \prod_{t,a} \mathrm{d}q_a(t) \prod_{t,a} \frac{\mathrm{d}p_a(t)}{2\pi} \\ &\qquad\times \exp\left[-i\int \mathrm{d}t \left(\sum_a \dot{q}_a(t)p_a(t) - H(q(t),p(t))\right)\right] \\ &\qquad\times O_1\left(q(t_1),p(t_1)\right)\ldots O_i\left(q(t_i),p(t_i)\right)\end{aligned}$$

De manière plus générale, pour des opérateurs évalués à des temps, quelconques $t_A, t_B, \ldots$, il vient

$$\begin{aligned}&\int_{q(t)=q,\, q(t')=q'} \prod_{t,a} \mathrm{d}q_a(t) \prod_{t,a} \frac{\mathrm{d}p_a(t)}{2\pi} \\ &\qquad\times \exp\left[-i\int \mathrm{d}t \left(\sum_a \dot{q}_a(t)p_a(t) - H(q(t),p(t))\right)\right] \\ &\qquad\times O_A\left(q(t_A),p(t_A)\right) O_B\left(q(t_B),p(t_B)\right)\ldots \\ &\qquad= \left\langle q';t'\right| T\left\{O_A\left(Q(t_A),P(t_A)\right) O_B\left(Q(t_B),P(t_B)\right)\ldots\right\}|q;t\rangle\end{aligned}$$

où T désigne l'opérateur d'ordonnement dans le temps, qui placent les opérateurs évalués aux temps les plus tards à gauche.

Ce sont ces formules qui portent le nom *d'intégrale de chemin*. Appuyons sur le fait que dans ces formules, les variables $q_a(t)$ et $p_a(t)$ n'ont aucun lien entre elles contrairement au formalisme canonique où p désigne la variable conjuguée canoniquement à p. Cependant, il y a bien une manière de faire le lien entre les variables classiques et ces variables d'intégration. Etudions ce que devient cette expression dans la limite classique où $\hbar \to 0$. Avant de pouvoir faire tendre $\hbar$ vers sa limite classique, il faut déjà que nous le restaurions dans nos équations. Remarquons que formellement, l'intégrale de chemin fait apparaitre un terme,

$$\exp(-iET) \tag{76}$$

où E est une énergie et T un temps. Pour que la quantité dans l'exponentielle reste sans dimension, il faut alors faire apparaitre un terme en $[J.s]^-1$, soit alors $1/\hbar$. Ainsi, en unité SI, l'exponentielle prend la forme,

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}ET\right) \tag{77}$$

L'apparition de ce $\hbar$ peut être retracée jusqu'au tout début de notre calcul.

On évalue désormais l'intégrale dans la limite $\hbar \to 0$ par l'approximation de la phase stationnaire, c'est-à-dire que les uniques contributions à cette intégrale sont celles telles que les variations d'un chemin δq_a et δp_a laissent la phase de l'intégrande stationnaire. Nous pouvons étudier ces deux variations indépendemment. Commençons par l'étude des variations δq_a, pour chaque a. La condition de stationnarité s'écrit,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_t^{t'} \left(\delta\dot{q}_a p_a(t) - \frac{\partial H}{\partial q_a(t)}\delta q_a\right) \\ &= \int_t^{t'} \left(-\dot{p}_a(t) - \frac{\partial H}{\partial q_a(t)}\right)\delta q_a \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que nous considérons des variations qui conservent les conditions aux bords sur q_a, afin que le chemin soient bien un chemin intervenant dans l'intégrale de chemin, pour faire disparaitre les termes de bord de l'intégration par parties. Cette équation donne alors une des équations d'Hamilton,

$$\dot{p}_a(t) = -\frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial q_a(t)} \tag{78}$$

Nous obtenons l'autre équation d'Hamilton en considérant les variations δp_a pour a fixé. Elles donnent (cette fois sans avoir besoin d'un intégration par parties donc sans aucune condition sur les comportements aux bords de p_a, ce qui est rassurant car rien dans l'intgérale de chemin ne fixe le comportement des p_a aux bords),

$$\dot{q}_a(t) = +\frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial p_a(t)} \tag{79}$$

3.3 Calculer l'intégrale de chemin : les relations fondamentales

On s'intéresse désormais à une classe particulière d'Hamiltoniens pour lesquels nous pouvons calculer explicitement l'intégrale de chemin. Ces Hamiltoniens sont ceux quadratiques en les variables P_a, c'est à dire ce que l'on peut écrire,

$$H(Q, P) = \frac{1}{2}\sum_{a,b} A_{ab}(Q)P_aP_b + \sum_a B_a(Q)P_a + C(Q) \tag{80}$$

où A est symétrique définie positive. Le facteur $1/2$ est conventionnel. Son sens apparaitra lorsque nous évalueront les intégrales de chemin grâce aux intégrales de Gauss.

L'argument dans l'exponentielle devient alors (en oubliant les facteurs multiplicatifs inutiles),

$$\int \mathrm{d}t \left(-\frac{1}{2}\sum_{a,b} A_{ab}(q)p_a(t)p_b(t) - \sum_a [B_a(q) - \dot{q}_a(t)]p_a(t) - C(q)\right) \tag{81}$$

Que l'on peut réécrire pour se rapprocher le plus possible d'un intégrale de Gauss sous la forme,

$$\sum_{a,b} \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t' - \frac{1}{2} A_{ab}\delta(t-t')(q)p_a(t)p_b(t') - \sum_a \int \mathrm{d}t[B_a(q) - \dot{q}_a(t)]p_a(t) - C(q) \tag{82}$$

La raison pour laquelle nous indiquons que nous rapprochons de la forme d'une intégrale gaussienne n'est peut être pas si évidente. Cela vient du fait que nous intégraons sur une infinité de variables, à savoir les $p_a(t)$ quelque soient a et t. Pour N variables x_i réelles et des matrices M, J, M étant symétrique définie positive, nous savons calculer la quantité,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}x_i \right) \exp\left(-\frac{1}{2} i x^T M x - iJx \right) \tag{83}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}x_i \right) \exp\left(-\frac{1}{2} i \sum_{lk} M_{lk} x_k x_l - i \sum_k J_k x_k \right) \tag{84}$$

L'intégrande qui apparait dans l'intégrale de chemin ext exactement de cette forme là, sauf que les indices k, l sont remplacés par des indices continus (a, t) et (b, t'). Ainsi comprendre comment résoudre l'intégrale pour les x_i nous permettra de comprendre comment la résoudre pour nos variables $p_a(t)$. Rappelons alors comment nous calculons l'intégrale pour les x_i.

On commence déjà par trouver une variable nous rapprochant fortement de l'intégrale de Gauss centrée. Pour ce faire, on doit trouver E, telle que,

$$\frac{1}{2}(x-E)^T M(x-E) - \frac{1}{2} E^T M E = \frac{1}{2} x^T M x + Jx \tag{85}$$

On trouve facilement,

$$\frac{1}{2}(E^T M x + x^T M E) = -Jx \tag{86}$$

et comme

$$(x^T M E)^T = E^T M^T x = E^T M x \tag{87}$$

Il vient,

$$E = -M^{-1} J^T \tag{88}$$

On effectue alors le changement de variable dans I

$$y = x - E \tag{89}$$

Le Jacobien de ce changement de variable est trivialement égal à 1, d'où

$$I = e^{-\frac{i}{2} E^T M E} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}y_i e^{-\frac{i}{2} y^T M y} \right) \tag{90}$$

On peut calculer plus précisément la constante exponentielle,

$$iE^T M E = -iE^T J^T = iJM^{-1} J^T \tag{91}$$

Désormais utilisons le fait que M est symétrique pour lui trouver une matrice orthogonale O la diagonalisant. C'ets à dire qu'on peut trouver $O \in O(N, \mathbb{R})$ orthogonale telle que,

$$M = O^T \mathrm{diag}(m_1, m_2, \ldots, m_N) O \tag{92}$$

où les m_i sont les valeurs propres de M (strictement positives car M est définie positive). Faisons alors le changement de variable, $z = Oy$ dans I. Le Jacobien de ce changement de variable vaut 1 car O est orthogonale. Il vient alors,

$$\begin{aligned}
I &= e^{-\frac{i}{2}iE^T ME} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}z_i e^{-\frac{i}{2}z^T \mathrm{diag}(m_1, m_2, \ldots, m_N) z} \right) \\
&= e^{-\frac{i}{2}iE^T ME} \prod_i \mathrm{d}z_i \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}m_i z_i^2} \right) \\
&= \prod_i \sqrt{\frac{2\pi}{im_i}} e^{-\frac{i}{2}iE^T ME} \\
&= \sqrt{\frac{-i2\pi}{\det(M)}} e^{-\frac{i}{2}iE^T ME}
\end{aligned}$$

Le plus intéressant à remarquer dans cette expression est le terme qui apparait dans l'exponentielle. Nous montrer désormais qu'il correspond à l'argument de l'exponentielle évalué en son point stationnaire.
Le point stationnaire se trouve en

$$\bar{x} = -M^{-1}J^T \tag{93}$$

Si l'on évalue l'argument de l'exponentielle en ce point, on obtient,

$$-i\frac{1}{2}JM^{-1}MM^{-1}J^T + JM^{-1}J^T = \frac{1}{2}iJM^{-1}J^T \tag{94}$$

C'est le réssultat principal à retenir,

Pour une intégration gaussienne d'une fonction qudratique, le résultat s'écrit comme l'exponentielle de l'argument évalué au point critique de celui-ci (à une constante de normalisation près).

Si l'on revient à notre problème physique sur l'intégrale de chemin. Il nous faut donc trouver le point stationnaire de

$$\Theta = \sum_{a,b} \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t' - \frac{1}{2}A_{ab}\delta(t-t')(q)p_a(t)p_b(t') - \sum_a \int \mathrm{d}t[B_a(q) - \dot{q}_a(t)]p_a(t) - C(q) \tag{95}$$

Cela s'écrit,

$$0 = \frac{\delta}{\delta p_c(\tau)}\Theta = \frac{\delta}{\delta p_c(\tau)} \int \mathrm{d}t\dot{q}_a(t)p_a(t) - H(p,q) \tag{96}$$

Le point stationnaire est alors décrit par les équations,

$$\dot{q}_c(\tau) = \frac{\delta H(p,q)}{\delta p_c(\tau)} \tag{97}$$

qui est exactement la valeur associé aux moments conjugués dans le formalisme canonique. On peut alors réécrire l'intégrale de chemin sous la forme,

$$\begin{aligned}
&\int_{q(t)=q,\, q(t')=q'} \prod_{t,a} \mathrm{d}q_a(t) \prod_{t,a} \frac{\mathrm{d}p_a(t)}{2\pi} \times \exp\left[-i\int \mathrm{d}t \left(\sum_a \dot{q}_a(t)p_a(t) - H(q(t), p(t)) \right) \right] \ldots \\
&\quad = \int_{q(t)=q,\, q(t')=q'} \prod_{t,a} \mathrm{d}q_a(t) \exp\left[-i\int \mathrm{d}tL(q,\dot{q}) \right] \ldots \\
&\quad = \int_{q(t)=q,\, q(t')=q'} \prod_{t,a} \mathrm{d}q_a(t) \exp\left[-iS[q] \right] \ldots
\end{aligned}$$

3.4 Fermions

Les modes quantifiés que nous avons étudié jusqu'ici étaient bosoniques. il s'agit désormais de généraliser la démarche exposée précédemment pour des fermions. Rappelons que les relations vérifiées pour les variables fermioniques sont,

$$\{Q_a, P_b\} = i\delta_{ab} \tag{98}$$

$$\{Q_a, Q_b\} = \{P_a, P_b\} = 0 \tag{99}$$

La première étape est alors de trouver des vecteurs sur lesquels agir avec ces opérateurs.

References

[1] Steven Weinberg. *Lecture on Quantum Mechanics, Cambridge*. Cambridge University Press, 2013. ISBN: 978-1-107-02872-2.

[2] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Vol. 1. Cambridge University Press, 1995.