TEMA 1

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES

Introducción al campo de los métodos numéricos. Introducción a la teoría de errores. Resolución de ecuaciones. Métodos de acotación de raíces en intervalos. Resolución de ecuaciones. Métodos de aproximación de raíces

Bilbliografía:

-García, A.;García, F. y otros: "Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable." Ed Clagsa.
-García Merayo, F.; Nevot Luna, A.: "Análisis Numérico. Más de 300 ejercicios resueltos y comentados". Ed Paraninfo 1992.
- Manual de usuario de MATLAB

Definición de Método Numérico

1º) Analizar los datos conocidos.

2º) Crear un algoritmo (es decir una sucesión de sentencias que permita encontrar una solución del problema).

3º) Hacer un organigrama (un esquema) del algoritmo.

4º) Implementarlo en algún lenguaje informático.

5º) Analizar la solución obtenida.

6º) Acotar los errores cometidos en el método.

Un **método numérico** es un algoritmo que permite obtener soluciones aproximadas a un problema. Generalmente consta de los pasos anteriormente citados.

El **método** es **exacto** si se obtiene la solución exacta tras ejecutar el algoritmo.

El **método** es **iterativo** si partiendo de $x^{(0)}$, un valor "cercano" a la solución, genera una sucesión de aproximaciones sucesivas $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$ que, se espera converja, a la solución real.

Aproximaciones de datos y de soluciones.

Tolerancia

Llamamos tolerancia , T , a un número real prefijado por el usuario de un método numérico que se utiliza para dar un criterio de aceptación de los resultados del algoritmo.

Aproximación

Dado $r \in \Re$ decimos que r_1 es una aproximación a r $\Leftrightarrow$ $|r - r_1| < T$, también decimos que r es un dato aproximado.

Solución aproximada

Dado un problema con solución exacta s decimos que s_1 es una solución aproximada del problema $\Leftrightarrow$ $|s - s_1| < T$.

1.2 Introducción a la teoría de errores

Error absoluto

Dados $s \in \mathbb{R}$ y $x^{(1)}$ una aproximación de s, se llama error absoluto a

$$E\left(x^{(1)}\right) = \left|s - x^{(1)}\right|$$

Error relativo

Se llama error relativo al valor $\delta\left(x^{(1)}\right) = \dfrac{E\left(x^{(1)}\right)}{|s|}$

Error de truncación

Errores de redondeo

Forma punto flotante

Un número almacenado en forma punto flotante de n dígitos en base 10 tiene la forma $x = \pm\, d_1.d_2 d_3 \ldots d_n 10^l$

Regla:

a) Si la primera cifra que se desprecia es mayor que 5 (o 5 no seguido de ceros) se incrementa en una unidad.

b) Si es menor que 5 (o 5 seguido de ceros) , no varía.

$$E(x) \le \frac{1}{2} 10^{l-n+1}$$

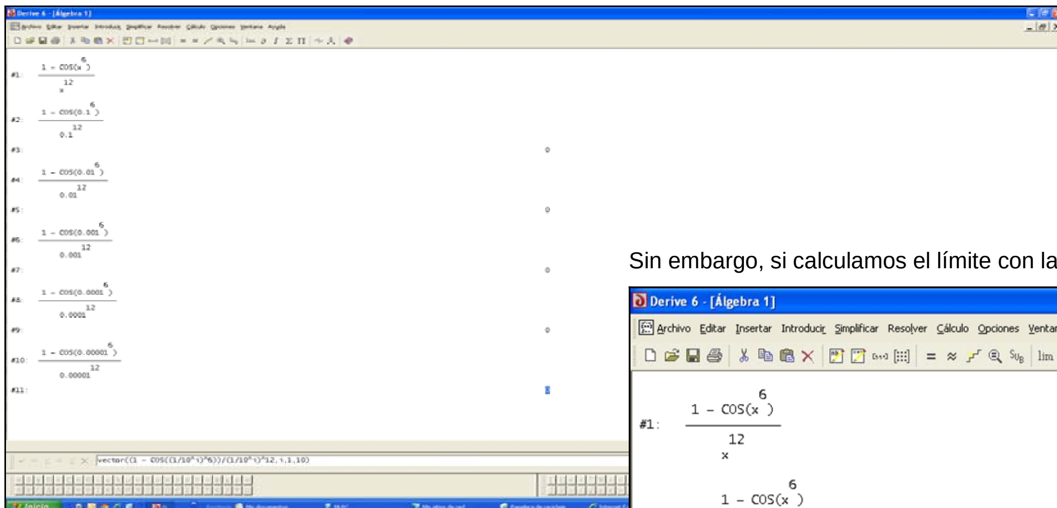
Ejemplo: Supongamos que estamos trabajando con 4 dígitos significativos y queremos almacenar el número 0.0034728 . En este caso el almacenamiento una vez redondeado será $+(3.473)10^{-3}$ y el error $E \leq ½\, 10^{-3-4+1} = ½\, 10^{-6} = 5\, 10^{-7}$

Si calculamos el error real obtenemos $E = 0.003473 - 0.0034728 = 2\, 10^{-7} < 5\, 10^{-7}$

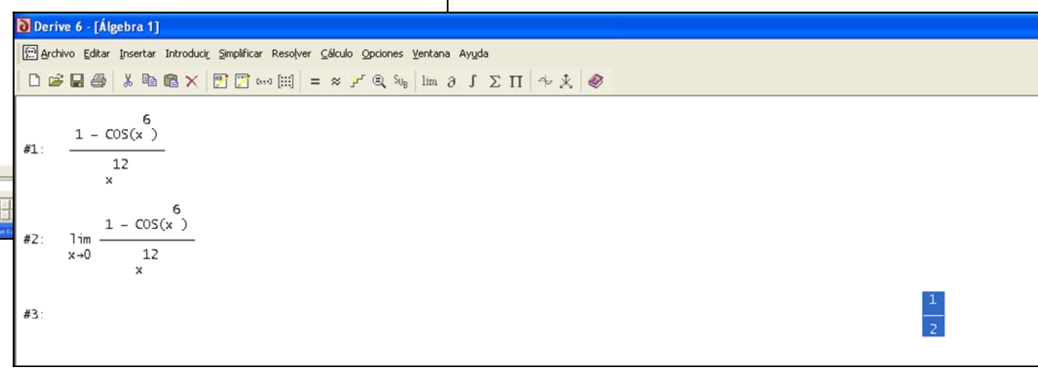
Ejemplo: DERIVE

Intentemos calcular $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(x^6\right)}{x^{12}}$ usando DERIVE

Si sustituimos x por valores próximos a 0 y vemos los resultados concluiremos que el límite es 0



Sin embargo, si calculamos el límite con la función lim de DERIVE obtenemos



que es su valor real $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(x^6\right)}{x^{12}} = \frac{1}{2}$.

El método de acotación.

Ejemplo:

Calcular t en la fórmula $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (t es el tiempo de oscilación de un péndulo ideal)

Supongamos que l = 1.5m con un error menor que 0.005m y que tomamos como g el valor g = 9.81m/s^2 con un error menor que 0.005m/s^2.

Entonces tenemos

$1.495 < l < 1.505$ y $9.805 < 9.81 < 9.815$ (1)

$3.141 < \pi < 3.142$ (2)

$1.225 < t < 1.230$

Luego el error cometido dando a t un valor aleatorio del intervalo [1.225, 1.230] es menor de 0.005.

Si tomamos el punto medio del intervalo la cota del error se reducirá a la mitad.

Aplicación de la derivada al cálculo de errores.

a) La derivada de la función coincide con el error absoluto

b) La derivada del logaritmo neperiano de la función coincide con el error relativo.

Ejemplo:

El lado de un cuadrado mide 12.3 con un error menor que 1 cm. Hallar su superficie y los errores absoluto y relativo de tal medida.

$s = x^2$ luego $s = 151.29$ cm

$Ea = D(x^2) = 2xdx$ luego $Ea = 2 \cdot 12.3 \cdot 1 = 24.6$ cm

$Er = D(\ Ln(x^2)) = \frac{2}{x} = 16.3\ \%$

1.1 Resolución de ecuaciones. Métodos de acotación de raíces en intervalos $f(x)=0$

-Métodos de acotación de raíces en Intervalos que dan como solución un intervalo donde se encuentra la raíz buscada. Se denominan métodos de acotación de raíces en intervalos.

-Métodos de aproximación de raíces que dan como solución una sucesión de iterantes que converge a la solución real.

Separación de raíces:

Teorema

Sea f:[a,b]→R continua y que cambia de signo en los extremos

Supongamos que se da una de las dos condiciones siguientes:

a) f es estrictamente monótona en [a,b]

b) f no tiene puntos de inflexión en (a,b)

Entonces la raíz es única.

Teorema general de acotación del error

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) sea $\alpha\in(a,b) / f(\alpha)=0$

Supongamos que existen m , M > 0 tales que

$$1^{\circ})\ |f'(x)|\le M\ \forall x\in(a,b) \text{ entonces } |f(x)|\le M\,|x-\alpha|$$

$$2^{\circ})\ |f'(x)|\ge m\ \forall x\in(a,b) \text{ entonces } |x-\alpha|\le\frac{|f(x)|}{m}$$

Problema

Resolver la ecuación $f(x) = 0$ (suponemos f continua)

Cota del error

El hecho de que la raíz esté localizada en un intervalo $I_n = [a_n , b_n]$ de longitud pequeña no implica $f(a_n) \approx 0$ ni $f(b_n) \approx 0$ ni $f((a_n+b_n)/2) \approx 0$

No obstante y en las condiciones del teorema tenemos:

$$|f(x)| \leq M\, |x-\alpha| \leq \frac{M(b-a)}{2^n}$$

Método de Bisección

Organigrama:

-consideramos un intervalo $I_0 = [a,b]$ donde f cambia de signo y de una tolerancia T

-encontrar el punto medio del intervalo $(a+b)/2 = c$

-comprobar si $f(c) = 0$

SI $\Rightarrow$ parar el proceso . dato de salida = c

NO $\Rightarrow$ seguir el proceso

-dividir el intervalo [a,b] en dos subintervalos [a , (a+b)/2] y [(a+b)/2 , b]

-escoger el subintervalo , I_1 , donde la función cambia de signo

-comprobar si $long(I_1) < T$

SI $\Rightarrow$ parar el proceso , datos de salida = extremos del intervalo , c , f(c)

NO $\Rightarrow$ repetir el proceso con el nuevo subintervalo

La solución es la raíz o bien un intervalo de longitud menor que la tolerancia donde se encuentra la raíz buscada.

Método de la cuerda

Organigrama

-consideramos un intervalo I_0 = [a,b] donde f cambia de signo y de una tolerancia T

-construir la recta que pasa por (a,f(a)) , (b,f(b))

-obtener c = la intersección de f con la recta anterior

-evaluar f(c)

-comprobrar si f(c) = 0

SI $\Rightarrow$ parar el proceso , dato de salida = c

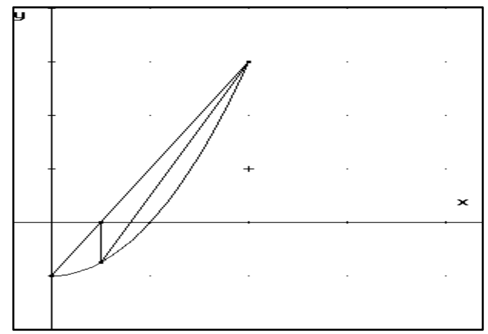
NO $\Rightarrow$ seguir el proceso

-considerar I_1 el subintervalo donde f cambia de signo

-comprobar si $|f(c)| < T$

SI $\Rightarrow$ parar el proceso , dato de salida c , I_1

NO $\Rightarrow$ repetir el proceso con el nuevo subintervalo



En este caso no se tiene asegurado que long(I_n) $\rightarrow$ 0 por esa razón cambia el criterio de parada pero el algoritmo puede ser infinito

La solución puede ser tanto c como el subintervalo correspondiente aunque lo más habitual es que sea c (la mejor aproximación obtenida)

El organigrama puede implementarse con sólo la verificación $|f(c)| < T$.

Acotación del error

Valen los mismos comentarios hechos en el apartado anterior.

En las condiciones del Teorema de acotación

$$|c-\alpha| \leq \frac{|f(c)|}{m} \leq \frac{T}{m}$$

1.4 Resolución de ecuaciones. Métodos de aproximación de raíces.

Método del punto fijo

Dada una función y = g(x) se dice que α es un punto fijo de g si cumple

$$g(\alpha) = \alpha$$

Reformulación del problema

Nuestro problema sigue siendo resolver la ecuación $f(x) = 0$ pero en vez de eso, vamos a resolver la ecuación $g(x) = x$ donde la función g es una función auxiliar que se escoge a partir de f de forma que los puntos fijos de g sean las raíces de f.

Organigrama

-elegir iterante inicial x_0 y tolerancia T

-evaluar $x_1 = g(x_0)$

-comprobar $|x - g(x_0)| < T$

SI $\Rightarrow$ parar el método , dato de salida x_1

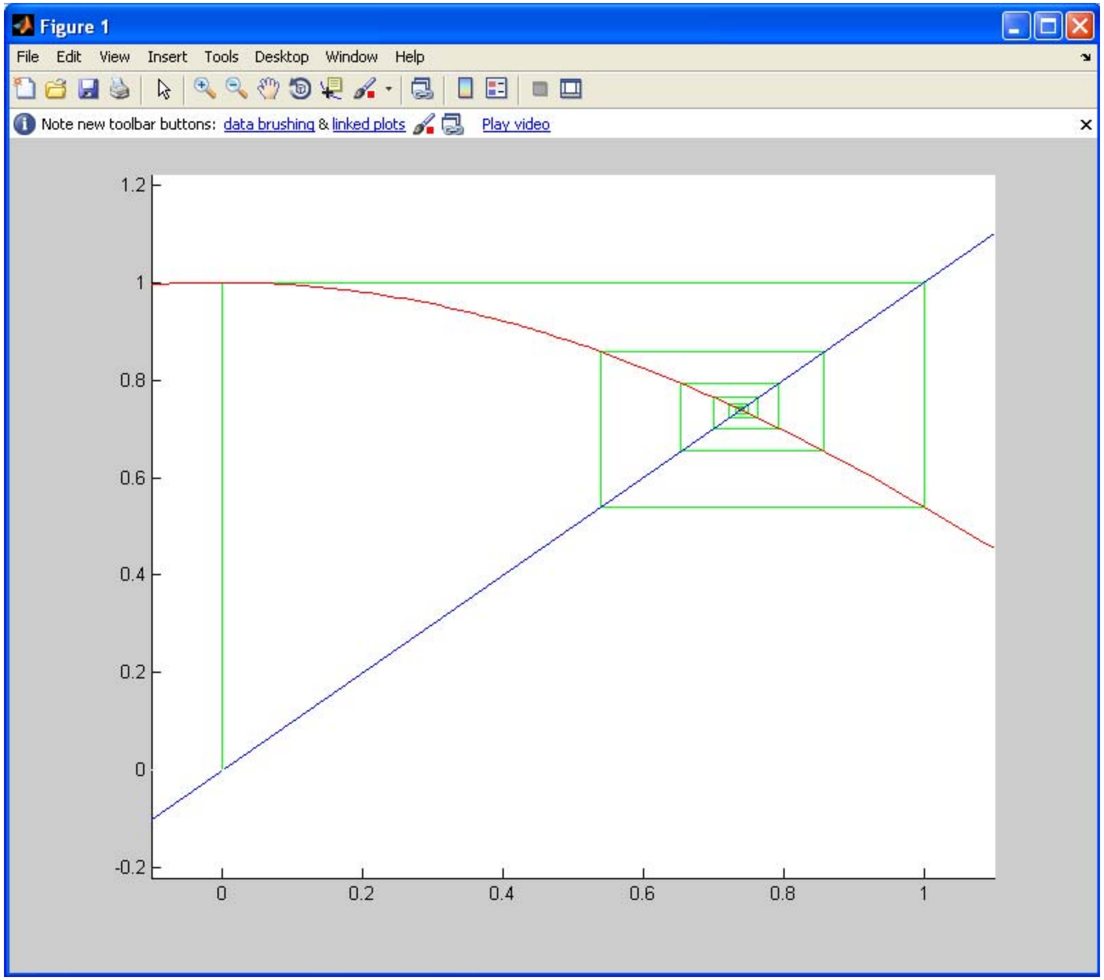
NO $\Rightarrow$ continuar el método con el nuevo iterante x_1

La solución es una sucesión $\{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$ que en caso de converger lo hace hacia un punto fijo de g.

Ejemplo de representación de iteración de punto fijo para el caso f(x) = cos(x).

En este caso tenemos la iteración del tipo caracol

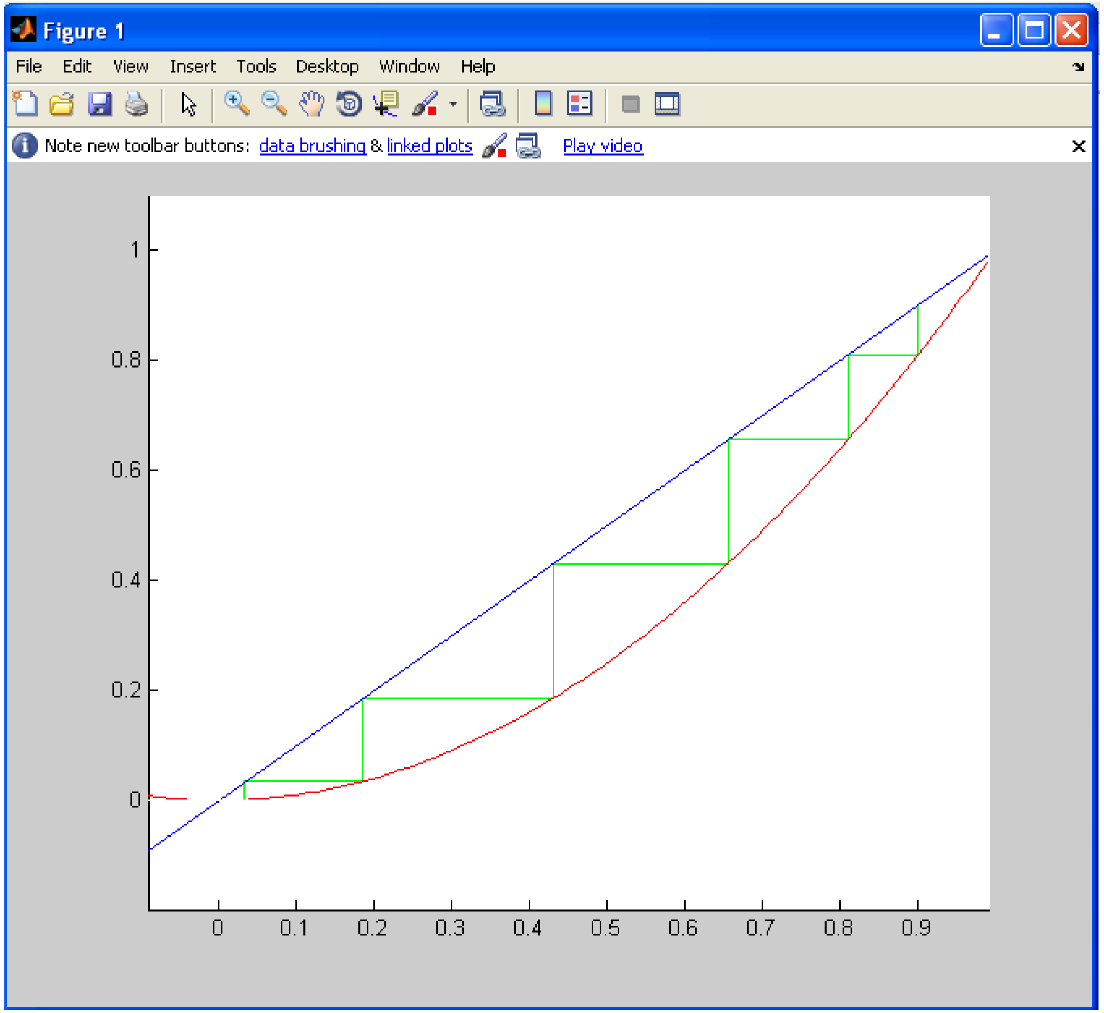
- Iterante inicial $x_0 = 0$
- solución aproximada $\alpha = 0.739085$.



Ejemplo de representación de iteración de punto fijo para el caso $f(x) = x^2$.

En este caso tenemos la iteración del tipo escalera.

- Iterante inicial $x_0 = 0.9$
- solución aproximada $\alpha = 0$.



Teorema de convergencia

Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivable con derivada continua en (a,b) y sea $\alpha\in(a,b)$ un punto fijo de g

1º) Si $|g'(\alpha)|<1$ entonces existe un entorno de α tal que si x_0 está en dicho entorno la sucesión de iterantes converge hacia el punto fijo α.

2º) Si $|g'(\alpha)|>1$ entonces la sucesión de iterantes no converge hacia α independientemente del iterante inicial elegido.

Teorema de acotación del error

Supongamos g en las condiciones anteriores y además $|g'(x)|\le M<1\ \forall x\in(a,b)$

si llamamos $e_1=|\alpha-x_1|$ tenemos que

$$|e_n|\le M|e_{n-1}|$$

Teorema de acotación del error en el caso $g'(\alpha)=0$

Supongamos que $g'(\alpha)=0$ y que g es derivable hasta orden 2 en (a,b) con $|g''(x)|\le M<1\ \forall x\in(a,b)$

entonces $$|e_n|\le\frac{M}{2}|e_{n-1}|^2$$

Método de Newton

Problema

Resolver la ecuación f(x) = 0 usando iteración de punto fijo con función de iteración

$$g(x) = x - \frac{1}{f'(x)} f(x)$$

Acotación del error

Si f es derivable hasta orden 3 con derivada conti

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

luego $g'(\alpha) = 0$.