

Shoot me to the moon

Computerphysik 1, Abschlussprojekt (Universität Konstanz)

Autoren: Arto Steffan, Tom Folgmann, David Jannack

Tutor: Daniel Kazenwadel und Jakob

Abgabe am 01.10.2023

Einleitung

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	2
2	Code	12
3	Auswertung	13
4	Fazit	16

Das vollständig Code des Projektes befindet sich unter dem Git Repository: <https://github.com/Tamwyn001/ShootMeToTheMoooon>.

1 Grundlagen

Zunächst ist die Situation mathematisch zu beschreiben, wobei wir uns aufgrund der numerischen Bekanntheit für eine Hamilton-Modellierung entscheiden. Zur Erinnerung: Für ein Potential $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Hamiltonfunktion die Form

$$H(t, (q(t), p(t))) = \frac{p(t)^2}{2m} + V(t, q(t)).$$

Um eine konkrete Abbildungsvorschrift zu erlangen, stellen wir die Lagrange Funktion des Systems auf und finden mithilfe von einer Potentialüberlegung und der Legendre Transformation die schließliche Form.

Grundlegende Überlegung

Wir konzentrieren uns auf ein Dreikörperproblem, bei welchem eine Masse (diejenige des Satelliten) im Vergleich zu den anderen beiden Körpermassen der Erde und des Mondes klein ist. Als Ortskoordinaten der drei Körper verwenden wir Wege der Form

$$q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto ((f_{C \rightarrow S} \circ x)_1^*(t), (f_{C \rightarrow S} \circ x)_2^*(t), (f_{C \rightarrow S} \circ x)_3^*(t)),$$

wobei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ unser tatsächlicher Aufenthaltsort in kartesischen Koordinaten und $f_{C \rightarrow S}$ unsere Kugelkoordinatentransformation (*cartesian to spherical*) ist. Wir legen die Erde mit Zentrum im Ursprung fest und setzen ihren Radius auf $r_E := 6300\text{km}$, sodaß unser x_0 Element des Randes $\delta B_{r_E} := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_3 = r_A\}$ sein wird. Ziel ist das Erreichen des Ortes

$$x_1 \in B_{r_M, d} := (B_{r_M} + d) := \{x + d \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = r_M\}$$

festgelegt durch den Zentrumsvektor d des Mondes zum Erdzentrum und den Mondradius $r_M := 1737,4\text{km}$ (0,273 Erde).

Potentialbeschreibung

Für das *Gravitationspotential* des Systems wählen wir zwei Newtonsche Potentiale an den jeweiligen Zentren des Mondes und der Erde. Allgemein schreiben wir:

$$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, q(t), q'(t)) \mapsto G \cdot \sum_{i \in [2]} \frac{m_i \cdot m_S}{\|(f_{S \rightarrow C} \circ Q_i)^*(t) - (f_{S \rightarrow C} \circ q)(t)\|_2},$$

wobei wir in Q die Orte der Erde (an Stelle 1) und des Mondes (an Stelle 2) sammeln und mit m_S die Satellitenmasse bzw. mit $m := (m_E, m_M)$ die Erd- bzw. Mondmasse bezeichnen:

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^3)^2, \quad t \mapsto (0_{\mathbb{R}^3}, d).$$

An dieser Stelle können wir später ebenfalls bewegte Mond- und Erdmassen einsetzen, indem wir die entsprechenden Einträge durch Funktionen $d_E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $d_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ersetzen.

Wir lassen hier bewusst die Masse des Satelliten selbst aus, da wir sonst eine Singularität an jeder Stelle durch $1/\|q(t) - q(t)\|_2$ erhielten.

Um besser mit dem Potential rechnen zu können, finden wir im Folgenden eine explizitere Form. Schreiben wir zuerst $f_{S \rightarrow C} \circ q = x$ in eine nützlichere Form. Mit den *Tangenteneinheitsvektoren* in Kugelkoordinaten,

$$\begin{aligned} e_1(q(t)) &= \begin{pmatrix} \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) \\ \cos(q_2^*(t)) \end{pmatrix}, & e_2(q(t)) &= \begin{pmatrix} \cos(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ \cos(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) \\ -\sin(q_2^*(t)) \end{pmatrix}, \\ e_3(q(t)) &= \begin{pmatrix} -\sin(q_3^*(t)) \\ \cos(q_3^*(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gelingt dies in Form von $x(t) = q_1^*(t) \cdot e_1(q(t))$. Die Vektoren wurden dabei als Funktionen $e_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ modelliert. Wegen $Q_1(t) = 0_{\mathbb{R}^3}$ müssen wir für die Koordinate der Erde keine große Berechnung durchführen, wohl aber für die Position des Mondes. Ohne Einschränkung befinde sich diese in der x-y-Ebene. Wir wollen zwei Modellvorstellungen betrachten:

- ein statischer Mond
- ein Mond, der auf einer Ellipsenbahn die Erde umkreist

Für beide Modelle ist eine geeignete Form

$$Q_2(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ Bahnparameter und $\Phi_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetig differenzierbare Phasenfunktion. Eingesetzt in die Potentialformel ergibt sich

$$\begin{aligned} V(t, q(t)) &= G \cdot m_1 \cdot m_S \cdot \|q_1^*(t) \cdot e_1(q(t))\|_2^{-1} \\ &\quad + m_2 \cdot m_S \cdot \left\| q_1^*(t) \cdot e_1(q(t)) - \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^{-1} \end{aligned}$$

Wir behandeln beide Summanden separat. Für den ersten ergibt sich unter Ausnutzung der Normiertheit von $e_1(q(t))$

$$\|q_1^*(t) \cdot e_1(q(t))\|_2^{-1} = q_1^*(t)^{-1} \cdot \|e_1(q(t))\|_2^{-1} = q_1^*(t)^{-1}.$$

Den zweiten Summand schreibt man aus als

$$\begin{aligned}
& \left\| q_1^*(t) \cdot e_1(q(t)) - \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \end{pmatrix} \right\|_2^{-1} \\
&= \left\| q_1^*(t) \cdot \begin{pmatrix} \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) \\ \cos(q_2^*(t)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^{-1} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} q_1^*(t) \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) - a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ q_1^*(t) \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) - b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^{-1}
\end{aligned}$$

Ergebnis Wir halten für das Potential fest:

$$\begin{aligned}
V(t, q(t)) &= G \cdot m_1 \cdot m_S \cdot q_1^*(t)^{-1} \\
&+ G \cdot m_2 \cdot m_S \cdot \left\| \begin{pmatrix} q_1^*(t) \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) - a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ q_1^*(t) \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) - b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Kinetische Energie in Kugelkoordinaten

Als kinetische Energie des Gesamtsystems betrachten wir allgemein die Summe der einzelnen kinetischen Energien der beteiligten Körper als

$$T_G(t, (q(t), q'(t))) = \sum_{i \in [2]} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \|((f_{S \rightarrow C} \circ Q)_i^*)'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot \|(f_{S \rightarrow C} \circ q)'(t)\|_2^2.$$

Dabei ist $f_{S \rightarrow C} := f_{C \rightarrow S}^{-1}$ die Rücktransformation von Kugelkoordinaten auf kartesische Koordinaten. Unsere generalisierten Koordinaten beziehen sich jedoch nur auf eine Betrachtung des Satelliten, dessen kinetische Energie ist also

$$T(t, (q(t), q'(t))) = \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot \|(f_{S \rightarrow C} \circ q)'(t)\|_2^2.$$

Wir wollen wieder einen möglichst expliziten Ausdruck finden und gehen von $x(t) = q_1^*(t) \cdot e_1(q(t))$ aus. Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$x'(t) = \left(\frac{d}{dt} q_1^*(t) \right) \cdot e_1(q(t)) + q_1^*(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} e_1(q(t)) \right).$$

Die totale Zeitableitung von e_1 berechnen wir stur explizit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e_1(q(t)) &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ \frac{d}{dt} \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) \\ \frac{d}{dt} \cos(q_2^*(t)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \sin(q_2^*(t)) \right) \cdot \cos(q_3^*(t)) + \sin(q_2^*(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \cos(q_3^*(t)) \right) \\ \left(\frac{d}{dt} \sin(q_2^*(t)) \right) \cdot \sin(q_3^*(t)) + \sin(q_2^*(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \sin(q_3^*(t)) \right) \\ -q'(t)_2 \cdot \sin(q_2^*(t)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q'(t)_2 \cdot \cos(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) - \sin(q_2^*(t)) \cdot q'(t)_3 \cdot \sin(q_3^*(t)) \\ q'(t)_2 \cdot \cos(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) + \sin(q_2^*(t)) \cdot q'(t)_3 \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ -q'(t)_2 \cdot \sin(q_2^*(t)) \end{pmatrix} \\
&= q'(t)_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ \cos(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) \\ -\sin(q_2^*(t)) \end{pmatrix} + q'(t)_3 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(q_3^*(t)) \\ \cos(q_3^*(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= q'(t)_3 \cdot e_2(q(t)) + q'(t)_3 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot e_3(q(t)).
\end{aligned}$$

Wir halten als Zwischenstand fest

$$x'(t) = q'(t)_1 \cdot e_1(q(t)) + q_1^*(t) \cdot q'(t)_3 \cdot e_2(q(t)) + q_1^*(t) \cdot q'(t)_3 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot e_3(q(t)).$$

Nun ergibt sich als Normquadrat dieser Geschwindigkeit wegen der euklidischen Orthogonalität der Tangenteneinheitsvektoren

$$\begin{aligned}
\|x'(t)\|_2^2 &= \|q'(t)_1 \cdot e_1(q(t)) + q_1^*(t) \cdot q'(t)_3 \cdot e_2(q(t)) + q_1^*(t) \cdot q'(t)_3 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot e_3(q(t))\|_2^2 \\
&= q'(t)_1^2 + q_1^*(t)^2 \cdot q'(t)_3^2 + q_1^*(t)^2 \cdot q'(t)_3^2 \cdot \sin(q_2^*(t))^2
\end{aligned}$$

Ergebnis Damit erhalten wir einen ausgeschriebenen Ausdruck für die kinetische Energie:

$$T(t, q(t), q'(t)) = \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot \left(q'(t)_1^2 + q_1^*(t)^2 \cdot q'(t)_3^2 + q_1^*(t)^2 \cdot q'(t)_3^2 \cdot \sin(q_2^*(t))^2 \right). \quad (\text{kinE})$$

Lagrange Funktion

Der Lagrangeformalismus beschreibt den Unterschied der *kinetischen* zur *potentiellen Energie* des Systems für einen konservatives Kraftfeld und holonome Zwangsbedingungen, wenn es welche gibt, was hier nicht der Fall ist.

Zusammen mit dem oben bereits bestimmten Potential V erhalten wir durch die Form $L = T - V \circ \phi$ mit der Argumentauswahlfunktion $\phi := ((t, x_1))_{(t,x)}$ den Lagrangian

$$L : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, (q(t), q'(t))) \mapsto \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot \|q'(t)\|_2^2 - G \cdot \sum_{i \in [2]} \frac{m_i \cdot m_S}{\|Q_i^*(t) - q(t)\|_2}.$$

Liegen nichtkonstante Wege Q_i^* vor, so wird die Strategie unverändert bleiben, da eine Ableitung in Richtung $q'(t)$ vorliegt, welche nicht in der Definition von Q enthalten ist, sodaß allgemeiner gelten wird

$$L : (t, (q(t), q'(t))) \mapsto T(t, (q(t), q'(t))) - (V \circ \psi)(t, (q(t), q'(t))),$$

wobei dann die Summanden in der Implementierung einzeln vorberechnet werden müssen.

Legendre Transformation

Um die Hamiltonfunktion aufstellen zu können, braucht es eine Transformation der Form $p(t) := \frac{d}{db} L(t, (q(t), b))|_{b=q'(t)}$. Wir müssen nach Form unserer kinetischen Energie die Ableitungen komponentenweise betrachten. Wir notieren zunächst den Ableitungsvektor

$$\frac{d}{db} L(t, (q(t), b))|_{b=q'(t)} = \left(\frac{d}{ds} L(t, (q(t), q'(t) + s \cdot \mathbb{1}_k))|_{s=0} \right)_{k \in [3]}, \quad \mathbb{1}_k := \left(\begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)_{i \in [3]}$$

Somit erhalten wir konkret:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(t, (q(t), q'(t) + s \cdot \mathbb{1}_1))|_{s=0} &= \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot \frac{d}{db_1} b_1^2|_{b_1=q'(t)_1} \\ &= m_S \cdot q'(t)_1, \\ \frac{d}{ds} L(t, (q(t), q'(t) + s \cdot \mathbb{1}_2))|_{s=0} &= \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot q(t)_1^2 \cdot \frac{d}{db_2} b_2^2|_{b_2=q'(t)_2} \\ &= m_S \cdot q(t)_1^2 \cdot q'(t)_2, \\ \frac{d}{ds} L(t, (q(t), q'(t) + s \cdot \mathbb{1}_3))|_{s=0} &= \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot q(t)_1^2 \cdot \sin(q(t)_2)^2 \cdot \frac{d}{db_3} b_3^2|_{b_3=q'(t)_3} \\ &= m_S \cdot q(t)_1^2 \cdot \sin(q(t)_2)^2 \cdot q'(t)_3. \end{aligned}$$

Invertieren wir nun die einzelnen Komponenten, so können wir die Ableitung der verallgemeinerten Koordinaten mittels des Argumentes $(t, (q(t), p(t)))$ ausdrücken. Wir erhalten

$$q'(t, (q(t), p(t))) = \frac{1}{m_S} \cdot \left(p(t)_1, \frac{p(t)_2}{q(t)_1^2}, \frac{p(t)_3}{q(t)_1^2 \cdot \sin(q(t)_2)^2} \right).$$

Setzen wir dies für die Vorkommnisse von $q'(t)$ im Lagrangian L ein, so erhalten wir den Hamiltonian H in der Form

$$H(t, (q(t), p(t))) = T(t, (q(t), p(t))) + V(t, q(t)),$$

wobei nach obiger Defintion für den kinetischen Energieanteil gilt

$$\begin{aligned} T(t, (q(t), p(t))) &= \frac{1}{2 \cdot m_S} \cdot \left(p(t)_1^2 + \left(\frac{p(t)_2}{q(t)_1^2} \right)^2 \cdot q(t)_1^2 + \left(\frac{p(t)_3}{q(t)_1^2 \cdot \sin(q(t)_2)^2} \right)^2 \cdot q(t)_1^2 \cdot \sin(q(t)_2)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot m_S} \cdot \left(p(t)_1^2 + \frac{p(t)_2^2}{q(t)_1^2} + \frac{p(t)_3^2}{q(t)_1^2 \cdot \sin(q(t)_2)^2} \right). \end{aligned}$$

Für die Ableitung des Hamiltonians nach $p(t)$ müssen wir lediglich die Ableitung $\frac{d}{db}T(t, (q(t), b))|_{b=p(t)}$ durchführen. Wir erhalten dabei drei Komponenten, wie auch schon bei der Legendre Transformation. Diese lauten hier

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t, (q(t), p(t) + s \cdot \mathbb{1}_1))|_{s=0} &= \frac{1}{2 \cdot m_S} \cdot \frac{d}{db_1} b_1^2|_{b_1=p(t)_1} \\ &= \frac{1}{m_S} \cdot p(t)_1, \\ \frac{d}{ds}T(t, (q(t), p(t) + s \cdot \mathbb{1}_2))|_{s=0} &= \frac{1}{2 \cdot m_S \cdot q(t)_1^2} \cdot \frac{d}{db_2} b_2^2|_{b_2=p(t)_2} \\ &= \frac{1}{m_S \cdot q(t)_1^2} \cdot p(t)_2, \\ \frac{d}{ds}T(t, (q(t), p(t) + s \cdot \mathbb{1}_3))|_{s=0} &= \frac{1}{2 \cdot m_S \cdot q(t)_1^2 \cdot \sin(q(t)_2)^2} \cdot \frac{d}{db_3} b_3^2|_{b_3=p(t)_3} \\ &= \frac{1}{m_S \cdot q(t)_1^2 \cdot \sin(q(t)_2)^2} \cdot p(t)_3.\end{aligned}$$

Die Zusammenfassung bildet dann die nötige Richtungsableitung für die zweite Hamiltonsche Bewegungsgleichung.

Wir benötigen hier die Ableitung $\frac{d}{da}T(t, (a, p(t)))|_{a=q(t)}$. Wir erhalten für die drei Komponenten nach Legendre Transformation die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t, (q(t) + s \cdot \mathbb{1}_1, p(t)))|_{s=0} &= \frac{1}{2 \cdot m_S} \cdot \frac{d}{da} \left(\frac{p(t)_2^2}{a^2} + \frac{p(t)_3^2}{a^2 \cdot \sin(q(t)_2)^2} \right) \Big|_{a=q(t)_1} \\ &= \frac{1}{2 \cdot m_S} \cdot \left(\frac{-2 \cdot p(t)_2^2}{q(t)_1^3} + \frac{-2}{q(t)_1^3} \cdot \frac{p(t)_3^2}{\sin(q(t)_2)^2} \right) \\ \frac{d}{ds}T(t, (q(t) + s \cdot \mathbb{1}_2, p(t)))|_{s=0} &= \frac{1}{2 \cdot m_S} \cdot \frac{p(t)_3^2}{q(t)_1^2} \cdot \frac{d}{da} \frac{1}{\sin(a)^2} \Big|_{a=q(t)_2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot m_S} \cdot \frac{p(t)_3^2}{q(t)_1^2} \cdot \frac{-2 \cdot \cos(q(t)_2)}{\sin(q(t)_2)^3}.\end{aligned}$$

Mit Blick auf die Definition (kinE) können wir die dritte Komponente auf Null setzen: $\frac{d}{ds}T(t, (q(t) + s \cdot \mathbb{1}_3, p(t)))|_{s=0} = 0$.

Numerik des Hamiltonsystems

Um die Theorie der Numerik auf unser Problem anwenden zu können, müssen wir noch eine *rechte Seite* definieren. Wir finden diese über die *Hamiltonischen Bewegungsgleichungen*, welche durch die Richtungsableitungen in $q(t)$ und $p(t)$ gegeben und in einem

Tupel zusammengefasst werden. Hierzu bestimmen wir zunächst

$$\frac{d}{da}H(t, (a, p(t))) = \frac{d}{da} \left(T + V(t, a) \right) = \frac{d}{da} V(t, a), \quad (\text{dHa})$$

$$\frac{d}{db}H(t, (q(t), b)) = \frac{d}{db} \left(\frac{b^2}{2m_S} + V(t, q(t)) \right) = \frac{b}{m_S} + \underbrace{\frac{d}{db}V(t, q(t))}_{=0}. \quad (\text{dHb})$$

An dieser Stelle müssen wir noch einmal arbeiten, um die Ableitung des Potentials in $q(t)$ zu bestimmen, da es sich um eine Verkettung höheren Grades handelt. Definiere

$$f := \left(\begin{pmatrix} s_1 \cdot \sin(s_2) \cdot \cos(s_3) - a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ s_1 \cdot \sin(s_2) \cdot \sin(s_3) - b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{s \in \mathbb{R}^3},$$

$$g := (\|s\|_2)_{(t,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3},$$

sodass $V(t, q(t)) = G \cdot m_1 \cdot m_S \cdot q_1^*(t)^{-1} + G \cdot m_2 \cdot m_S \cdot g(f(t, q(t)))^{-1}$. Wir berechnen folgens die partiellen Ableitungen der Potentialfunktion.

$$\frac{d}{ds} V(t, (q(t) + s \cdot \mathbb{1}_1)) \Big|_{s=0} = -G \cdot m_1 \cdot m_S \cdot q_1^*(t)^{-2} + G \cdot m_2 \cdot m_S \cdot \frac{d}{da} g(f(t, q(t) + a \cdot \mathbb{1}_1))^{-1} \Big|_{a=0}.$$

Der zweite Summand berechnet sich mit der Kettenregel. Wir definieren vorab die Abkürzung $\mathbb{1}_{0,k} := (0, \mathbb{1}_k)$ für $k \in [3]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} g(f(q(t) + a \cdot \mathbb{1}_{0,1})) \Big|_{a=0} &= d(\text{inv} \circ g \circ f)(q(t))(\mathbb{1}_1) = d \text{inv}(g(f(q(t))))(d(g \circ f)(q(t))(\mathbb{1}_{0,1})) \\ &= \text{inv}((g(f(q(t))))^2) \cdot d(g \circ f)(q(t))(\mathbb{1}_{0,1}) \\ &= \frac{1}{g(f(q(t)))} \cdot d(g \circ f)(q(t))(\mathbb{1}_{0,1}). \end{aligned}$$

Erneute Anwendung der Kettenregel auf den zweiten Faktor liefert

$$d(g \circ f)(q(t))(\mathbb{1}_{0,1}) = dg(f(q(t)))(df(q(t))(\mathbb{1}_{0,1})). \quad (1)$$

Es verbleibt noch die Richtungsableitungen der Quadratnorm g , sowie f zu berechnen:

- Schreibe explizit $g(x) = \left(\sum_{j \in [3]} x_j^2 \right)^{1/2}$ für $x \in \mathbb{R}^3$, dann (mit der Richtung $h \in \mathbb{R}^3$ und q_2 bezeichnend für das Quadratmonom)

$$\begin{aligned} dg(x)(h) &= \frac{d}{da} \left(\sum_{j \in [3]} (x_j + a \cdot h_j)^2 \right)^{1/2} \Big|_{a=0} \\ &= \frac{d}{da} \sum_{j \in [3]} (x_j + a \cdot h_j) \Big|_{a=0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j \in [3]} x_j^2 \right)^{-1/2} \\ &= \left(\sum_{j \in [3]} dq_2(x_j)(h_j) \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g(x)} = \frac{\sum_{j \in [3]} h_j \cdot x_j}{g(x)}. \end{aligned}$$

- Die erste partielle Ableitung von f ergibt sich als

$$\begin{aligned} df(t, q(t))(\mathbb{1}_{0,1}) &= \frac{d}{ds_1} \left(\begin{pmatrix} s_1 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) - a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ s_1 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) - b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Big|_{s \in \mathbb{R}^3} \Big|_{s_1=q_1^*(t)} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Die zweite partielle Ableitung von f lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} df(t, q(t))(\mathbb{1}_{0,2}) &= \frac{d}{ds_2} \left(\begin{pmatrix} s_1 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) - a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ s_1 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) - b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Big|_{s \in \mathbb{R}^3} \Big|_{s_2=q_2^*(t)} \\ &= \begin{pmatrix} s_1 \cos(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ s_1 \cos(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Und schließlich die dritte partielle Ableitung von f lautet

$$\begin{aligned} df(t, q(t))(\mathbb{1}_{0,3}) &= \frac{d}{ds_3} \left(\begin{pmatrix} s_1 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) - a \cdot \cos(\Phi_M(t)) \\ s_1 \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) - b \cdot \sin(\Phi_M(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Big|_{s \in \mathbb{R}^3} \Big|_{s_3=q_3^*(t)} \\ &= \begin{pmatrix} -s_1 \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)) \\ s_1 \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rückeinsetzen in (1) ergibt

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(q(t))(\mathbb{1}_1) &= \frac{q_1^*(t) \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) - a \cdot \cos(\Phi_M(t))}{g(f(q(t)))} \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \cos(q_3^*(t)) \\ &\quad + \frac{x_2}{g(x)} \cdot \sin(q_2^*(t)) \cdot \sin(q_3^*(t)). \end{aligned}$$

sodaß wir durch Kenntnis der Ableitung von inv auf \mathbb{R} , gegeben durch $d\text{inv}(x)(1) = (\text{inv} \circ q_2)(x)$ mit q_2 als Quadratmonom ferner schreiben können:

$$\frac{d}{da} \frac{1}{g_i(a)} = d(\text{inv} \circ g_i)(a)(1) = (\text{inv} \circ q_2 \circ g_i)(a) \cdot dg_i(a)(1) = \frac{1}{g_i(a)^2} \cdot \frac{d}{da} g_i(a).$$

Ferner ist $dg_i(x)(h)$ für $h \in \mathbb{R}^3$ zu evaluieren (wir erinnern uns, daß unser a einen *Platzhalter* für den später eingesetzten Wegpunkt $q(t) \in \mathbb{R}^3$ darstellt), was wir durch $l_{i,j} := ((Q_i(t)_j - x)^2)_{x \in \mathbb{R}}$ fortsetzen zu

$$dg_i(a)(h) = \sum_{k \in [3]} h_k \cdot dg_i(a)(\mathbb{1}_k), \quad \mathbb{1}_k := \left(\begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)_{i \in [3]}$$

sodaß die Ableitung von g für die Richtung $h = 1 \in \mathbb{R}^3$ in der k -ten Komponente der obigen Summe zusammen mit der Quadratnorm $\|x\|_2 := (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ die Form

$$dg_i(a)(\mathbb{1}_k) = \frac{d}{ds} \left(l_{i,k}(a_k + s) + \sum_{j \in [3] \setminus \{k\}} l_{i,j}(a_j) \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_{s=0}$$

besitzt, also beispielsweise für $k = 1$ gerade

$$dg_i(a)(\mathbb{1}_1) = \frac{d}{da_1} \left(\underbrace{(Q_i(t)_1 - a_1)^2}_{l_{i,1}(a_1)} + \underbrace{(Q_i(t)_2 - a_2)^2}_{l_{i,2}(a_2)} + \underbrace{(Q_i(t)_3 - a_3)^2}_{l_{i,3}(a_3)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Leiten wir diese erste Richtung speziell ab, so erhalten wir für $W_i(a) = \sum_{k \in [3]} l_{i,k}(a_k)$ als Zusammenfassung des Wurzelinhaltes

$$\frac{d}{ds} \sqrt{W_i(a + s \cdot \mathbb{1}_1)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{W_i(a)}}_{= \|Q_i(t) - a\|_2^{-1}}} \cdot \frac{d}{da_1} l_{i,1}(a_1) = \frac{1}{\underbrace{\|Q_i(t) - a\|_2}_{= 1/g_i(a)}} \cdot 2 \cdot (Q_i(t)_1 - a_1).$$

Es findet sich so durch die Symmetrie der symbolisch gesammelte Ableitungsausdruck $\frac{d}{da_k} g_i(a) = 2 \cdot (Q_i(t)_k - a_k)/g_i(a)$. Die Zusammenfassung derer ist wiederum der Ableitungstensor von g_i in a :

$$g'_i(a) = \frac{d}{da} g_i(a) = \frac{2}{g_i(a)} \cdot (Q_i(t)_k - a_k)_{k \in [3]},$$

sodaß sich unsere anfangs gesuchte Ableitung des Potentials in a zu

$$\frac{d}{da} V(t, a) = G \cdot m_S \cdot \sum_{i \in [2]} m_i \cdot \frac{2}{g_i(a)^3} \cdot (Q_i(t)_k - a_k)_{k \in [3]} \quad (\text{dV})$$

zusammensetzt. Damit erhalten wir die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen und gleichzeitig durch die Definition $F(t, u(t)) := (-\frac{d}{db} H(t, (u_1^*(t), b))_{b=u_2^*(t)}, \frac{d}{da} H(t, (a, u_2^*(t))))|_{a=u_1^*(t)}$ die rechte Seite des Hamiltonsystems:

$$F(t, u(t)) = \left(\frac{-u_2^*(t)/m_S}{\frac{d}{da} V(t, a)|_{a=u_1^*(t)}} \right), \quad u(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}.$$

Schließlich haben wir für die Komponente von F die folgenden Gleichungen. Hier würde $q(t), p(t)$ als q, p geschrieben.

$$-\frac{d}{db} H((q, b)) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{m_S} p_1 \\ \frac{p_2}{m_S \cdot q_1^2} \\ \frac{p_3}{m_S \cdot q_1^2 \cdot \sin^2(q_2)} \end{pmatrix}$$

und die andere Ableitung:

$$\frac{d}{da} H(t, (a, p)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{m_S \cdot q_1^3} \left(p_2^2 + \frac{p_3^2}{\sin(q_2)} \right) \\ -\frac{p_3^2}{m_S \cdot q_1^3} \frac{\cos(q_2)}{\sin(q_2)^3} \\ 0 \end{pmatrix} + G m_S \begin{pmatrix} -\frac{m_1}{q_1^2} - \frac{m_2}{\|f(q)\|_2^3} \cdot \langle f(q), df(t, q)(\mathbb{1}_{0,1}) \rangle \\ -\frac{m_2}{\|f(q)\|_2^3} \cdot \langle f(q), df(t, q)(\mathbb{1}_{0,2}) \rangle \\ -\frac{m_2}{\|f(q)\|_2^3} \cdot \langle f(q), df(t, q)(\mathbb{1}_{0,3}) \rangle \end{pmatrix}$$

Optionale Matrixdarstellung

Definieren wir eine Zusammenfassung der Vektorkomponenten von $u(t) \in (\mathbb{R}^3)^2$ zu einer Funktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \cdot 2}$ als

$$U : t \mapsto (u_1^*(t)_1, u_1^*(t)_2, u_1^*(t)_3, u_2^*(t)_1, u_2^*(t)_2, u_2^*(t)_3),$$

so können wir die rechte Seite $F = J^T \cdot \nabla H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2 \cdot 3} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \cdot 3}$ durch die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}$$

darstellen.

2 Code

Codestruktur

Zunächst definieren wir die Systemgleichungen in `header/sysDGL.hpp` und importieren sie in `main.cpp` zusammen mit der Definition nötiger Variablen G , *Mond-Erde-Distanz* MEd , der *Erdmasse* m_E sowie der *Mondmasse* m_M .

Die numerische Lösung des AWP zu F definieren wir als Funktion in `header/shooting.hpp` und importieren sie auf die Systemgleichungen folgend in `main.cpp`. Grundlegende Variablendeklarationen sind bereits zu Beginn von `main.cpp` erledigt worden: Die *Rechenzeitintervallbreite* T , die *gewünschte Schrittweite* wdt , sowie die Berechnung der *Rechenschrittzahl* nt und der *tatsächlichen Schrittweite* dt , sodaß 0 sowie T im Gitter G_{dt} liegen.

Zum Speichern der Lösung zu einem Zeitpunkt t_i verwenden wir eine *Lösungsstruktur* $Lsng$, welche den Lösungswert $u(t_i)$ des AWP zu F , sowie ihren Ableitungswert $u'(t_i)$ speichert. Sie wird ausschließlich durch F verändert.

Die berechneten Stützstellen $u(t_i), u'(t_i)$ sowie die zugehörigen Zeiten t_i werden in einer Cachedatei unter `/tmp/data/moonshot.csv` im RAM gespeichert, um die ROM-Verwendung zu reduzieren.

Implementierung

Lösungsberechnung

Formal ist $A : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^d$ also eine Bijektion zwischen Lösungsraum und \mathbb{R}^d , welche wir zur Bestimmung des Lösungsvorschlages x_k aus den Anfangswerten verwenden. Zum Einsatz kommt hier das *Runge-Kutta-Verfahren*.

Nullstellenbestimmung auf der Bedingungsfunktion

Die Bedingungsfunktion stellt sich weiter als Abbildung von \mathcal{L} nach \mathbb{R} heraus, welche wir von der Form

$$B : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \|(u(0) - x_0, u(t_1) - x_1)\|_2$$

definieren und damit eine Möglichkeit des Abstandmessens vom gewünschten Startpunkt x_0 zum aktuellen Startpunkt $u(0)$ bzw. gewünschten Zielpunkt x_1 zum aktuellen Zielpunkt $u(t_1)$ vorschlagen. Ist $B(u) = 0$, so betrachten wir u als Lösung des vorgestellten AWP zu F .

Lösung des Fixpunktproblems

Daraus ergibt sich dann ein Fixpunktproblem der Form

$$\Phi(x_k) = (B \circ A^{-1})(x_k) \rightarrow 0.$$

Jede Iteration führt zu einer Veränderung des Wertes $q'(0)$.

3 Auswertung

Zuerst kann man das Verlauf des Potentials $V(x, y)$ zeichnen. Hier ist die reellen Werte für die Masse und Abstände eingetragen.

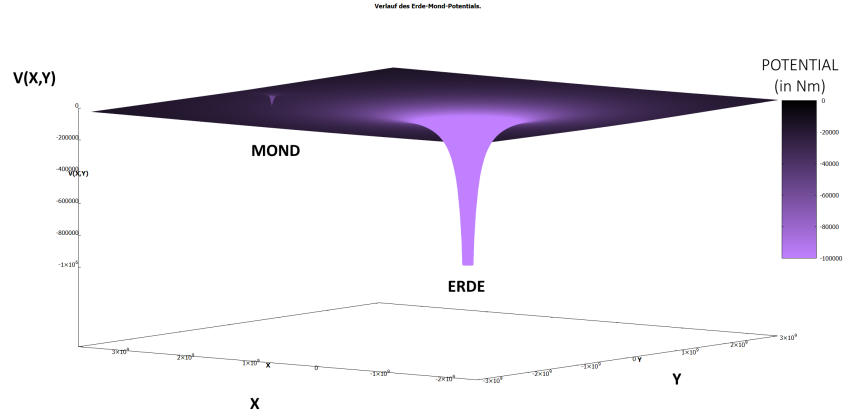


Abbildung 1: Potentialverlauf mit der kartesischen Koordinate Darstellung

Wir haben uns aber während die Grundlagen Anteil für die kugelkoordinaten Darstellung entschieden. Wir wählen eine Phase des Mondes $\Phi_M(t) = 0$ und ein Ellipsenparameter $a = 1$ Abstand Mond-Erde. Weiter ist der Azimutal-Winkel gleich 0 gestellt, sodass wir eine Projektions des Potentialverlaufes auf die x - y -Ebene erhalten.

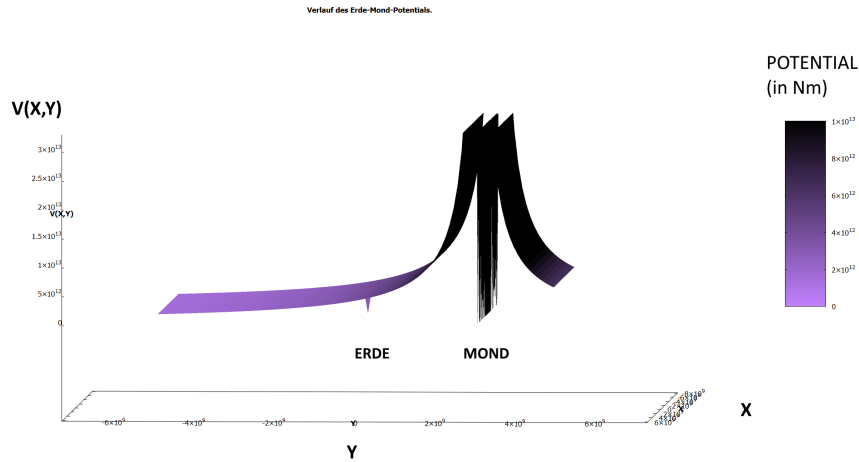


Abbildung 2: Potentialverlauf mit der kugelkoordinaten Darstellung

Hier sieht man, dass wegen der arccos der Transformation ergibt es sich eine Asymptote bei $\vec{y} = \vec{r}_{mond}$. Außerdem funktioniert die $1/r$ -Anteil für die Erde ganz gut.

Schoss der Satelliten

Zu jede Farbe gehört zwei Shosse. Hier haben wir einen Verfahren entwickelt, der den Anfangsimpuls in Richtung der Mond immer verbessert. Er basiert sich dafür auf die vorherige Anfangsimpuls der Simulation. Der Satelitt mit der kleinste Abstand zum Ziel wir als "besser" betrachtet. Wir schießen so 6 Paare von Satelitte. Wir haben das System in eine bewegende und fixe Mond betrachtet.

Für eine stehende Mond erhält man die folgende Schosse:

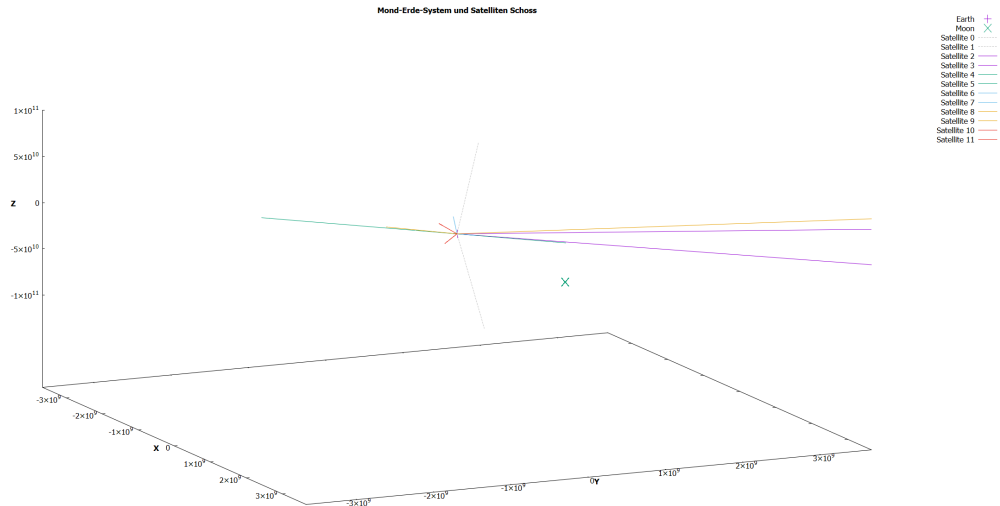


Abbildung 3: Potentialverlauf

Man sieht, dass die Trajektorien geradlinig sind. Die Sattelitten fliegen also in eine Richtung, und scheinen nicht von der Mond beeinflusst zu werden. Die erste Schosse scheinen auf eine Ebene zu liegen. Die erste Hälfte fliegt nach rechts und der asimutale Winkel konvergiert gegen $\pi/2$. Die Länge wird immer größer, d.h den Anfangsimpuls sleigt mit der Versuche. Ab der dritte Schoss fliegen die Satelitten nach links und den Winkel zur $x - y$ wird immer größer. Dafür ist die Länge kleiner, den Anfangsimpuls ist kleiner. Für eine bewegende Mond erhält man die folgende Schosse:

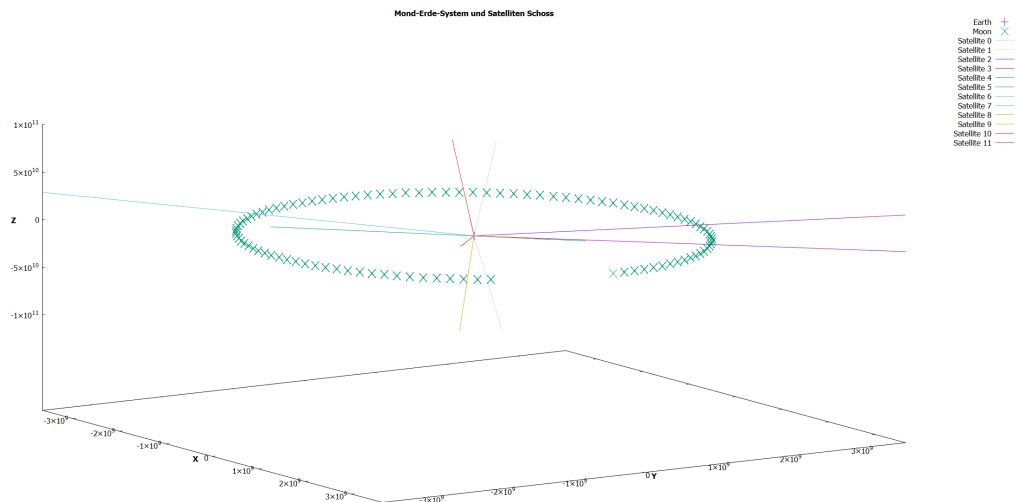


Abbildung 4: Potentialverlauf

Es ergibt sich dieselben Bemerkungen, obwohl den mond sich jetzt bewegt. Man sieht allerdings, dass die rote und gelbe Satelliten ($i=5,6$) in eine andere Richtung fliegen.

Wir hätten an dieser Stelle erwartet, dass die Trajektorie sich Richtung der Mond bewegt. Dies ist aber nicht der Fall. Wir vermuten, dass eine Rechnung in der Vorbereitung schief gelaufen ist. Den Wahl von kugelkoordinate war vielleicht nicht so geschickt. Wir hätten das Problem in cartesische kugelkoordinate lösen sollen.

4 Fazit

Wir haben uns mit der Simulation eines Raketenfluges von der Erde zum Mond befassen. Wir haben die Bewegungsgleichungen für den Satelliten in Kugelkoordinaten mittels des Hamiltonian-Formalismus gelöst. Dabei wurde die Shootingmethode mit dem Eulerverfahren und das Newtonverfahren zur Bestimmung der Nullstellen. Die Simulation ergibt leider nicht die gewünschten Ergebnisse. Zu erwarten ist ein Rechenfehler in der Theorie unseres Projektes.

Abbildungsverzeichnis

1	Potentialverlauf mit der kartesische Koordinate Darstellung	13
2	Potentialverlauf mit der kugelkoordinate Darstellung	13
3	Potentialverlauf	14
4	Potentialverlauf	15

Tabellenverzeichnis