

# Aspects topologiques

Tanguy Marsault

12 août 2024

## 1 Solitons (ou *kinks*)

On se place en dimension  $d = 1 + 1$  (une dimension d'espace et une dimension de temps).

Avec un champs scalaire  $\varphi$ , considérons le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi) \quad (1)$$

où l'on a

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - v^2)^2 \quad (2)$$

de telle sorte qu'une brisure spontanée de symétrie a lieu, forçant  $\varphi$  a choisir préférentiellement  $\pm v$  comme état fondamental.

Par exemple, en choisissant  $+v$ , on introduit le nouveau champ  $\chi$  par  $\varphi = \chi + v$ . Le lagrangien devient :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2} \left( \sqrt{2\lambda}v^2 \right)^2 \chi^2 + O(\chi^3)$$

Et le nouveau méson  $\chi$  (un champ scalaire est typiquement un méson) a acquis la masse  $\sqrt{2\lambda}v^2$ .

Toutefois ce n'est pas la seule configuration de champ stable possible. En effet, Figure 1 nous décrit une configuration telle que  $\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm v$ , et qui passe de  $-v$  à  $+v$  sur une distance caractéristique  $l$  autour d'un point  $x_0$ . On peut calculer l'énergie de cette configuration pour vérifier qu'elle est bien stable.

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + V(\varphi) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, 2V(\varphi) \\ &= \int_{-v}^{+v} d\varphi \frac{dx}{d\varphi} 2V(\varphi) \\ &= \int_{-v}^{+v} d\varphi \sqrt{2V(\varphi)} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que pour la quantification canonique les champs vérifient les équations du mouvement et comme on considère une configuration indépendante du

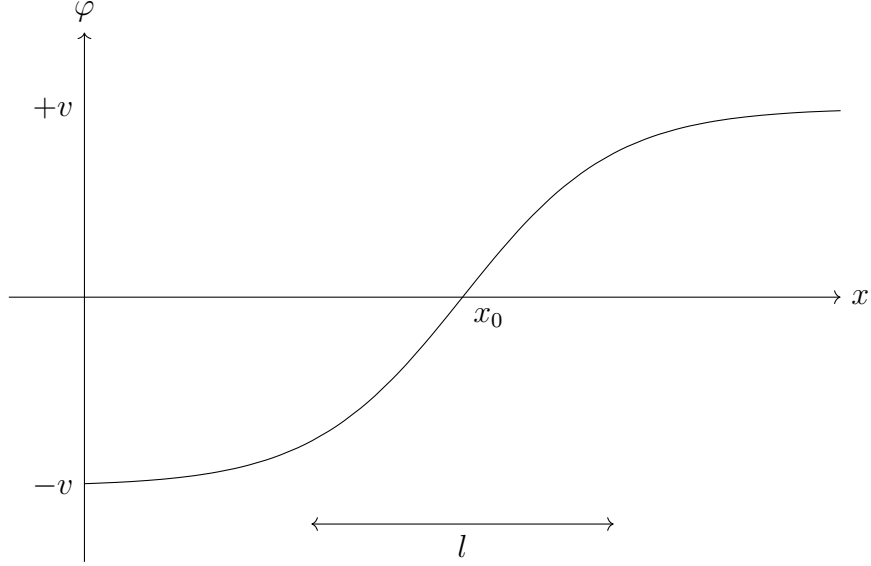


FIGURE 1 – Un soliton

temps ( $\partial_0 \varphi = 0$ )  $\frac{1}{2}(\partial \varphi)^2 = V(\varphi)$ . En utilisant désormais  $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned} E &= \int_{-v}^{+v} d\varphi \sqrt{\frac{\lambda}{2}} |\varphi^2 - v^2| \\ &= +\frac{4}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v^3 \end{aligned}$$

Ainsi l'énergie de cette configuration est finie et cette configuration peut exister. Et comme il faudrait une énergie infinie pour s'en débarrasser (remonter ou rabaisser une des deux branches), cette configuration est stable.

Notons par  $\varepsilon$ , sa densité linéique d'énergie,

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - v^2)^2 \quad (3)$$

Et définissons sa masse (nous allons voir par la suite qu'il peut être interprété comme une particule),

$$M = \int dx \varepsilon(x) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v^3 = \frac{4}{3\sqrt{2}} \frac{\mu^3}{\lambda} \quad (4)$$

Où  $\mu$  est la constante de couplage classique lorsque l'on écrit le Lagrangien sous la forme  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial \vec{\varphi})^2 - \mu^2 \vec{\varphi}^2] - \frac{\lambda}{4}(\vec{\varphi}^2)^2$  et que  $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ . Remarquons alors que l'énergie du kink est proportionnelle à  $\lambda^{-1}$  et donc un tel objet est par nature non perturbatif et n'apparaît pas dans les diagrammes de Feynman.

On cherche désormais à déterminer la valeur de  $l$ , l'étendue du *kink*. Cette valeur est régie par la balance entre énergie cinétique et énergie potentielle.

Loin de  $x_0$ ,  $\varepsilon(x) = 0$ . On peut alors évaluer indépendamment les contributions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle à la masse :

$$\begin{aligned} \int dx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 &\simeq l \times \frac{v^2}{l^2} = \frac{v^2}{l} \\ \int dx \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - v^2)^2 &\simeq l \lambda v^4 \end{aligned}$$

Ainsi, on détermine  $l$  en minimisant  $M(l) \simeq \frac{v^2}{l} + l\lambda v^4$ . Soit alors  $l \simeq (\lambda v^2)^{-1/2} = \frac{1}{\mu}$ . Remarquons désormais que par invariance par translation, on peut toujours déplacer le *kink* à n'importe quel point  $x$ , et par invariance de Lorentz, on peut même le faire se déplacer à vitesse constante. Ainsi, nous avons une configuration, d'énergie  $M$ , d'étendue spatiale  $l$ , qui peut devenir aussi faible qu'on le souhaite et qui se déplace. On peut l'identifier à une particule.

La seule manière dont on peut se débarrasser d'un kink est d'introduire un antikink comme sur la Figure 2. Cette configuration admet aussi une énergie stable mais

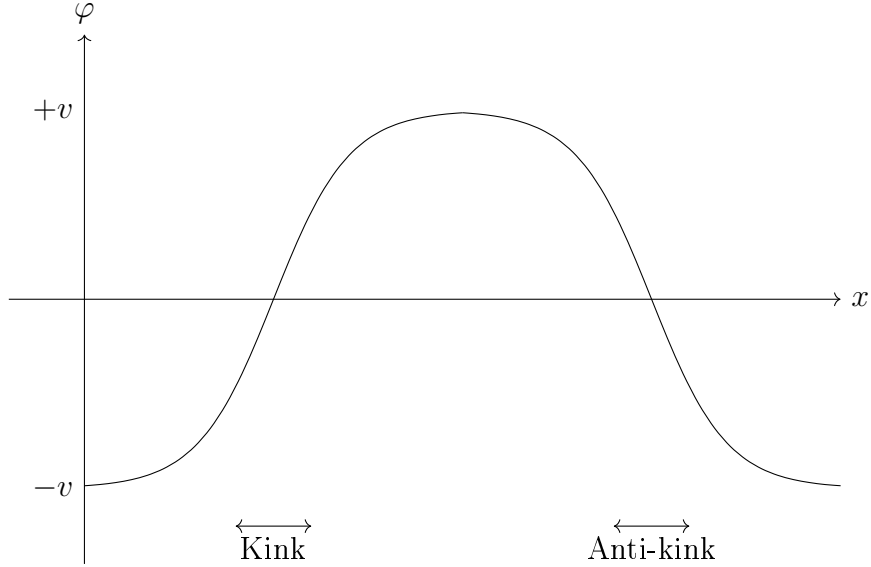


FIGURE 2 – Un kink suivi d'un antikink

peut cette fois se désintégrer car cela ne demanderait qu'une énergie finie de faire disparaître ce système kink/antikink. Une manière d'exprimer cette possibilité ou non de faire disparaître de telles configurations de champs, est d'introduire le courant topologique

$$J_T^\mu = \frac{1}{2v} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \quad (5)$$

Ce courant est conservé :  $\partial_\mu J_T^\mu = 0$ , mais cela n'a aucun rapport avec le théorème de Noether, c'est un fait purement topologique qui ne dépend pas non plus de la géométrie de l'espace.

La charge conservée associée est

$$Q_T = \int dx J^0(x) = \frac{1}{2v} [\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)] \quad (6)$$

Soit alors  $Q_T = 1$  pour un kink et  $Q_T = -1$  pour un antikink. Le système kink/antikink est alors bien de charge  $Q_T = 0$ , comme pour un méson. On parle de charge topologique.

## 2 Vortex

On considère désormais travailler dans un espace de dimension  $d = 2 + 1$ . En introduisant un champ scalaire complexe  $\varphi$  (qui est équivalent à deux champs scalaires

réels), le Lagrangien prend la forme :

$$\mathcal{L} = \partial\varphi^\dagger\partial\varphi - \lambda (\varphi^\dagger\varphi - v^2)^2 \quad (7)$$

Le potentiel correspond au fameux *chapeau Mexicain*. (voir Brisure de symétrie spontanée).

On s'intéresse de nouveau à des configurations de champ qui ne dépendent pas du temps. En analogie avec la section précédente, cette configuration de champ aurait la masse

$$M = \int d^2x \left[ \partial\varphi^\dagger\partial\varphi + \lambda (\varphi^\dagger\varphi - v^2)^2 \right] \quad (8)$$

Pour que  $M$  puisse rester fini, il faut que  $|\varphi| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} v$ .

Ainsi, nous faisons l'ansatz  $\varphi \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} v e^{i\theta}$ , où nous avons désormais utilisé les coordonnées polaires. En écrivant,  $\varphi = \phi_1 + i\phi_2$ , à l'infini il vient  $(\phi_1, \phi_2) = v(\cos\theta, \sin\theta) \parallel \hat{e}_r$ . Ainsi, le champ est orienté radialement, comme sur la Figure 3. Toutefois ce qui

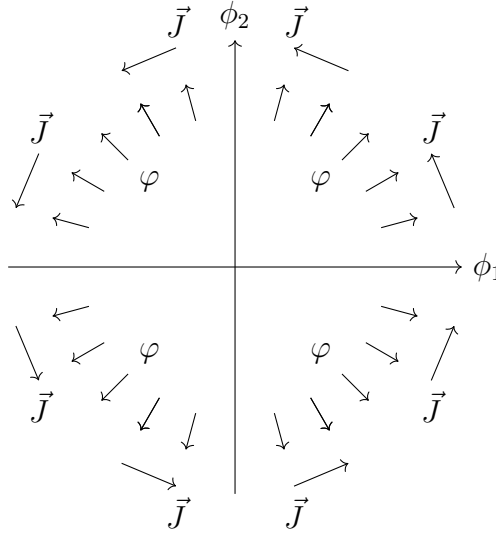


FIGURE 3 – Un vortex

donne à cette configuration le nom de vortex, c'est plutôt le vecteur  $\vec{J}$  présent sur la figure.

Le Lagrangien est invariant par la transformation globale de  $U(1)$   $\varphi \longrightarrow e^{i\alpha}\varphi$  et  $\varphi^\dagger \longrightarrow e^{-i\alpha}\varphi^\dagger$ . Cette symétrie du Lagrangien donne naissance à un courant conservé par le théorème de Noether qui vaut  $J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^\dagger)}\delta\varphi^\dagger$  soit alors

$$J^\mu = i (\partial^\mu\varphi^\dagger) \varphi - i\varphi^\dagger (\partial^\mu\varphi) \quad (9)$$

Comme nous ne considérons que des configurations de champs qui ne dépendent pas du temps dans un espace à deux dimensions, il vient alors

$$J_i = i (\partial_i\varphi^\dagger\varphi - \varphi^\dagger\partial_i\varphi) \quad (10)$$

En effectuant le changement de coordonnées,  $\begin{cases} \partial_1 = -\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta + \frac{1}{\cos\theta}\partial_r \\ \partial_2 = \frac{1}{r\cos\theta}\partial_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\partial_r \end{cases}$  il vient alors  $\vec{J} = (J_1, J_2) = -2\frac{v^2}{r} \cos\theta \sin\theta (\cos\theta, -\sin\theta) \parallel \hat{e}_\theta$ . Ainsi le courant *s'enroule* à l'infini, d'où le nom vortex.

En réalité, l'ansatz choisie n'est pas la seule possible et plus généralement le champ peut prendre la forme  $\varphi \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} ve^{in\theta}$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ .  $n$  représente le nombre de fois où le champs  $\varphi$  s'enroule autour du vortex à l'infini. Ce résultat vient du fait que  $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ , où  $\Pi_1(\mathcal{M})$  est le groupe d'homotopie d'ordre 1 pour la variété  $\mathcal{M}$ , qui compte les applications topologiquement différents  $S^1 \rightarrow \mathcal{M}$ .

Ainsi dans notre exemple en dimension  $d = 2 + 1$ , l'infini spatial correspond à  $S^1$  topologiquement, et les conditions *aux bords* sur  $\varphi$  définissent une application  $S^1 \rightarrow \mathcal{M}$ , or la condition  $|\varphi| = v$  force  $\mathcal{M} = S^1$ . Il y a alors  $\mathbb{Z}$  configurations stables de champ possibles.

Cependant, tout ce que nous venons de faire garanti la convergence du deuxième terme dans l'expression (8) de  $M$ , mais qu'en est-t-il du premier ?

$$\begin{aligned}\partial_1 \varphi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta \varphi \\ &= -\frac{in}{r \sin \theta} ve^{in\theta} \\ &\sim \frac{v}{r} \\ \partial_2 \varphi &= -\frac{1}{r \cos \theta} \partial_\theta \varphi \\ &= -\frac{in}{r \cos \theta} ve^{in\theta} \\ &\sim \frac{v}{r}\end{aligned}$$

et donc

$$\partial_i \varphi \sim \frac{v}{r} \quad (11)$$

et le premier terme de  $M$  évolue comme  $\sim \int d^2x \frac{v^2}{r^2}$  et diverge logarithmiquement.

Ainsi, une telle configuration de champ n'est pas possible. Toutefois, en plaçant un vortex et un antivortex proches l'un de l'autre il est possible de faire diminuer la contribution de ce terme jusqu'à rendre une telle configuration stable.

Une autre approche plus intéressante pour trouver une configuration stable est d'introduire un champ de jauge  $A^\mu$  de telle sorte que

$$\partial_i \varphi \rightarrow D_i \varphi = \partial_i \varphi - ie A_i \varphi \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0 \quad (12)$$

En notant de nouveau que  $\partial_i \varphi \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} in\varphi \partial_i \theta$ , il faut

$$A_i \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \frac{n}{e} \partial_i \theta \quad (13)$$

L'introduction de ce champ de jauge force alors l'ajout d'un terme  $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  au Lagrangien, qui a son tour peut de nouveau faire diverger l'énergie. Mais on remarque que  $A_\mu$  est de la forme  $\partial_\mu \frac{n}{e} \theta$  à l'infini, qui est une jauge pure. Ainsi à l'infini,  $F_{\mu\nu} = 0$  puis alors, il n'y aurait qu'un terme d'énergie finie à ajouter.

La question qu'il est alors légitime de se poser est que change ce nouveau champ de jauge à la physique ? Il suffit de regarder la contribution de  $\oint \vec{A} \cdot \vec{dl}$  à l'infini. Cette contribution correspond au flux magnétique porté par le vortex  $\Phi$ .

$$\Phi = \oint_{S^\infty} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \oint_{S^\infty} A^\theta r d\theta = -\frac{2\pi n}{e} \quad (14)$$

Le vortex porte désormais un flux magnétique  $\Phi$  quantifié !

---

### 3 $d = 3 + 1$ et monopoles magnétiques