# Grado en Ingeniería Informática

## MÉTODOS NUMÉRICOS Y OPTIMIZACIÓN

TEMA 1

---

## Resolución numérica de ecuaciones

Docente:

María José Zapatero Moreno

Universidad de Burgos

# Índice de contenidos

# I. Introducción

El **análisis numérico** o **cálculo numérico** es la rama de las matemáticas que se encarga de diseñar algoritmos para simular procesos matemáticos complejos y, así, dar soluciones a procesos de la Ciencia y la Ingeniería .

Por supuesto la resolución es numérica y por tanto aproximada y sólo es posible con el auxilio de ordenadores, por ello no sólo es importante obtener soluciones sino conocer (o acotar) los errores cometidos y así ser crítico con los resultados obtenidos.

# II. Objetivos

- Comprender el concepto de método numérico y saber enumerar sus partes.
- Distinguir claramente los distintos tipos de errores, saber utilizar distintos criterios para acotar errores.
- Conocer, saber implementar y utilizar algunos algoritmos de acotación de raíces en intervalos.
- Conocer y saber implementar y usar algunos algoritmos de aproximación de raíces: el método de punto fijo y el método de Newton.

# III. Contenidos específicos del tema

## 1. Introducción

### 1.1 Definición de método numérico

Un problema práctico que aparece con mucha frecuencia es el de hallar las raíces de polinomios. Dicho problema tiene solución cerrada (es decir fórmulas de resolución) sólo para polinomios de grado no superior a 4 (fórmulas de Cardano). Se puede hacer algo en el caso particular de que el polinomio tenga alguna raíz entera porque se sabe que las posibilidades son finitas, sin embargo, si, como suele ocurrir, el polinomio es de grado mayor que 4 y no tiene raíces enteras, no existe ninguna fórmula cerrada para hallar sus raíces.

Si el problema es encontrar raíces de funciones que no sean polinomios la situación se agrava ya que ecuaciones tan sencillas como $x+e^x=3$ sólo pueden resolverse algebraicamente en casos muy particulares.

Para resolver de forma efectiva (aunque aproximada) éste y otros problemas similares el Cálculo Numérico ofrece una forma de proceder:

1º) Analizar los datos conocidos.
2º) Crear un algoritmo (es decir una sucesión de sentencias que permita encontrar una solución del problema).
3º) Hacer un organigrama (un esquema) del algoritmo.
4º) Implementarlo en algún lenguaje informático.

5º) Analizar la solución obtenida.

6º) Acotar los errores cometidos en el método.

Un **método numérico** es un algoritmo que permite obtener soluciones aproximadas a un problema. Generalmente consta de los pasos anteriormente citados.

- El **método** es **exacto** si se obtiene la solución exacta tras ejecutar el algoritmo.
- El **método** es **iterativo** si partiendo de $x^{(0)}$ , un valor "cercano" a la solución, se genera una sucesión de aproximaciones sucesivas $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ que, se espera, converja a la solución real.

Nosotros no vamos a analizar todas las etapas que constituyen un método numérico porque están fuera de los propósitos de la asignatura que nos ocupa, pero sí vamos a intentar un acercamiento a dichas técnicas usando distintas técnicas.

## 1.2 Aproximaciones de datos y de soluciones

A la hora de trabajar con valores no exactos lo primero que hay que precisar es lo que entendemos por aproximación.

Tolerancia

Llamamos tolerancia, T , a un número real prefijado por el usuario de un método numérico que se utiliza para dar un criterio de aceptación de los resultados del algoritmo.

Nota: la tolerancia es el error que estamos dispuestos a admitir y su definición es relativa al problema que estemos tratando. Por ejemplo, una tolerancia de un millón no es lo mismo cuando estamos hablando del presupuesto de un polideportivo o del de una mesa.

Aproximación

Dado $r \in \Re$ decimos que $r_1$ es una aproximación a r $\Leftrightarrow$ $|r - r_1| < T$ , también decimos que r es un dato aproximado.

Solución aproximada

Dado un problema con solución exacta s decimos que $s_1$ es una solución aproximada del problema $\Leftrightarrow$ $|s - s_1| < T$.

Nota: Lógicamente la definición anterior no es útil en la práctica, porque si conocemos la solución exacta de un problema no necesitamos conocer soluciones aproximadas, sin embargo, posteriormente veremos una forma de verificar en la práctica que una solución es aproximada.

Datos aproximados (errores en los datos):

En la mayor parte de los casos los datos de los que se parte no son exactos sino que son aproximaciones, ( por ejemplo 1.4142 en lugar de √2 ) . Esto ha de tenerse en cuenta a la hora de fijar la tolerancia, ya que si partimos de aproximaciones con dos decimales nunca tendremos mejor aproximación a la solución real que las centésimas (luego es absurdo fijar una tolerancia menor que $10^{-2}$ y también a la hora de escoger el método porque generalmente cuanto más "exacto" es un método más costoso es implementarlo, de forma que hay que buscar el método apropiado a la exactitud de nuestros datos iniciales y a la exactitud que precisamos.

## 1.3 Introducción a la teoría de errores

Además de los errores en los datos existen otros tipos de errores, unos debidos al método numérico concreto (y a su implementación) y otros a la máquina en la que se esté ejecutando el algoritmo.

Error absoluto

Dados $s \in \mathbb{R}$ y $x^{(1)}$ una aproximación de s, se llama error absoluto a

$$E\left(x^{(1)}\right) = \left|s - x^{(1)}\right|$$

Nota: generalmente el error absoluto no da información real de "lo cerca o lejos que están dos valores" (1 metro puede ser un error muy grande o muy pequeño según se mida una mesa o la distancia de la Tierra al Sol) por ello se usa el error relativo

Error relativo

Se llama error relativo al valor $\delta\left(x^{(1)}\right) = \dfrac{E\left(x^{(1)}\right)}{|s|}$

Nota: normalmente se trabaja con el error relativo en porcentaje (es decir, multiplicado por 100)

Nota: ya hemos comentado anteriormente que generalmente no se conocen ni el error absoluto ni el relativo por ello se usan cotas de estos valores es decir valores E y δ que verifican

$$\boxed{E\left(x^{(1)}\right) \le E \qquad E\left(x^{(n)}\right) \le E \;; \qquad \delta\left(x^{(1)}\right) \le \delta}$$

Errores de redondeo (debidos a la representación en el ordenador del número)

Estos errores se deben exclusivamente a la máquina que se esté utilizando y han de tenerse en cuenta a la hora de programar el método correspondiente para minimizarlos.

Almacenamiento de datos

Cada programa y cada lenguaje almacena los números de forma distinta atendiendo a sus necesidades (si es de cálculo simbólico como DERIVE por ejemplo o si es de cálculo numérico como MATLAB) pero en términos generales se puede decir que los números se almacenan en dos formas diferentes:

-Los números enteros se almacenan convertidos al sistema binario en un número concreto de posiciones de memoria (que varían según se trabaje con precisión simple (8 bytes) o con doble precisión (16 bytes))

-Los números no enteros se almacenan en forma punto flotante y el número de cifras significativas (cifras a partir de la primera distinta de cero) que guarda son 8 en simple precisión y 16 en doble precisión.

Forma punto flotante

Un número almacenado en forma punto flotante de n dígitos en base 10 tiene la forma

$$x = \pm\, d_1.d_2d_3...d_n 10^l$$

donde $\pm\, d_1.d_2d_3...d_n$ es la mantisa elegida con $d_1 \neq 0$ y *l* es el exponente cuyo rango varía según los sistemas usados y según la precisión.

En definitiva, el ordenador substituye intervalos continuos por conjuntos discretos. Este hecho trae consigo que la aritmética del ordenador sea diferente de la "verdadera".

Errores de redondeo

Cuando el resultado de cualquier operación realizada por la máquina excede en cifras significativas a su precisión ésta redondea la última cifra significativa atendiendo a la siguiente regla:

a) Si la primera cifra que se desprecia es mayor que 5 (o 5 no seguido de ceros) se incrementa en una unidad.

b) Si es menor que 5 (o 5 seguido de ceros), no varía.

Con la regla anterior el error de redondeo es inferior a media unidad del orden del n-ésimo dígito (el último dígito conservado).

Es decir $$E(x) \leq \frac{1}{2} 10^{l-n+1}$$

Ejemplo: Supongamos que estamos trabajando con 4 dígitos significativos y queremos almacenar el número 0.0034728 . En este caso el almacenamiento una vez redondeado será $+(3.473)10^{-3}$ y el error $E \leq ½\ 10^{-3-4+1} = ½\ 10^{-6} = 5\ 10^{-7}$

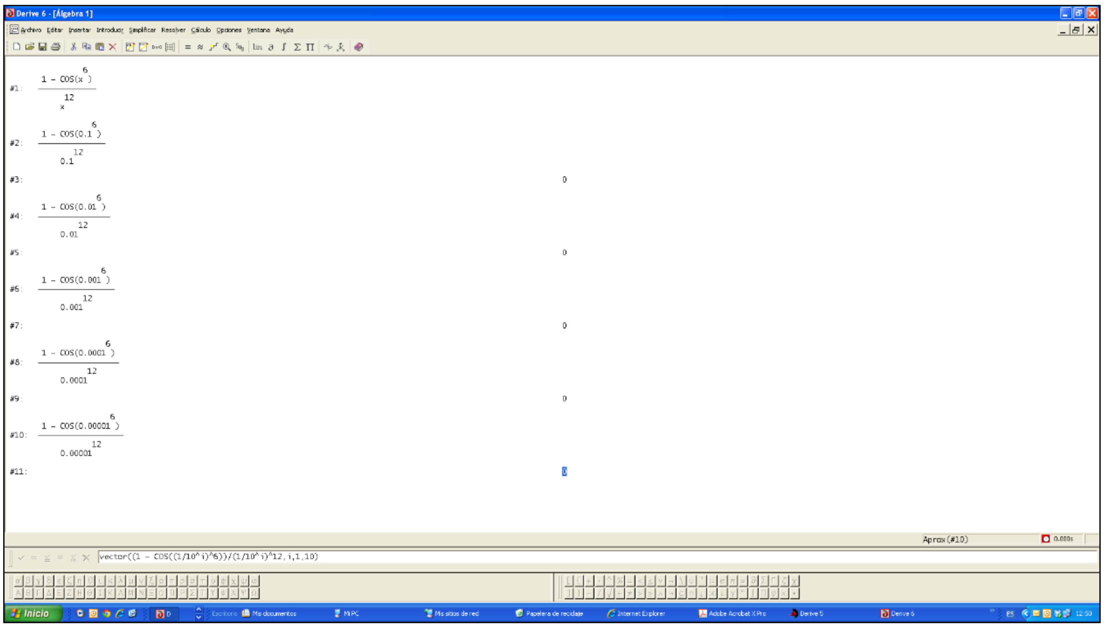
Si calculamos el error real obtenemos $E = 0.003473 - 0.0034728 = 2\ 10^{-7} < 5\ 10^{-7}$

Cuando se ejecuta un proceso iterativo en el que trabajamos con números muy grandes o muy pequeños las operaciones dan lugar a errores de redondeo que pueden propagarse de forma que distorsionen totalmente la solución final.

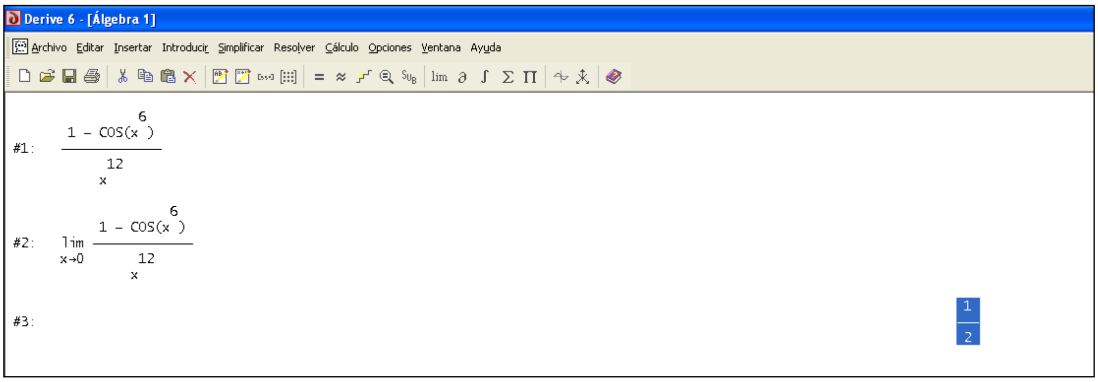
<u>Ejemplo: (hecho con el programa DERIVE)</u>

Intentemos calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(x^6\right)}{x^{12}}$

Si sustituimos x por valores próximos a 0 y vemos los resultados concluiremos que el límite es 0



Sin embargo, si calculamos el límite con la función lim que calcula el límite de forma exacta obtenemos




que es su valor real $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(x^6\right)}{x^{12}}=\dfrac{1}{2}$.

No vamos a hacer un análisis de la propagación de errores, pero conviene tenerlos en cuenta a la hora de analizar las soluciones obtenidas.

En multitud de ocasiones pueden minimizarse estos errores cambiando las operaciones realizadas, por eso debe usarse el mínimo número posible de operaciones y huir en lo posible de divisiones entre números muy pequeños, restas de números muy similares o multiplicaciones por números muy grandes.

El método de acotación.

Cuando se conocen cotas inferiores y superiores de las magnitudes que intervienen en una fórmula se puede usar el llamado método de acotación para acotar el error final. Lo ilustraremos con un ejemplo

Ejemplo:

Calcular t en la fórmula $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (t es el tiempo de oscilación de un péndulo ideal)

1º) l y g son datos experimentales, por tanto aproximados.
Supongamos que l = 1.5m con un error menor que 0.005m y que tomamos como g el valor g = 9.81m/s$^2$ con un error menor que 0.005m/s$^2$.

Entonces tenemos

$$1.495 < l < 1.505 \quad \text{y} \quad 9.805 < 9.81 < 9.815 \qquad (1)$$

2º) $\pi$ es un número irracional, por tanto sólo puede obtenerse una aproximación de él.
Puesto que podemos tomar la aproximación que queramos, la escogeremos de forma que sea “algo mejor” que la de los datos. En este caso podemos considerar $\pi$ = 3.1415.

Por tanto

$$3.141 < \pi < 3.142 \qquad (2)$$

Juntando (1) y (2) y operando llegamos a

$$1.225 < t < 1.230$$

Luego el error cometido dando a t un valor aleatorio del intervalo [1.225, 1.230] es menor de 0.005.

Si tomamos el punto medio del intervalo la cota del error se reducirá a la mitad.

Aplicación de la derivada al cálculo de errores.

La aplicación de la derivada para calcular errores absolutos y relativos es uno de los más extendidos en la práctica y consiste en

a) La derivada de la función coincide con el error absoluto
b) La derivada del logaritmo neperiano de la función coincide con el error relativo.

Veámoslo con un ejemplo:

El lado de un cuadrado mide 12.3 con un error menor que 1 cm. Hallar su superficie y los errores absoluto y relativo de tal medida.

s = x$^2$ luego s = 151.29 cm

Ea = D(x$^2$) = 2xdx luego Ea = 2 · 12.3 · 1 = 24.6 cm

Er = D( Ln(x$^2$)) = $\frac{2}{x}$ = 16.3 %

# 2. Algoritmos para resolver ecuaciones

## 2.1 Introducción

Hay dos modos diferentes de resolver el problema de encontrar las raíces, soluciones, de una ecuación dada, es decir, encontrar $\alpha \in (a,b) \,/\, f(\alpha)=0$

-**Métodos de acotación de raíces en Intervalos** que dan como solución un intervalo donde se encuentra la solución buscada.

-**Métodos de aproximación de raíces** que dan como solución una sucesión de iterantes que converge a la solución buscada.

Antes de ver ambos vamos a enunciar un teorema general que se usará posteriormente para acotar el error en los métodos de acotación de raíces en intervalos. Es consecuencia directa del Teorema del valor medio.

Teorema general de acotación del error

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$ sea $\alpha \in (a,b) \,/\, f(\alpha)=0$

Supongamos que existen m , M > 0 tales que

$$1^{\text{o}})\ \left|f'(x)\right| \le M \ \forall x \in (a,b) \text{ entonces } \left|f(x)\right| \le M\left|x-\alpha\right|$$

$$2^{\text{o}})\ \left|f'(x)\right| \ge m \ \forall x \in (a,b) \text{ entonces } \left|x-\alpha\right| \le \frac{\left|f(x)\right|}{m}$$

## 2.2 Métodos de acotación de raíces en intervalos

En estos métodos partiremos de un intervalo inicial que contiene a la solución buscada y aportaremos como salida un nuevo intervalo de longitud inferior que sigue conteniendo a la solución que nos interesa encontrar o bien una aproximación a dicha solución.

*Método de Bisección*

Es el primero de los métodos de acotación de raíces en intervalos. Se basa en una demostración del Teorema de Bolzano y sólo sirve para encontrar soluciones de la ecuación $f(x)=0$ **si la función cambia de signo en un intervalo que contenga a la solución,** (por ejemplo, no serviría para resolver la ecuación $x^2=0$ ya que la función se anula en $x=0$ pero no cambia de signo en ningún intervalo que contenga a 0. La función tiene como recta tangente en $x=0$ al eje $y=0$, no lo corta).

Problema

Resolver la ecuación $f(x)=0$ (suponemos f continua)

Organigrama:

-consideramos un intervalo $I_0$ = [a,b] donde *f* cambia de signo y una tolerancia T>0.

-encontrar el punto medio del intervalo (a+b)/2 = c

-comprobar si f(c) = 0

SI $\Rightarrow$ parar el proceso . dato de salida = c

NO $\Rightarrow$ seguir el proceso

-dividir el intervalo [a,b] en dos subintervalos [a , (a+b)/2] y [(a+b)/2 , b]

-escoger el subintervalo , $I_1$ , donde la función cambia de signo

-comprobar si long($I_1$) < T

SI $\Rightarrow$ parar el proceso , datos de salida = extremos del nuevo subintervalo

NO $\Rightarrow$ repetir el proceso con el nuevo subintervalo

La solución en este caso es un intervalo de longitud menor que la tolerancia donde se encuentra la raíz buscada, (si necesitamos un número concreto aproximado a la solución, podemos dar cualquier valor del Intervalo, el mejor valor será el punto medio)

El proceso no es infinito ya que $long(I_n)=b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Por lo tanto habrá un momento en el que $long(I_n)<T$ es decir, se verificará nuestro **criterio de parada**.

**Ejemplo**

Encontrar una aproximación a la solución de la ecuación $x^2-4=0$ en el intervalo $[0,3]$ usando el algoritmo de bisección.

**Solución:**

Lo primero que hay que verificar es si la función cambia de signo en los extremos del intervalo.

$$f(x)=x^2-4$$
$$f(0)=-4<0$$
$$f(3)=5>0$$

luego sí podemos aplicar el algoritmo.

1º) Calculamos el punto medio del intervalo

$$c=\frac{0+3}{2}=1.5$$

2º) Evaluamos $f(c)=1.5^2-4=-1.75$ Pueden ocurrir 2 cosas:

- O bien $f(c)=0$. En este caso hemos resuelto la ecuación.
- O bien $f(c)\neq 0$. Repetimos el algoritmo pero en el subintervalo en el que se produzca el cambio de signo (en este caso repetiremos el algoritmo en el intervalo [1.5,3]

  Volvemos a hallar el nuevo punto medio etc.

**Nota importante:**

El hecho de que tengamos la solución localizada en un intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ de longitud pequeña no implica que el valor de la función en ese intervalo también sea pequeña, es decir $f(a_n) \approx 0$ o $f(b_n) \approx 0$

Por ejemplo:

$f(x) = e^{e^x} - 20 = 0$ tiene su única solución en el intervalo $I = [1, 1.2]$; sin embargo $f(1) = -4.845737758 \quad ; \quad f(1.2) = 7.663584871$.

Si, además de ofrecer una aproximación $x^*$ que esté cerca de $\alpha$, la solución exacta, también queremos que $f(x^*)$ esté cerca de 0 tenemos que usar el <u>Teorema general de acotación del error</u> visto en la introducción, ya que si conocemos M que cumpla que $|f'(x)| \le M \; \forall x \in (a,b)$ entonces $|f(x)| \le M|x-\alpha|$. Es decir

$$|f(x)| \le M|x-\alpha| < \frac{M(b-a)}{2^n} \; \forall x \in I_n$$

Y con nuestro criterio de parada no solo controlaremos la distancia a la solución sino también el valor de la función en todos los puntos del intervalo final.

En el caso de nuestro ejemplo

$$f'(x) = e^{e^x} + x$$

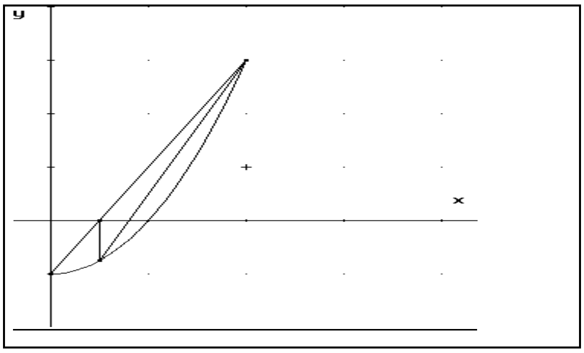
$$\max_{[1,1.2]} \left| e^{e^x} + x \right| = e^{e^{1.2}} + 1.2 \approx 91.85$$

luego $|f(x)| \le 91.85|x-\alpha| < 91.85 \cdot 0.2 = 18.37 \quad \forall x \in [1,1.2]$, lo cual es cierto, ya que $\max_{[1,1.2]} |f(x)| = f(1.2) = 7.663584871 < 18.37$.

*<u>Método de la cuerda</u>*

Este método se aplica en las mismas condiciones que el anterior pero, a diferencia de aquel, no bisecciona el intervalo de partida sino que usa para la división del intervalo el punto de corte de la recta que une los extremos del intervalo; ya que, intuitivamente, estará más cerca de la solución.

De nuevo no sirve en el caso de que la función no cambie de signo.



Organigrama

-consideramos un intervalo $I_0$ = [a,b] donde f cambia de signo y de una tolerancia T

-construir la recta que pasa por (a,f(a)) , (b,f(b))

-obtener c = la intersección de f con la recta anterior

-evaluar f(c)

-comprobar si f(c) = 0

SI $\Rightarrow$ parar el proceso , dato de salida = c

NO $\Rightarrow$ seguir el proceso

-considerar $I_1$ el subintervalo donde f cambia de signo

-comprobar si $|f(c)| < T$

SI $\Rightarrow$ parar el proceso , dato de salida c o bien $I_1$

NO $\Rightarrow$ repetir el proceso con el nuevo subintervalo

En este caso no se tiene asegurado que long($I_n$) $\rightarrow$ 0 por esa razón debemos cambiar el **criterio de parada** para tener garantía de que el algoritmo no entre en un bucle infinito.

Como solución puede darse tanto c (aproximación a la solución), como el subintervalo correspondiente (i.e. donde la función cambia de signo); aunque lo más habitual es que sea c, ya que el subintervalo obtenido puede tener longitud grande.

El organigrama puede implementarse usando como **criterio de parada** la verificación $|f(c)| <$ T . (¿Se le ocurre al lector algún otro criterio de parada?)

**Ejemplo**

Encontrar una aproximación a la solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ en el intervalo $[0,3]$ usando el algoritmo de la cuerda.

**Solución:**

Lo primero que hay que verificar es si la función cambia de signo en los extremos del intervalo.

$$f(x) = x^2 - 4$$
$$f(0) = -4 < 0$$
$$f(3) = 5 > 0$$

luego sí podemos aplicar el algoritmo.

1º) Construimos la recta que pasa por los puntos [0,-4] y [3,5]

$$y + 4 = \frac{5-(-4)}{3-0}(x-0)$$

2º) Cortamos la recta con el eje de abscisas (y=0).

$$\begin{cases} y + 4 = \dfrac{5-(-4)}{3-0}(x-0) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

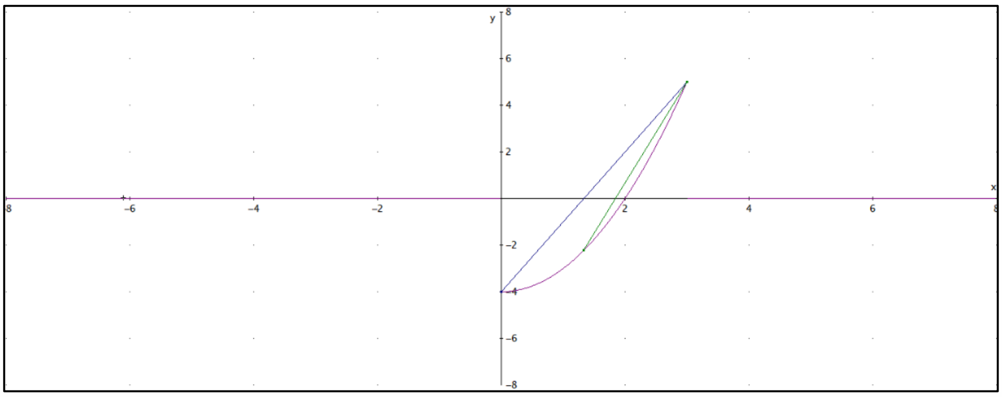
$$c = 1.33$$

3º) Evaluamos $f(c)=1.33^2-4=-2.22$ Pueden ocurrir 2 cosas:

- O bien $f(c)=0$. En este caso hemos resuelto la ecuación.
- O bien $f(c)\neq 0$. Repetimos el algoritmo pero en el subintervalo en el que se produzca el cambio de signo (en este caso repetiremos el algoritmo en el intervalo [1.33,3]

  Volvemos a construir la nueva recta etc.

Representación gráfica de 2 iteraciones



**Nota importante:**

El hecho de que tengamos una aproximación, *c,* que cumpla que $f(c)\approx 0$ no implica que *c* esté cerca de la solución real, es decir $|c-\alpha|\approx 0$

Por ejemplo:

$h(x)=Ln(x)-5=0$ tiene su única solución, $\alpha\approx 148.4131622$. Si consideramos por ejemplo $I=[140,160]$ y en particular por ejemplo $c=160$, tenemos que $h(160)\approx 0.0752$; sin embargo $|160-\alpha|=11.5868$, estamos "muy lejos" de la solución real

Si, además de ofrecer una aproximación $c$ que cumpla que $f(c)\approx 0$ también queremos que $|c-\alpha|\approx 0$ tenemos que usar el <u>Teorema general de acotación del error</u> visto en la introducción, ya que si conocemos m que cumpla que

$$|f'(x)|\geq m\ \forall x\in(a,b) \text{ entonces } |x-\alpha|\leq\frac{|f(x)|}{m}.$$ Es decir

$$|c-\alpha|\leq\frac{|f(c)|}{m}\leq\frac{T}{m}$$

Y con nuestro criterio de parada no solo controlaremos el valor de la función en nuestra aproximación, sino su distancia a la solución real.

En el caso de nuestro ejemplo

$$h'(x)=\frac{1}{x} \qquad ; \qquad \min_{[140,160]}|h'(x)|=\frac{1}{160}=0.00625=m$$

luego $|160-0| \leq \frac{|h(160)|}{0.00625} = \frac{0.0752}{0.00625} = 12.032$ , lo cual es cierto, ya que como hemos visto $|160-\alpha| = 11.5868$.

Separación de raíces:

El Teorema de Bolzano no asegura la unicidad de la raíz, i.e. que la ecuación planteada tenga una sola solución en el intervalo en el que estamos trabajando; por tanto puede ocurrir que en $[a,b]$ haya más de una raíz de $f(x)$ y que los métodos anteriores aunque sí converjan, no lo hagan hacia la solución que más nos interesa.
Para solventar este problema existen técnicas de separación de raíces de las que sólo vamos a comentar un resultado

Teorema de separación de raíces

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua y que cambia de signo en los extremos

Supongamos que se da **una** de las dos condiciones siguientes:

a) $f(x)$ es estrictamente monótona en $[a,b]$ (es decir, es monótona creciente o monótona decreciente en todo el intervalo).

b) $f(x)$ no tiene puntos de inflexión en $(a,b)$.

Entonces la raíz es única.

Nota: no olvidemos que una poderosa herramienta en la separación de raíces es la representación gráfica, (aunque siempre es **aproximada)** y cualquier programa con suficientes capacidades gráficas, GeoGebra, por ejemplo, es útil para ello.

## 2.3 Métodos de aproximación de raíces

Los métodos de aproximación de raíces son más poderosos que los vistos anteriormente y suelen ser los más usados en la práctica.

Método del punto fijo

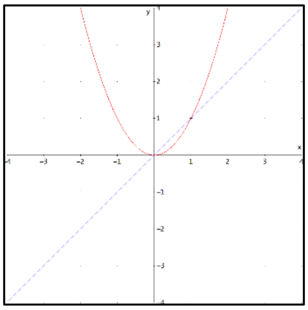
Vamos a abandonar temporalmente el problema de resolver la ecuación $f(x)=0$ para centrarnos en la resolución de una ecuación diferente. La ecuación $g(x)=x$ .

Un **punto fijo** de una función $g(x)$, es un número real, $\beta$, que cumple $g(\beta)=\beta$ Los puntos fijos de $g(x)$ son las soluciones de la ecuación $g(x)=x$

Ejemplo:

$g(x)=x^2$ tiene 2 puntos fijos (o lo que es lo mismo, la ecuación $x^2=x$ tiene 2 soluciones): $\beta_1=0, \beta_2=1$

Como podemos ver en la figura siguiente, los puntos fijos de una función son las abscisas de sus puntos de corte con la recta $y=x$.



Supongamos que tenemos una función $g(x)$ continua en $[a,b]$ y sea $x_0 \in [a,b]$. Consideremos la sucesión definida de forma recurrente

$$x_1 = g(x_0),$$
$$x_2 = g(x_1) = g(g(x_0)) = g^2(x_0),$$
$$.$$
$$.$$
$$x_{n+1} = g(x_n) = g^{n+1}(x_0)$$

La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene por qué ser convergente, pero supongamos que sí lo es, i.e. $\exists \beta \in \mathbb{R} \,/\, \beta = \lim_{n\to\infty} x_n$, entonces

$$g(\beta) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \underset{\text{g es continua}}{=} \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \beta \ .$$

Por lo tanto, en el caso de que exista límite, tiene que ser obligatoriamente un **punto fijo** de $g(x)$.

A la iteración realizada para generar la sucesión se le llama iteración de punto fijo de la función $g(x)$ con iterante inicial $x_0$. La iteración de punto fijo es un algoritmo que permite, en determinadas condiciones, resolver la ecuación $g(x)=x$.

<u>Ejemplo:</u>

Analicemos el caso $g(x)=x^2$, con distintos iterantes iniciales:

- $x_0=-2 \Rightarrow \{(-2),4,16,256,...\}$ evidentemente es una sucesión divergente. No nos lleva a ninguna solución.
- $x_0=-1 \Rightarrow \{(-1),1,1,1,1,...\}$ a partir de un momento en adelante la sucesión es constante, por tanto convergente a $\beta_2=1$ (recordemos que es un punto fijo de $g(x)$).

- $x_0 = -0.5 \Rightarrow \left\{(-0.5), 0.25, 0.0625, 0.00390625, 1.525878906 \cdot 10^{-5}, \ldots\right\}$ esta sucesión es convergente a $\beta_1 = 0$ (recordemos que es un punto fijo de $g(x)$).
- $x_0 = 0 \Rightarrow \{0, 0, 0, 0, \ldots\}$ si iniciamos la sucesión en un punto fijo, generamos una sucesión constante y por tanto convergente (aunque es un caso poco probable en la práctica y, por ello, poco interesante).
- $x_0 = 0.7 \Rightarrow \left\{0.7, 0.49, 0.2401, 0.05764800999, 0.003323293056, 1.104427674 \cdot 10^{-5}, \ldots\right\}$ esta sucesión es convergente a $\beta_1 = 0$ (recordemos que es un punto fijo de $g(x)$).
- $x_0 = 1 \Rightarrow \{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$ si iniciamos la sucesión en un punto fijo generamos una sucesión constante y por tanto convergente.
- $x_0 = 3 \Rightarrow \left\{3, 9, 81, 6561, 4.3046721 \cdot 10^{7}, 1.853020188 \cdot 10^{15}, \ldots\right\}$ obviamente es una sucesión divergente. No nos lleva a ninguna solución.

Podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La convergencia o divergencia de la sucesión depende del iterante inicial.
- Efectivamente, cuando la sucesión converge, lo hace a un punto fijo. Con lo que el método de iteración de punto fijo nos ha permitido, en algunos casos, encontrar una de las soluciones de la ecuación $x^2 = x$ (salvo en el improbable y, por ello, poco interesante caso de que escojamos $x_0 = \pm 1$).

Pero la ecuación anterior tiene 2 soluciones, ¿qué sucede si estamos interesados en hallar precisamente la otra solución?, ¿cuál es la razón por la que la única forma de que la sucesión converja al punto fijo $\beta_2 = 1$ sea con una sucesión constante a partir de un momento en adelante?

La razón se encuentra en los valores de $g'(0)$ y $g'(1)$. Veámoslo en el siguiente teorema:

**Teorema del punto fijo**

Sea $\beta$ un punto fijo de $g(x)$. Supongamos que $g(x)$ es derivable con derivada continua en un entorno de $\beta$ y que $|g'(\beta)| < 1$

entonces

a) Existe un intervalo $I_\beta$ que contiene a , $\beta$ tal que si $x_0 \in I_\beta$ la sucesión de iteración de punto fijo converge a $\beta$.

b) Si definimos los errores de cada iterante: $e_n = |x_n - \beta|$, tenemos que a partir de un momento en adelante $e_n \le |g'(\beta)| e_{n-1}$

c) Además $\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} = |g'(p)|$

En este caso decimos que la iteración de punto fijo tiene **convergencia lineal.**

En el caso particular de que $|g'(\beta)| = 0$ los apartados b) y c) se modifican de la siguiente manera

b) $e_n \le \left|\frac{g''(\beta)}{2}\right| e_{n-1}^2$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} = 0$ ; $\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}^2} = \frac{1}{2}|g''(\beta)|$

En este caso decimos que la iteración de punto fijo tiene **convergencia cuadrática.**

El teorema anterior tiene las siguientes implicaciones en el caso de nuestro ejemplo

- Si estamos interesados en la solución $\beta_1 = 0$ de la ecuación $x^2 = x$ y queremos llegar a ella usando iteración de punto fijo, **podremos conseguirlo siempre que elijamos** $x_0 \in I_{\beta_1}$. En este caso es fácil ver que $I_{\beta_1} = (-1,1)$.
- Si estamos interesados en la solución $\beta_2 = 1$ de la ecuación $x^2 = x$ y queremos llegar a ella usando iteración de punto fijo **no podremos conseguirlo usando como función de iteración** $g(x) = x^2$ (salvo que tengamos la suerte de que en algún momento un iterante sea el propio punto fijo, lo que no podemos tener en cuenta).

Nota: Posteriormente veremos que podremos elegir como $I_\beta$ cualquier intervalo que cumpla que $\beta \in I_\beta$ y $|g'(x)| < 1 \forall x \in I_\beta$.

Nota: el hecho de que $g_1(x) = x^2$ no sirva para hallar $\beta_2 = 1$ no es un problema, ya que podemos usar otras muchas funciones para las que también $\beta_2 = 1$ es punto fijo , por ejemplo $g_2(x) = \sqrt{x}$, es decir $x = \sqrt{x}$ tiene las mismas soluciones que $x^2 = x$. Si usamos la segunda función $g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow |g_2'(1)| = \frac{1}{2}$ y la iteración de punto fijo sí convergerá a $\beta_2 = 1$ siempre que escojamos el iterante inicial en **el intervalo apropiado**, es decir, **suficientemente cerca** de él.

En efecto

$x_0 = 2 \Rightarrow$

$\{2,\ 1.414213562,\ 1.189207115,\ 1.090507732,\ 1.044273782,\ 1.021897148,\ 1.010889286,\ 1.005429901\}$

lo que genera una sucesión que, aunque lentamente, converge a $\beta_2 = 1$

Iteración de punto fijo para resolver la ecuación $f(x) = 0$

¿Cómo podemos aplicar la iteración de punto fijo para resolver la ecuación $f(x)=0$, i.e., encontrar $\alpha$ cumpliendo $f(\alpha)=0$?

Evidentemente no podemos aplicar la iteración a la función $f(x)$ directamente porque resolveríamos la ecuación $f(x)=x$ y no la ecuación $f(x)=0$; pero sí podemos buscar una **función auxiliar**, $g(x)$, que cumpla que **sus puntos fijos** $g(x)=x$ **sean las soluciones de** $f(x)=0$**. Así podremos aplicar la iteración** a la función auxiliar.

Hay infinitas formas de elegir dicha función auxiliar, por ejemplo:

$$g(x) = x - f(x)$$
$$g(x) = x + f(x)$$
$$g(x) = x + \frac{f(x)}{n}$$
$$\ldots$$

O también podemos despejar en nuestra ecuación una x en función de las otras, por ejemplo si queremos resolver la ecuación $x^2 - x = 0$, podemos despejar $x$ lo que generará la función $g_1(x) = x^2$ o bien despejar $x^2$ con lo que tendremos la función $g_2(x) = \sqrt{x}$ (escoger el signo negativo para la raíz no sirve en este caso). Mirar el ejemplo del apartado anterior.

> En todos los ejemplos expuestos se cumple que si encontramos $\alpha / g(\alpha) = \alpha$ entonces tenemos $\alpha / f(\alpha) = 0$.

Ahora bien, ¿nos sirve cualquier función auxiliar? La respuesta obviamente es no, ya que tenemos que encontrar una función auxiliar para la que la iteración de punto fijo converja a la solución que buscamos…

Para poder comprender mejor el Teorema de punto fijo usaremos el siguiente símil:

- Los puntos fijos $\alpha \in (a,b)$ que cumplen $|g'(\alpha)| < 1$ se comportan como hoyos en un campo de golf: si golpeamos la pelota **suficientemente cerca** del hoyo, la pelota caerá en él, es decir, el propio algoritmo llevará la iteración al punto fijo. Dichos puntos se llaman **atractores** de $g(x)$.
- En particular, si $\alpha \in (a,b)$ cumple $g'(\alpha) = 0$ se comportará como un hoyo con forma de “gran embudo” en el que la pelota caerá muy rápidamente si es

golpeada cerca del embudo. Dichos puntos se denominan **super atractores** de $g(x)$.

- Los puntos fijos $\alpha \in (a,b)$ que cumplen $|g'(\alpha)| > 1$ se comportan como "pequeñas colinas" en un campo de golf: aunque se golpee la pelota **muy cerca de ellas** no conseguiremos que suba a la cima: el propio algoritmo expulsará a los iterantes lejos del punto fijo (quizá vayan a otro punto fijo, otro hoyo, o se vayan al infinito); pero no buscarán el punto fijo que nos interesa). Dichos puntos se llaman **expulsores** de $g(x)$.

Por lo tanto, para encontrar eficazmente el valor de $\alpha$ que nos interesa, buscaremos la función auxiliar de forma que $\alpha$ sea un atractor (mejor si es super atractor) para ella.

Dicho en términos del teorema de punto fijo, buscaremos $g(x)$ de forma que cumpla como mínimo $|g'(\alpha)| < 1$ ( si es $g'(\alpha) = 0$ mejor).

Pero ¿cómo verificar la condición anterior si desconocemos $\alpha$?

El problema se resuelve si hallamos, aunque sea de forma aproximada, un intervalo $I_\alpha$ que contenga a $\alpha$ y que cumpla que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in I_\alpha$. **Siempre que escojamos el iterante inicial en este intervalo la iteración de punto fijo convergerá hacia $\alpha$.**

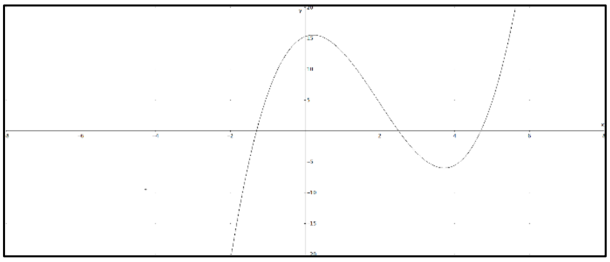
En términos del símil de golf, buscaremos un "green" desde donde podamos golpear la pelota con garantías de éxito. Dicho green es el intervalo $I_\alpha$.

<u>Nota:</u> una herramienta eficaz, aunque aproximada, para encontrar $I_\alpha$ consiste en representar gráficamente la función $|g'(x)|$.

<u>Ejemplo:</u> hallar todas las soluciones de $x^3 - 5.9x^2 + 2.39x + 15.275 = 0$

Vamos a hacer un estudio completo de las posibilidades.

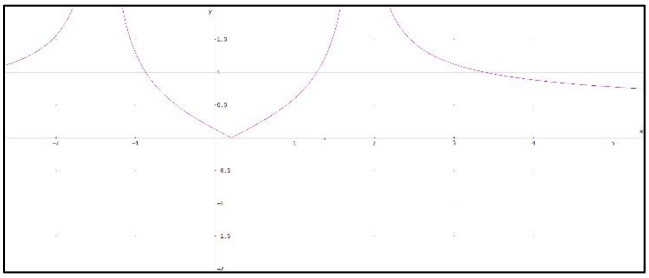
Representando la función (o dando valores naturales) tenemos que tiene 3 raíces $\alpha_1 \in [-2,-1], \alpha_2 \in [1,3], \alpha_3 \in [4,5]$



Buscamos la primera función auxiliar despejando la x de grado 3 $g_1(x)=\sqrt[3]{5.9x^2-2.39x-15.275}$

Representamos $|g_1'(x)|$ para ver si cumple las hipótesis del teorema de punto fijo.

A la vista de la gráfica esta función solo serviría para hallar $\alpha_3$. Elegiremos el iterante inicial en [4,5].

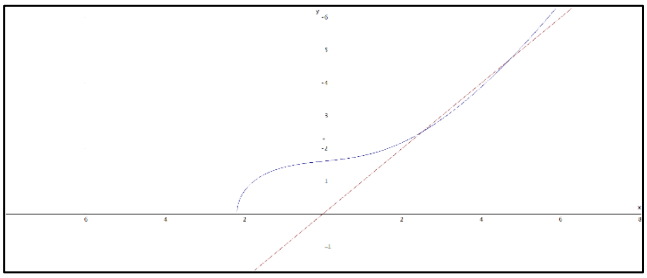


Buscamos la segunda función auxiliar despejando la x de grado 2

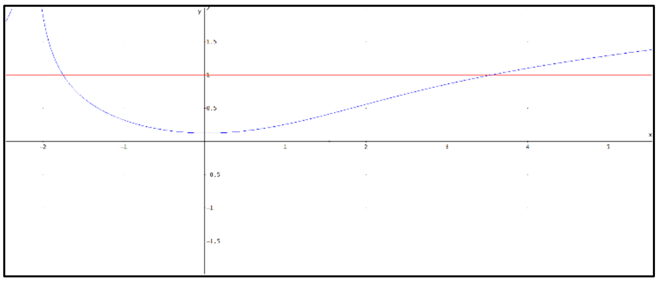
$$g_2(x)=\pm\sqrt{\frac{x^3+2.39x+15.275}{5.9}}$$

Vemos cuál de las 2 nos interesa estudiando sus puntos fijos

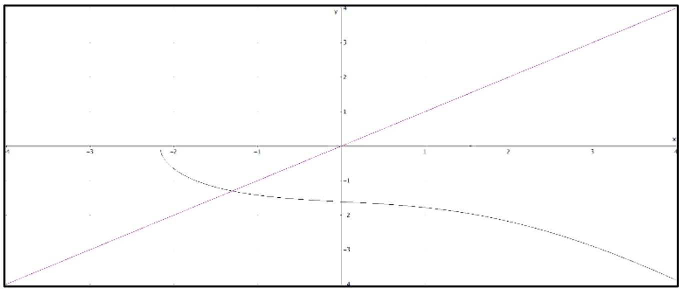
Comenzamos representando $+g_2(x)$ para hallar sus puntos fijos. Vemos podría servir para hallar $\alpha_2$ y $\alpha_3$.



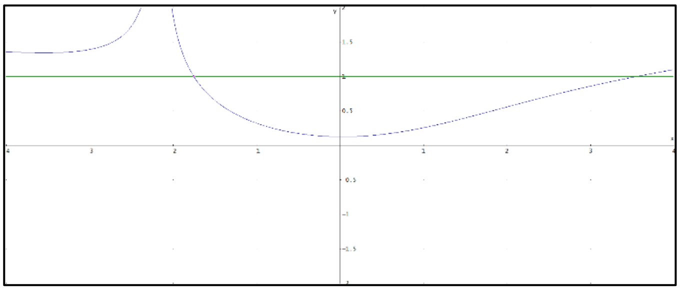
Representamos $|g_2'(x)|$ para ver si cumple las hipótesis del teorema de punto fijo. Vemos que servirá para hallar $\alpha_2$ pero no para hallar $\alpha_3$ . Elegiremos el iterante inicial en [2,3]



Continuamos representando $-g_2(x)$ para hallar sus puntos fijos. Vemos que podría servir para hallar $\alpha_1$.

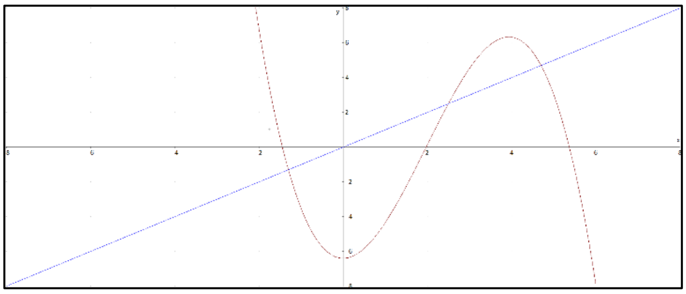


Representamos $|g_2'(x)|$ para ver si cumple las hipótesis del teorema de punto fijo. Vemos que sí servirá para hallar $\alpha_1$ Elegiremos el iterante inicial en [-1.7,-1] (más cerca de -2 puede haber problemas).

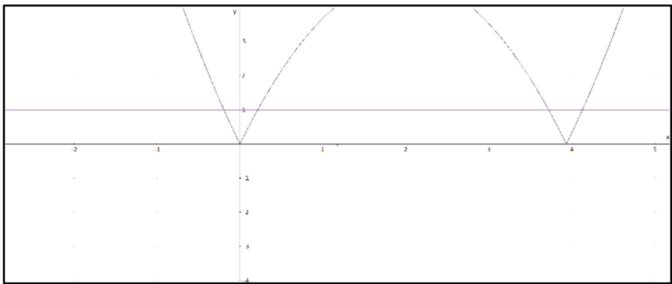


Buscamos la tercera función auxiliar despejando la x de grado 1 $g_3(x) = \dfrac{-x^3 + 5.9x^2 - 15.275}{2.39}$

Comprobamos que tiene los 3 puntos fijos (aunque en este caso no sería necesario). Para ello representamos $g_3(x)$.



Representamos $|g_3'(x)|$ para ver si cumple las hipótesis del teorema de punto fijo. Vemos que no servirá para ninguna de las 3 soluciones.



En la práctica se actúa justamente al revés, es decir

1º) se busca un **intervalo pequeño que contenga únicamente** a la solución que nos interesa (usando bisección por ejemplo).

2º) se busca una función auxiliar cuya derivada, **en valor absoluto,** sea menor que 1 en dicho intervalo.

3º) se realiza iteración de punto fijo escogiendo el iterante inicial en dicho intervalo.

Organigrama de punto fijo

-elegir iterante inicial $x_0$ y tolerancia T

-evaluar $x_1 = g(x_0)$

-comprobar $|x_1 - x_0| < T$

SI $\Rightarrow$ parar el método, dato de salida $x_1$

NO $\Rightarrow$ continuar el método calculando $x_2 = g(x_1)$ etc.

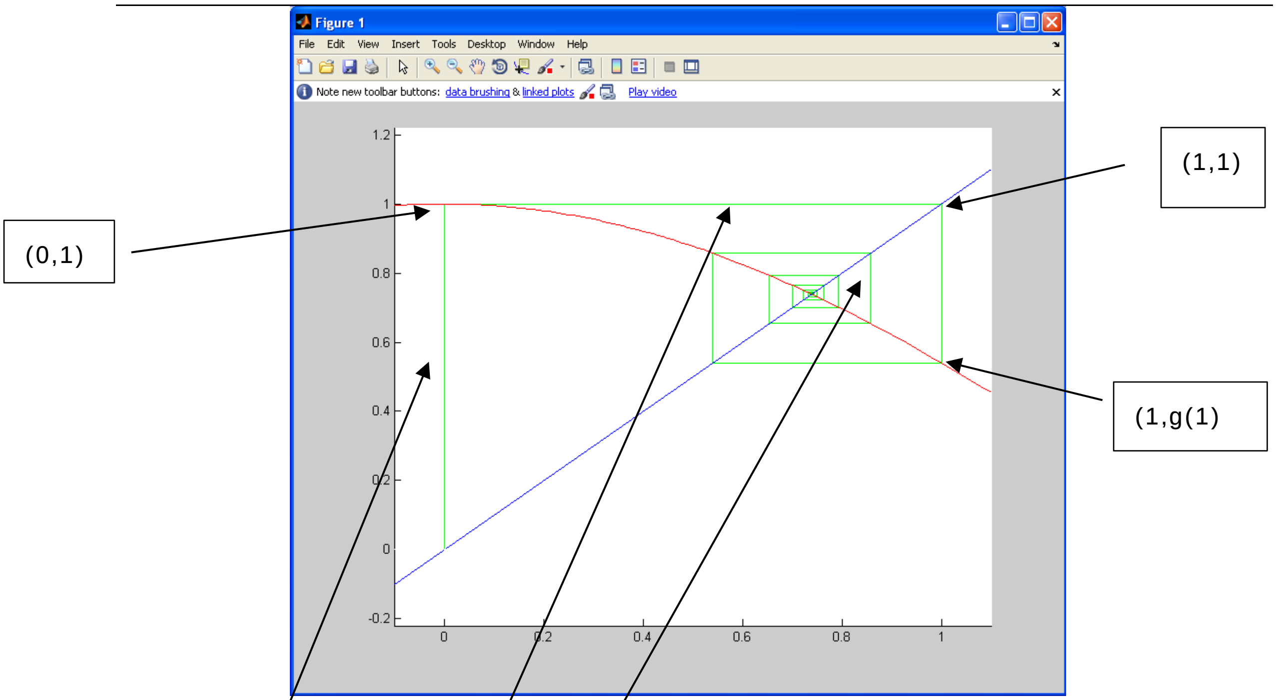
Como **criterio de parada** usaremos la distancia entre 2 iterantes consecutivos $|x_{n+1} - x_n| < T$ ya que, si 2 iterantes consecutivos están cerca es de suponer que también estarán cerca del límite. Esta idea se conoce como criterio de convergencia de Cauchy.

Representación gráfica de la iteración de punto fijo

La iteración de punto fijo tiene una representación gráfica muy visual que puede ser de dos tipos: iteración de caracol e iteración de escalera.

Representación de la iteración para buscar la solución de $\cos x = x$ (en este caso es tipo caracol)

- Iterante inicial $x_0 = 0$
- solución aproximada $\alpha = 0.739085$.



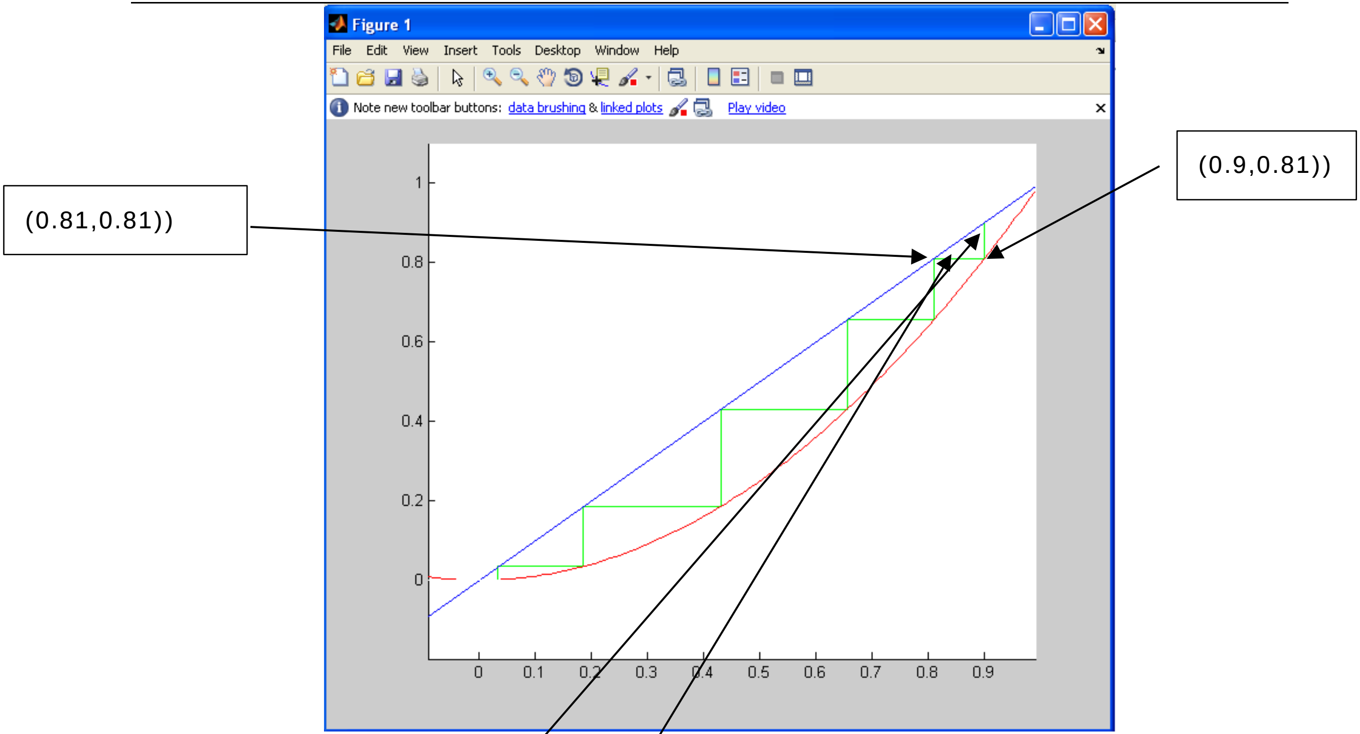

En rojo hemos representado la función $g(x) = \cos x$, en azul hemos representado la recta $y = x$. La abscisa del punto donde se cortan ambas curvas, $(\alpha, \alpha)$, es la solución de la ecuación $g(x) = x$.

Comenzamos la iteración con $x_0 = 0$, calculamos $g(x_0) = 1 = x_1$ (lo que se representa por la línea vertical señalada. El valor $x_0 = 0$ está localizado en el eje de abscisas (x), mientras que el valor $x_1 = 1$ está localizado en el eje de ordenadas (y).

Para continuar la iteración debemos calcular $g(x_1 = 1) = x_2$ y para ello debemos "convertir gráficamente" el valor 1 del eje de ordenadas al mismo valor pero en el eje de abscisas (observemos que para hallar el valor de una función en un punto debemos tener dicho punto en el eje de abscisas). Eso se consigue reflejando el valor 1 en la recta y=x lo que reflejamos con la línea horizontal. Ya podemos calcular $g(x_1) = x_2$ que se representa con la siguiente línea vertical ... y así sucesivamente.

Representación de la iteración para buscar la solución de $x^2 = x$ (en este caso es de tipo escalera)

- Iterante inicial $x_0$ = 0.9
- solución aproximada $\alpha$ = 0.




En rojo hemos representado la función $g(x) = x^2$, en azul hemos representado la recta $y = x$

La abscisa del punto donde se cortan ambas curvas, $(\alpha, \alpha)$, es la solución de la ecuación $g(x) = x$.

Comenzamos la iteración con $x_0 = 0.9$, calculamos $g(x_0) = 0.81 = x_1$ (lo que se representa por la línea vertical señalada. El valor $x_0 = 0.9$ está localizado en el eje de abscisas (x), mientras que el valor $g(x_0) = 0.81$ está localizado en el eje de ordenadas (y).

Para continuar la iteración debemos calcular $g(x_1 = 0.81) = x_2$ y para ello debemos "convertir gráficamente" el valor 0.81 del eje de ordenadas al mismo valor pero en el eje de abscisas . Eso se consigue reflejando el valor 0.81 en la recta y=x lo que reflejamos con la línea horizontal. Ya podemos calcular $g(x_1) = x_2$ que se representa con la siguiente línea vertical ... y así sucesivamente.

*El Método de Newton-Raphson*

La iteración de punto fijo es un método extraordinariamente eficaz y eficiente para resolver numéricamente cualquier ecuación $f(x) = 0$, pero, como se ha visto en el apartado anterior, presenta el inconveniente de que, *para poder llevarse a la práctica con éxito, es* *necesario realizar un estudio previo de bastante complejidad sobre la elección de la función auxiliar, lo que le resta eficiencia y accesibilidad para cualquier usuario.*

Una forma de resolver esta deficiencia sería encontrar una función auxiliar *genérica*, $g(x)$, que el usuario no tuviera que calcular explícitamente y que garantizara la condición $g'(\alpha)=0$ independientemente de la ecuación a resolver y del punto buscado. De esta forma tendríamos convergencia cuadrática y $\alpha$ sería un super atractor, con lo que la convergencia sería muy rápida.

Además, podríamos elegir como intervalo en el que tomar el iterante inicial, $I_\alpha$, un entorno genérico "suficientemente pequeño" (si $g'(\alpha)=0$, podemos suponer que $|g'(x)|$ se mantendrá inferior a 1 en un intervalo "razonablemente pequeño").

Dicha función genérica es la función $\boxed{G(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}}$ y se denomina método de Newton-Raphson a la iteración de punto fijo cuando se usa como función auxiliar $G(x)$.

**Notas:**

- El método de Newton-Raphson no puede implementarse cuando $f'(\alpha)=0$. Además la función debe ser 2 veces derivable en un entorno del punto fijo.
- $G(\alpha)=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=0$.
- $G'(\alpha)=1-\frac{\left(f'(\alpha)\right)^2-f(\alpha)f''(\alpha)}{\left(f'(\alpha)\right)^2}\underset{f(\alpha)=0}{=}0$ independientemente de $f(x)$ y de $\alpha$.
- En la práctica, para resolver cualquier ecuación se actúa de la siguiente forma: 1º) se busca un intervalo de coeficientes enteros que contenga a la raíz buscada, 2º) se aplica el método de bisección sobre el intervalo para hacerlo "suficientemente pequeño", 3º) se aplica el método de Newton-Raphson para obtener la raíz buscada.

<u>Representación gráfica del Método de Newton-Raphson</u>

El método de Newton-Raphson puede deducirse sin utilizar la iteración de punto fijo, ya que podemos llegar a él usando una idea similar a la del método de la cuerda; pero, en vez de intersecar con el eje de abscisas la recta que pasa por los extremos del intervalo, cortando la recta tangente a la curva $f(x)$ en el iterante correspondiente.

Veamos el algoritmo:

1º) Partimos de un iterante inicial $x_0$

2º) Calculamos la recta tangente a $f(x)$ en $x_0$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

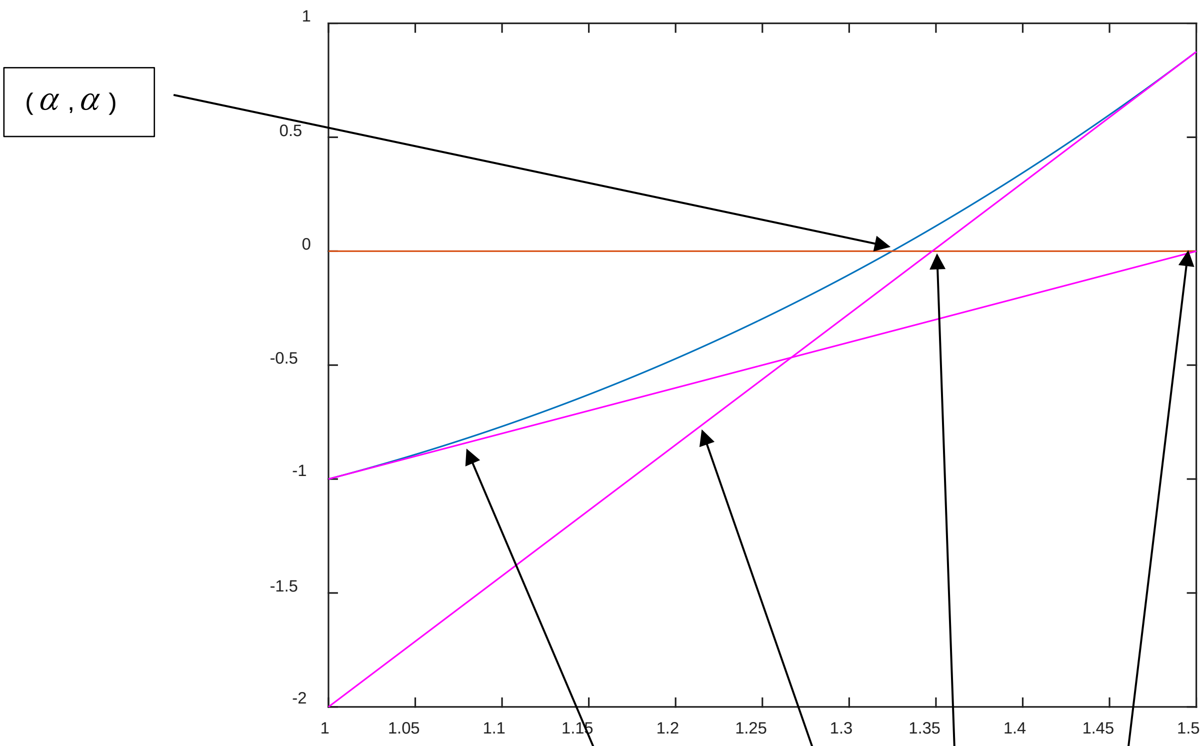
3º) Consideramos $x_1$ la intersección de la recta tangente con el eje x

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

y así sucesivamente..

Veamos la representación gráfica con $f(x) = x^3 - x - 1$

- Iterante inicial $x_0 = 1$
- solución aproximada $\alpha = 1.324718$.




En azul está representada la función $f(x)$, en rojo aparece el eje x.

Partimos de $x_0 = 1$ hallamos la tangente a la curva en dicho punto. $x_1$ es la abscisa de la intersección de dicha recta con el eje x. Calculamos la tangente a la curva en el punto recién calculado y hallamos su intersección con el eje x, así tenemos $x_2$... etc.

<u>Organigrama</u>

Es el mismo que el del punto fijo.

# IV. Ejercicios del tema

1º) Escribe las siguientes cifras decimales en forma punto flotante redondeándolas a 6 cifras significativas. Escribe también una cota del error de redondeo en cada caso.

a) 0.278000235 b) 35.0754

c) 2758.2787 d) -0.00023401

e) -254345.53

2º) Considera los números a = 4.25780 ; b = 3.45246 $10^{-3}$

a) Calcula a+b , redondea la solución al número de dígitos de los datos.

b) Calcula a+b–a . ¿Cuál es el resultado? ¿A qué se debe?

3º) Calcula los errores absoluto y relativo en las aproximaciones siguientes:

a) Aproximar por 2 mm el espesor de una madera terciada en 3 mm.

b) En 1862 Foucault calculó en 298000 Km. /seg. la velocidad de la luz. Aceptemos como exacta la velocidad de 299776 Km./seg. .

c) La medición de la cte h de Plank realizada por él mismo en 1913 dio como resultado h = 6.41 $10^{-27}$ erg. seg. En 1948 se adoptó en el mundo de la física el nuevo valor de h = 6.623 $10^{-27}$ erg. seg. como exacto.

4º) Demuestra los dos apartados del Teorema general de acotación del error.

5º) Ya hemos comentado que los métodos de acotación de raíces en intervalos no sirven cuando la función no cambia de signo en un entorno de la raíz buscada (lo que implica, si la función es derivable en la raíz, que el eje de abscisas es tangente a la curva en la raíz).

a) ¿Cómo se puede detectar si la recta tangente a *f(x)* en una raíz conocida , $\alpha$ , es el eje de abscisas?

b) ¿Se te ocurre alguna modificación para conseguir que los métodos anteriores funcionen en ese caso?

6º) Encuentra una aproximación al número √2 usando los métodos de Bisección y de la Cuerda. Acota el error que se comete.

a)¿Qué valor tengo que dar a tol usando el método de bisección para que $|f(\alpha)| < 10^{-4}$?

b) ¿Qué valor tengo que dar a tol usando el método de la cuerda para que $\left|\alpha - \sqrt{2}\right| < 10^{-5}$ ?

7º) Encuentra una función auxiliar que resuelva la ecuación $2\mathrm{sen}(\Pi x) - x = 0$ por el método del punto fijo.

a) En el intervalo [-0.5,0.5]
b) En el intervalo [0.5,1.5]

Resuelve la ecuación anterior.

8º) a) Halla una función auxiliar para resolver la ecuación $e^x + x = 0$ por el método del punto fijo.
b) Encuentra un intervalo donde pueda aplicarse el método de Newton para resolver la ecuación anterior y resuélvela.

9º) El método de Newton presenta el inconveniente de tener que evaluar la derivada de f en cada iteración. Una modificación del método consiste en aproximar el valor de $f'(x_n)$ por la recta secante que pasa por $(x_n, f(x_n))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

¿Cuántos iterantes iniciales son necesarios ahora? Explica cómo sería este nuevo método llamado el **método de la secante**. Impleméntalo y úsalo.

10º) Hallar una raíz positiva de $f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2$.

# V. Prácticas del tema

Usa las siguientes funciones para resolver los ejercicios propuestos (**prácticas de uso de Matlab**)

En todos los caso la función que contiene la ecuación a resolver ( o la auxiliar en el caso de punto fijo), estará en un archivo "function" aparte al que el programa principal llamará cuando lo necesite.

1º) **sol=bis(a,b,tol).** Que desarrolle el método de bisección:

Parámetros de entrada: **a, b** (extremos del intervalo de partida), **tol** (tolerancia para la longitud del intervalo de salida).

Parámetros de salida: **sol** (extremos del nuevo intervalo de longitud menor que tol que contiene a la raíz).

2º) **[c,yc]=Cuerda(a,b,tol,opcion).** Que realice el método de la cuerda:

Parámetros de entrada: **a, b** (extremos del intervalo de partida), **tol** (tolerancia para el valor de la función en el parámetro de salida c).

Parámetros de salida: **c** (aproximación a la raíz), $\mathbf{y_c}$ (valor de la función en la aproximación $y_c$), **opcion** para hacer o no la representación gráfica.

3º) **[solu,sol1,sol2]=Punfij(x0,tol, opcion).** Que desarrolle el método del punto fijo (con su representación gráfica).

Parámetros de entrada: $\mathbf{x_0}$ (iterante inicial), **tol** (tolerancia para la diferencia entre 2 iterantes consecutivos).

Parámetros de salida: **solu** (matriz con 3 columnas: en la 1ª columna contendrá todos los iterantes calculados; en la segunda columna, las diferencias en valor absoluto entre 2 iterantes consecutivos y en la 3ª columna los cocientes entre errores consecutivos. Si el programa está bien hecho, la 1ª columna debe tender al punto fijo, la 2ª debe tender a 0 y la 3ª debe tender a la derivada de la función auxiliar evaluada en el punto fijo (en valor absoluto))

**sol1** y **sol2** son dos vectores columna diseñados para hacer los correspondientes dibujos de la iteración, bien en escalera o bien en caracol, que se verán o no dependiendo del parámetro **opcion.**

4º) **solu=New(x0,tol, opcion).** Con el método de Newton.

Parámetros de entrada: $\mathbf{x_0}$ (iterante inicial), **tol** (tolerancia para la diferencia entre 2 iterantes consecutivos).

Parámetros de salida: **solu** (matriz como en el programa 3º)). El programa realiza la representación de Newton según el valor de **opcion.**

5º) **solu=secante(x0,x1,tol).** Que implemente el método de la secante (planteado en las cuestiones).

Parámetros de entrada: $\mathbf{x_0}$ y $\mathbf{x_1}$ (iterantes iniciales), **tol** (tolerancia para la diferencia entre 2 iterantes consecutivos).

Parámetros de salida: **solu** (matriz como en los programas 3º) y 4º))