Das magnetische Pendel

CoFee 1 Blatt 3

Arto Steffan

29/06/23

Inhaltsverzeichnis

Das ganzes Code befindet sich unter meinem Git Repostitory: `https://github.com/Tamwyn001/ComputerPhysikUniKonstanz2023/tree/main/Blatt_4`

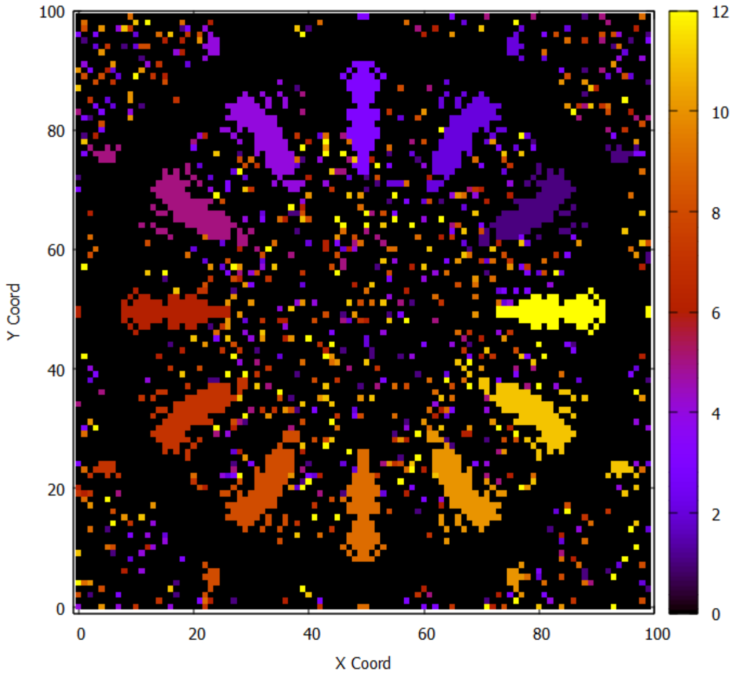

Abbildung 1: *Das magnetische Pendel mit 12 Magneten.*

1 Das Magnetpendel

Wir stellen ein Pendel der Masse m mit konstanter Fadenlänge über drei Magnete. Dies führt zu einem chaotischem System. Wir betrachten die Bewegung in der x-y Ebene. Die magnetische Kraft lässt sich annähern durch :

$$\vec{F}_M(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{n} M_i \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|} \tag{1}$$

Mit:

$$\vec{r} : \text{Ort des Pendels,}$$
$$\vec{r_i} : \text{Ort des i-ten Magnetes,}$$
$$n : \text{die Anzahl der Magneten,}$$
$$M_i : \text{Stärke des i-ten Magnetes.}$$

Wobei M_i die Stärke des Magnetes ist. Ist $M_i > 0$, so stößt der Magnet ab. Für $M_i < 0$ zieht der Magnet das Pendel an.
Weiter wirken noch eine Reibungskraft $\vec{F_r} = -\gamma \cdot \vec{v}$ und eine Federkraft $\vec{F_k} = -k \cdot \vec{r}$. Wir erhalten durch das zweite Newton´sche Gesetz:

$$m \cdot \vec{a} = \sum_{i=0}^{n} M_i \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|} - \gamma \cdot \vec{v} - k \cdot \vec{r} \tag{2}$$

Wir wollen, dass der Schwerpunkt der drei Pendel sich am Ursprung befindet. Dafür können wir zum Beispiel die Polarkoordinaten nehmen, und die Magneten wie folgt anordnen:

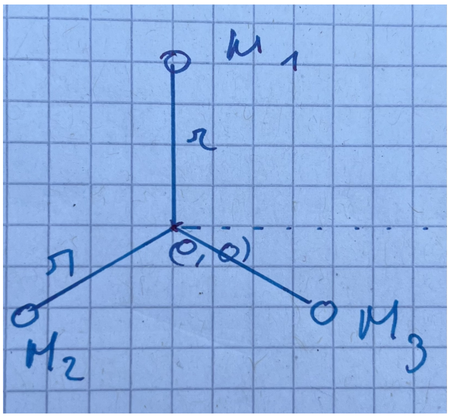

Abbildung 2: Die Anordnung von drei Magneten, sodass deren Schwerpunkt im Ursprung liegt.

Wobei wir an der Abbildung 3 für n Pendel $i \in [0; n]$

$$\vec{r}_{M_i} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \tag{3}$$

haben. θ_i beweist eine symmetrische Verteilung über 2π.

$$\theta_i = \frac{i \cdot 2\pi}{n} \tag{4}$$

Auf dem Bereich $x, y \in [-1; 1]$ haben wir:

$$\vec{r}_{M_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}\Bigg|_{Polar} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\Bigg|_{Kartesisch} \tag{5}$$

$$\vec{r}_{M_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}\Bigg|_{Polar} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\Bigg|_{Kartesisch} \tag{6}$$

$$\vec{r}_{M_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi \end{pmatrix}\Bigg|_{Polar} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{Kartesisch} \tag{7}$$

Wir wollen diese Bewegungsgleichung mittels des Leap-Frog-Verfahren lösen. Das Verfahren lautet:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \vec{v}_{n+\frac{1}{2}} \cdot h \tag{8}$$

$$\vec{v}_{n+\frac{3}{2}} = \vec{v}_{n+\frac{1}{2}} + \vec{a}_{n+1} \cdot h. \tag{9}$$

Es eignet sich ganz gut, denn man kann die newtonsche Bewegungsgleichung des Pendels als Beschleunigung $\vec{a}$ einfach einsetzen.

2 Chaotische Bewegung

Wir wollen nun die Bewegung des Pendels darstellen. Dafür setzen wir vier unterschiedliche Anfangspunkte:

$$(1; -0,73), (1,3; -0,7), (1,15; -0,63)$$

Es ergeben sich die folgenden Bahnen:

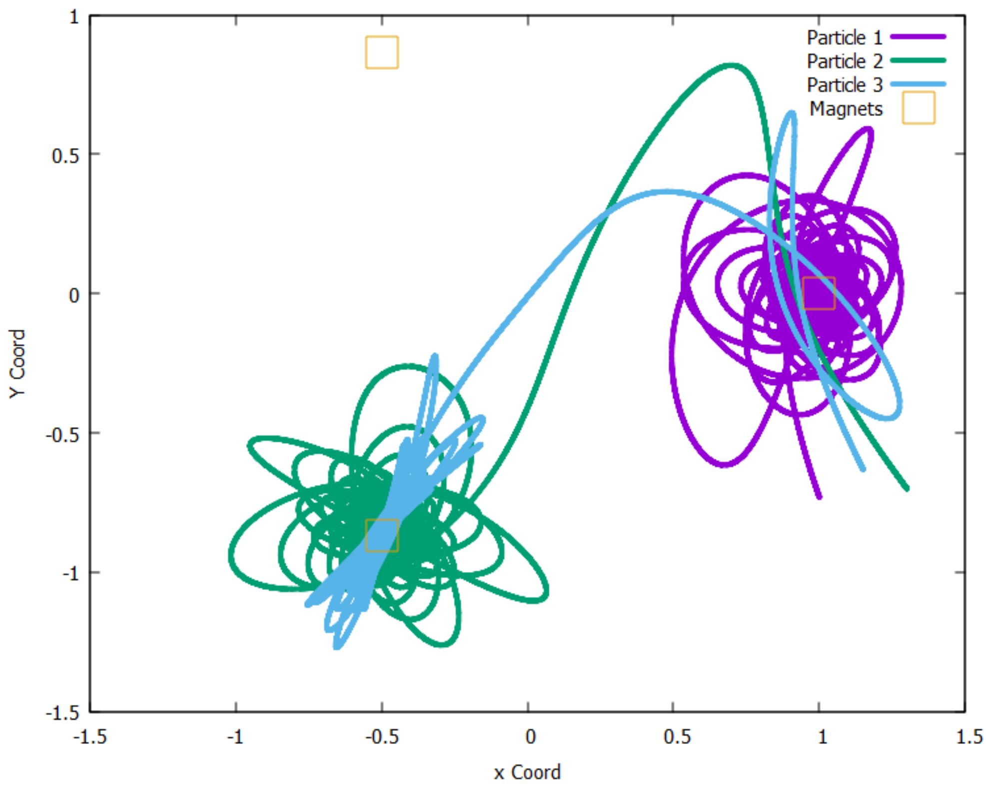

Abbildung 3: Die Trajektorie von vier verschiedenen Pendeln, die am Anfang nahzueinander liegen. Die chaotische Bewegung lässt sich mittels der sehr unterschiedlichen Bahnkurven zeigen. Zwei Pendel konvergieren zum unteren Magnet und eins zum linken Magnet. Die Kurven sehen sehr unterschiedlich aus, und über den Magneten kann man Spiralen observieren. Die Simulation wird abgebrochen, wenn die Pendeln nah genug am Magnet sind.

Schließlich wollen wir darstellen, wo das Pendel in Abhängigkeit seiner Anfangsposition ruht. Dafür lassen wir für jede Pixel im Bereich $[-1, 1]$ die Simulation laufen und erhalten das folgende Bild unter den Bedingungen:

$$\gamma = 0,2 \quad k = 0,1 \quad m = 1 \quad M_i = 100.$$

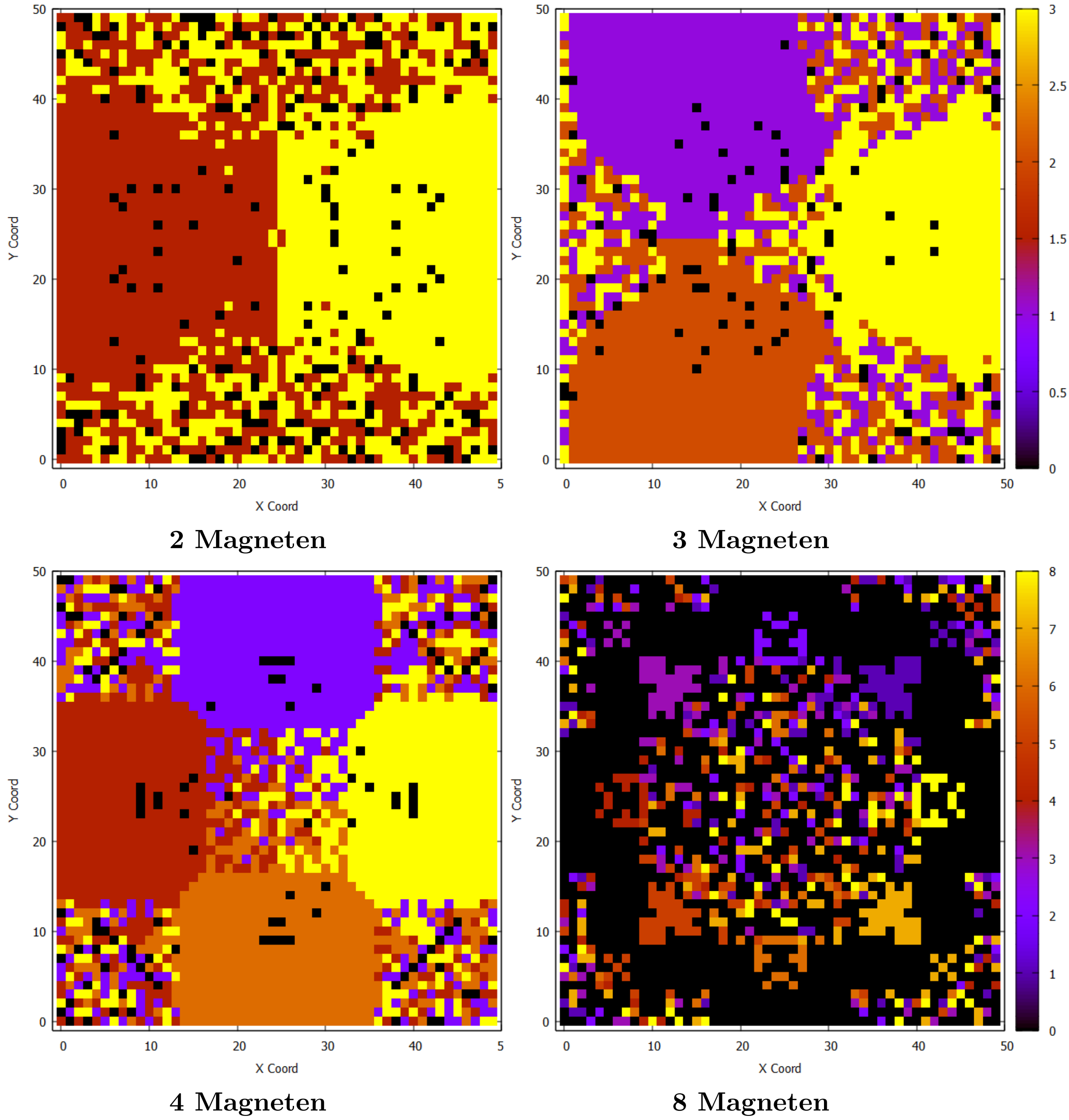

Abbildung 4: Die Konvergenzpunkte für unterschiedliche Anfangsbedingungen und unterschiedlich Anzahlen von Magnete. Weiter müssen noch die Koordinaten normiert werden. Die x und y Achsen entsprechen den Koordinaten der Pixel, aber das muss auf dem physikalischen Bereich $x, y \in [-1, 1]$ übertragen werden. Nehmen wir als Beispiel die erste Abbildung mit dem Pixel (0,0). Dabei ist die Farbe rot, das heißt, dass das Pendel am Ende der Simulation bei dem linken Magneten ruht. Dabei gehört jede Farbe zu einem Magnet. Die schwarzen Pixel entsprechen Anfangsbedingungen, bei denen das Pendel seinen Ruhelage am Ende der Simulation nicht erreicht hat.

Auf den Abbildungen 4 hat man das Problem für vier verschiedene Magneteinstellungen dargestellt. Wir merken, dass die Abbildung eine gewisse Drehsymmetrie besitzt. Hier kann man vier Bereiche unterscheiden.

Fängt man in der Nähe eines Magnetes an, so wird die Magnetkraft sehr stark, und das Pendel ruht neben dem Magnet.

Die schwarzen Pixel entsprechen den Anfangsbedingugen, wo das Pendel gegen kein Magnet konvergiert. Entweder ist das der Fall, wenn die Anfangsposition auf eine Kräftgleichgewichtspostion zwischen zwei Magneten liegt. Das Pendel schafft nicht zu ruhen, bevor die Simulation zum Ende läuft. Oder das Pendel fängt zu nah am Magnet an, die Beschleunigung ist sehr groß und das Pendel wird weit von dem Einheitskreis weggeschiessen. Es schafft es nicht, an einem Pendel zu ruhen, bevor die Simulationszeit abläuft. Bei der Darstellung mit acht Magneten beobachtet man, dass schwarz vorherrschend ist. Es liegt daran, dass die Anzahl der Gleichgewichtspunkte mit der Anzahl der Magneten steigt. Man beobachtet bei diesen Punkten eine sehr schöne Symmetrie.

Außerhalb von diesen Bereichen beobachtet man eine chaotische Mischung von Farben. Wenn die Anfangsposition leicht abweicht, beeinflusst das die Endposition des Pendels.

Weiter merkt man, dass eine Interpolation der Farben am Zentrum für die Einstellung mit drei und vier Magneten stattfindet. In diesem Bereich sollten die großen farblichen Flächen alle zum Ursprung konvergieren. Es kann daran liegen, dass die Simulation aufhört, wenn das Pendel zu nah am Magnet ist, ohne gefangen zu sein. Weiter können auch numerische Unsicherheiten vorkommen, denn die Bereiche breiten sich dort über die anderen aus. Unter numerische Unsicherheit versteht man zum Beispiel einen zu große Schrittweite.

3 Fazit

Das magnetische Pendel beschreibt ein chaotisches System, wo ein Teilchen sich unter einer Federkraft bewegt. Es erfährt eine Reibung und die Kraft von den Magneten, die man gleichmäßig über einen Kreis verteilt. Das chaotische Verhalten lässt sich zeigen, indem man die Anfangspostion des Pendels ändert.