

Vorlesung

# Optimale Steuerung kontinuierlicher Prozesse

Dr.-Ing. Dipl.-Math. R. Bartholomäus



# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Abkürzungsverzeichnis</b> . . . . .	V
<b>Verzeichnis der Formelzeichen</b> . . . . .	VII
<b>Symbolverzeichnis</b> . . . . .	IX
<b>Abbildungsverzeichnis</b> . . . . .	XI
<b>Tabellenverzeichnis</b> . . . . .	XIII
<b>1 Endlichdimensionale Optimierungsprobleme</b> . . . . .	1
1.1 Wiederholung aus der Analysis: Optimierung unter Nebenbedingungen . . . . .	1
1.1.1 Technik zum Auflisten von Extremstellen . . . . .	3
1.1.2 Geometrische Interpretation der Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . . .	7
1.1.3 Konvexe Optimierungsprobleme . . . . .	10
1.2 Anwendungen auf quadratische Optimierungsaufgaben . . . . .	12
1.2.1 Vorbereitungen . . . . .	13
1.2.2 Aktive-Mengen-Strategie . . . . .	14
<b>2 Klassische Verfahren zur optimalen Steuerung</b> . . . . .	23
2.1 Grundproblem der Variationsrechnung . . . . .	23
2.2 Formulierung des Optimalsteuerproblems und Lösung . . . . .	25
2.2.1 Prinzip der Herleitung notwendiger Bedingungen . . . . .	25
2.2.2 Notwendige Bedingungen für Optimallösung . . . . .	27
2.2.3 Grundsätzliche Vorgehensweise zur analytischen Bestimmung der Optimallösung . . . . .	28
2.2.4 Numerische Lösung am Beispiel „Fall C und feste Endzeit $t_b$ “ . . . . .	32
2.2.5 Anwendung zur Umformung von Optimierungsproblemen am Beispiel des linear-quadratischer Regler-Problems . . . . .	35

2.3 Maximumprinzip von Pontryagin . . . . .	37
2.3.1 Vorbereitung . . . . .	37
2.3.2 Prinzip der Herleitung der notwendigen Bedingungen . . . . .	38
<b>3 Optimale Zustandsrückführung . . . . .</b>	<b>47</b>
3.1 Zeitdiskrete Optimalsteuerung bei endlichen Zeithorizont . . . . .	47
3.1.1 Numerische Durchführung des Algorithmus der Dynamischen Programmierung . . . . .	53
3.2 Das zeitdiskrete linear-quadratische Regler-Problem . . . . .	56
3.2.1 Übergang zu unendlichem Zeithorizont . . . . .	58
3.3 Zeitkontinuierliche Optimalsteuerung bei endlichen Zeithorizont . . . . .	59
3.3.1 Lösungsprinzip . . . . .	59
3.3.2 Lösung . . . . .	60
3.4 Das zeitkontinuierliche linear-quadratische Regler-Problem . . . . .	61
3.4.1 Übergang zu unendlichem Zeithorizont . . . . .	62
3.5 Beispiel der räumlichen Führung (Proportionalnavigation (PN)) . . . . .	63
3.5.1 Modellbildung . . . . .	63
3.5.2 Parallele Annäherung als Spezialfall der PN . . . . .	64
<b>4 Modellprädiktive Regelung . . . . .</b>	<b>69</b>
4.1 Einleitung . . . . .	69
4.2 Formulierung der Regelungsaufgabe . . . . .	70
4.2.1 Grundprinzip der prädiktiven Regelung und Begriffe . . . . .	70
4.2.2 Prozessbeschreibung . . . . .	72
4.2.3 Darstellung des Gütefunktional und der Beschränkungen für die Steuer- und Regelgrößen . . . . .	75
4.3 Darstellung der Steuerungsaufgabe als Optimierungsproblem und numerische Lösung . . . . .	78
4.3.1 Aufgabe mit $\ \cdot\ _2$ -Funktional ohne Beschränkung der Steuer- und Regelgröße . . . . .	78
4.3.2 Aufgabe mit $\ \cdot\ _2$ -Funktional und Beschränkung . . . . .	80
4.3.3 Aufgabe mit $\ \cdot\ _1$ - und $\ \cdot\ _\infty$ -Funktional . . . . .	81
4.4 Stabilität prädiktiver Regelungen . . . . .	82
4.4.1 Problembeschreibung . . . . .	82

4.4.2 Stabilität des geschlossenen Kreises bei endlichem Optimierungshorizont durch eine Endbedingung für den Prozesszustand . . . . .	84
4.4.3 Stabilität des geschlossenen Kreises bei endlichem Steuerhorizont durch eine Gewichtung des Endzustandes . . . . .	86
<b>Anhang</b> . . . . .	A-1



# Abkürzungsverzeichnis

---

<b>NB</b>	Nebenbedingung
<b>GNB</b>	Gleichungsnebenbedingungen
<b>UNB</b>	Ungleichungsnebenbedingungen
<b>KTB</b>	Kuhn-Tucker-Bedingungen
<b>KTP</b>	Kuhn-Tucker-Punkt
<b>LICQ</b>	linear independence constraint qualification
<b>LQR</b>	linear-quadratischer Regler
<b>AW</b>	Anfangswert
<b>AWA</b>	Anfangswertaufgabe
<b>MPR</b>	Modellprädiktive Regelung
<b>SISO</b>	Single Input Single Output
<b>PN</b>	Proportionalnavigation
<b>ARE</b>	algebraische Riccati-Gleichung
<b>DARE</b>	diskrete algebraische Riccati-Gleichung
<b>HJB</b>	Hamilton-Jacobi-Bellman
<b>DP</b>	Dynamische Programmierung
<b>AB</b>	Anfangsbedingung
<b>EB</b>	Endbedingung
<b>RB</b>	Randbedingung





# Verzeichnis der Formelzeichen

---

$H$	Hesse-Matrix
$L(.,.)$	Lagrange-Funktion
$\mathcal{H}$	Hamilton-Operator
$\nabla$	Nabla-Operator (Gradient)
$\text{im } A$	Bild der Matrix $A$
$\text{ker } A$	Kern der Matrix $A$



# Symbolverzeichnis

---

## Notation    Bedeutung

$\dot{x}, \ddot{x}$  bzw.  $x^{(k)}$     erste, zweite bzw. k-te Ableitung

$\tilde{x}$     Schätzvektor

$\hat{x}$     Schätzfehlervektor

$e$     Folgefehlervektor

## Symbol    Bedeutung

$\mathbb{R}, \mathbb{N}$     Menge der reellen bzw. natürlichen Zahlen

$t$     Zeit

$\mathbf{x}$     Zustandsvektor

$\mathbf{u}$     Systemeingang

$y = h(x)$     Systemausgang, bzw. Regelgröße

$f$     System-Vektorfelder

$A$     Systemmatrix (lin. System)

$n$     Systemordnung

$u^*[0], \dots, u^*[k-1]$     optimierte Steuerfolge

$x^*[1], \dots, x^*[1]$     optimierte Zustandstrajektorie



# Abbildungsverzeichnis

---

1.1	Steuerung . . . . .	1
1.2	Optimierungshorizont . . . . .	1
1.3	Auffinden von Extremstellen: Geometrische Interpretation im Fall $n = 2$ , $m = 1$ . . . . .	3
1.4	Visualisierung von $\text{int } G$ . . . . .	4
1.5	Niveaulinien der Funktion $f$ : $f = -\frac{1}{2}$ (Grün), $f = 0$ (Schwarz), $f = 1$ (Gelb), $f = \frac{9}{2}$ (Rot), $x^2 + y^2 = 1$ (Blau) . . . . .	6
1.6	Optimalstelle mit $I_0(\bar{x}) = \emptyset$ . . . . .	7
1.7	Optimalstelle mit $I_0(\bar{x}) = \{1\}$ . . . . .	7
1.8	Optimalstelle mit $I_0(\bar{x}) = \{1,2\}$ . . . . .	7
1.9	Beispiel mit Kuhn-Tucker-Bedingungen (KTB): $f = -1$ (Gelb), $f = 0$ (Schwarz), $f = 1$ (Grün), $g_1$ (Blau), $g_2$ (Rot), $g_3$ (Orange) . . . . .	9
1.10	Konvexität . . . . .	10
1.11	Konvexe Funktionen . . . . .	10
1.12	Darstellung des Tangentialkegels von $G$ in $x^*$ . . . . .	12
1.13	Projektion . . . . .	14
1.14	Projektion . . . . .	15
1.15	Zwischenergebnisse der Iterationen . . . . .	18
2.1	Vorgehensweise von Euler . . . . .	23
2.2	Darstellung Fundamentallemma der Variationsrechnung . . . . .	24
2.3	Trajektorien der Schritte (S1) bis (S4) . . . . .	29
2.4	Trajektorie des Schrittes (S5) . . . . .	29
2.5	Trajektorien von Beispiel 2.2 mit festem Endzustand . . . . .	31
2.6	Trajektorien von Beispiel 2.3 mit Gewichtung des Endzustandes . . . . .	31
2.7	Reglerverstärkungen von Beispiel 2.2 und Beispiel 2.3 . . . . .	32
2.8	Darstellung der linearen Funktion $t = t(\tau)$ . . . . .	32
2.9	Entwicklung von $\psi$ in Abhängigkeit von $t$ und $\tau$ . . . . .	32

2.10	Darstellung NEWTON-Verfahren . . . . .	33
2.11	Verlauf von $u^*(t)$ . . . . .	41
2.12	Darstellung der Zustandstrajektorien für konstantes $u^* \equiv a$ . . . . .	42
2.13	Darstellung der Zustandstrajektorien für zeitoptimale Regelung eines Doppelintegrators . . . . .	42
2.14	Mögliche Zustandstrajektorien für $u^*(t)$ . . . . .	44
2.15	Darstellung der Zustandstrajektorien für verbrauchsoptimale Regelung eines Doppelintegrators . . . . .	44
2.16	Beispielhafter Verlauf von $u(t)$ für $\alpha = 1$ . . . . .	46
3.1	Darstellung des k-stetigen Entscheidungsprozesses . . . . .	47
3.2	Darstellung der Diskretisierung von $x[\kappa]$ in Gitterform . . . . .	53
3.3	Interpretation des Lösungszuganges beim Übergang zum unendlichen Zeithorizont . . . . .	58
3.4	Lösungsprinzip der zeitkontinuierlichen Optimalsteuerung bei endlichem Zeithorizont . . . . .	59
3.5	Geometrie des Problems der räumlichen Führung . . . . .	63
3.6	$\sigma$ -Wertebereich für $x_2 = y_2 = 0$ und $(x_1, y_1)$ auf dem Kreis $\mathcal{K}$ . . . . .	64
3.7	Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren . . . . .	64
3.8	Methode der parallelen Annäherung . . . . .	65
3.9	Verlauf der Regelgröße für das Beispiel 3.4 . . . . .	67
3.10	Verlauf der Steuergröße für das Beispiel 3.4 . . . . .	67
4.1	Grundprinzip der prädiktiven Regelung . . . . .	70
4.2	Übergang von den Steuergrößen zu den Steuergrößendifferenzen . . . . .	73
4.3	Veranschaulichung der Nebenbedingungen zum Beispiel 4.2 . . . . .	77
4.4	Interpretation der Quadratmittellösung $Ax \cong b$ . . . . .	79
4.5	Struktur den Modellprädiktive Regelung (MPR)-Reglers zur Minimierung von (4.14) bei unbeschränkten Steuer- und Regelgrößen . . . . .	80
4.6	Zur Abweichung zwischen der optimalen Trajektorie $x^*[k+i k]$ und dem tatsächlichen Verlauf $x[k+i]$ ( $i = 1, \dots, H_p$ ) . . . . .	83
4.7	Optimale Trajektorie $x^*[k+i k]$ und dem tatsächlicher Verlauf $x[k+i]$ bei unendlichem Horizont . . . . .	86

# Tabellenverzeichnis

---

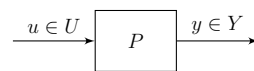
3.1 Berechnung der diskretisierten Restkosten $V(x_i, \kappa)$ . . . . .	54
3.2 Berechnung der diskretisierten optimalen Steuerfolge $u^*(x_i, \kappa)$ . . . . .	54
3.3 Parameter des zeitvarianten Systems und linear-quadratischer Regler (LQR)-Regler aus Beispiel 3.4 . . . . .	66





# Endlichdimensionale Optimierungsprobleme

1



**Abbildung 1.1:** Steuerung

Die Eingänge  $u$  können in ihren möglichen Werten auf eine Menge möglicher Werte  $U$  beschränkt werden.

$$K(u, y) \rightarrow \min_u \rightsquigarrow u^*$$

$K \dots$  Kostenfunktion

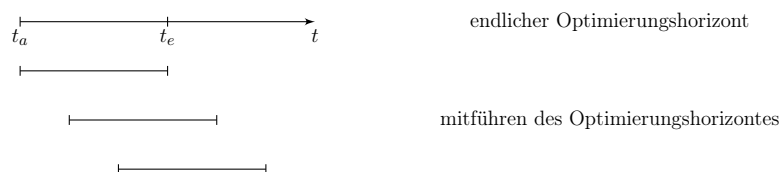
$u^* \dots$  Steuerfunktion

Optimierung bzgl. eines zeitlich beschränkten Zeitraumes:

Möglichkeit

- Ausdehnung auf unendliche Zeit
- Verschiebung des Intervalls  $[t_0, t_e]$  nach jedem Zeitpunkt

um einen Übergang zu einer kontinuierlichen Regelung zu ermöglichen.



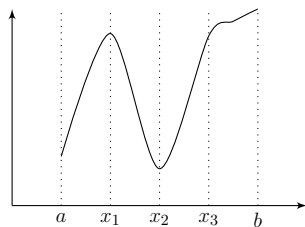
**Abbildung 1.2:** Optimierungshorizont

## 1.1 Wiederholung aus der Analysis: Optimierung unter Nebenbedingungen

**Definition 1.** Sei  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Stelle  $x_0 \in D$  heißt

- globale Minimumstelle von  $f$  auf  $D$ , wenn  $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$
- lokale Minimumstelle von  $f$  auf  $D$ , wenn Umgebung  $U_\varepsilon(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x_0\| < \varepsilon\}$  von  $x_0$  existiert, so dass  $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D \cap U_\varepsilon(x_0)$
- isolierte lokale Minimumstelle von  $f$  auf  $D$ , wenn Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$  existiert, so dass  $f(x_0) < f(x) \forall x \in D \cap U_\varepsilon(x_0), x \neq x_0$
- Analog Maximum mit  $\geq$  statt  $\leq$  und  $>$  statt  $<$ .
- Minimumstellen und Maximumstellen treten gemeinsam auf: Extremstellen

Beispiel 1.1.



$$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$a$  : isolierte lokale Minimumstelle

$x_1$  : isolierte lokale Maximumstelle

$x_2$  : globale und isolierte lokale Minimumstelle

$x_3$  : lokale Minimum- und Maximumstelle (nicht isoliert)

◇

**Satz 1.** Sei  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \text{int } D^1$  und  $\nabla f(x_0)$  vorhanden. Dann gilt:  $x_0$  ist eine lokale Extremstelle  $\rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ .

**Definition 2.** Eine Stelle  $x_0$  mit  $\nabla f(x_0) = 0$  heißt kritische Stelle (stationärer Punkt) von  $f$ .

**Satz 2.** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^2(D, \mathbb{R}), x_0 \in D$  und  $\nabla f(x_0) = 0$ . Dann gilt

$$Hf(x_0) = \begin{cases} \text{pos. definit} \\ \text{neg. definit} \\ \text{indefinit} \end{cases} \Rightarrow f \text{ ist in } x_0 \begin{cases} \text{isol. lokale Minimumstelle} \\ \text{isol. lokale Maximumstelle} \\ \text{keine lokale Extremstelle} \end{cases}$$

Es ist eine Übung unter Definitheit und Extremstellen ↗ im Anhang zu finden.

**Definition 3.** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, h_1, \dots, h_m : D \rightarrow \mathbb{R}. \bar{x} \in D$  heisst lokale oder globale Extremstelle von  $f$  unter den Gleichungsnebenbedingungen (GNB)  $h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0$ , wenn  $\bar{x}$  lokale oder globale Extremstelle von  $f$  auf

$$M := \{x \in D \mid h_1(x) = \dots = h_m(x) = 0\}$$

ist.

---

1 int ... interior (Mengenoperator)

**Satz 3.** (Lagrange Multiplikatorregel) Seien  $f, h_1, \dots, h_m$  stetig differenzierbar,  $\bar{x} \in M$  und  $\nabla h_1(\bar{x}), \dots, \nabla h_m(\bar{x})$  linear unabhängig, dann ist  $\bar{x}$  eine lokale Extremstelle von  $f$  unter den GNB. So gibt es Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  (Lagrangesche Multiplikatoren), so dass

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x})$$

gilt.<sup>1</sup>

### 1.1.1 Technik zum Auflisten von Extremstellen

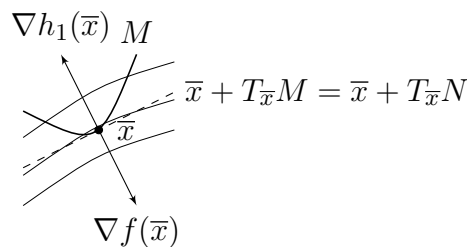
1. Definiere Langrange-Funktion  $F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x)$ .
2. Kandidaten für lokale Extremstelle unter den Lösungen von  $F'(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0$  suchen:

$$\nabla F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \sum \lambda \nabla h_i(x) \\ h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

D.h. durch Einführung der Lagrange-Funktion kann man die Extremstellenbedingung für unbeschränkte Probleme verwenden.

Geometrische Interpretation im Fall  $n = 2, m = 1$ :

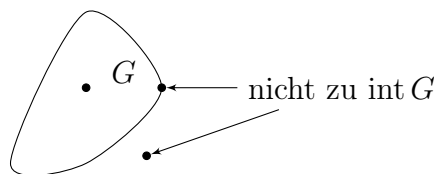
Der Tangentialraum  $T_{\bar{x}}M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_i^T(\bar{x})v = 0 \ (i = 1, \dots, m)\}$  in  $\bar{x}$  an die Menge  $M$  ist gleich dem Tangentialraum  $T_{\bar{x}}N = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(\bar{x})^T v = 0\}$  in  $\bar{x}$  an die Niveaumenge  $N := \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(\bar{x})\}$



**Abbildung 1.3:** Auffinden von Extremstellen: Geometrische Interpretation im Fall  $n = 2, m = 1$

1 Hinweis: Dimension von  $h$  ist  $n$  für linear unabhängige  $h_1, \dots, h_m$ . Für  $h_1, \dots, h_m$  muss gelten  $m \leq n$ . Meist ist sogar  $m < n$ , da sich sonst alle  $h_1, \dots, h_m$  in genau einem Punkt schneiden würden. Eine Optimierung wäre dann sinnlos.

- 1)  $G \subset \mathbb{R}^n$ :  $\text{int } G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G\}$ : Menge aller inneren Punkte von  $G$ . Wenn  $G$  offen:  $\Leftrightarrow G = \text{int } G$



**Abbildung 1.4:** Visualisierung von  $\text{int } G$

- 2)  $G$  offen.  $C^k(G) :=$  Menge aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $G$ . Auch:  $C^k(G, \mathbb{R}^m)$  zur Angabe des Bildraums.

3)  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^2(D, \mathbb{R}) \Rightarrow Hf(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{bmatrix}$  symmetrisch<sup>1</sup>

Sei  $A$  reell und symmetrisch, d.h.  $A = A^T$

Dann  $A$  positiv definit, i.Z.  $A > 0 : \Leftrightarrow x^T A x > 0 \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i(A) > 0 \forall i$  und  $A$  positiv semidefinit, i.Z.  $A \geq 0 : \Leftrightarrow x^T A x \geq 0 \forall x \Leftrightarrow \lambda_i(A) \geq 0 \forall i$ .

Negativ definit bzw. semidefinit analog.

$A$  indefinit:  $\Leftrightarrow x^T A x$  kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen.  $\Leftrightarrow$

Es gibt positive und negative Eigenwerte von  $A$ .

- 4)  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

$\text{bd } M = \text{cl } M \setminus \text{int } M$ : Rand von  $M$

$\text{cl } M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M : x_n \rightarrow x\}$ : Abschluss der Menge  $M$  (auch: Menge der Berührungspunkte)

Beispiel:  $M = [0, 1)$   $\text{cl } M = [0, 1]$

$\text{int } M = (0, 1)$

$\text{bd } M = \{0, 1\}$

- 5)  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linear unabhängig  $: \Leftrightarrow [\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0]$   
 $\{v\}$  linear unabhängig  $: \Leftrightarrow [\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0] \Leftrightarrow v \neq 0$

*Beispiel 1.2.* Gesucht sind die lokalen Extremstelle von

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy \text{ auf } K = \{(x, y)^T \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

---

<sup>1</sup> Andere Schreibweise:  $\nabla^2 f$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\nabla_{xx} f$

Nach Satz 1 findet man

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \nabla f = \begin{bmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kritische Stelle von  $f$  im Inneren von  $K$ , jedoch

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \det(Hf(0,0)) = -9 < 0$$

Determinante ist Produkt der Eigenwerte  $\rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \rightarrow$  es negative Eigenwerte.

$Hf(0,0)$  ist indefinit, d.h.  $(0;0)$  keine lokalen Extremstellen existieren, nach Satz 2.

Andererseits ist  $f$  stetig auf der kompakten Menge  $K$ , nach Satz von Weierstrass besitzt  $f$  auf dieser Menge Minimum und Maximum. Diese müssen auf dem Rand liegen.

$$\text{bd } K = \{(x,y)^T \mid h(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

$$\text{int } K = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\text{cl}(\text{int } K) = K$$

Da  $\text{bd } K^1$  keine offene Menge ist, ist Satz 1 nicht anwendbar. Mit

$$M = \text{bd } K \text{ ist } \nabla h(x,y) = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall (x,y)^T \in M$$

linear unabhängig. Nach Satz 3 existiert  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 8x - 3y = \lambda \cdot 2x \\ (2) \quad -3x = \lambda \cdot 2y \end{array} \right\} \Delta F(x,y) = Hf(x,y)$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{Erfüllung der Nebenbedingung (NB)en}$$

Lösung:

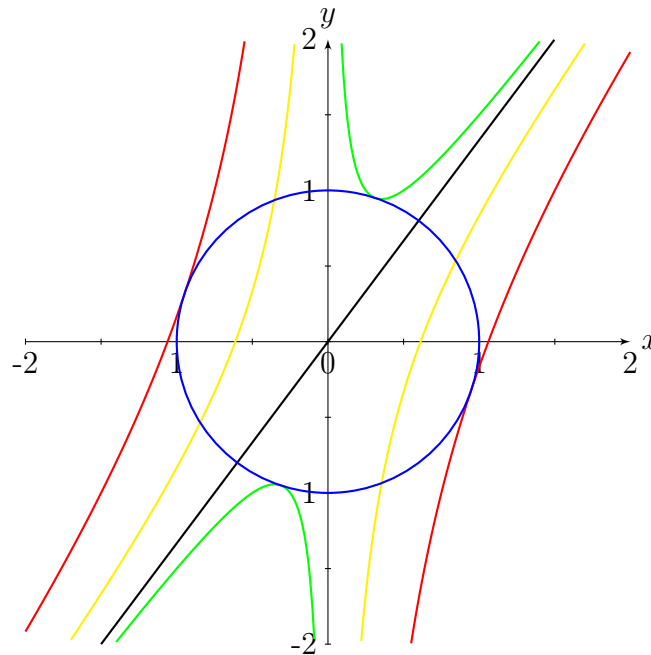
$$x_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad y_{1/2} = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \lambda_{1/2} = -\frac{1}{2}, \quad F(x_{1/2}, y_{1/2}) = -\frac{1}{2}$$

$$x_{3/4} = \mp \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad y_{3/4} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \lambda_{3/4} = \frac{9}{2}, \quad F(x_{3/4}, y_{3/4}) = \frac{9}{2}$$

Technik:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y) \Rightarrow \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Abbildung 1.5 stellt die Niveaulinien der Ausgangsfunktion und der Berechnungen dar.



**Abbildung 1.5:** Niveaulinien der Funktion  $f$ :  $f = -\frac{1}{2}$  (Grün),  $f = 0$  (Schwarz),  $f = 1$  (Gelb),  $f = \frac{9}{2}$  (Rot),  $x^2 + y^2 = 1$  (Blau)

**Definition 4.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g_1, \dots, g_m : D \rightarrow \mathbb{R}, \bar{x} \in D$  heisst (lokale bzw. globale) Extremstelle von  $f$  unter der Ungleichungsnebenbedingungen (UNB)  $g_1(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0$ , wenn  $\bar{x}$  (lokale oder globale) Extremstelle von  $f$  auf  $G := \{x \in D \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0\}$  ist.

**Definition 5.**  $I_0(x) := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid g_i(x) = 0\}$ : Indexmenge der für  $x \in G$  aktiven Restriktionen (für  $x \in \text{int } G$  gilt  $I_0(x) = \emptyset$ , int ... im Inneren von)

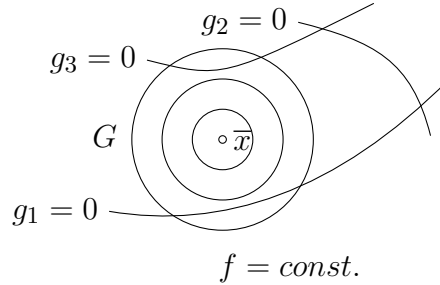
$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$ : Lagrange-Funktion zur Aufgabe  $\min_{x \in G} f(x)$

**Satz 4.** (Kuhn-Tucker Bedingungen 1. Ordnung):

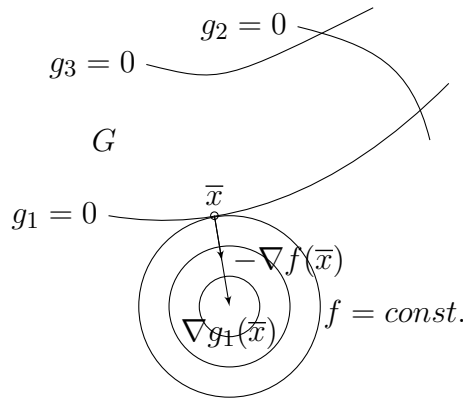
Sei  $f, g_1, \dots, g_m$  stetig differenzierbar,  $\bar{x} \in G$  und  $\nabla g_i(x)$  mit  $i \in I_0(\bar{x})$  linear unabhängig. Ist  $\bar{x}$  lokale Minimumstelle von  $f$  unter UNB, so gibt es  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  (Lagrange-Multiplikatoren) so, dass gilt

$$\nabla_x L(\bar{x}, u) = \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} g_i(\bar{x}) \leq 0 \\ u_i \geq 0 \\ u_i g_i(\bar{x}) = 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m$$

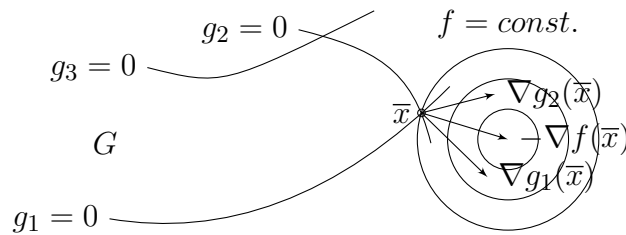
### 1.1.2 Geometrische Interpretation der Kuhn-Tucker-Bedingungen



**Abbildung 1.6:** Optimalstelle mit  $I_0(\bar{x}) = \emptyset$



**Abbildung 1.7:** Optimalstelle mit  $I_0(\bar{x}) = \{1\}$



**Abbildung 1.8:** Optimalstelle mit  $I_0(\bar{x}) = \{1,2\}$

- a) zu (Abbildung 1.6):  $u_i g_i(\bar{x}) = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = u_3 = 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$
- b) zu (Abbildung 1.7):  $u_i g_i(\bar{x}) = 0 \Rightarrow u_2 = u_3 = 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) + u_1 \nabla g_1(\bar{x}) = 0$
- c) zu (Abbildung 1.8):  $u_i g_i(\bar{x}) = 0 \Rightarrow u_3 = 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) + u_1 \nabla g_1(\bar{x}) + u_2 \nabla g_2(\bar{x}) = 0$   
mit  $u_1, u_2 \geq 0$

*Bemerkung 1.1.*  $\bar{x}$  ist Maximumstelle von  $f$  genau dann, wenn  $\bar{x}$  Minimumstelle von  $-f$  ist. ◆

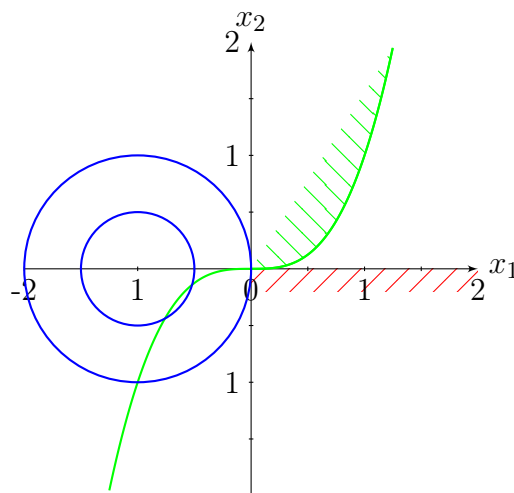
Gegenbeispiel 1.1.

$$f(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2$$

$$g_1(x) = x_2 - x_1^3 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_2 \leq 0$$

Minimumstelle: (0,0)



◇

*Bemerkung 1.2.* Die Forderung nach der Unabhängigkeit der Vektoren in  $\nabla h_1(\bar{x}), \dots, \nabla h_m(\bar{x})$  in Satz 3 bzw.  $\nabla g_i(\bar{x})$  mit  $i \in I_0(\bar{x})$  in Satz 4 ist eine sogenannte *Regularitätsbedingung* (linear independence constraint qualification (LICQ)). Es gibt andere Regularitätsbedingungen, z.B. die Forderung dass  $h_1, \dots, h_m$  bzw.  $g_1, \dots, g_m$  affine lineare Funktionen sind, d.h. eine Darstellung der Form

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \text{ bzw. } G = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

mit der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und dem Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  möglich ist. ◆

Für die Aufgabe  $\min f(x)$  bei  $g_i(x) \leq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $h_j(x) = 0$  ( $j = 1, \dots, p$ ) mit stetig differenzierbaren  $f, g_i, h_j$  lautet die KTB:

$$\nabla_x L(x, u, \lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x) = 0 \quad (1.1)$$

$$h(x) = 0, u \geq 0, g(x) \leq 0, u_i g_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

Ein Punkt  $L(x, u, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  der Gleichung (1.1) erfüllt, heisst Kuhn-Tucker-Punkt (KTP).

Es gilt:  $\bar{x}$  lokale Minusstelle von  $f$  unter den NB  $g_i(x) \leq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $h_j(x) = 0$  ( $j = 1, \dots, p$ ) und  $\nabla g_i(\bar{x})$   $i \in I_0(\bar{x})$  linear unabhängig  $\Rightarrow \exists \bar{u} \in \mathbb{R}^m \exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^p : (\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda})$  erfüllt 1.1.

*Beispiel 1.3.* Gesucht ist die optimale Lösung der Aufgabe  $f(x) = -x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$  bei  $(x_1 + 1)(x_2 + 2) \leq 4$  mit  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .



Mit

$$g_1(x) = (x_1 + 1)(x_2 + 2) - 4 \leq 0,$$

$$g_2(x) = -x_1 \leq 0,$$

$$g_3(x) = -x_2 \leq 0$$

erhält man

$$L(x,u) = f(x) + \sum_{i=1}^3 u_i g_i(x)$$

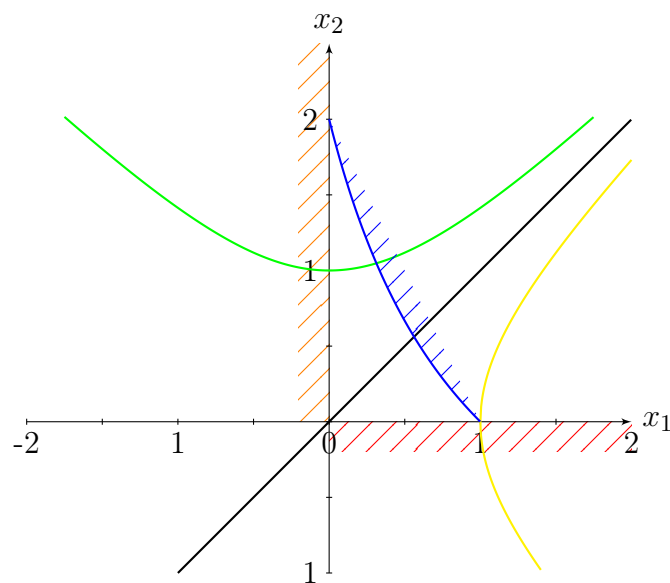
und

$$\nabla_x L(x,u) = \begin{bmatrix} -2x_1 + u_1(x_2 + 2) - u_2 \\ 2x_2 + u_1(x_1 + 1) - u_3 \end{bmatrix}.$$

Die 5 nichtlinearen Gleichungen  $\nabla_x L(x,u) = 0$ ,  $u_i g_i(x) = 0$  mit  $i = 1,2,3$  haben die reellen Lösungen:

- $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$
- $u_1 = -4, u_2 = -16, u_3 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$  entfällt wegen Nichterfüllen der Ungleichung
- $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 2, x_1 = 1, x_2 = 0$

Wegen  $f(0,0) = 0$ ,  $f(1,0) = -1$  ist  $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$  die gesuchte Minimumstelle.  $\diamond$



**Abbildung 1.9:** Beispiel mit KTB:  $f = -1$  (Gelb),  $f = 0$  (Schwarz),  $f = 1$  (Grün),  $g_1$  (Blau),  $g_2$  (Rot),  $g_3$  (Orange)

### 1.1.3 Konvexe Optimierungsprobleme

$M \subset \mathbb{R}^n$  konvex  $\Leftrightarrow [x_1, x_2 \in M \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in M \forall \lambda \in [0, 1]]$

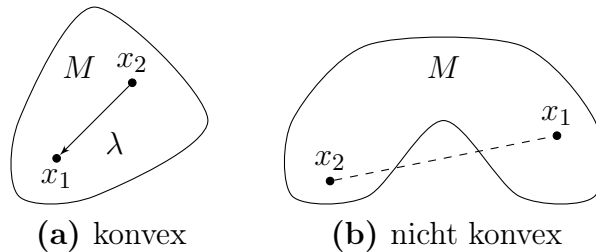


Abbildung 1.10: Konvexität

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  konvex:  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  konvex auf  $M$ , wenn

$$[x_1, x_2 \in M \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \forall \lambda \in [0, 1]]$$

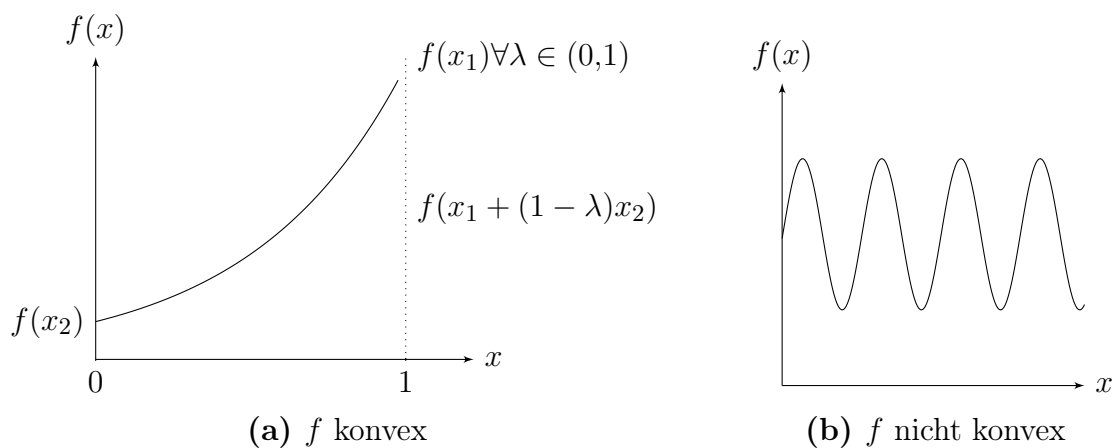


Abbildung 1.11: Konvexe Funktionen

*streng konvex auf  $M$ :*

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen, konvex,  $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ :

- $f$  konvex auf  $M \Leftrightarrow \forall x \in M : Hf(x) \geq 0$
- $f$  streng konvex auf  $M \Leftrightarrow \forall x \in M : Hf(x) > 0$

Falls  $M$  konvex und  $f$  konvex auf  $M$ , so heisst  $\min_{x \in M} f(x)$  konvexe Optimierungsaufgabe und es gilt:

- Falls  $x^* \in M$  eine lokale Minimumstelle ist, so ist  $x^*$  auch globale Minimumstelle auf  $M$ .
- Ist  $f$  streng konvex, so gibt es höchstens ein globales Minimum von  $f$  über  $M$ .

*Beispiel 1.4.* Die streng konvexe Funktion  $f(x) = e^x$  soll minimiert werden  $\min_{x \in \mathbb{R}^1} e^x$ . Es soll gezeigt werden, dass höchstens ein globales Minimum von  $f$  über  $M$  existiert. Dabei ist zu beachten:

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \\ g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \\ h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \text{stetig differenzierbar mit } i = 1, \dots, n \text{ und } j = 1, \dots, p$$

Damit lässt sich die lokale Minimumstelle

$$x^* \in G := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0 \ (i = 1, \dots, n), h_j(x) = 0 \ (j = 1, \dots, p)\}$$

$$\{\nabla(x^*) \ (i \in I_0(x^*) := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid g_i(x^*) = 0\}), \nabla h_j(x^*) \ (j = 1, \dots, p)\}$$

beschreiben und für die lokale Minimumstelle  $x^*$  von  $f$  auf  $G$  gilt  $\Rightarrow \exists u^* \in \mathbb{R}^m, \exists \lambda^* \in \mathbb{R}^p$  mit der KTB

$$\nabla_x L(x^*, u^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^n u_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

mit  $g(x^*) \leq 0, u^* \geq 0, u^{*T} g(x^*) = 0, h(x^*) = 0$  und dem KTP:  $(x^*, u^*, \lambda^*) \quad \diamond$

*Gegenbeispiel 1.2.*

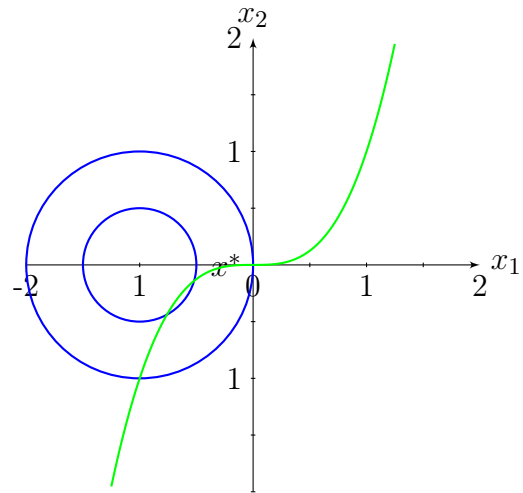
$$f(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2$$

$$g_1(x) = x_2 - x_1^3 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_2 \leq 0$$

Minimumstelle:  $x^* = (0,0)$ , aber KTB nicht erfüllt

$\Rightarrow \nabla g_1(x^*), \nabla g_2(x^*)$  linear abhängig



$\diamond$

**Satz 5.** Für die Aufgabe  $\min_{x \in G} f(x)$  mit  $G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)\}$  und  $f, g_i \ (i = 1, \dots, m)$  stetig differenzierbar und konvex gilt:

- $x^*$  ist Lösung und  $\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\tilde{x}) < 0 \ (i = 1, \dots, m)$  (Slater Bedingung)  
 $\Rightarrow \exists u^* \in \mathbb{R}^m : (x^*, u^*)$  ist KTB
- $(x^*, u^*)$  ist KTP  $\Rightarrow x^*$  ist Lösung

- Falls alle  $g_i$  linear, d.h.  $G = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , so gilt

$$x^* \text{ ist Lösung} \Leftrightarrow \exists u^* \in \mathbb{R}^m : (x^*, u^*) \text{ ist KTP}$$

Bei zusätzlichen linearen GNB, d.h.  $G = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, Cx = d\}$  mit  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $d \in \mathbb{R}^p$ :

$$x^* \text{ ist Lösung} \Leftrightarrow \exists u^* \in \mathbb{R}^m, \lambda^* \in \mathbb{R}^m : (x^*, u^*, \lambda^*) \text{ ist KTP}$$

Es ist eine Übung unter Kuhn-Tucker-Bedingung  im Anhang zu finden.

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  stetig differenzierbar und  $G \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und konvex. Dann ist  $x^* \in G$  eine lokale Minimalstelle von  $f$  auf  $G$ , d.h.

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} f(x^* + \varepsilon \tilde{x}) \right|_{\varepsilon=0} \geq 0 \quad \forall \tilde{x} \in dZ(G, x^*).$$

Es gilt für die Menge der für  $x^*$  zulässigen Richtungen  $Z(G, x^*)$

$$Z(G, x^*) := \{s \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{\alpha} > 0 : x^* + \alpha s \in G \forall \alpha \in [0, \bar{\alpha}]\}.$$

$dZ(G, x^*)$  heißt Tangentialkegel von  $G$  in  $x^*$  und ist in Abbildung Abb. 1.12 dargestellt. Ein Spezialfall stellt  $x^* \in \text{int } G \Rightarrow Z(G, x^*) = \mathbb{R}^n$  dar. Es gilt, dass  $x^*$  die lokale

**Abbildung 1.12:** Darstellung des Tangentialkegels von  $G$  in  $x^*$

Minimalstelle von  $f$  auf  $G$  ist

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} f(x^* + \varepsilon \tilde{x}) \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

## 1.2 Anwendungen auf quadratische Optimierungsaufgaben

### Aufgabe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x \text{ bei } Ax \leq b, Q \geq 0$$

$$\text{mit } Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, q \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \text{ (convex)}$$

### 1.2.1 Vorbereitungen

- (1)  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x, \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

convex und wegen  $Hf(x) = Q \geq 0$  ist  $f$  convex auf  $\mathbb{R}^n$ . Damit gilt  $x^*$  ist Lösung  $\xLeftrightarrow{\text{Satz 5}} x^*$  erfüllt KTB  $\Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$ . Somit erhält man die Lösung von (1.2) durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\nabla f(x) = Qx + q = 0$$

*Beachte:* Lösung muss nicht existieren, z.B.  $Q = 0, q = 1$  und muss nicht eindeutig sein, z.B.  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

- (2)  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$  bei  $Cx = d$  mit  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}, p \leq n, \text{Rang } C = p, d \in \mathbb{R}^p$ .


Analog zu (1):  $x^*$  ist Lösung  $\xLeftrightarrow{\text{Satz 5}} \exists \lambda^* \in \mathbb{R}^p : (x^*, \lambda^*)$  erfüllt KTB. Mit  $L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x + \lambda^T (Cx - d)$  liefert

$$\nabla L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} Qx + q + C^T \lambda \\ Cx - d \end{bmatrix} = 0$$

unter den KTB  $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$  und  $h(x) = 0$  liefert das lineare Gleichungssystem

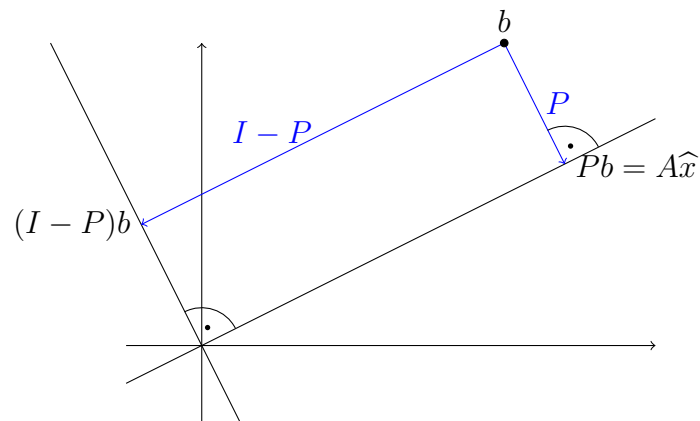
$$\begin{bmatrix} Q & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ d \end{bmatrix}$$

*Beachte:* Kann keine oder mehrdeutige Lösungen besitzen.

Es ist eine Übung unter Beispiele zur Quadratischen Optimierung  im Anhang zu finden.

- (3) Projektion auf Untervektorraum

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n, \text{Rang } A = n, b \in \mathbb{R}^m$$




**Abbildung 1.13:** Projektion

$$\begin{aligned}
 \text{im } A &:= \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \\
 (\text{im } A)^\perp &= \ker A^T := \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y = 0\} \\
 A^T(b - A\hat{x}) &= 0 \\
 A^T b &= A^T A \hat{x} \\
 \hat{x} &= (A^T A)^{-1} A^T b \\
 \rightarrow P &= A(A^T A)^{-1} A^T \quad \dots \text{Projektor auf im } A \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Es ist eine Übung unter Projektion auf Untervektorraum  im Anhang zu finden.

Projektion eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^n$  auf  $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = d\}$  mit  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $p \leq n$ ,  $\text{Rang } C = p$ , siehe (Abbildung 1.14) und man erhält den Projektor durch Ersetzen von  $A^T$  durch  $C$  in (1.3)

$$P = C^T(CC^T)^{-1}C \quad \dots \text{Projektor auf } M.$$

Es ist eine Übung unter Projektion eines Vektors  im Anhang zu finden.

### 1.2.2 Aktive-Mengen-Strategie

Die Aufgabe besteht in

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \rightarrow \min \text{ bei } Ax \leq b. \quad (1.4)$$

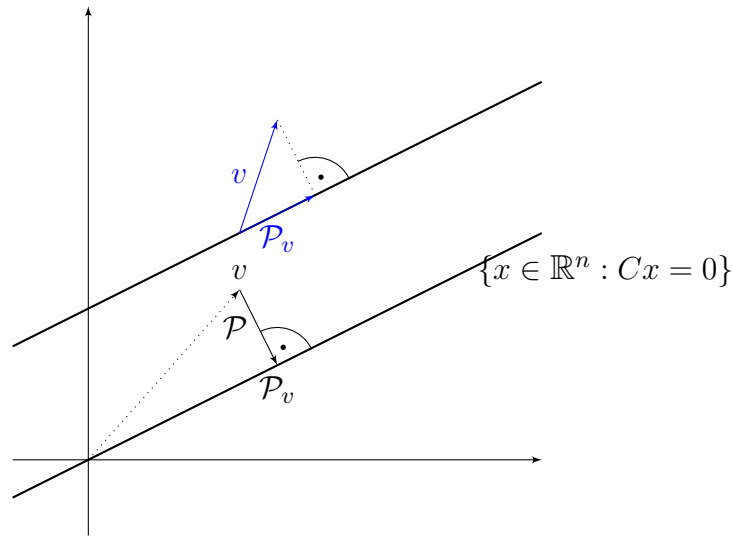


Abbildung 1.14: Projektion

Seien  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q > 0$  positiv definit,  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Für  $x \in G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  bezeichne  $I_a(x) = \{i \in (1, \dots, m) : a_i^T x = b_i\}^1$  und  $M(I) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T y = b_i, i \in I_a(x)\}$ .

Sei  $\{a_i \mid i \in I_a(x)\}$  linear unabhängig  $\forall x \in G$ .

NB:

$$g_i(x) := a_i^T x - b_i \leq 0$$

$$\nabla g_i(x) = a_i$$

### Algorithmus der Aktive-Mengen-Strategie

(S1) Wähle ein  $x^0 \in G$ , setze  $I_0 := I_a(x^0)$  und setze  $k := 0$ .

(S2) Falls Projektion von  $\nabla f(x^k) = Qx^k + q$  auf  $M(I_k)$  gleich dem Nullvektor ist, so sind die zu  $x^k$  gehörigen Lagrange-Multiplikatoren  $u_i^k$  aus  $\nabla f(x^k) + \sum_{i \in I_k} u_i^k a_i = 0$  zu bestimmen.

(S2a) Falls  $u_i^k \geq 0$  mit  $i \in I_k$ , so ist  $x^k$  Optimalstelle. Stop!

(S2b) Andernfalls sind der Index  $r \in I_k$  mit  $u_r^k < 0$  zu bestimmen und es ist  $I_k \leftarrow I_k \setminus \{r\}^2$  zu setzen.

1 Menge der im Punkt  $x \in G$  aktiven Restriktionen

2 Interpretation: Entferne  $r$  aus der Indexmenge  $I_k$

(S3) Bestimme  $y^k := \arg \min f(y)$ <sup>1</sup> bei  $y \in M(I_k)$ .

Setze  $\alpha_k = \max \{ \alpha_k \in [0,1] : x^k + \alpha(y^k - x^k) \in G \}$ ,  $x^{k+1} = x^k + \alpha(y^k - x^k)$ ,  
 $I_{k+1} := I_a(x^{k+1})$  und gehe mit  $k \rightarrow k+1$  zu (S2)

*Bemerkung 1.3* (zu (S3)). Die im Punkt  $x^k$  inaktive UNBen sind  $a_j^T x^k \leq b_j$ ,  $j \notin I_k$ . Wir bestimmen das maximale  $\beta > 0$  derart, dass  $\beta(y^k - x^k) + x^k$  noch zulässig ist, d.h.  $a_j^T(\beta(y^k - x^k) + x^k) \leq b_j \forall j$ . Dies ist wegen  $a_j^T x^k \leq b_j$  und  $\beta a_j^T(y^k - x^k) \leq b_j - a_j^T x^k$  stets für diejenigen  $j$  erfüllt, für die  $a_j^T(y^k - x^k) \leq 0$  gilt. Also ergibt sich das gesuchte

$$\beta = \min \left\{ \frac{b_j - a_j^T x^k}{a_j^T(y^k - x^k)} \mid j \notin J_k \text{ mit } a_j^T(y^k - x^k) > 0 \right\}.$$

(S3) berechnet  $\alpha_k = \min \{1, \beta\}$ . ◆

*Bemerkung 1.4* (zum Algorithmus).

- Die Voraussetzungen “ $Q > 0$ ” und “ $\{a_i \mid i \in I_a(x)\}$  linear unabhängig  $\forall k \in G$ ” sichern die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems in (S2) und (S3)
- Alle Iterationen  $x^k$  sind zulässig. In der Praxis gilt bei jedem Durchlauf von (S3):  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ . Der Algorithmus ist endlich (gutartiger, schneller Algorithmus). ◆

## Finden eines zulässigen Startpunktes

Zur Aufgabe

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ bei } Ax \leq b \quad (1.5)$$

bildet die Aufgabe

$$y \rightarrow \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ y \in \mathbb{R}^1}} \text{ bei } Ax \leq b + \mathbb{1}_m y, 0 \leq y \quad (1.6)$$

mit:  $\mathbb{1}_m \dots$  Einsvektor

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \min \text{ bei } \begin{bmatrix} A & -\mathbb{1}_m \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Zulässiger Startwert:

$$x^0 \text{ beliebig und } y^0 := \max ([0; Ax^0 - b])$$

---

1 Bemerkung:  $x^* = \arg \min f(x) \Leftrightarrow x^* \dots$  Minimumstelle von  $f$



$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$  sei Lösung der linearen Optimierungsaufgabe (1.7).

Falls  $\bar{y} = 0$ , so gilt  $A\bar{x} \leq b$ , d.h.  $\bar{x}$  ist zulässiger Punkt von (1.5).

Es ist eine Übung unter Finden eines zulässigen Startwertes für den Aktiven Mengen Algorithmus  im Anhang zu finden.

### Erweiterungen des Algorithmus

- Falls  $Q = 0$ , d.h.  $f(x) = q^T x \rightarrow \min$  bei  $Ax \leq b$ , so liegt eine Aufgabe der linearen Optimierung vor. In (S3) wird dann  $\alpha_k := \max \{ \alpha \geq 0 : x^k + \alpha s^k \in G \}$  gesetzt, wobei  $s^k$  der auf  $M(I_k)$  projizierte negative Gradient  $-\nabla f(x^k) = -q$  ist.
- Treten UNB und GNB gleichzeitig auf, d.h.  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \rightarrow \min$  bei  $Ax \leq b$  und  $Cx = d$  so werden die GNB wie aktive UNB behandelt.

Es ist eine Übung unter Erweiterung des Aktiven Mengen Algorithmus  im Anhang zu finden.

Beispiel 1.5. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(S1) Mit  $x^0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ist  $I_0 = \{3\}$ .

(S2) Projektion von  $\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$  auf  $M(I_0) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$  ist  $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \neq 0$ .

(S3) Man findet  $y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $x^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $I_1 = \{2, 3\}$ .

(S2) Projektion von  $\nabla f(x^1) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$  auf  $M(I_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^1$  ist  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  an der Stelle an der beide Restriktionen wirken mit  $I_1 = \{2, 3\}$ .

Lagrange-Multiplikatoren  $\begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ , setze  $I_1 \leftarrow I_1 \setminus \{3\} = \{2\}$ .

1 Bemerkung: d.h. nur ein Punkt! Projektion auf 1 Punkt ist immer der Nullvektor.

(S3) Man findet  $y^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x^2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $I_2 = \{1,2\}$ .

(S2) Projektion von  $\nabla f(x^2) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$  auf  $M(x^2)$  ist  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Lagrange-Multiplikatoren  $\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{16}{9} \end{bmatrix} \geq 0$ . Stop!

Grafische Darstellung der Optimierungsaufgabe und deren Lösung  
Zielfunktion:

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 5$$

Zulässiger Bereich:

(1)  $x_1 + \frac{x_2}{3} \leq 1$

(2)  $x_2 \leq 1$

(3)  $x_1 \geq 0$

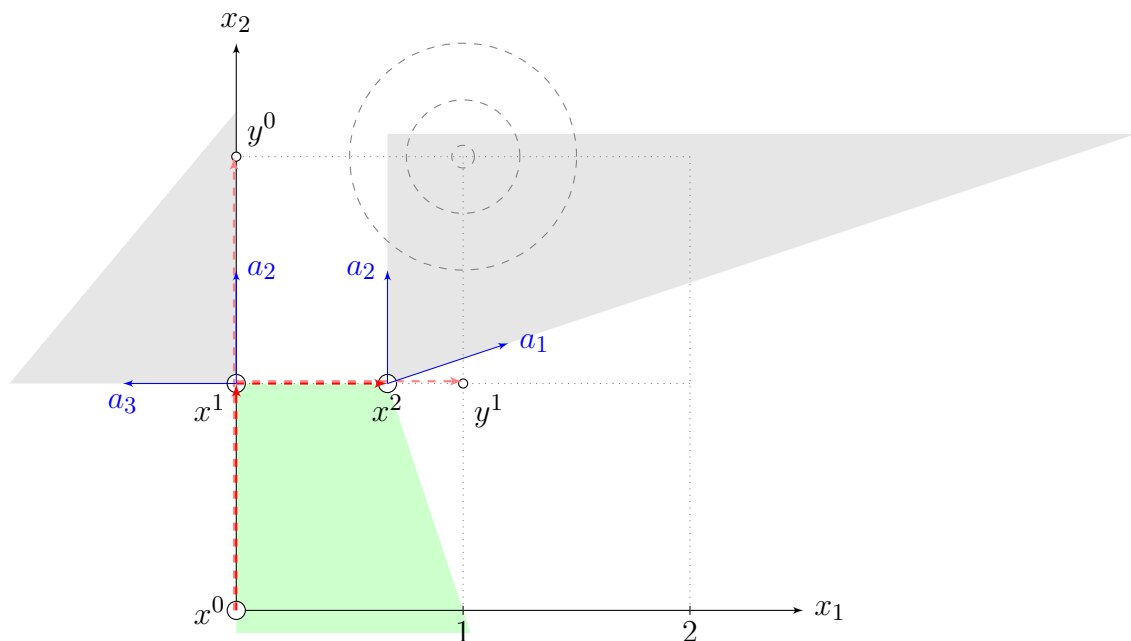
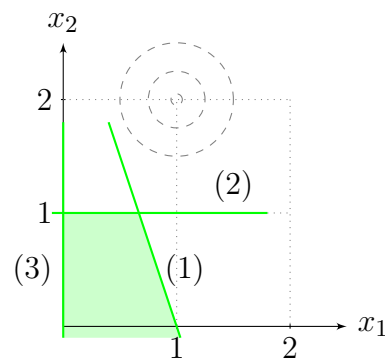


Abbildung 1.15: Zwischenergebnisse der Iterationen

### Skript 1.1: Anwendung Aktive Mengen Algorithmus für Beispiel 1.5

```
import numpy as np
import sys
```

```

def projector(A):
    if A.ndim == 1:
        n = np.size(A)
        A = np.array([A])
    else:
        m, n = A.shape
    return np.eye(n) - A.T.dot(np.linalg.inv(A.dot(A.T))).dot(A)

A = np.array([[1., 1/3.],
              [0., 1.],
              [-1., 0]
              ])
b = np.array([1., 1., 0])
Q = 2. * np.array([[1., 0],
                   [0, 1.]
                   ])
q = np.array([-2., -4.])
x0 = np.array([0., 0.])

if np.any(A.dot(x0) > b):
    print 'x0 ist kein zulaessiger Punkt'
    sys.exit()

tol = 1e-6
m, n = A.shape
k = 0

y = []

print "—— S1 ——"
x = [x0]

while True:
    res = np.abs(A.dot(x[k]) - b)
    I0 = np.where(res < tol)[0]
    Aa = A[I0]
    ba = b[I0]
    Ai = A[np.setdiff1d(range(m), I0)]
    bi = b[np.setdiff1d(range(m), I0)]

    print "—— S2 ——"

```

```
df = Q.dot(x[k]) + q

if np.linalg.norm(projector(Aa).dot(df)) < tol:
    u = np.linalg.solve(-Aa.T, df)
    print "u: " + str(u)
    if np.all(u >= -tol):
        sys.exit()
    else:
        r = np.where(u <= -tol)[0]
        I0 = np.delete(I0, r)
        Aa = A[I0]
        ba = b[I0]
        Ai = A[np.setdiff1d(range(m), I0)]
        bi = b[np.setdiff1d(range(m), I0)]

print "—— S3 ——"
if Aa.ndim == 1:
    AaT = Aa.reshape((-1, 1))
else:
    AaT = Aa.T
    Aa = Aa.ravel()
ts1 = np.vstack((np.hstack((Q, AaT)),
                  np.hstack((Aa,
                              np.zeros(np.size(I0))
                              ))
                  ))

ts2 = np.vstack((-q.reshape(-1, 1), ba))
xec = np.linalg.solve(ts1, ts2)
y.append(xec[0:n].ravel())
numer = bi.ravel() - Ai.dot(x[k])
denon = Ai.dot(y[k] - x[k])
index = np.where(denon > 0)[0]
beta = numer[index] / denon[index]
resmin = np.min(np.hstack((1, beta))) * (y[k] - x[k]) + x[k]
x.append(resmin)
print "x: " + str(x[k+1])
print "y: " + str(y[k])
k = k + 1
```



Es ist eine Übung unter Aktiver Mengen Algorithmus  im Anhang zu finden.



# Klassische Verfahren zur optimalen Steuerung

2

## 2.1 Grundproblem der Variationsrechnung

Die Aufgabe besteht im Auffinden einer stetig differenzierbaren Funktion  $x : [t_0, t_e] \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Randbedingungen  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_e) = x_e$ , so dass ein Gütefunktional  $J = \int_{t_0}^{t_e} f(t, x, \dot{x}) dt$  minimal wird.

Mit der Vorgehensweise von Euler wird angenommen, man hätte eine optimale Lösung  $x^*$  gefunden. Konstruiere eine einparametrische Schar von Vergleichskurven  $x(t) = x^*(t) + \varepsilon \tilde{x}(t)$ , wobei  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$  ein Parameter ( $\varepsilon_0 > 0$  gegeben) und  $\tilde{x}$  eine gegebene, stetig differenzierbare Funktion mit  $\tilde{x}(t_0) = 0$ ,  $\tilde{x}(t_e) = 0$  ist. Die Funktion  $\delta x^* := \varepsilon \tilde{x}$  heißt

### Abbildung 2.1: Vorgehensweise von Euler

Variation von  $x^*$  und das Einsetzen in  $J$  liefert

$$F(\varepsilon) := \int_{t_0}^{t_e} f(t, x^*(t) + \varepsilon \tilde{x}(t), \dot{x}^*(t) + \varepsilon \dot{\tilde{x}}(t)) dt.$$

Sei  $f$  zweifach stetig partiell differenzierbar. Die Funktion  $F : (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$  hat für  $\varepsilon = 0$  ein Minimum, also muss gelten

$$\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_e} \left[ \frac{df}{dx} \tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \dot{\tilde{x}}(t) \right] dt = 0.$$

Mit partieller Integration

$$\int_{t_0}^{t_e} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\tilde{x}}(t)}_{u \cdot v'} dt = \left[ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \tilde{x}(t)}_{u \cdot v} \right]_{t=t_0}^{t=t_e} - \int_{t_0}^{t_e} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \tilde{x}(t)}_{u' \cdot v} dt$$

ergibt sich

$$\int_{t_0}^{t_e} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] \tilde{x}(t) dt = 0$$

und da  $\tilde{x}$  (bis auf die Randwerte) beliebig ist, muss

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.1)$$

gelten.

*Bemerkung 2.1.* Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$  stetig und gelte  $\int_a^b G(t)v(t)dt = 0$  für alle stetig differenzierbaren Funktionen  $v$  mit  $v(a) = v(b) = 0$ . Dann gilt  $G(t) = 0 \forall t \in [a, b]$ .  $\blacklozenge$

**Abbildung 2.2:** Darstellung Fundamentallemma der Variationsrechnung

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit der Lösung  $x = x(t, c_1, c_2)$ . Eine Anpassung an die Randbedingungen  $x(t_0, c_1, c_2) = x_0$  und  $x(t_e, c_1, c_2) = x_e$  liefert  $c_1, c_2$ .

*Beispiel 2.1.* Gegeben sind  $P_0 = (t_0, x_0)$  und  $P_e = (t_e, x_e)$  in der Ebene. Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen  $P_0$  und  $P_e$ . Ein Bogenelement ist beschrieben durch

$$ds^2 = dt^2 + dx^2 = (1 + \dot{x}^2) dt^2$$

und zu minimierende Bogenlänge der durch  $s : t \in [t_0, t_e] \mapsto \begin{bmatrix} t \\ x(t) \end{bmatrix}$  parametrisierte Kurve liefert

$$J = \int_{P_0}^{P_e} ds = \int_{t_0}^{t_e} \underbrace{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}_{f(t, x, \dot{x})} dt.$$

Wegen  $f_x = 0$ ,  $f_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$  wird aus (2.1)

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = 0,$$

also  $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = C$  mit der Integrationskonstante  $C$ . Wegen  $\dot{x} = c \sqrt{\frac{1}{1 - c^2}}$  gibt es  $c_1$  und  $c_2$ , so dass  $x(t) = c_1 t + c_2$ . Anpassung an die Randbedingung (RB) liefert Geradengleichung durch  $P_0$  und  $P_e$ .  $\blacklozenge$



## 2.2 Formulierung des Optimalsteuerproblems und Lösung

Ausgehend vom Kostenfunktional

$$J = h(x(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min!$$

kann der Prozess, die Anfangsbedingung (AB) und die Endbedingung (EB) definiert werden

Prozess:  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

AB:  $x(t_a) = x_a$  mit gegebenen  $t_a$  und  $x_a \in \mathbb{R}^n$

EB: mit  $t_b$  frei und/oder  $t_b$  gegeben:

Fall A:  $z(x(t_b)) = 0$  mit gegebenen  $z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Fall B:  $x(t_b) = x_b$  mit geg.  $x_b \Leftrightarrow z(x(t_b)) := x(t_b) - x_b = 0$

Fall C:  $x(t_b)$  frei, d.h.  $z \equiv 0$

$h, f_0, f, z$  seien stetig differenzierbar bezüglich aller Argumente. Es gibt keine Beschränkung von  $u(t)$  für  $t \in [t_a, t_b]$  und  $x(t)$  für  $t \in (t_a, t_b)$ .

Falls  $t_b$  gegeben ist und Fall B besteht, so ist  $h(x(t_b), t_b)$  fest und kann aus Kostenfunktional gestrichen werden.

### 2.2.1 Prinzip der Herleitung notwendiger Bedingungen

Die Einführung der Lagrange-Multiplikatoren liefert

$$\begin{aligned} \bar{J} = & h(x(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} [f_0(x(t), u(t), t) + \psi(t)^T (f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t))] dt \\ & + \lambda_a^T \{x_a - x(t_a)\} + \lambda_b^T z(x(t_b)) \end{aligned}$$

mit  $\lambda_b \in \mathbb{R}^m, \lambda_a \in \mathbb{R}^n$ .

Die Motivation ist, dass

$$J = \int F_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min$$

bei  $\underbrace{f(x(t), u(t)) - \dot{x}(t)}_{h(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n} = 0$  dargestellt werden kann in diskreter Form als

$$J_{\text{diskret}} = \sum_j f_0(x(t_j), u(t_j)) \rightarrow \min$$

angenähert werden bei  $h(x(t_j), u(t_j))|_{\forall j} = 0$  bzw.

$$\bar{J}_{\text{diskret}} = \sum_j f_0(x(t_j), u(t_j)) + \sum_j \underbrace{\psi_j^T}_{=: \psi(t_j)} h(x(t_j), u(t_j)).$$

Dies kann wiederum dargestellt werden in der Form

$$\bar{J} = \int (f_0(x(t), u(t))) + \psi(t)^T (h(x(t), u(t)) - \dot{x}(t)).$$

Es wird die Hamilton-Funktion definiert mit

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t) = f_0(x(t), u(t), t) + \psi(t)^T f(x(t), u(t), t)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \bar{J} &= h(x(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} [H(x(t), u(t), \psi(t), t) - \psi(t)^T \dot{x}(t)] dt \\ &\quad + \lambda_a^T \{x_a - x(t_a)\} + \lambda_b^T z(x(t_b)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Angenommen wir hätten die optimale Lösung gefunden und wir betrachten die Variationen der Funktionen  $u$ ,  $x$ ,  $\psi$  und damit auch  $\dot{x}$  auf dem Intervall  $(t_a, t_b)$  der Vektoren  $x(t_a)$ ,  $\lambda_a$ ,  $x(t_b)$ ,  $\lambda_b$  und der Zahl  $t_b$ , d.h.  $\xi(t) = \xi^*(t) + \varepsilon \tilde{\xi}(t)$  mit  $\xi \in \{u, x, \psi\}$  und  $\zeta = \zeta^* + \varepsilon \tilde{\zeta}$  mit  $\zeta \in \{x(t_a), \lambda_a, x(t_b), \lambda_b, t_b\}$ . Einsetzen in (2.2) liefert die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} \bar{J} &= h(x^*(t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b) + \varepsilon \tilde{x}(t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b), t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b) \\ &\quad + \int_{t_a}^{t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b} [\mathcal{H}(x^*(t) + \varepsilon \tilde{x}(t), u^*(t) + \varepsilon \tilde{u}(t), \psi^*(t) + \varepsilon \tilde{\psi}(t), t) \\ &\quad - (\psi^*(t) + \varepsilon \tilde{\psi}(t))^T (\dot{x}^*(t) + \varepsilon \tilde{\dot{x}}(t))] dt \\ &\quad + (\lambda_a^{*T} + \varepsilon \tilde{\lambda}_a^T) \{x_a - (x^*(t_a) + \varepsilon \tilde{x}(t_a))\} \\ &\quad + (\lambda_b^{*T} + \varepsilon \tilde{\lambda}_b^T) z(x^*(t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b) + \varepsilon \tilde{x}(t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b)). \end{aligned}$$

Man hat

$$\begin{aligned} &\frac{dh}{d\varepsilon} (x^*(t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b) + \varepsilon \tilde{x}(t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b), t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}(\dots) (\dot{x}^*(t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b) + \tilde{\dot{x}}(t_b^*) + \varepsilon \tilde{t}_b + \varepsilon \tilde{x}(t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b) \tilde{t}_b) + \frac{\partial h}{\partial t}(\dots) \tilde{t}_b \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{dh}{d\varepsilon} \left( x^* \left( t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b \right) + \varepsilon \tilde{x} \left( t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b \right), t_b^* + \varepsilon \tilde{t}_b \right) \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \frac{\partial h}{\partial x} \left( x^*(t_b^*), t_b^* \right) \left( \dot{x}^*(t_b^*) \tilde{t}_b + \tilde{x}(t_b^*) \right) + \frac{\partial h}{\partial t}(\dots) \tilde{t}_b \\
 &= \frac{\partial h}{\partial x} \left( x^*(t_b^*), t_b^* \right) \dot{x}^*(t_b^*) \tilde{t}_b + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x} \left( x^*(t_b^*), t_b^* \right) \tilde{x}(t_b^*)}_{=: \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{t_b} \tilde{x}(t_b)}.
 \end{aligned}$$

Einsetzen in (2.2) liefert analog zu Abschnitt 2.1 die Funktionen  $F(\varepsilon)$  und

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{t_b} \tilde{x}(t_b) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{H} - \psi^T \dot{x} \right]_{t_b} \tilde{t}_b \\
 &+ \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \tilde{x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \tilde{u} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \tilde{\psi} - \tilde{\psi}^T \dot{x} - \psi^T \dot{\tilde{x}} \right] dt \\
 &+ \tilde{\lambda}_a^T \{x_a - x(t_b)\} - \lambda_a^T \tilde{x}(t_a) + \tilde{\lambda}_b^T z(x(t_b)) \\
 &+ \lambda_b^T \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{t_b} \tilde{x}(t_b) + \lambda_b^T \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x}(t_b) \tilde{t}_b
 \end{aligned}$$

mit

$$\int_{t_a}^{t_b} \psi^T \dot{\tilde{x}} dt = \psi^T(t_b) \tilde{x}(t_b) - \psi^T(t_a) \tilde{x}(t_a) - \int_{t_a}^{t_b} \dot{\psi}^T \tilde{x} dt$$

durch partielle Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{H} \right]_{t_b} \tilde{t}_b + \int_{t_a}^{t_b} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \dot{\psi}^T \right) \tilde{x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \tilde{u} + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} - \dot{x}^T \right) \tilde{\psi} \right] dt \\
 &+ \tilde{\lambda}_a^T \{x_a - x(t_a)\} + (\psi^T(t_a) - \lambda_a^T) \tilde{x}(t_a) + \tilde{\lambda}_b^T z(x(t_a)) \\
 &+ \left[ \lambda_b^T \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - \psi^T \right]_{t_b} (\tilde{x}(t_b) + \dot{x}(t_b) \tilde{t}_b) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

## 2.2.2 Notwendige Bedingungen für Optimallösung

Die Prozessgleichung wird definiert als

$$\dot{x}(t) = \nabla_{\psi} \mathcal{H} = f(x(t), u(t), t). \quad (2.3)$$

Die dazugehörige adjungierte Prozessgleichung<sup>1</sup> ist beschrieben durch

$$\dot{\psi}(t) = -\nabla_x \mathcal{H} = -\nabla_x f_0(x(t), u(t), t) - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t), t) \right]^T \psi(t) \quad (2.4)$$

und die Steuerungsgleichung durch

$$\nabla_u \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t) = 0. \quad (2.5)$$

Dabei bilden Gleichung (2.3) und (2.4) die kanonischen Differentialgleichungen und (2.3), (2.4) und (2.5) die sogenannten Hamilton-Gleichungen.

AB  $x(t_a) = x_a$

EB Fall A:  $z(x(t_b)) = 0$  und die Transversalitätsbedingung

$$\left[ \frac{\partial z}{\partial x}(x(t_b)) \right]^T \lambda_b + \nabla_x h(x(t_b), t_b) - \psi(t_b) = 0$$

Fall B:  $x(t_b) = t_b$  mit bekannten  $x_a$  und  $x_b$

Fall C:  $\nabla_x h(x(t_b), t_b) = \psi(t_b)$

Falls  $t_b$  frei ist, so muss zusätzlich  $\mathcal{H}(x(t_b), u(t_b), \psi(t_b), t_b) = -\frac{\partial h}{\partial t}(x(t_b), t_b)$  erfüllt sein.

### 2.2.3 Grundsätzliche Vorgehensweise zur analytischen Bestimmung der Optimallösung

(S1) Umstellen der Steuerungsgleichung nach  $u$  liefert

$$u(t) = \mathcal{U}(x(t), \psi(t), t). \quad (2.6)$$

Einsetzen in kanonsiche Differentialgleichung (Elimination von  $u$ ) ergibt

$$\dot{x} = w(x(t), \psi(t), t). \quad (2.7)$$

$$\dot{\psi} = v(x(t), \psi(t), t) \quad (2.8)$$

(S2) Bestimmen der allgemeinen Lösung von (2.7) mit dem Integrationsparameter  $c \in \mathbb{R}^{2n}$

$$x = x(t, c), \quad \psi = \psi(t, c) \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup> Es kann geschrieben werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} &= \frac{\partial f_0}{\partial x} + \psi^T \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \\ \nabla_x \mathcal{H} &= \nabla_x f_0 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^T \psi \end{aligned}$$

(S3) Anpassung der Lösung an die Randbedingungen

Fall A  $x(t_a, c) = x_a, z(x(t_b, c)) = 0,$

$$\left[ \frac{\partial z}{\partial x}(x(t_b, c)) \right]^T \underbrace{\lambda_b}_{\in \mathbb{R}^m} + \nabla_x h(x(t_b, c), t_b) - \psi(t_b, c) = 0$$

Fall B  $x(t_a, c) = x_a, x(t_b, c) = x_b$

Fall C  $x(t_a, c) = x_a, \nabla_x h(x(t_b, c), t_b) = \psi(t_b, c)$

Falls  $t_b$  frei ist:  $\mathcal{H}(x(t_b, c)), \mathcal{U}(x(t_b, c), \psi(t_b, c), t_b), \psi(t_b, c), t_b) = -\frac{\partial h}{\partial t}(x(t_b, c), t_b)$

Dabei  $x_a$  als Variable mitführen, also ist  $c = c(x_a)$ . Falls  $t_b$  frei ist, so gilt

$t_b = t_b(x_a)$ .

(S4) Einsetzen von  $c(x_a)$  in (2.9) ergibt die optimale (Zustands- bzw. Kozustands-) Trajektorie

$$x(t, c(x_a)) =: x^*(t, x_a) \quad (2.10)$$

und

$$\psi(t, c(x_a)) =: \psi^*(t, x_a).$$

Eingesetzt in (2.6) erhält man die optimale Steuertrajektorie

$$\mathcal{U}(x^*(t, x_a), \psi^*(t, x_a), t) =: u^*(t, x_a). \quad (2.11)$$

(S5) Umstellen von (2.10) nach  $x_a$  und Einsetzen in (2.11) liefert das Regelgesetz

$$u^*(t) = K(x(t), t).$$

Die Schritte (S1) bis (S4) liefern die in Abb. 2.3 dargestellten Trajektrtorien und Schritt (S5) die in Abb. 2.4 dargestellte Trajektorie.

**Abbildung 2.3:** Trajektorien der Schritte (S1) bis (S4)

**Abbildung 2.4:** Trajektorie des Schrittes (S5)

*Beispiel 2.2.* Sei  $\dot{x} = ax + bu$  mit  $a, b \in \mathbb{R}^1, t_a = 0, x(0) = x_a$  gegeben. Weiterhin ist  $t_b$  gegeben und damit nicht frei.  $x(t_b) = 0$ , d.h. es wird Fall B betrachtet mit dem „energieoptimalen“ Kostenfunktional

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_b} u(t)^2 dt.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}u^2 + \psi(ax + bu), \\ \dot{x} &= \nabla_{\psi}\mathcal{H} = ax + bu, \\ \dot{\psi} &= -\nabla_x\mathcal{H} = -a\psi, \\ \nabla_u\mathcal{H} &= u + b\psi = 0.\end{aligned}$$

Damit ist

$$u = -b\psi. \quad (2.12)$$

Im nächsten Schritt werden die kanonischen Differentialgleichungen gelöst. Die Lösung von

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - b^2\psi \\ \dot{\psi} &= -a \cdot \psi\end{aligned}$$

liefert

$$x(t) = x(0)e^{at} + \frac{b^2\psi(0)}{2a} (e^{-at} - e^{at}) \quad (2.13)$$

$$\psi(t) = \psi(0)e^{-at}. \quad (2.14)$$

In (2.13) wird  $t = t_b$  zur Betrachtung des Endzeitpunktes  $t_b$  gesetzt und  $x(t_b) = 0$ . Umstellen nach  $\psi(0)$  liefert

$$\psi(0) = -\frac{2a}{b^2} \frac{e^{at_b}}{e^{-at_b} - e^{at_b}} x(0). \quad (2.15)$$

Eingesetzt in (2.13) erhält man

$$x^*(t, x(0)) = x(0) \frac{e^{-a(t_b-t)} - e^{a(t_b-t)}}{e^{-at_b} - e^{at_b}} \quad (2.16)$$

und (2.12) wird mit (2.14) und (2.15) zu

$$\begin{aligned}u^*(t, x(0)) &= -b\psi(0)e^{-at} \\ &= \frac{2a}{b} \frac{e^{a(t_b-t)}}{e^{-at_b} - e^{at_b}} x(0).\end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.16) umgestellt nach  $x(0)$  und eingesetzt in (2.17) liefert das Regelgesetz

$$u^*(t) = k(t)x(t) \quad (2.18)$$

mit

$$k(t) = \frac{2a}{b} \frac{e^{a(t_b-t)}}{e^{-a(t_b-t)} - e^{a(t_b-t)}}.$$

Der optimale Regler ist linear, zeitvariant und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_b} |k(t)| = \infty.$$

Eine Verstärkung gegen  $\infty$  ist sinnig. Sie entsteht durch die harten Endbedingungen. Es wären weiche Endbedingungen sinnvoll, siehe Beispiel 2.3. Die Trajektorien von  $u$ ,  $x$  und  $\psi$  sind in Abb. 2.5 dargestellt. Der Verlauf der Reglerverstärkung ist in Abb. 2.7 abgebildet.  $\diamond$

**Abbildung 2.5:** Trajektorien von Beispiel 2.2 mit festem Endzustand

*Beispiel 2.3.* Sei  $\dot{x} = ax + bu$  mit  $a, b \in \mathbb{R}^1$ ,  $t_a = 0$ ,  $x(0) = x_a$  gegeben.  $t_b$  wird als frei angenommen und das Kostenfunktional als

$$J = \frac{1}{2} S x(t_b)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_b} u(t)^2 dt.$$

Das heißt, es wird Fall C betrachtet. So ist anstelle von  $x(t_b) = 0$  die Randbedingung  $Sx(t_b) = \psi(t_b)$  zu erfüllen. Darin müssen Gleichung (2.13) und (2.14) an der Stelle  $t = t_b$  eingesetzt und nach  $\psi(0)$  umgestellt werden. Damit erhält man  $x^*(t, x(0))$ ,  $\psi^*(t, x(0))$  und  $u^*(t, x(0))$ , sowie das Regelgesetz

$$u^*(t) = k(t)x(t)$$

mit

$$k(t) = \frac{-2aS}{b \left( S - \left( S - \frac{2a}{b^2} \right) e^{-2a(t_b-t)} \right)}$$

für den gilt, dass  $k(t_b) = -bS$  gilt.

Für  $t_b \rightarrow \infty$  gilt für jedes  $t$  in beiden Fällen

$$k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0 \\ -\frac{2a}{b} & \text{für } a > 0 \end{cases}.$$

Der Prozess ist bei  $a < 0$  stabil und damit ist kein Stellaufwand notwendig. Wenn der Prozess instabil ist,  $a > 0$ , konvergiert der Zustand gegen  $\infty$ . Wenn der Prozess integrales Verhalten aufweist,  $a = 0$ , ist kein Minimum vorhanden.  $\diamond$

**Abbildung 2.6:** Trajektorien von Beispiel 2.3 mit Gewichtung des Endzustandes

Es sind zwei Übungen unter Vorgehensweise zur analytischen Bestimmung der Optimal-

**Abbildung 2.7:** Reglerverstärkungen von Beispiel 2.2 und Beispiel 2.3

lösung  im Anhang zu finden.

## 2.2.4 Numerische Lösung am Beispiel „Fall C und feste Endzeit $t_b$ “

Zur Lösung der „Endwertaufgabe“  $\dot{\psi} = \nabla_x \mathcal{H}$  mit gegeben Endwert  $\psi(t_b)$  und unter der Annahme, dass  $x(t)$  und  $u(t)$  gegeben sind. Wir setzen  $t = t(\tau) = t_b + t_a - \tau$ , vgl. Abb. 2.8 und mit

$$\Psi(\tau) := \psi(t(\tau)) = \psi(t_b + t_a - \tau)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(\tau) &= \frac{d\psi(t(\tau))}{d\tau} = \frac{d\psi(t)}{dt} \bigg|_{t=t(\tau)} \frac{dt}{d\tau} \\ &= - \frac{d\psi(t)}{dt} \bigg|_{t=t(\tau)} = -\dot{\psi}(t) \big|_{t=t(\tau)} \\ &= \nabla_x \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t) \big|_{t=t(\tau)} \end{aligned}$$

Damit ist die Anfangswertaufgabe

**Abbildung 2.8:** Darstellung der linearen Funktion  $t = t(\tau)$

**Abbildung 2.9:** Entwicklung von  $\psi$  in Abhängigkeit von  $t$  und  $\tau$

$$\dot{\Psi}(\tau) = \nabla_x \mathcal{H}(x(t_b + t_a - \tau), u(t_b + t_a - \tau), \psi(\tau), t_b + t_a - \tau)$$

mit dem Anfangswert (AW)  $\Psi(t_a) = \psi(t_b)$  zu lösen für  $\tau \in [t_a, t_b]$  und es gilt

$$\psi(t) = \Psi(t_b + t_a - \tau).$$

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems  $\nabla_u \mathcal{H} = 0$  kann das NEWTON-Verfahren verwendet werden. Bekannt ist, dass für eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  gilt

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \mathcal{O}(x - \bar{x}),$$

wobei  $\mathcal{O}(h)$  für eine beliebige Funktion  $g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$  steht.

$x = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$  liefert die iterative Vorschrift



**Abbildung 2.10:** Darstellung NEWTON-Verfahren

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

mit  $\alpha \in (0,1]$ . Falls  $\alpha \in (0,1)$  gilt, spricht man von einem gedämpften NEWTON-Verfahren. Allgemein für differenzierbare Funktionen  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  kann geschrieben werden:

Löse  $F(x) = 0$  mittels

$$x^{k+1} = x^k - \alpha F'(x^k)^{-1} F(x^k)$$

mit der Jacobimatrix  $F'(x^k)$  an der Stelle  $x^k$ .

Bei der Anwendung des Verfahrens auf

$$\nabla_x \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t) = 0$$

ergibt sich die Iterationsvorschrift zu

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) - \alpha \nabla_{uu} \mathcal{H}(x(t), u^k(t), \psi(t), t)^{-1} \nabla_u \mathcal{H}(x(t), u^k(t), \psi(t), t)$$

Für ein gegebenes  $x(t)$  und  $\psi(t)$  ist die Vorschrift für alle  $t$  abzuarbeiten.

Ein Algorithmus zur Bestimmung von  $u$  kann wie folgt dargestellt werden.

(S1) Setze einen Startwert  $u(t)$ ,  $t \in [t_a, t_b]$ .

(S2) Lösung der Anfangswertaufgabe (AWA)  $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$  mit  $x(t_a) = x_a$  liefert  $x(t)$ ,  $t \in [t_a, t_b]$ .

(S3) Lösung der AWA

$$\dot{\Psi}(\tau) = \nabla_x \mathcal{H}(x(t_b + t_a - \tau), u(t_b + t_a - \tau), \Psi(\tau), t_b + t_a - \tau)$$

$$\Psi(t_a) = \nabla_x h(x(t_b), t_b) = \psi(t_b)$$

mit  $\tau \in [t_a, t_b]$  liefert  $\psi(t) = \Psi(t_b + t_a - t)$ ,  $t \in [t_a, t_b]$ .

(S4) Aktualisiere

$$u(t) \leftarrow u(t) - \underbrace{\alpha \nabla_{uu} \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)^{-1} \nabla_u \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)}_{\Delta u}$$

mit  $t \in [t_a, t_b]$ .

(S5) Falls Abbruchbedingung, bspw.  $\|\Delta u\|$  klein und  $|\Delta J|$  klein, erfüllt ist, dann Stopp, andernfalls gehe zu (S2).

*Beispiel 2.4.* Es wird der vorgestellten Algorithmus in Form von Pseudocode auf das Beispiel Beispiel 2.3 angewendet. Der Prozess ist beschrieben durch

$$\dot{x} = ax + bu$$

mit gegebenen  $x(t_a) = x_a$  und  $t_b$  und dem Kostenfunktional

$$J = \frac{1}{2}Sx(t_b)^2 + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} u(t)^2 dt.$$

(S1) Setze Startwert für die zeitdiskretisierte Steuerfunktion  $\begin{bmatrix} u(t_a) \\ \vdots \\ u(t_b) \end{bmatrix}$  in diskreten

Zeitpunkten  $\begin{bmatrix} t_a \\ \vdots \\ t_b \end{bmatrix}$  mit geeigneter Diskretisierung.

(S2) Prozesssimulation<sup>1</sup> mit gegebenen AW  $\begin{bmatrix} x(t_a) \\ \vdots \\ x(t_b) \end{bmatrix}$  und Steuerfunktion.

(S3) „Rückwärtssimulation“<sup>2</sup> der adjungierten Prozessgleichung  $\begin{bmatrix} \psi(t_b) \\ \vdots \\ \psi(t_a) \end{bmatrix}$  aus

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}u^2 + \psi(ax + bu)$$

$$\nabla_x \mathcal{H} = a\psi$$

$$\dot{\Psi}(\tau) = a\Psi(\tau)$$

$$\Psi(t_a) = Sx(t_b),$$

$$\tau \in [t_a, t_b]$$

$$\Psi(\tau) = e^{a(\tau-t_a)}Sx(t_b).$$

$t$  läuft von  $t_b$  nach  $t_a$  und  $\tau$  läuft von  $t_a$  nach  $t_b$ .

---

1 MATLAB:  $\text{lsim}(\dot{x} = ax + bu, \begin{bmatrix} u(t_a) \\ \vdots \\ u(t_b) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_a \\ \vdots \\ t_b \end{bmatrix}, x_a)$

2 MATLAB:  $\exp(a(\begin{bmatrix} t_a \\ \vdots \\ t_b \end{bmatrix} - t_a))Sx(t_b)$

---

(S4) Aktualisierung der Steuerfunktion


$$\begin{bmatrix} u(t_a) \\ \vdots \\ u(t_b) \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} u(t_a) \\ \vdots \\ u(t_b) \end{bmatrix} - \alpha \left( \begin{bmatrix} u(t_a) \\ \vdots \\ u(t_b) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi(t_a) \\ \vdots \\ \psi(t_b) \end{bmatrix} b \right)$$

aus  $\nabla_u \mathcal{H} = u + \psi b$ ,  $\nabla_{uu} = 1$  und

$$u(t) \leftarrow u(t) - \alpha (u(t) + \psi(t)b).$$

(S5) Falls Abbruchbedingung erfüllt ist, dann Stopp, andernfalls gehe zu (S2).

◇

Es ist eine Übung unter Vorgehensweise zur numerischen Bestimmung der Optimallösung  im Anhang zu finden.

## 2.2.5 Anwendung zur Umformung von Optimierungsproblemen am Beispiel des linear-quadratischer Regler-Problems

Minimiere das Gütefunktional

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_b) G x(t_b) + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

bei dem Prozess

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

mit den gegebenen Werten  $x(t_a) = x_a$ ,  $t_a$  und  $t_b$ , wobei der Zustandswert zur Endzeit  $x(t_b)$  frei ist. Weiterhin sollen  $G \geq 0$ ,  $Q(t) \geq 0$  (positiv semidefinit),  $R(t) > 0$  (positiv definit)<sup>1</sup> und  $Q(t)$ , sowie  $R(t)$  stetig differenzierbar sein. Der Ausgang wird berechnet mit

$$y = Cx$$

mit der Wichtung von  $y$

$$y^T W y = x^T \underbrace{C^T W C}_{Q(t)} x.$$

<sup>1</sup> Wenn  $R(t)$  semidefinit wäre, würde es  $u$  geben, die keine Kosten erzeugen.

Es wird die Hamilton-Funktion gebildet

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) \right) + \psi^T(t) (A(t)x(t) + B(t)u(t)).$$

Damit kann die kanonische Differentialgleichung und die RBen angegeben werden

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \nabla_{\psi} \mathcal{H} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ \dot{\psi}(t) &= -\nabla_x \mathcal{H} = - \left( Q(t)x(t) + A^T(t)\psi(t) \right), \\ x(t_a) &= x_a, \\ \psi(t_b) &= \nabla_x h = Gx(t_b).\end{aligned}$$

Die Steuerungsgleichung

$$\nabla_u \mathcal{H} = R(t)u(t) + B^T(t)\psi(t) = 0$$

liefert

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\psi(t).$$

Wir haben ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem und  $\psi(t_b)$  ist linear von  $x(t_b)$  abhängig. Dies motiviert zu dem Ansatz

$$\psi(t) = X(t)x(t), \quad \forall t \in [t_a, t_b].$$

Dann gilt für jedes  $x(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= \dot{X}x + X\dot{x} \\ &= \dot{X}x + X(Ax - BR^{-1}B^T Xx) \\ &= -Qx - A^T Xx\end{aligned}$$

was auf

$$\left( \dot{X} + X(A - BR^{-1}B^T X) + Q + A^T X \right) x = 0.$$

führt, was wiederum die Matrix-Ricatti-Differentialgleichung

$$\dot{X} = -A^T X - XA + XBR^{-1}B^T X - Q$$

mit der Endbedingung  $x(t_b)$  liefert. Das Regelgesetz kann zu

$$u(t) = \underbrace{-R^{-1}(t)B(t)X(t)}_{=:k(t)} x(t)$$

formuliert werden, was eine lineare zeitvariante Zustandsrückführung darstellt.

## 2.3 Maximumprinzip von Pontryagin

### 2.3.1 Vorbereitung

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  stetig diffbar,  $x^*, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} f(x^* + \varepsilon \tilde{x}) \right|_{\varepsilon=0} &= f'(x^*) \tilde{x} \\ &= \nabla f(x^*)^T \tilde{x} \end{aligned}$$

Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und konvex. Dann ist  $x^* \in G$  lokale Minimalstelle von  $f$  auf  $G \Rightarrow$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} f(x^* + \varepsilon \tilde{x}) \right|_{\varepsilon=0} \geq 0 \quad \forall \tilde{x} \in clZ(G, x^*)$$

$$Z(G, x^*) := \{s \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{\alpha} > 0 : x^* + as \in G \quad \forall \alpha \in [0, \bar{\alpha}]\} :$$

Menge der für  $x^* \in G$  zulässigen Richtungen.  $clZ(G, x^*)$  heißt Tangentialkegel von  $G$  in  $x^*$ , cl ... closure  $\rightarrow$  Randpunkte.

Speziell:

$$x^* \in intG \Rightarrow Z(G, x^*) = \mathbb{R}^n$$

und es gilt  $x^* \in intG$  lokale Minimalstelle von  $f$  auf  $G \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} f(x^* + \varepsilon \tilde{x}) \right|_{\varepsilon=0} &= 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0 \end{aligned}$$

Die Aufgabe ist das Kostenfunktional

$$J = h(x(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min$$

für den Prozess

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

mit  $u: [t_a, t_b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^p$  mit dem zulässigen Bereich  $\Omega$ , der zeitinvariant, abgeschlossen und konvex ist, zu minimieren.

Die AB seien gegeben mit gegebenen  $t_a, x_a$  mit  $x(t_a) = x_a$ .

Die EB seien gegeben mit gegebenen oder freien  $t_b$  und  $z(x(t_b)) = 0$  mit  $z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , d.h. es wird Fall A betrachtet.

$h$ ,  $f_0$ ,  $f$  und  $z$  seien stetig differenzierbar bezüglich aller Argumente. Es ist keine Beschreibung für  $x(t)$  für  $t \in [t_a, t_b]$  gegeben.

### 2.3.2 Prinzip der Herleitung der notwendigen Bedingungen

Es wird der Lagrange-Multiplikator

$$\begin{aligned} \bar{J} = & \lambda_0 h(x(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} [\lambda_0 f_0(x(t), u(t), t) + \psi^T(t) (f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t))] dt \\ & + \lambda_a^T \{x_a - x(t_a)\} + \lambda_b^T z(x(t_b)) \end{aligned}$$

eingeführt. Weiter wird die Hamilton-Funktion  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \{0,1\} \times [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), \lambda_0, t) = \lambda_0 f_0(x(t), u(t), t) + \psi^T(t) f(x(t), u(t), t).$$

definiert. Analog zu Abschnitt 2.2.1 werden die Variationen  $\xi(t) = \xi^*(t) + \varepsilon \tilde{\xi}(t)$  mit  $\xi \in \{x, u, \psi\}$  und  $\zeta = \zeta^* + \varepsilon \tilde{\zeta}$  mit  $\zeta \in \{x(t_a), \lambda_a, x(t_b), \lambda_b, t_b\}$  eingeführt. Aufgrund der Beschränkung  $u(t) \in \Omega$  erfolgt die Herleitung der notwendigen Bedingungen für die Minimumstelle aus  $\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \geq 0$ , anstelle von  $\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$ . Aus

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = & \left[ \lambda_0 \frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{H} \right]_{t_b} \tilde{t}_b + \int_{t_a}^{t_b} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \dot{\psi}^T \right) \tilde{x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \tilde{u} + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} - \dot{x}^T \right) \tilde{\psi} \right] dt \\ & + \dots \geq 0 \end{aligned}$$

erhält man speziell für  $\tilde{u} \neq 0$ ,  $\tilde{x} = 0$ ,  $\tilde{\psi} = 0$ , ... die notwendige Bedingung  $\int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \tilde{u} dt \geq 0$  für alle zulässigen Variationen und hieraus kann man folgern

$$0 \leq \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda_0^*, t) \tilde{u}(t)$$

mit  $\forall \tilde{u}(t) \in clZ(G, u^*(t))$  und  $\forall t \in [t_a, t_b]$ . Dies ist eine notwendige Bedingung für ein (lokales) Minimum von

$$u(t) \in \Omega \mapsto \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \psi^*(t), \lambda_0^*, t)$$

an der Stelle  $u^*(t)$ . Diese Bedingung kann zu

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda_0^*, t) & \leq \mathcal{H}(x^*(t), u, \psi^*(t), \lambda_0^*, t) \\ & \forall u \in \Omega \forall t \in [t_a, t_b], \end{aligned}$$

d.h. zu einem globalen Minimum auf  $\Omega$  verschärft werden.

Die übrigen Variationen sind unbeschränkte Variationen und führen auf die gleichen notwendigen Bedingungen wie in Abschnitt 2.2.1.

**Satz 6** (Pontryaginschs Minimumprinzip). *Falls  $u^* : [t_a, t_b] \rightarrow \Omega$  optimal ist, so gibt es einen Vektor  $\begin{bmatrix} \lambda_0^* \\ \psi^*(t_b) \end{bmatrix} \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\lambda_0^* = \begin{cases} 1 & \text{im regulären Fall} \\ 0 & \text{im singulären Fall} \end{cases}$ , so dass*

(1) gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \nabla_{\psi} \mathcal{H}|_* = f(x^*(t), u^*(t), t), \\ \dot{\psi}^*(t) &= -\nabla_x \mathcal{H}|_* = -\lambda_0^* \nabla_x f_0(x^*(t), u^*(t), t) - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T \psi^*(t), \\ x^*(t_a) &= x_a, \\ z(x^*(t_a)) &= 0, \\ \psi^*(t_b) &= \lambda_0^* \nabla_x h(x^*(t_b), t_b) + \left[ \frac{\partial z}{\partial x}(x^*(t_b)) \right]^T \lambda_b. \end{aligned}$$

(2) gilt

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda_0^*, t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \psi^*(t), \lambda_0^*, t) \quad (2.19)$$

mit  $\forall u \in \Omega$  und  $\forall t \in [t_a, t_b]$ , d.h. die Funktion  $u \in \Omega \mapsto \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda_0^*, t)$  hat an der Stelle  $u^*(t)$  ein globales Minimum.

(3) gilt falls  $t_b$  frei ist, so muss zusätzlich gelten

$$\mathcal{H}(x^*(t_b), u^*(t_b), \psi^*(t_b), \lambda_0^*, t_b) = -\lambda_0^* \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_b), t_b)$$

**Definition 6.** Die Lösung des Steuerungsproblems heißt singulär, falls

(I)  $\lambda_0 = 0$  oder

(II)  $H \neq H(u)$  für  $t \in [t_1, t_2] \subseteq [t_a, t_b]$  mit  $t_1 < t_2$ , d.h. es gibt ein Intervall mit Länge größer Null auf dem  $H$  keine explizite Funktion der Steuergröße ist.

**Bemerkung 2.2** (Zum Fall (I)). Im Fall  $\lambda_0 = 0$  ist die Zielfunktion für die Lösung nicht relevant, da die optimale Lösung bereits durch die NB festgelegt ist. Das heisst, der geforderte Endzustand liegt auf dem Rand der Menge aller Zustandsvektoren, die durch die Zeitpunkte  $t_b$  erreichbar sind.  $\blacklozenge$

**Beispiel 2.5.** Minimiere  $J = \int_0^1 u(t) dt$  für den Prozess  $\dot{x} = u(t)^2$  unter der NB  $x(0) = x(1) = 0$ . Offenbar erfüllt nur  $u \equiv 0$  die NB und ist daher optimal. Mit der Hamilton-

Funktion

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, \lambda_0, t) = \lambda_0 u + \psi u^2$$

gilt

$$0 = \mathcal{H}_u = \lambda_0 2\psi u$$

und

$$\dot{\psi} = -\mathcal{H}_x = 0.$$

Damit ist  $\psi = \text{const}$  und damit ein unbeschränktes Problem. Falls  $\psi = 0$ , so gilt auch  $\lambda_0 = 0$ . Angenommen  $\psi \neq 0$ , so ist  $u = -\frac{\lambda_0}{2\psi}$ . Falls  $\lambda_0 \neq 0$  ist, so wäre  $x(1) > 0$ , d.h. diese  $u$  wäre nicht zulässig. Also muss  $\lambda_0 = 0$  gelten.  $\diamond$

*Bemerkung 2.3* (Zum Fall (II)). Meist trifft dieser Fall auf, wenn  $\mathcal{H}$  eine affine Funktion ist, d.h.

$$\mathcal{H} = g(x(t), \psi(t), \lambda_0, t) + \mu(x(t), \psi(t), \lambda_0, t) u(t)$$

ist und  $\mu(x^*(t), \psi^*(t), \lambda_0^*(t), t)$  für alle  $t \in [t_1, t_2]$  verschwindet. Jedes zulässige  $u(t)$  ist genau dann eine Lösung von (2.19). Die optimale Lösung muss „anderweitig“ gefunden werden, z.B. aus  $\mu \equiv 0$  auf  $[t_1, t_2]$  folgt  $\dot{\mu} \equiv 0$ ,  $\ddot{\mu} \equiv 0$ , ... Es wird solange differenziert, bis  $u$  explizit auftaucht, d.h.

$$\dot{\mu} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mu}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

liefert die Bedingungen für  $u$ , ansonsten kann  $\dot{\mu} = 0$  versucht werden.  $\blacklozenge$

*Beispiel 2.6* (Zeitoptimale Steuerung eines Doppelintegrators). Der Prozess

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

mit dem gegebenen Anfangszustand  $x_0 = \begin{bmatrix} s_a \\ v_a \end{bmatrix}$  soll durch die Steuerungsfunktion

$u : [0, t_b] \rightarrow \Omega = [-a_{\max}, a_{\max}]$  mit  $a_{\max} > 0$  so in den Endzustand  $x(t_b) = \begin{bmatrix} s_b \\ v_b \end{bmatrix}$

überführt werden, dass  $J = \int_0^{t_b} dt = t_b$  minimiert wird<sup>1</sup>. Es wird die Hamilton Funktion

$$\mathcal{H} = \lambda_0 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u(t)$$

---

<sup>1</sup> Integration von  $f_0(x, u, t) = 1$  oder von  $h(x(t_b), t_b)$  führt beides zum selben Ergebnis.



gebildet. Nach Pontryagin muss ein Vektor

$$\begin{bmatrix} \lambda_0^* \\ \psi_1^*(t_b) \\ \psi_2^*(t_b) \end{bmatrix} \neq 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (2.20)$$

existieren, so dass folgenden Bedingungen erfüllt sind

- (a)  $\dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t)$ ,  $\dot{x}_2^*(t) = u^*(t)$ ,  $\dot{\psi}_1^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} \Big|_* = 0$ ,  $\dot{\psi}_2^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} \Big|_* = -\psi_1^*(t)$ ,  
 $x_1^*(0) = s_a$ ,  $x_2^*(0) = v_a$ ,  $x_1^*(t_b) = s_b$ ,  $x_2^*(t_b) = v_b$ ,
- (b)  $\psi_2^*(t)u^*(t) \leq \psi_2^*(t)u$  mit  $\forall u \in \Omega$  und  $\forall t \in [0, t_b]$ ,
- (c)  $\mathcal{H}(t_b) = \lambda_0^* + \psi_1^*(t_b)x_2^*(t_b) + \psi_2^*(t_b)u^*(t_b) = 0$ .

(b) liefert

$$u^*(t) = \begin{cases} a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) < 0 \\ u \in [-a_{max}, a_{max}] & \text{für } \psi_2^*(t) = 0 \\ -a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) > 0 \end{cases}$$

. In den Zeitpunkten für die  $\psi_2^*(t) = 0$  gilt, minimiert jedes  $u(t) \in \Omega$  die Hamilton-Funktion. Es ist kein singuläres Problem, da  $\psi_2^*$  nur isolierte Nullstellen und genauer in  $[0, t_b]$  sogar nur höchstens eine Nullstelle existiert.

*Beweis.* Da  $\dot{\psi}_1(t) = 0$  ist  $\psi_1^*(t) = c_1^*$  konstant und wegen  $\dot{\psi}_2^*(t) = -\psi_1^*(t)$  ist  $\psi_2^* = -c_1^*t + c_2^*$ . Angenommen es ist  $\psi_2^* = 0$  für  $t \in [t_1, t_2]$  mit  $t_2 > t_1$ . Dann ist  $c_1^* = c_2^* = 0$  und damit  $\psi_1^*(t) = \psi_2^*(t) = 0$  für  $t \in [0, t_b]$  und wegen (c) wäre  $\lambda_0^* = 0$ . Damit wird es zu (2.20).  $\diamond$

Änderung von Werten der Steuergrößen auf abzählbar viele Punkte beeinflusst die der Prozessgleichung nicht, da können wir

$$u(t) = -a_{max} \operatorname{sgn}(\psi_2^*(t)) = \begin{cases} a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) < 0 \\ 0 & \text{für } \psi_2^*(t) = 0 \\ -a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) > 0 \end{cases}$$

setzen. Da  $\psi_2^*(t)$  höchstens eine Nullstelle besitzt, ist  $u^*(t)$  stückweise konstant und hat höchstens einen Sattelpunkt (Strukturaussage, vgl. Abb. 2.11).  $\psi_2$  heisst Schaltfunktion. Damit hat man drei freie Parameter  $c_1$ ,  $c_2$  und  $t_b$  bzw.  $u(0)$ ,  $t_s$  und  $t_b$  zur

### Abbildung 2.11: Verlauf von $u^*(t)$

Anpassung an die Randbedingungen. Für ein konstantes  $u^* \equiv a$  erhält man für  $t \geq \tau$

die Zustandstrajektorie

$$x_2^*(t) = x_2^*(\tau) + a(t - \tau)$$

und für

$$x_1^*(t) = x_1^*(\tau) + x_2^*(\tau)(t - \tau) + \frac{a}{2}(t - \tau)^2$$

oder in der implizierten Form

$$x_1^*(t) - x_1^*(\tau) = \frac{x_2^*(\tau)}{a} (x_2^*(t) - x_2^*(\tau)) + \frac{1}{2a} (x_2^*(t) - x_2^*(\tau))^2.$$

Dies sind Parabeln durch  $(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau))$  mit der Achse gleich der  $x_1$ -Achse, offen nach rechts für  $a > 0$  und offen nach links für  $a < 0$ , vgl. Abb. 2.12. Man erhält, wie in

**Abbildung 2.12:** Darstellung der Zustandstrajektorien für konstantes  $u^* \equiv a$

Abbildung Abb. 2.13 dargestellt,

$$u^* = \begin{cases} +a_{max} & \text{falls } x(t) \text{ auf grün oder links von grün oder links von rot} \\ -a_{max} & \text{sonst} \end{cases}.$$

◇

**Abbildung 2.13:** Darstellung der Zustandstrajektorien für zeitoptimale Regelung eines Doppelintegrators

*Beispiel 2.7* (Verbrauchsoptimale Steuerung eines Doppelintegrators). Der Prozess

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

mit gegebenen Anfangszustand  $x_0 = \begin{bmatrix} s_a \\ v_a \end{bmatrix}$  soll durch die Steuerfunktion  $u : [0, t_b] \rightarrow$

$\Omega = [-a_{max}, a_{max}]$  mit  $a_{max} > 0$  in den Endzustand  $x(t_b) = \begin{bmatrix} s_b \\ v_b \end{bmatrix}$  überführt werden, so

dass  $J = \int_0^{t_b} |u(t)| dt$  mit vorgegebenen  $t_b$  minimiert wird. Es wird die Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H} = \lambda_0 |u(t)| + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u(t)$$

gebildet. Nach Pontryagin muss ein Vektor

$$\begin{bmatrix} \lambda_0^* \\ \psi_1^*(t_b) \\ \psi_2^*(t_b) \end{bmatrix} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$$

existieren, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind

- (a)  $\dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t)$ ,  $\dot{x}_2^*(t) = u^*(t)$ ,  $\dot{\psi}_1^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} \Big|_* = 0$ ,  $\dot{\psi}_2^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} \Big|_* = -\psi_1^*(t)$ ,  
 $x_1^*(0) = s_a$ ,  $x_2^*(0) = v_a$ ,  $x_1^*(t_b) = s_b$ ,  $x_2^*(t_b) = v_b$ ,
- (b)  $\lambda_0^* |u^*(t)| + \psi_2^*(t) u^*(t) \leq \lambda_0^* |u| + \psi_2^*(t) u \quad \forall u \in \Omega \text{ und } \forall t \in [0, t_b]$ ,
- (c) entfällt, da  $t_b$  fest vorgegeben ist.

Wie in Beispiel 2.6 ist  $\psi_2^*(t) = -c_1^* t + c_2^*$  eine affine Funktion.

Für  $\lambda_0^* = 0$ , entspricht dem singulären Fall, liefert (b) analog zu Beispiel 2.6, d.h.  $\psi_2 \equiv 0$  ist ausgeschlossen, die optimale Steuerfunktion

$$u^*(t) = \begin{cases} a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) < 0 \\ 0 & \text{für } \psi_2^*(t) = 0 \\ -a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) > 0 \end{cases}.$$

$\psi_2$  ist eine affine Funktion mit höchstens einer Nullstelle.

Für  $\lambda_0^* = 1$  ist  $\min_{u \in [-a_{max}, a_{max}]} |u| + \psi_2 u$  zu lösen.

1. Für  $u \in [0, a_{max}]$  erhalten wir die Zielfunktion  $(1 + \psi_2)u$  und

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \psi_2^*(t) > -1 \\ u \in [0, a_{max}] & \text{für } \psi_2^*(t) = -1 \\ a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) < -1 \end{cases}.$$

2. Für  $u \in [-a_{max}, 0]$  erhalten wir die Zielfunktion  $(\psi_2 - 1)u$  und

$$u^*(t) = \begin{cases} -a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) > 1 \\ u \in [-a_{max}, 0] & \text{für } \psi_2^*(t) = 1 \\ 0 & \text{für } \psi_2^*(t) < 1 \end{cases}.$$

Also ist

$$u^*(t) = \begin{cases} a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) < -1 \\ u \in [0, a_{max}] & \text{für } \psi_2^*(t) = -1 \\ 0 & \text{für } \psi_2^*(t) \in (-1, 1) \\ u \in [-a_{max}, 0] & \text{für } \psi_2^*(t) = 1 \\ -a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) > 1 \end{cases}. \quad (2.21)$$

$\psi_2(t)$  ist eine affine Funktion.  $c_1 = 0$  ist möglich. Die Ergebnisse können wie folgt interpretiert werden

- Der Fall  $\lambda_0^* = 0$ , singulärer Fall, tritt nur auf, wenn das vorgegebene  $t_b$  gleich dem Minimalwert  $t_{b,min}$  des zeitoptimalen Problems ist, d.h. die Lösung ist allein

durch die NB bestimmt.

- Im Fall  $\lambda_0^* = 1$  gibt es spezielle Situationen falls  $c_1^* = 0$  ist. Insbesondere kann  $\psi_2^* \equiv 1$  oder  $\psi_2^* \equiv -1$  notwendig sein, nämlich falls der Endzustand allein mit entweder  $u^*(t) \in [0, a_{max}]$  oder mit  $u^*(t) \in [-a_{max}, 0]$  erreichbar ist. Dann gibt es unendlich viele optimale Lösungen.

Am Beispiel mit konkreten Werten für  $t_b = 3$ ,  $a_{max} = 1$ ,  $v_a = 1$ ,  $s_a = 0$ ,  $v_b = 0$  und  $s_b = \frac{3}{2}$  ist der Endwert allein durch Abbremsen erreichbar. In diesem Fall sind Trajektorien bei denen beschleunigt wird nicht optimal. Wir betrachten also nur Trajektorien die in (2.21) in den Zeilen 3 bis 5 auftauchen. Würde man  $c_1^* = 0$  nicht betrachten und damit  $\psi_2^* \equiv 1$  ausschliessen, so würde  $v(t_b) = 0$  lediglich von den Trajektorien (1) und (2) aus Abb. 2.14 erfüllt. Diese erfüllen aber  $s(t_b) = s_b$  nicht und sind daher nicht zulässig.

Lässt man  $c_1^* = 0$  und damit  $\psi_2^* \equiv 1$  zu, so wird auch Trajektorie (3) aus Abb. 2.14 zugelassen. Diese erfüllt die RB und minimiert die Zielfunktion, d.h. es ist eine optimale Lösung. Weiter stellt man fest, dass jede Trajektorie, welche die RB erfüllt und für die  $u(t) = [-a_{max}, 0]$  gilt, optimal ist, wie bspw. Trajektorie (4) in Abb. 2.14.

### Abbildung 2.14: Mögliche Zustandstrajektorien für $u^*(t)$

- Im „Normalfall“ ist  $t_b > t_{b,min}$ , d.h.  $\lambda_0^* = 1$ , und  $c_1^* \neq 0$  und damit ist

$$u^*(t) = \begin{cases} a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) < -1 \\ 0 & \text{für } \psi_2^*(t) \in (-1, 1) \\ -a_{max} & \text{für } \psi_2^*(t) > 1 \end{cases} .$$

Es tritt maximal eine Umschaltung von  $-a_{max}$  nach 0 und von 0 nach  $a_{max}$  auf bzw. andersherum. Die Zustandstrajektorie besteht aus maximal zwei Parabelabschnitten und dazwischen einer Strecke parallel zur  $x_1$ -Achse, vgl. Abb. 2.16.

### Abbildung 2.15: Darstellung der Zustandstrajektorien für verbrauchsoptimale Regelung eines Doppelintegrators

◇

*Bemerkung 2.4.* Weitere Beispiele sind mit Zustandsbeschränkung sind im [?] zu finden.

◆

*Beispiel 2.8* (Anwendung des Satz von Feldbaum). Sei  $\dot{x} = Ax + bu$  steuerbar, stabil mit ausschliesslich reellen Eigenwerte und der Eingang beschränkt mit  $u(t) \in [\underline{u}, \bar{u}] \subset \mathbb{R}^1$  und mit  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ . Dann hat eine zeitoptimale Steuerung zur Überführung von  $x_a$  nach  $x_b$ , sofern diese existiert, die Form  $u^*(t) \in \{\underline{u}, \bar{u}\}$ ,  $t \in [t_a, t_b]$ , mit maximal  $n - 1$  Umschaltpunkten.

Seien vereinfachend  $t_a = 0$ , symmetrische Steuergrößenbeschränkung  $\underline{u} = -u_{max}$ ,  $\bar{u} = u_{max} > 0$  und  $A$  habe ausschliesslich einfache Eigenwerte. Es gelten

$$x(t) = e^{At}x_a + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

und

$$u(t) = (-1)^{i-1}\alpha u_{max}$$

mit  $i = 1, \dots, n$ ,  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $\alpha \in \{-1, 1\}$ ,  $t_0 = t_a$  und  $t_n = t_b$ . Dann ist

$$x(t_b) = x_b = e^{At_n}x_a + \alpha u_{max} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{A(t_n-\tau)}bd\tau$$

und

$$e^{-At_n}x_b - x_a = \alpha u_{max} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-A\tau}bd\tau}_{=w(t_i)-w(t_{i-1})}.$$

Mit

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

$$e^{At} = Ve^{\Lambda t}V^{-1} = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V^{-1},$$

$$\int_a^b e^{A\tau}d\tau = V \int_a^b e^{A\tau}d\tau = V \begin{bmatrix} \int_a^b e^{\lambda_1 \tau}d\tau & & \\ & \ddots & \\ & & \int_a^b e^{\lambda_n \tau}d\tau \end{bmatrix} V^{-1},$$

$$\int_a^b e^{\lambda_k \tau}d\tau = \frac{1}{\lambda_k} (e^{\lambda_k b} - e^{\lambda_k a})$$

für  $k = 1, \dots, n$  lässt sich die Stammfunktion  $w(\cdot)$  darstellen.

Man erhält das nichtlineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{\alpha u_{\max}} (e^{-At_n} x_b - x_a) = -w(0) + 2w(t_1) - 2w(t_2) + \dots + (-1)^{n-1} w(t_n)$$

mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten  $t_1, \dots, t_n$ . Das Gleichungssystem hat entweder für  $\alpha = 1$  oder für  $\alpha = -1$  eine Lösung.

*Bemerkung 2.5.* Verfahren ist auf Systeme mit  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  erweiterbar. Für instabile  $A$  muss es keine zulässige Trajektorie geben. Allerdings muss es auch nicht für stabile  $A$  eine zulässige Trajektorie geben, bspw.  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $u(t) \in [-1, 1]$  und  $x_b = 2$ .

Numerische Berechnung weniger Schaltzeitpunkte, z.B. NEWTON-Verfahren, ist unter anderem effizienter als Zeitdiskretisierung des Problems und der direkten numerischen Lösung. ◆

**Abbildung 2.16:** Beispielhafter Verlauf von  $u(t)$  für  $\alpha = 1$

◇

## 3.1 Zeitdiskrete Optimalsteuerung bei endlichen Zeithorizont

Es wird der Prozess

$$x[\kappa + 1] = f(x[\kappa], u[\kappa]) \quad (3.1)$$

betrachtet mit  $x[\kappa] \in \mathbb{R}^n$ ,  $u[\kappa] \in \mathbb{R}^m$ , dem Prozesszustand  $x[\kappa] := x(\kappa T_A)$  mit der Abtastzeit  $T_a$  zu diskreten Zeitpunkten  $\kappa = 0, 1, \dots, k$  und gegebenen Anfangszustand  $x[0]$ .

Das Kostenfunktional wird mit

$$K(x[0]; u[0], \dots, u[k-1]) := \sum_{\kappa=0}^{k-1} \underbrace{c(x[\kappa], u[\kappa])}_{\substack{\text{inkrementale Kosten} \\ \text{im Schritt } \kappa}} + \underbrace{K_k(x[k])}_{\text{Endwertkosten}} \quad (3.2)$$

angenommen.

Die Aufgabe besteht in der Minimierung des Kostenfunktionals

$$\min_{u[0], \dots, u[k-1]} K(x[0]; u[0], \dots, u[k-1]). \quad (3.3)$$

Es werden die minimalen Restkosten im Schritt  $\kappa = 0, \dots, k$  wie folgt definiert

**Abbildung 3.1:** Darstellung des k-stetigen Entscheidungsprozesses

$$V(x[\kappa], \kappa) := \min_{u[\kappa], \dots, u[k-1]} \left\{ \sum_{i=\kappa}^{k-1} c(x[i], u[i]) + K_k(x[k]) \right\}. \quad (3.4)$$

Man beachte, dass  $V(x[k], k) = K_k(x[k])$  ist und dann die Minimalkosten

$$V(x[0], 0) = \min K(x[0]; u[0], \dots, u[k-1])$$

sind. Es gilt für  $\kappa = k - 1, \dots, 0$

$$V(x[\kappa], \kappa) = \min_{u[\kappa], \dots, u[k-1]} \left\{ c(x[\kappa], u[\kappa]) + \sum_{i=\kappa+1}^{k-1} \dots \right\} \quad (3.5)$$

$$= \min_{u[\kappa]} \left\{ \min_{u[\kappa+1], \dots, u[k-1]} \left( c(x[\kappa], u[\kappa]) + \sum_{i=\kappa+1}^{k-1} \dots \right) \right\} \quad (3.6)$$

$$= \min_{u[\kappa]} \left\{ c(x[\kappa], u[\kappa]) + \min_{u[\kappa+1], \dots, u[k-1]} \underbrace{\sum_{i=\kappa+1}^{k-1} \dots}_{V(x[\kappa+1], \kappa+1)} \right\} \quad (3.7)$$

$$= \min_{u[\kappa]} \{ c(x[\kappa], u[\kappa]) + V(f(x[\kappa], u[\kappa]), \kappa + 1) \}. \quad (3.8)$$

Gleichung (3.8) entspricht der Gleichung der Dynamische Programmierung (DP) und kann in Kurzform wie folgt dargestellt werden

$$V(x, \kappa) = \min_u (c(x, u) + V(f(x, u), \kappa + 1)) \quad (3.9)$$

*Bemerkung 3.1.*

- Optimale Steuerfolge  $u^*[\kappa], \dots, u^*[k-1]$  zum Erreichen der minimalen Restkosten  $V(x[\kappa], \kappa)$  ist allein von  $x[\kappa]$  abhängig, also ist die Kenntnis von  $u[0], \dots, u[k-1]$  nicht erforderlich.
- Es gilt das Optimalitätsprinzip von Bellmann:  
Sei  $u^*[\kappa], \dots, u^*[k-1]$  optimale Steuerfolge für den Prozess mit Anfangszustand  $x[\kappa]$ , dann ist  $u^*[\kappa+1], \dots, u^*[k-1]$  optimale Steuerfolge für den Prozess mit dem Anfangszustand  $f(x[\kappa], u^*[\kappa])$ .



Anwendung der Gleichung der DP zur Bestimmung einer optimalen Steuerfolge

Rekursive Rückwärtsrechnungen

(S1) Berechne

$$V(x[k-1], k-1) = \min_{u[k-1]} \{ c(x[k-1], u[k-1]) + K_k(f(x[k-1], u[k-1])) \}$$

sowie Funktion

$$\pi_{k-1} := x[k-1] \mapsto u^*[k-1],$$



d.h.

$$\pi_{k-1}(x[k-1]) = u^*[k-1].$$

(S2) Für  $\kappa = k-2, \dots, 0$  berechne

$$V(x[\kappa], \kappa) = \min_{u[\kappa]} \{c(x[\kappa], u[\kappa]) + V(f(x[\kappa], u[\kappa], \kappa+1))\},$$

sowie

$$\pi_\kappa := x[\kappa] \mapsto u^*[\kappa].$$

Rekursive Vorwärtsrechnung

(S3) Zu gegebenen  $x[0]$  bestimme für  $\kappa = 0, 1, \dots, k-1$

$$u^*[\kappa] = \pi_\kappa(x[\kappa]).$$

*Bemerkung 3.2.*

- $\pi$  ist die Zustandsrückführung. Es ist die Prozessgleichung notwendig. Vor- und Rückwärtsrechnung durchführen, danach sind diese für beliebige Anfangswerte anwendbar. Die Rückführungen bleiben. Bei Änderung von einem  $u[\kappa]$  muss nur neu eingesetzt werden, daher ist dieser Algorithmus sehr effizient.
- NB der Form  $u[\kappa] \in U_\kappa \subset \mathbb{R}^m$ ,  $x[\kappa] \in X_\kappa \subset \mathbb{R}^n$  sind möglich. Speziell sind zum Beispiel Endwertbedingungen der Form  $x[k] = x_{end}$  mit gegebenen  $x_{end}$ .
- Zeitvariante Prozesse  $x[\kappa+1] = f(x[\kappa], u[\kappa], \kappa)$  und zeitvariante inkrementale Kosten  $c(x[\kappa], u[\kappa], \kappa)$  sind möglich. Dann ist Kostenfunktion der DP

$$V(x, \kappa) = \min_u (c(x, u, \kappa) + V(f(x, u, \kappa), \kappa+1)).$$



*Beispiel 3.1.* Der Prozess ist gegeben mit

$$x[\kappa+1] = \frac{1}{2}(x[\kappa] + u[\kappa])$$

und der Anfangsbedingung  $x[0] = 4$ , sowie dem Zeithorizont  $k = 3$ . Der Endwert ist gegeben mit  $x[3] = 0$  und das Kostenfunktional mit

$$K(x[0]; u[0], u[1], u[2]) = \sum_{\kappa=0}^2 (x[\kappa]^2 + u[\kappa]^2). \quad (3.10)$$

Für die Berechnung der optimalen Steuerfolge und Zustandstrajektorie wird als erstes

die Rückwärtsrechnung schrittweise durchgeführt.

(S1) Mit  $k = 3$  und keinen Endwertkosten  $K_3$ , da Endwert mit  $x[3] = 0$  gegeben, ergibt sich

$$V(x[k-1], k-1) = \min_{u[k-1]} \{c(x[k-1], u[k-1]) + K_k(f(x[k-1], u[k-1]))\}$$

$$V(x[2], 2) = \min_{u[2]} \left\{ x[2]^2 + u[2]^2 \mid x[3] = 0 \right\}$$

$$x[3] = \frac{1}{2}(x[2] + u[2]) \Rightarrow u[2] = -x[2]$$

$$V(x[2], 2) = x[2]^2 + (-x[2])^2 = 2x[2]^2$$

Damit ist der optimale Steuerwert  $u^*[2] = -x[2]$ ,  $V(x[2], 2) = 2x[2]^2$  und die Zustandsrückführung  $\pi_2(x[2]) = -x[2] = u_2^*[2]$ .

(S2) Mit  $\kappa = k - 2 = 1$  lässt sich

$$V(x[\kappa], \kappa) = \min_{u[\kappa]} \{c(x[\kappa], u[\kappa]) + V(f(x[\kappa], u[\kappa]), \kappa + 1)\}$$

$$V(x[1], 1) = \min_{u[1]} \underbrace{\{x[1]^2 + u[1]^2 + V(x[2], 2)\}}_{=:\nu_1}$$

$$= \min_{u[1]} \underbrace{\left\{ x[1]^2 + u[1]^2 + 2 \left( \frac{1}{2}(x[1] + u[1]) \right)^2 \right\}}_{=:\nu_1}$$

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial u[1]} = x[1] + 3u[1] = 0 \Rightarrow u[1] = -\frac{x[1]}{3}$$

$$\frac{\partial^2 \nu_1}{\partial u[1]^2} \bigg|_{u[1]} = 3 > 0 \Rightarrow \text{Minimum!}$$

$$V(x[1], 1) = x[1]^2 + \left(-\frac{1}{3}x[1]\right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \left(x[1] - \frac{1}{3}x[1]\right)\right)^2 = \frac{4}{3}x[1]^2$$

ermitteln. Damit ist  $u^*[1] = -\frac{1}{3}x[1]$ ,  $V(x[1], 1) = \frac{4}{3}x[1]^2$  und die Zustandsrückführung  $\pi_1(x[1]) = -\frac{1}{3}x[1] = u_1^*[1]$ .

Weiter wird mit  $\kappa = k - 3 = 0$

$$V(x[\kappa], \kappa) = \min_{u[\kappa]} \{c(x[\kappa], u[\kappa]) + V(f(x[\kappa], u[\kappa]), \kappa + 1)\}$$

$$\begin{aligned} V(x[0], 0) &= \min_{u[0]} \underbrace{\{x[0]^2 + u[0]^2 + V(x[1], 1)\}}_{=:\nu_0} \\ &= \min_{u[0]} \underbrace{\left\{x[0]^2 + u[0]^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}(x[0] + u[0])\right)^2\right\}}_{=:\nu_0} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \nu_0}{\partial u[0]} = \frac{2}{3}x[0] + \frac{8}{3}u[0] = 0 \quad \Rightarrow \quad u[0] = -\frac{x[0]}{4}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \nu_0}{\partial u[0]^2} \right|_{u[0]} = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum!}$$

$$V(x[0], 0) = x[0]^2 + \left(-\frac{1}{4}x[0]\right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \left(x[0] - \frac{1}{4}x[0]\right)\right)^2 = \frac{5}{4}x[0]^2$$

der letzte Wert für die optimale Steuerfolge berechnet. Damit ergibt sich  $u^*[0] = -\frac{1}{4}x[0]$ ,  $V(x[0], 0) = \frac{5}{4}x[0]^2$  und die Zustandsrückführung  $\pi_0(x[0], 0) = -\frac{1}{4}x[0] = u_0^*[0]$ .

Mit den Ergebnissen der Rückwärtsrechnung kann mittels der Vorwärtsrechnung die optimale Steuerfolge und Zustandstrajektorie berechnet werden

$$\begin{aligned} x^*[0] &= 4 \\ u^*[0] &= -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1 & \Rightarrow & x^*[1] = \frac{1}{2} \cdot (4 - 1) = \frac{3}{2} \\ u^*[1] &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} & \Rightarrow & x^*[2] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ u^*[2] &= -\frac{1}{2} & \Rightarrow & x^*[3] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

◇

*Beispiel 3.2.* Benutzt den selben Prozess wie Beispiel 3.1. Hat aber keine Endwertbedingung, dafür Endwertkosten und zusätzliche Steuergrößenbeschränkungen  $-1 \leq u[\kappa] \leq 1$  für  $\kappa = 0, 1, 2$  und das Kostenfunktional

$$K(x[0]; u[0], u[1], u[2]) = \sum_{\kappa=0}^2 (x[\kappa]^2 + u[\kappa]^2) + x[3]^2.$$

Für die Berechnung der optimalen Steuerfolge und Zustandstrajektorie wird als erstes die Rückwärtsrechnung schrittweise durchgeführt.

(S1) Mit  $k = 3$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 V(x[2], 2) &= \min_{u[2]} \left\{ c(x[2], u[2]) + K_3(f(x[2], u[2])) \mid -1 \leq u[2] \leq 1 \right\} \\
 V(x[2], 2) &= \min_{u[2]} \left\{ \underbrace{x[2]^2 + u[2]^2 + \left(\frac{1}{2}(x[2] + u[2])\right)^2}_{=: \nu_2} \mid -1 \leq u[2] \leq 1 \right\} \\
 \frac{\partial \nu_2}{\partial u[2]} &= x[2] + 5u[2] = 0 \quad \Rightarrow \quad u[2] = -\frac{x[2]}{5} \\
 \frac{\partial^2 \nu_2}{\partial u[2]^2} \Big|_{u[2]} &= 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum!} \\
 u^*[2] &= \begin{cases} 1 & \text{für } x[2] \leq -5 \\ -\frac{x[2]}{5} & \text{für } x[2] \in (-5, 5) \\ -1 & \text{für } x[2] \geq 5 \end{cases} \\
 V(x[2], 2) &= \begin{cases} \frac{5}{4}x[2]^2 + \frac{1}{2}x[2] + \frac{5}{4} & \text{für } x[2] \leq -5 \\ \frac{6}{5}x[2]^2 & \text{für } x[2] \in (-5, 5) \\ \frac{5}{4}x[2]^2 - \frac{1}{2}x[2] + \frac{5}{4} & \text{für } x[2] \geq 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(S2) Mit  $\kappa = k - 2 = 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 V(x[1], 1) &= \min_{u[1]} \left\{ c(x[1], u[1]) + K_2(f(x[1], u[1])) \mid -1 \leq u[1] \leq 1 \right\} \\
 V(x[1], 1) &= \begin{cases} \min_{u[1]} \left\{ \underbrace{x[1]^2 + u[1]^2 + \frac{5}{4}x[2]^2 + \frac{1}{2}x[2] + \frac{5}{4}}_{=: \nu_{1,1}} \mid -1 \leq u[1] \leq 1 \right\} \\ \min_{u[1]} \left\{ \underbrace{x[1]^2 + u[1]^2 + \frac{6}{5}x[2]^2}_{=: \nu_{1,2}} \mid -1 \leq u[1] \leq 1 \right\} \\ \min_{u[1]} \left\{ \underbrace{x[1]^2 + u[1]^2 + \frac{5}{4}x[2]^2 - \frac{1}{2}x[2] + \frac{5}{4}}_{=: \nu_{1,3}} \mid -1 \leq u[1] \leq 1 \right\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

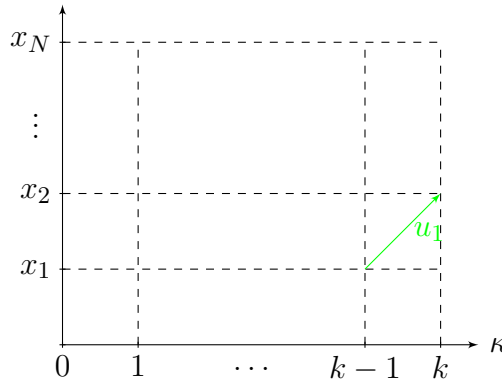
Analog wie in Beispiel 3.1 weiterrechnen. Durch die Steuergrößenbeschränkung müssen für jedes  ${}_n u_{1,i}$  mit  $i = 1, \dots, 3$  jeweils drei Funktionen ausgewertet werden und im nächsten Schritt wieder weitere drei pro Funktion.  $\diamond$

### 3.1.1 Numerische Durchführung des Algorithmus der Dynamischen Programmierung

Sei  $x[\kappa + 1] = f(x[\kappa], u[\kappa])$  mit  $x[\kappa] \in \mathbb{R}^1$ ,  $u[\kappa] \in \mathbb{R}^1$  und das Kostenfunktional

$$K(x[0]; u[0], \dots, u[\kappa - 1]) = \sum_{k=0}^{\kappa-1} c(x[k], u[k]) + K_k([k]).$$

Dann kann über eine diskrete Darstellung von  $x[\kappa]$  in Form eines Gitters, wie in Abb. 3.2 dargestellt, sowie von  $u[\kappa]$  auf die Restkosten  $V(x_i, \kappa)$  geschlossen werden, vgl. Tab. 3.1. Mit den diskreten Restkosten kann dann auf die optimale Steuerfolge  $u^*[x_i, \kappa]$  geschlossen werden, siehe Tab. 3.2. Bei der Betrachtung von  $x_1$  im Schritt  $k - 1$  werden die Restkosten mit der NUMPY-Funktion `interp` ausgewertet



**Abbildung 3.2:** Darstellung der Diskretisierung von  $x[\kappa]$  in Gitterform

$$\begin{aligned} V(x_1, k-1) &= \min \{c(x_1, u_j) \\ &\quad + \text{interp}(f(x_1, u_j), [x_1, \dots, x_N], [K_k[x_1], \dots, K_k[x_N]])\} \\ &\rightarrow u^*(x_i, \kappa). \end{aligned}$$

Wenn  $x_i$  im Schritt  $\kappa$  mit  $i = 1, \dots, N$  und  $\kappa = k-1, \dots, 0$  betrachtet wird, folgt

$$\begin{aligned} V(x_i, \kappa) &= \min_{j=1, \dots, N} \{c(x_i, u_j) \\ &\quad + \text{interp}(f(x_i, u_j), [x_1, \dots, x_N], [V(x_1, \kappa+1), \dots, V(x_N, \kappa+1)])\} \\ &\rightarrow u^*(x_i, \kappa). \end{aligned}$$

*Beispiel 3.3.* Der Prozess ist beschrieben durch

$$x[\kappa + 1] = \frac{1}{2} (x[\kappa] + u[\kappa]) \tag{3.11}$$

mit der Anfangsbedingung  $x[0] = 4$  und dem zeithorizont  $k = 3$ . Die Steuergrößenbe-

**Tabelle 3.1:** Berechnung der diskretisierten Restkosten  $V(x_i, \kappa)$ 

$i \backslash \kappa$	0	...	$k-1$	$k$
1	$V(x_1, k-1)$			$K_k(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
$N$	$V(x_N, k-1)$			$K_k(x_N)$

**Tabelle 3.2:** Berechnung der diskretisierten optimalen Steuerfolge  $u^*(x_i, \kappa)$ 

$i \backslash \kappa$	0	...	$k-1$
1	$u^*(x_1, k-1)$		
$\vdots$	$\vdots$		
$N$	$u^*(x_N, k-1)$		

schränkungen sind gegeben mit  $-1 \leq u[\kappa] \leq 1$  für  $\kappa = 0, 1, 2$ . Das Kostenfunktional ist gegeben mit

$$K(x[0]; u[0], u[1], u[2]) = \sum_{\kappa=0}^2 (x[\kappa]^2 + u[\kappa]^2) + x[3]^2. \quad (3.12)$$

**Skript 3.1:** Numerische Algorithmus der DP am Beispiel 3.2

```
import numpy as np

# Rueckwaertsrechnung
x0 = 4
K = 3
uGitter = np.arange(-1, 1.1, 0.1)
xGitter = np.arange(0, 4.1, 0.1)
nu = len(uGitter)
nx = len(xGitter)

V = np.zeros([nx, K+1])
V[:, K] = xGitter**2
U = np.zeros([nx, K])

for k in np.arange(K, 0, -1)-1:
    for i in range(nx):
        Kosten = np.array([])
        for j in range(nu):
```

```

        xFolge = (xGitter[i] + uGitter[j])/2
        tKosten = xGitter[i]**2 + uGitter[j]**2 + \
            np.interp(xFolge,
                      xGitter,
                      V[:, k+1],
                      np.inf,
                      np.inf)
        Kosten = np.append(Kosten, tKosten)
    minval = np.min(Kosten)
    minind = np.argmin(Kosten)
    V[i][k] = minval
    U[i][k] = uGitter[minind]

# Vorwaertsrechnung
x = np.array([x0])
u = np.array([])
for k in range(K):
    u = np.append(u, np.interp(x[k], xGitter, U[:, k]))
    x = np.append(x, (x[k] + u[k])/2.0)

print u
print x

```

Im Skript 3.1 entspricht  $K \hat{=} k$ ,  $nx \hat{=} N$ ,  $nu \hat{=} M$  und  $k \hat{=} \kappa$  und dieser liefert die (im Rahmen der Diskretisierung) optimale Steuerfolge

$$u = [u_0, u_1, u_2] = [-1.00, -0.30, -0.10]$$

und Zustandstrajektorie

$$x = [x_0, x_1, x_2, x_3] = [4.00, 1.50, 0.60, 0.25].$$

◇

Der Rechenaufwand des Algorithmus beträgt

- $k \cdot M \cdot N$  - Berechnungen von  $c(x, u) + V(f(x, u), \kappa + 1)$  für die DP,
  - $k \cdot M^k$  - Berechnungen von  $c(x, u)$  und  $f(x, u)$
  - $M^k$  - Berechnungen von  $K_k(x)$
- } für vollständige Enumeration  
bei geg.  $x[0]$

Minimierungsfunktion ist parallelisierbar.

## 3.2 Das zeitdiskrete linear-quadratischer Regler-Problem

Der Prozess wird beschrieben durch

$$x[\kappa + 1] = Ax[\kappa] + Bu[\kappa] \quad (3.13)$$

mit gegebenen Anfangszustand  $x[0]$ .

Das Kostenfunktional ist gegeben mit

$$K(x[0]; u[0], \dots, u[k-1]) = \sum_{\kappa=0}^{k-1} c(x[\kappa], u[\kappa]) + K_k(x[\kappa]) \quad (3.14)$$

wobei  $c(x, u) := x^T R x + u^T Q u$  und  $K_k(x) := x^T X_k x$  ist und  $R \geq 0$ ,  $Q > 0$  und  $X_k \geq 0$  gilt.

Das LQR-Problem wird ausgedrückt durch

$$\min_{u[0], \dots, u[k-1]} K(x[0]; u[0], \dots, u[k-1]). \quad (3.15)$$

**Satz 7.** *Hilfssatz über quadratische Formen Seien  $R$ ,  $Q$  symmetrische Matrizen und  $Q > 0$ , dann gilt*

$$\min_u \left\{ \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & S^T \\ S & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\} = x^T (R - S^T Q^{-1} S) x \quad (3.16)$$

und das Minimum wird angenommen für  $u = -Q^{-1} S x$ .

*Beweis.* Es gilt

$$x^T R x + x^T S u + u^T S x + u^T Q u \quad (3.17)$$

$$= x^T (R - S^T Q^{-1} S) x + \underbrace{(u^T + x^T S^T Q^{-1}) Q (u + Q^{-1} S x)}_{=: y} \quad (3.18)$$

$$\geq x^T (R - S^T Q^{-1} S) x, \quad (3.19)$$

da  $y^T Q y \geq 0 \forall y$  ( $Q^{-1}$  existiert, da  $Q > 0$  und positiv definit). Für  $u = -Q^{-1} S x$  gilt „=“.  $\square$

**Satz 8.** *Das LQR-Problem wird gelöst durch  $u^*[\kappa] = F_\kappa x[\kappa]$  mit der zeitvarianten Rückführung*

$$F_\kappa = - (Q + B^T X_{\kappa+1} B)^{-1} B^T X_{\kappa+1} A$$



und der Riccatischen Rückwärts-Differentialgleichung

$$X_\kappa = R + A^T X_{\kappa+1} A - A^T X_{\kappa+1} B (Q + B^T X_{\kappa+1} B)^{-1} B^T X_{\kappa+1} A \quad (3.20)$$

mit  $\kappa = k-1, k-2, \dots, 0$ .

*Beweis.* Es gilt  $V(x, k) = x^T X_k x$ . Mit der Gleichung der DP und Satz 7 folgt für  $\kappa = k$

$$\begin{aligned} V(x, \kappa-1) &= \min_u \{c(x, u) + V(f(x, u), \kappa)\} \\ &= \min_u \{x^T R x + u^T Q u + V(Ax + Bu, \kappa)\} \\ &= \min_u \underbrace{\{x^T R x + u^T Q u + (Ax + Bu)^T X_\kappa (Ax + Bu)\}}_{\geq 0} \\ &= \min_u \left\{ \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R + A^T X_\kappa A & A^T X_\kappa B \\ B^T X_\kappa A & Q + B^T X_\kappa B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\} \\ &= x^T \underbrace{\left( R + A^T X_\kappa A - A^T X_\kappa B (Q + B^T X_\kappa B)^{-1} B^T X_\kappa A \right)}_{X_{\kappa+1}} x \\ &= x^T X_{\kappa+1} x \geq 0, \end{aligned}$$

weil gilt

$$\underbrace{y^T (Q + B^T X_\kappa B) y}_{>0 \ \forall y \neq 0} = \underbrace{y^T Q y}_{>0} + \underbrace{y^T B^T X_\kappa B y}_{\substack{=z^T \\ \geq 0}} \underbrace{y}_{=z}$$

und die Minimierung wird angenommen für  $u = - \underbrace{(Q + B^T X_\kappa B)^{-1} B^T X_\kappa A x}_{=F_{\kappa-1}}$  also

$u^*[\kappa-1] = F_{\kappa-1} x[\kappa-1]$ . Weiter gilt  $X_{\kappa-1} \geq 0$  (positiv semidefinit).

Analog gilt die Durchführung für  $\kappa = k-1, \dots, 1$ .

Im Kern des Beweises ist die Nutzung der Gleichung der DP anwendbar.  $\square$

*Bemerkung 3.3.*

- $u^*[\kappa] = F_\kappa x[\kappa]$  kann als zeitvariante lineare Zustandsrückführung interpretiert werden.
- Eine analoge Herleitung für zeitvariante Prozess

$$x[\kappa+1] = A_\kappa x[\kappa] + B_\kappa u[\kappa]$$

und zeitvariante Gewichtungen  $R_\kappa$  und  $Q_\kappa$  ist möglich.



Es ist eine Übung unter Das zeitdiskrete LQR-Problem  im Anhang zu finden.

### 3.2.1 Übergang zu unendlichem Zeithorizont

Das Kostenfunktional ist gegeben mit

$$K(x[0]; u[0], u[1], \dots) := \sum_{\kappa=0}^{\infty} c(x[\kappa], u[\kappa]), \quad (3.21)$$

wobei  $c(x, u) := x^T R x + u^T Q u$  ist und  $R \geq 0$  und  $Q > 0$  gilt.

Das LQR-Problem wird ausgedrückt durch

$$\min_{\{u[\kappa] | \kappa=0,1,\dots\}} K(x[0]; u[0], u[1], \dots).$$

Man kann zeigen, dass falls  $(A, B)$  stabilisierbar ist, die Folge der Lösungen der

**Abbildung 3.3:** Interpretation des Lösungszuganges beim Übergang zum unendlichen Zeithorizont

Riccatischen Rückwärts-Differentialgleichung  $X_\kappa$  für  $\kappa = k-1, k-2, \dots$  gegen ein  $X \geq 0$  konvergiert und somit die diskrete algebraische Riccati-Gleichung (DARE)

$$X = R + A^T X A - A^T X B (Q + B^T X B)^{-1} B^T X A$$

erfüllt ist.

**Satz 9.** Sei  $(A, B)$  stabilisierbar und  $R = \bar{R}^T \bar{R}$ ,  $(A, \bar{R})$  ermittelbar. Dann existiert eine eindeutige, positive semidefinite Lösung  $X$  der DARE. Weiter ist die Rückkoppelung  $u[\kappa] = F x[\kappa]$  mit  $F := (Q + B^T X B)^{-1} B^T X A$ , stabilisierend, d.h.  $A + B F$  ist stabil, und führt zum minimalen Wert des Kostenfunktionals.

Der Beweis dieses Satzes ist in [?] nachzulesen.

*Bemerkung 3.4.*

- Bei Übergang zu endlichem Zeithorizont gilt für  $\kappa \rightarrow -\infty$  :  $X_\kappa \rightarrow X$  und  $F_\kappa \rightarrow F$ , also ergibt sich eine zeitinvariante Zustandsrückführung.
- Die Bestimmung von  $X$  erfolgt rekursiv mittels der Riccatischen Rückwärts-Differentialgleichung oder besser durch numerische Lösung der DARE.
- „ $(A, \bar{R})$  ermittelbar“ kann derart interpretiert werden, dass alle instabilen Eigenbewegungen im Term  $x^T R x$  mit positiver Geschwindigkeit erfallst werden müssen.

Die Bestimmung eines  $\bar{R}$  kann durch **SVD!** (SVD!)  $R = V \Sigma V^T$ ,  $\bar{R} := \Sigma^{1/2} V^T$  erfolgen.



### 3.3 Zeitkontinuierliche Optimalsteuerung bei endlichen Zeithorizont

Der Prozess wird beschrieben durch

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (3.22)$$

mit  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $t \in [0, T]$  und gegebenen Anfangszustand  $x(0)$ .

Die Kostenfunktion ist gegeben mit

$$K(x(0), u) = \int_0^T c(x, u, t) dt + K_T(x(T)). \quad (3.23)$$

Die Aufgabe besteht darin, eine Steuerung  $u^*$  zu finden, so dass  $K(x(0), u^*)$  minimal wird.

#### 3.3.1 Lösungsprinzip

Es wird die kontinuierliche Zeit  $t$  diskretisiert, so dass  $t = \kappa \cdot h$ , mit der Schrittweite  $h$ ,  $h > 0$ , gilt. Damit erfolgt die Approximation durch ein zeitdiskretes Problem. Die

**Abbildung 3.4:** Lösungsprinzip der zeitkontinuierlichen Optimalsteuerung bei endlichem Zeithorizont

Anwendung der Gleichung der DP

$$V(x, \kappa) = \min_u \left( c^D(x, u, \kappa) + V(f^D(x, u, \kappa), \kappa + 1) \right) \quad (3.24)$$

und der Grenzübergang von  $h \rightarrow +0$  liefert in kontinuierlicher Zeit ein Analogon zur Gleichung der DP.

### 3.3.2 Lösung

In die Gleichung der DP setzt man  $V(x, \kappa) := \min_{u(\cdot)|_{[t, T]}} \int_t^T c(x, u, \tau) d\tau + K_T(x(T))$ ,

$$V(f^D(x, u, \kappa), \kappa + 1) := V(x(t+h), t+h) \text{ und } c^D(x, u, \kappa) := \int_t^{t+h} c(x, u, \tau) d\tau.$$

*Bemerkung 3.5.* Differentiation nach variabler oberer Grenze  $\frac{d}{dy} \int_a^y f(t) dt = f(y)$ . Also

für  $g := y \mapsto \int_t^y c(x, u, \tau) d\tau$  gilt  $g' = y \mapsto c(x, u, y)$  und  $g'(t) = c(x, u, t)$ .

Es wird definiert  $r(x) = o(\gamma(x))$  für  $x \rightarrow a : \Leftrightarrow \frac{r(x)}{\gamma(x)} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow a$  was für den hier betrachteten Fall zu  $r(h) = o(h)$  für  $h \rightarrow 0 : \Leftrightarrow \frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  führt.  $\blacklozenge$

Für die in  $[t, t+h]$  auflaufenden Kosten gilt

$$\underbrace{\int_t^{t+h} c(x, u, \tau) d\tau}_{=g(t+h)} = \underbrace{\int_t^t c(x, u, \tau) d\tau}_{=0} + c(x, u, t) \cdot h + o(h) \quad (3.25)$$

$$g(t+h) = g(t) + g'(t) \cdot h + o(h) \quad (3.26)$$

und für die minimalen Restkosten zum Zeitpunkt  $t+h$  gilt

$$V(x(t+h), t+h) = V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) \cdot h + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \cdot h + o(h). \quad (3.27)$$

Also gilt

$$V(x, t) = \min_u \left( c(x, u, t) \cdot h + V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) \cdot h + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \cdot h + o(h) \right). \quad (3.28)$$

Die Subtraktion von  $V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \cdot h$  und die Division durch  $h$  liefert

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \min_u \left( c(x, u, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) + \frac{o(h)}{h} \right). \quad (3.29)$$

Für  $h \rightarrow +0$  ergibt sich die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)-Gleichung

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \min_u \left( c(x, u, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) \right).$$

und es gilt  $V(x, T) = K_T(x)$ .

Somit ist die HJB-Gleichung für  $t \in [0, T]$  unter der Randbedingung  $V(x, T) = K_T(x)$  zu lösen. Die Minimalkosten sind  $V(x(0), 0)$  und eine optimale Zustandsrückführung

ergibt sich aus

$$u(x, t) = \arg \min_u \left( c(x, u, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) \right). \quad (3.30)$$

*Bemerkung 3.6.* Es gilt

$$\left\{ \begin{array}{ll} y^* := \min_x f(x) & : \text{Min. von } f \\ x^* := \arg \min_x f(x) & : \text{Min.-stelle von } f \end{array} \right\} : \Leftrightarrow f(x^*) = y^* \leq f(x) \forall x.$$



## 3.4 Das zeitkontinuierliche linear-quadratische Regler-Problem

Der Prozess wird beschrieben durch

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (3.31)$$

mit dem gegebenen Anfangszustand  $x(0)$ . Die Systemmatrizen  $A(t)$  und  $B(t)$  sind stetig bezüglich der Zeit  $t$ .

Das Kostenfunktional ist gegeben mit

$$K(x(0), u) := \int_0^T x^T R(t)x + u^T Q(t)u dt + x(T)^T X_T x(T), \quad (3.32)$$

wobei  $R(t)$  und  $Q(t)$  stetig bezüglich der Zeit  $t$  sind und  $R(t) \geq 0$ ,  $Q(t) > 0 \forall t \in [0, T]$ ,  $X_T \geq 0$  gilt.

Das LQR-Problem stellt sich wie folgt dar:

Finde die Rückführung  $F(t)$  so, dass für  $u^*(t) := F(t)x(t) : K(x(0), u^*)$  minimal wird.

**Satz 10.** Das LQR-Problem wird gelöst durch die optimale Steuergröße

$$u^*(t) = F(t)x(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.33)$$

mit der Rückführung  $F(t) = -Q^{-1}(t)B^T(t)X(t)$  und der Riccatischen Differentialgleichung

$$-\dot{X} = R(t) + XA(t) + A^T(t)X - XB(t)Q^{-1}(t)B^T(t)X \quad (3.34a)$$

mit der Endbedingung

$$X(T) = X_T. \quad (3.34b)$$

Dabei gilt  $V(x(0), 0) = x^T(0)X(0)x(0)$ .

*Bemerkung 3.7.* (3.34) ist mathematisch eine Anfangswertaufgabe (Substitution  $\tau := T - t$ ), somit ist die Lösung  $X$  eindeutig. Mit  $X$  ist auch  $X^T$  eine Lösung von (3.34). Also gilt  $X = X^T$ .  $\blacklozenge$

*Beweis.* (a) Es muss gezeigt werden, dass  $V(x(t), t) = x^T(t)X(t)x(t)$  gilt.

Linke Seite der HJB-Gleichung: Es ist  $-\frac{\partial V}{\partial t} = -x^T \dot{X} x$ . Rechte Seite der HJB-Gleichung: Mit  $\frac{\partial V}{\partial x} = 2x^T X$  gilt

$$\begin{aligned} & \min_u (x^T R x + u^T Q u + (x^T X + x^T X) (A x + B u)) \\ &= \min_u (x^T (R + X A + A^T X) x + x^T X B u + u^T B^T X x + u^T Q u) \\ &= \min_u \left( \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R + X A + A^T X & X B \\ B^T X & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right) \\ &= x^T (R + X A + A^T X - X B Q^{-1} B^T X) x. \quad (3.35) \end{aligned}$$

(b) Das Minimum (3.35) wird angenommen für  $u = \underbrace{-Q^{-1} B^T X}_{=: F} x$ , also  $u^*(t) = F(t)x(t)$ .

□

#### 3.4.1 Übergang zu unendlichem Zeithorizont

Der Prozess wird beschrieben durch

$$\dot{x} = A x + B u \quad (3.36)$$

mit gegebenen Anfangszustand  $x(0)$ .

Das Kostenfunktional wird angegeben mit

$$K(x(0), u) := \int_0^\infty x^T R x + u^T Q u dt, \quad (3.37)$$

wobei  $R \geq 0$  und  $Q > 0$  gilt.

Das LQR-Problem stellt sich wie folgt dar:

Finde die Rückführung  $F$  so, dass für  $u^*(t) := Fx(t) : K(x(0), u^*)$  minimal wird.

**Satz 11.** Sei  $(A, B)$  stabilisierbar und  $R = \bar{R}^T \bar{R}$ ,  $(A, \bar{R})$  ermittelbar.

Dann existiert eine eindeutige positive semidefinite Lösung  $X$  der algebraische Riccati-Gleichung (ARE)

$$0 = R + XA + A^T X - XBQ^{-1}B^T X.$$

Weiter ist die Rückkopplung  $u^*(t) = Fx(t)$  mit  $F := -Q^{-1}B^T X$ , stabilisierend und führt zum minimalen Wert des Kostenfunktional.

## 3.5 Beispiel der räumlichen Führung (PN)

### 3.5.1 Modellbildung

**Abbildung 3.5:** Geometrie des Problems der räumlichen Führung

Die Geometrie des Problems der räumlichen Führung soll vereinfachend in der Ebene betrachtet werden (siehe Abb. 3.5). In  $(r, \sigma)$ -Koordinaten wird es beschrieben durch

$$\begin{aligned} r\dot{\sigma} &= v_1 \sin(\varphi - \sigma) - v_2 \sin(\gamma - \sigma) \\ \dot{r} &= v_1 \cos(\varphi - \sigma) - v_2 \cos(\gamma - \sigma) \end{aligned} \quad (3.38)$$

und in  $(x, y)$ -Koordinaten durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= v_2 \cos \gamma & \dot{x}_1 &= v_1 \cos \varphi \\ \dot{y}_2 &= v_2 \sin \gamma & \dot{y}_1 &= v_1 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Gegeben sind der Gierwinkel  $\varphi(t)$ , die Geschwindigkeiten  $v_1(t)$  und  $v_2(t)$  sowie die Anfangswerte  $x_1(0)$ ,  $y_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $y_2(0)$ . Es gelte  $v_1(t) < v_2(t)$ . Mit

$$\sigma = \begin{cases} \arcsin \frac{y_1 - y_2}{r} & \text{für } x_1 \geq x_2 \\ \pi - \arcsin \frac{y_1 - y_2}{r} & \text{für } x_1 < x_2 \end{cases} \quad (3.40)$$

und

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (3.41)$$

werden die Anfangswerte  $r(0)$  und  $\sigma(0)$  für (3.38) berechnet (zum Wertebereich von  $\sigma$  siehe Abb. 3.6). Die Funktion  $\gamma(t)$  dient als Steuerfunktion. Im Falle der sogenannten Proportionalnavigation wird das Regelgesetz

$$\dot{\gamma} = a\dot{\sigma} \quad (3.42)$$

verwendet, wobei für die Proportionalverstärkung  $a \geq 1$  gilt.

Das Annäherungsverhalten kann mit (3.38) zusammen mit (3.42) simuliert werden (ergibt drei Zustandsvariablen). Soll die Flugbahn in die Kartenebene gezeichnet werden, so wird man für die Simulation (3.39) zusammen mit (3.42) (ergibt fünf Zustandsvariablen), wobei die erforderliche Messgröße  $\dot{\sigma}$  entweder aus (3.38) (weitere zwei Zustandsvariablen) oder ohne Vergrößerung der Anzahl der Zustandsvariablen wie folgt berechnet wird. Mit

$$\zeta := \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}, \quad \zeta_0 := \frac{\zeta}{\|\zeta\|_2}, \quad \alpha_1 := \zeta_0^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 := \zeta_0^T \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

und wegen  $\alpha_1 = v_1 \sin(\varphi - \sigma)$ ,  $\alpha_2 = v_2 \sin(\gamma - \sigma)$  (siehe Abb. 3.7),  $r = \|\zeta\|_2$  und (3.38) erhält man

$$\dot{\sigma} = \frac{\zeta_0^T \left( \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \right)}{\|\zeta\|_2}. \quad (3.44)$$

**Abbildung 3.6:**  $\sigma$ -Wertebereich für  $x_2 = y_2 = 0$  und  $(x_1, y_1)$  auf dem Kreis  $\mathcal{K}$

*Bemerkung 3.8.* Die Berechnung der Ableitung erfolgt in (3.44) ohne die Verwendung von Winkelfunktionen. Alternativ kann  $\dot{\sigma}$  auch über  $r\dot{\sigma} = v_1 \sin(\varphi - \sigma) - v_2 \sin(\gamma - \sigma)$  bestimmt werden. Das dafür nötige  $\sigma$  wird mittels (3.40) bestimmt. Das dabei nur die Einschränkung der Sinus-Funktion auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$  betrachtet wird und damit bei einer kontinuierlichen Bewegung des Körpers 2 auf einer Kreisbahn um den Körper 1 bei  $\sigma = -\frac{\pi}{2}$  ein Sprung der Höhe  $2\pi$  auftritt (Abb. 3.6), ist unproblematisch, da dieser Sprung durch die Periodizität der Sinusfunktion nicht in den Funktionswerten  $\sin(\varphi - \sigma)$  und  $\sin(\gamma - \sigma)$  erscheint.  $\blacklozenge$

**Abbildung 3.7:** Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren

### 3.5.2 Parallele Annäherung als Spezialfall der PN

Für die nachfolgenden Betrachtungen wird angenommen, dass  $\varphi$ ,  $v_1$  und  $v_2$  konstante Größen sind. Dann stellt sich für  $a \rightarrow +\infty$  in (3.42) im Regelkreis der mit dem Index  $o$  bezeichnete Arbeitspunkt  $\dot{\sigma}_o = 0$  ein (siehe Abb. 3.8).



Aus der ersten Gleichung in (3.38) folgt dann

$$\gamma_o = \sigma_o + \arcsin \frac{v_1 \sin(\varphi - \sigma_o)}{v_2}, \quad (3.45)$$

also insbesondere  $\dot{\gamma}_o = 0$ , und die zweite Gleichung liefert die konstante Annäherungsgeschwindigkeit  $\dot{r}_o < 0$ . Für die Herleitung der Gleichungen für den Lenkregelkreis reicht es aus, die erste Gleichung in (3.38) zu betrachten. Wir betrachten kleine Abweichungen  $\Delta r$ ,  $\Delta \sigma$ ,  $\Delta \dot{\sigma}$ ,  $\Delta \gamma$  vom Arbeitspunkt. Die Linearisierung von (3.38) erfolgt durch Bilden des vollständigen Differentials für beide Seiten am Arbeitspunkt

$$r_o \cdot \Delta \dot{\sigma} + \dot{\sigma}_o \cdot \Delta r = -v_2 \cos(\gamma_o - \sigma_o) \cdot \Delta \gamma - (v_1 \cos(\varphi - \sigma_o) - v_2 \cos(\gamma_o - \sigma_o)) \cdot \Delta \sigma. \quad (3.46)$$

Bei Berücksichtigung von  $\dot{\sigma}_o = 0$  und Vergleich der Koeffizienten von  $\Delta \sigma$  mit der

### Abbildung 3.8: Methode der parallelen Annäherung

zweiten Gleichung in (3.38) erhält man

$$r_o \cdot \Delta \dot{\sigma} + \dot{r}_o \cdot \Delta \sigma = -v_2 \cos(\gamma_o - \sigma_o) \cdot \Delta \gamma. \quad (3.47)$$

Die Division durch  $|\dot{r}_o|$  liefert mit der Restlaufzeit  $T_f(t) := \frac{r_o}{|\dot{r}_o|} = \frac{r(0)}{|\dot{r}_o|} - t = t_f - t$  bis zum Endzeitpunkt  $t_f$  und der Verfolgergeschwindigkeit  $\beta_2 := v_2 \cos(\gamma_o - \sigma_o) \in (0, v_2]$  entlang der Sichtlinie die lineare und wegen des Koeffizienten  $T_f(t)$  zeitvariante Differentialgleichung erster Ordnung

$$T_f \cdot \Delta \dot{\sigma} - \Delta \sigma = -\beta_2 \cdot \Delta \gamma. \quad (3.48)$$

Durch Differentiation der Gleichung erhalten wir eine Differentialgleichung für  $\Delta \dot{\sigma}_o$

$$T_f \cdot \Delta \ddot{\sigma} + \dot{T}_f \cdot \Delta \dot{\sigma} - \Delta \dot{\sigma} = -\beta_2 \cdot \Delta \dot{\gamma}, \quad (3.49)$$

woraus wegen  $\dot{T}_f = -1$

$$T_f \cdot \Delta \ddot{\sigma} - 2 \cdot \Delta \dot{\sigma} = -\beta_2 \cdot \Delta \dot{\gamma} \quad (3.50)$$

folgt. Wir schreiben kürzer für Zustandsvariable  $x := \Delta \dot{\sigma}$  und für die Steuergröße  $u := \Delta \dot{\gamma}$  und erhalten die Lösung der Differentialgleichung im Intervall  $[t_0, t] \subset [0, t_f]$

$$x(t) = \frac{\beta_2 \int_{t_0}^t (\tau - t_f) u(\tau) d\tau + (t_0 - t_f)^2 x(t_0)}{(t - t_f)^2}. \quad (3.51)$$

Für die stückweise konstante Steuerfunktion  $u(t) = \text{const.}$  für  $t \in [t_k, t_{k+1})$  erhält man mit den Bezeichnungen  $u[k] := u(t_k)$  und  $x[k] := x(t_k)$  die zeitdiskrete Prozessbeschrei-

bung

$$x[k+1] = \underbrace{\frac{(t_k - t_f)^2}{(t_{k+1} - t_f)^2}}_{A_k} x[k] + \underbrace{\frac{\beta_2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\tau - t_f) d\tau}{(t_{k+1} - t_f)^2}}_{B_k} u[k]. \quad (3.52)$$

**Tabelle 3.3:** Parameter des zeitvarianten Systems und LQR-Regler aus Beispiel 3.4

k	$A_k$	$B_k$	$F_k$
0	1.1688	-0.0422	5.7838
1	1.1843	-0.0461	5.7668
2	1.2030	-0.0507	5.7470
3	1.2258	-0.0564	5.7235
4	1.2545	-0.0636	5.6953
5	1.2914	-0.0728	5.6606
6	1.3409	-0.0852	5.6170
7	1.4104	-0.1026	5.5605
8	1.5151	-0.1288	5.4845
9	1.6906	-0.1726	5.3765
10	2.0421	-0.2605	5.2107
11	3.0673	-0.5168	4.9214
12	16.1787	-3.7942	4.2611

*Beispiel 3.4.* Aus den Anfangswerten

$$x_1(t_0) = 10, \quad y_1(t_0) = 0.33, \quad x_2(t_0) = 0, \quad y_2(t_0) = 0$$

und den als zeitlich konstant angenommenen Größen

$$v_1(t) = 0.2, \quad v_2(t) = 0.5, \quad \phi(t) = -\pi \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (3.53)$$

erhält man für die Methode der parallelen Annäherung die Anfangswerte

$$\gamma(0) = 0.049, \quad \sigma(0) = 0.033, \quad t_f = 13.33. \quad (3.54)$$

Betrachtet man das resultierende System (3.52) auf den Zeitintervallen  $[t_k, t_{k+1}]$  ( $k = 0, 1, \dots, 12$ ), so ergeben sich die in Tab. 3.3 dargestellten Werte für  $A_k$  und  $B_k$ . Für dieses System wird ein zeitvarianter LQR-Regler  $F_k$  nach Satz ? berechnet, wobei für die Gewichtungsmatrizen  $R = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $X_{12} = 100$  gesetzt wird, d.h. neben den Steuergrößen soll allein die Abweichung des Zustandes im Endzeitpunkt vom Sollwert 0 minimiert werden. Für eine Anfangsabweichung  $x[0] = \Delta\sigma[0] = 0.05$  vom Sollwert zeigt Abb. 3.9 den mit  $x_{LQR}[k]$  bezeichneten Verlauf der Zustandsgröße für den LQR-Regler im Vergleich zu den mit  $x_{PN}$  bezeichneten Verlauf für den Fall, dass die Steuergröße mit


einem zeitlich konstanten Regler berechnet wird, wobei hier konkret der LQR-Regler zum Zeitpunkt  $k = 10$  eingesetzt wird, d.h. es gilt

$$u_{PN}[k] = F_{10} \cdot x_{PN}[k]. \quad (3.55)$$

In Abb. 3.10 sind die zugehörigen Verläufe der Steuergröße dargestellt. Man erkennt, dass der zeitvariante LQR-Regler die Zustandsgröße im Endzeitpunkt  $k = 13$  nahe an den Zielzustand 0 bringt, während der zeitlich konstante Regler  $F_{10}$  gegenüber dem LQR-Regler anfangs eine „zu kleine“ und am Ende des Zeithorizontes eine „zu große“ Verstärkung aufweist.  $\diamond$

**Abbildung 3.9:** Verlauf der Regelgröße für das Beispiel 3.4

**Abbildung 3.10:** Verlauf der Steuergröße für das Beispiel 3.4

Es sind zwei Übungen unter Beispiel der räumlichen Führung  im Anhang zu finden.



## 4.1 Einleitung

Die im Abschnitt 3.3 beschriebene Vorgehensweise zur Lösung eines Optimalsteuerproblems auf Basis der Dynamischen Programmierung ist selbst für lineare Prozesse mit quadratischem Kostenfunktional mit einem hohen Aufwand verbunden, wenn Beschränkungen im Steuer- und Zustandsraum auftreten (was die Anwendung des LQR-Entwurfes verhindert) und dabei der Zustands- und Stellerraum keine geringe Dimension aufweisen oder der Optimeierungshorizont nicht klein ist. Bei der numerischen Lösung stellt die Vorwärtsrechnung dann durch die Fallunterscheidungen hohe Anforderungen an die Rechenleistung und die erforderliche Speicherung der berechneten Zustandsrückführungen  $u_{\kappa}^*$  wird bei einer ausreichend feinen Diskretisierung des Zustandsraumes im Allgemeinen einen hohen Speicherplatzbedarf verursachen.

Eine Alternative zu dieser Vorgehensweise ist die Berechnung der optimalen Steuergrößen  $u^*[0], u^*[1], \dots, u^*[k-1]$  durch eine Lösung des Optimierungsproblems ? für den gegebenen Anfangszustand  $x[0]$  durch numerische Optimierung in Echtzeit. Da hierbei zum Zeitpunkt  $\kappa = 0$  eine Steuerfolge  $u[\kappa]$  für den gesamten Horizont  $\kappa = 0, 1, \dots, k-1$  berechnet wird, tritt anders als bei den Zustandsrückführungen  $u_{\kappa}^*$  keine Rückkopplung des tatsächlich erreichten Prozesszustandes mehr auf. Praktisch wird dann, z.B. aufgrund von Modellunbestimmtheiten oder einwirkenden Störgrößen, eine Abweichung der erreichten Zustände von der bei der Optimeierung berechneten optimalen Zustandstrajektorie auftreten. Man wird deshalb die Lösung des Optimierungsproblems ? in jedem Zeitschritt mit dem aktuellen Prozesszustand als Anfangszustand wiederholen und somit eine Rückführung, also eine Regelung, erreichen. Dieser Lösungszugang ist unter der Bezeichnung MPR bekannt und soll im Weiteren einführend für lineare Mehrgrößenprozesse mit Beschränkungen im Steuer- und Zustandsraum dargestellt werden.

## 4.2 Formulierung der Regelungsaufgabe

### 4.2.1 Grundprinzip der prädiktiven Regelung und Begriffe

Gegeben sei der lineare zeitinvariante Prozess

$$\begin{aligned} x[\kappa + 1] &= Ax[\kappa] + Bu[\kappa] \\ y[\kappa] &= Cx[\kappa] \end{aligned} \quad (4.1)$$

in diskreter Zeit. Mit  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$  werden die diskreten Zeitpunkte bezeichnet und  $k$  bezeichnet den *aktuellen Zeitpunkt*. Die Steuergrößen  $u[\kappa]$  seien für  $\kappa < k$  und die Prozessausgänge  $y[\kappa]$  für  $\kappa \leq k$  bekannt. Die Aufgabe besteht in der Bestimmung der aktuellen Steuergröße  $u[k]$ . Dazu bezeichne

$$y_f[k + i|k] := CA^i x[k] \quad (i \geq 0) \quad (4.2)$$

die freie Bewegung des Prozessausganges ab dem Zeitpunkt  $k$  und

$$\hat{y}[k + i|k] := CA^i x[k] + C \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j-1} B \hat{u}[k + j|k] \quad (i = 1, 2, \dots, H_p) \quad (4.3)$$

die *Prädiktion des Prozessausganges* über dem *Prädiktionshorizont* der Länge  $H_p$ .

*Beispiel 4.1* (Prädiktionshorizont  $H_p = 2$ ).

$$\begin{aligned} x[k + 2] &= Ax[k + 1] + Bu[k + 1] \\ &= A^2 x[k] + ABu[k] + Bu[k + 1] \\ y[k + 2] &= CA^2 x[k] + \underbrace{C(ABu[k] + Bu[k + 1])}_{C \sum_{j=0}^1 A^{1-j} Bu[k+j]} \end{aligned}$$

◇

Weiter wird der *Steuerhorizont* der Länge  $H_u$  definiert, es gelte  $H_p \geq H_u \geq 1$  und die Steuergröße verändere sich ab dem Zeitpunkt  $k + H_u$  nicht mehr<sup>1</sup>, d.h. es sei

$$\hat{u}[k + j|k] = \hat{u}[k + H_u - 1|k] \quad (H_u \leq j \leq H_p - 1). \quad (4.4)$$

In Abb. 4.1 sind die bekannten Verläufe des Prozessausganges und der Steuergröße bis

**Abbildung 4.1:** Grundprinzip der prädiktiven Regelung

---

1 Die Bedingung  $H_p \geq H_u$  sichert, dass die Auswirkungen eines Steuereingriffs auf den Prozessausgang über einen ausreichend großen Horizont  $H_p - H_u$  berücksichtigt werden. Praktisch gilt aus diesem Grund sogar oft  $H_p \gg H_u$ .

zum Zeitpunkt  $k$  zu sehen. Wenn ab dem Zeitpunkt  $k$  die Steuergrößen  $\hat{u}[k+i-1|k]$  ( $i = 1, 2, \dots, H_p$ ) auf den Prozess gegeben würden, so würde sich unter der Annahme eines Haltegliedes 0. Ordnung für die Steuergrößen gemäß (4.3) in den Abtastzeitpunkten der Prozessausgang  $\hat{y}[k+i|k]$  ergeben. Durch ein numerisches Optimeirungsverfahren wird eine Steuerfolge so bestimmt, dass vorgegebene Forderungen erfüllt werden. Beispielhaft für solche Forderungen sind in Abb. 4.1 konstante Schranken  $\underline{u}$  und  $\bar{u}$  für die Steuergröße

$$\underline{u} \leq \hat{u}[k+i-1|k] \leq \bar{u} \quad (4.5)$$

und eine konstante obere Schranke  $\bar{y}[k+i|k]$  und eine zeitabhängige untere Schranke  $\underline{y}[k+i|k]$  für den Prozessausgang

$$\underline{y}[k+i|k] \leq \hat{y}[k+i|k] \leq \bar{y}[k+i|k] \quad (4.6)$$

darstellt. Darüber hinaus ist eine *Sollwerttrajektorie*  $s[k]$  für den Prozessausgang eingezeichnet. Aus dieser Sollwerttrajektorie und dem Wert des Prozessausganges zum Zeitpunkt  $k$  wird die *Referenztrajektorie*  $r[k+i|k]$  abgeleitet, z.B. mit einer gegebenen Zeitkonstante  $T_c > 0$  in der Form

$$r[k+i|k] := s[k+i] - (s[k] - y[k])e^{-iT_c}, \quad (4.7)$$

und die Zielstellung verfolgt, den Abstand (mit einem noch zu definierendem Abstandsmaß) des Prozessausganges von der Referenztrajektorie zu minimieren<sup>1</sup>. Wenn eine optimale Steuerfolge  $u^*[k+i-1|k]$  ( $i = 0, 1, \dots, H_u - 1$ ) berechnet ist, so wird das erste Glied der optimalen Steuerfolge als Steuergröße im Schritt  $k$  ausgegeben. Im Schritt  $k+1$  wird dann die gesamte Prozedur wiederholt. Der Prädiktionshorizont, der wie auch der Steuerhorizont in seiner Länge unverändert bleibt, wird dabei mit dem aktuellen Zeitpunkt weitergeschoben. Man spricht von einem gleitenden Horizont. Insgesamt ergibt sich die folgende Vorgehensweise.

#### PRINZIPIELLER ALGORITHMUS DER MODELLPRÄDIKTIVEN REGELUNG

(S1) Minimiere über alle Steuerfolgen  $u[k+i|k]$  ( $i = 0, 1, \dots, H_u - 1$ ) ein Maß für

<sup>1</sup> Der Prozessausgang wird nicht (direkt) der Sollwerttrajektorie, sondern der Referenztrajektorie nachgeführt. Die Referenztrajektorie gibt an, wie ein von der Sollwerttrajektorie abweichender Prozessausgang wieder zur Sollwerttrajektorie zurückkehren soll. Die Verwendung der Referenztrajektorie anstelle der Sollwerttrajektorie zur Vorgabe des Verlaufes des Prozessausganges hat im Wesentlichen eine praktische Motivation: Da die Regelabweichung  $r[k+i|k] - \hat{y}[k+i|k]$  hinsichtlich des Betrages im Allgemeinen kleiner ist als  $s[k+i] - \hat{y}[k+i|k]$  kann man erwarten, dass bei den in der Praxis stets vorliegenden nichtlinearen Prozessen ein um die Referenztrajektorie linearisiertes Prozessmodell eine genauere Prozessbeschreibung darstellt, als ein Modell, dass durch eine Linearisierung um die Sollwerttrajektorie gewonnen wird.

den Abstand zwischen  $r[k + i|k]$  und  $\hat{y}[k + i|k]$  ( $i = 1, 2, \dots, H_p$ ) unter den Nebenbedingungen (4.5) und (4.6).

(S2) Setze für die Steuergröße  $u[k] := u^*[k|k]$ .

(S3) Warte einen Zeitschritt, setze  $k := k + 1$  und gehe zu (S1).

In [?] werden folgende Merkmale einer modellprädiktiven Regelung hervorgehoben.

- Vorhandensein eines expliziten Prozessmodells

Das Prozessmodell dient im Rahmen der Lösung des Optimierungsproblems im Schritt (S1) zur Bestimmung des für eine vorgegebene Steuerfolge  $u[k + i|k]$  ( $i = 0, 1, \dots, H_u - 1$ ) resultierenden Prozessausganges. Das Prozessmodell muss nicht notwendig ein parametrisches Modell sein, sondern kann z.B. auch durch eine Sprungantwort beschrieben sein.

- Optimierung in Echtzeit

Die optimale Steuerfolge, von der jeweils nur das erste Glied als Steuergröße an den Prozess auch tatsächlich ausgegeben wird, wird in jedem diskreten Zeitschritt durch ein numerisches Optimierungsverfahren in Echtzeit berechnet.

- Gleitender Optimierungshorizont

Im Gegensatz zur Vorgehensweise im Abschnitt ?, bei dem der aktuelle Zeitpunkt in jedem Schritt näher an den Endzeitpunkt heranrückt, gleiten hier der Steuer- und Prädiktionshorizont mit dem aktuellen Zeitpunkt weiter.

### 4.2.2 Prozessbeschreibung

Für die weiteren Darstellungen wird von den Steuergrößen  $u[\kappa]$  zu den Steuergrößendifferenzen

$$\Delta u[\kappa] := u[\kappa] - u[\kappa - 1] \quad (4.8)$$



übergegangen, womit sich eine Regelkreisstruktur wie in Abb. 4.2 ergibt<sup>1</sup>. Eine mögliche Zustandsraumdarstellung des MPR-Prozesses kann aus (4.1) mit

$$\xi[\kappa] := \begin{bmatrix} x[\kappa] \\ u[\kappa - 1] \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

in der Form („erweitertes Modell“)

$$\begin{aligned} \xi[\kappa + 1] &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \xi[\kappa] + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \Delta u[\kappa] \\ y[\kappa] &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \xi[\kappa] \end{aligned} \quad (4.10)$$

gewonnen werden. Stellt man nun die Gleichung für die Prädiktion des Zustandsvektors

**Abbildung 4.2:** Übergang von den Steuergrößen zu den Steuergrößendifferenzen

auf

$$\hat{x}[k + i|k] = A^i x[k] + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j-1} B \hat{u}[k + j|k] \quad (4.11)$$

und ersetzt die Steuergröße  $\hat{u}[k + j|k]$  durch die Steuergrößendifferenz

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u}[k|k] &= \hat{u}[k|k] - u[k - 1] \\ \Delta \hat{u}[k + i|k] &= \hat{u}[k + i|k] - \hat{u}[k + i - 1|k] \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, H_u - 1 \\ \Delta \hat{u}[k + i|k] &= 0 \quad \text{für } i = H_u - 1, \dots, H_p - 1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

---

<sup>1</sup> Dies hat in erster Linie praktische Gründe, denn da der MPR-Regler nur Steuergrößendifferenzen („Steuergrößenkorrekturen“) erarbeitet, kann z.B. ein stoßfreies Umschalten zwischen verschiedenen Reglern problemlos realisiert werden und auch eine Regelung um einen Arbeitspunkt (wie z.B. bei der Regelung nichtlinearer Prozesse) ist einfacher realisierbar ([?]).

so erhält man aus (4.1) die Darstellung des MPR-Prozesses

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{x}[k+1|k] \\ \vdots \\ \hat{x}[k+H_u|k] \\ \hat{x}[k+H_u+1|k] \\ \vdots \\ \hat{x}[k+H_p|k] \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A^{H_u} \\ A^{H_u+1} \\ \vdots \\ A^{H_p} \end{bmatrix}}_{\Psi} x[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B \end{bmatrix}}_{\Upsilon} u[k-1] \\
&+ \underbrace{\begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B & \dots & AB+B \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B & \dots & \sum_{i=0}^{H_p-H_u} A^i B \end{bmatrix}}_{\Theta} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\hat{u}[k|k] \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}[k+H_u-1|k] \end{bmatrix}}_{\Delta\mathcal{U}[k]}, \\
\begin{bmatrix} \hat{y}[k+1|k] \\ \vdots \\ \hat{y}[k+H_p|k] \end{bmatrix} [k] &= \begin{bmatrix} C & & \\ & \ddots & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}[k+1|k] \\ \vdots \\ \hat{x}[k+H_p|k] \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

die man mit

$$\mathcal{Y}[k] := \begin{bmatrix} \hat{y}[k+1|k] \\ \vdots \\ \hat{y}[k+H_p|k] \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathcal{U}[k] := \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}[k|k] \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}[k+H_u-1|k] \end{bmatrix}$$

und entsprechender Definition der Matrizen  $\Upsilon$ ,  $\Psi$  und  $\Theta$  kürzer in der Form

$$\mathcal{Y}[k] = \underbrace{\Psi x[k] + \Upsilon u[k-1]}_{\text{freie Bewegung}} + \Theta \Delta\mathcal{U}[k] \quad (4.13)$$

schreiben kann.

Mit der Gleichung (4.13) ist bei gegebenen Werten  $x[k]$  und  $u[k-1]$  die Prädiktion des Prozessausganges als lineare Funktion der Steuergrößendifferenzen  $\Delta\mathcal{U}[k]$  dargestellt. Im aktuellen Schritt  $k$  ist die im vorhergehenden Schritt  $k-1$  an den Prozess ausgegebene Steuergröße  $u[k-1]$  bekannt. Der Zustand  $x[k]$  wird im Weiteren ebenfalls als bekannt vorausgesetzt. Sollte  $x[k]$  nicht direkt messbar sein, so wird  $x[k]$  in (4.13) durch einen Schätzwert  $\hat{x}[k|k]$  eines Zustandsbeobachters ersetzt. Sollte im MPR-Prozess (4.1) darüber hinaus eine direkt gemessene Störgröße  $d_m[k]$  oder eine durch einen erweiterten

Beobachter ermittelte Störgröße mit dem Wert  $\hat{d}[k|k]$  auftreten, so kommt auf der rechten Seite von (4.13) zusätzlich ein Summand

$$\mathcal{D}_m \begin{bmatrix} d_m[k] \\ \hat{d}_m[k+1|k] \\ \vdots \\ \hat{d}_m[k+H_p-1|k] \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{D} \begin{bmatrix} \hat{d}[k|k] \\ \hat{d}[k+1|k] \\ \vdots \\ \hat{d}[k+H_p-1|k] \end{bmatrix}$$

mit den Matrizen  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{D}_m$  hinzu. Dabei bezeichnen  $\hat{d}_m[k+i|k]$  und  $\hat{d}[k+i|k]$  die Prädiktion der direkt gemessen bzw. beobachteten Störgröße, die z.B. unter der Annahme konstanter Störgrößen gemäß  $\hat{d}_m[k+i|k] := d_m[k]$  bzw.  $\hat{d}[k+i|k] := \hat{d}[k|k]$  bestimmt werden ( $i = 1, \dots, H_p - 1$ ). Die Modellgleichung (4.13) bleibt in diesem Fall linear in den Steuergrößendifferenzen  $\Delta \mathcal{U}[k]$ , so dass auch bei auftretenden Störgrößen die im Weiteren beschriebene Vorgehensweise anwendbar ist.

### 4.2.3 Darstellung des Gütefunktional und der Beschränkungen für die Steuer- und Regelgrößen

Die Bestimmung der Steuergrößen  $\Delta \hat{u}[k+i|k]$  für den MPR-Prozess ( $i = 0, 1, \dots, H_u - 1$ ) erfolgt so, dass ein vorgegebenes Gütefunktional minimiert wird und dabei vorgegebene Schranken für die Steuergrößen und für die Regelgrößen eingehalten werden.

Im Folgenden werden drei Klassen von Gütefunktionalen betrachtet, das quadratische Gütefunktional ( $\|\cdot\|_2$ -Funktional)

$$V[k] = \sum_{i=1}^{H_p} \|Q_y[i] (\hat{y}[k+i|k] - r[k+i|k])\|_2^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|Q_{\Delta u}[i] \Delta \hat{u}[k+i|k]\|_2^2, \quad (4.14)$$

das 1-Norm-Gütefunktional ( $\|\cdot\|_1$ )

$$V[k] = \sum_{i=1}^{H_p} \|Q_y[i] (\hat{y}[k+i|k] - r[k+i|k])\|_1 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|Q_{\Delta u}[i] \Delta \hat{u}[k+i|k]\|_1, \quad (4.15)$$

und das Maximum-Norm-Gütefunktional ( $\|\cdot\|_\infty$ -Funktional)

$$V[k] = \max_{i=1, \dots, H_p} \|Q_y[i] (\hat{y}[k+i|k] - r[k+i|k])\|_\infty \quad (4.16)$$

bzw.

$$V[k] = \max_{i=0, \dots, H_u-1} \|Q_{\Delta u}[i] \Delta \hat{u}[k+i|k]\|_{\infty}. \quad (4.17)$$

Hierbei sind die Gewichtsmatrizen  $Q_y[i]$  positiv semidefinit und  $Q_{\Delta u}[i]$  positiv definit, oft werden sie sogar als Diagonalmatrizen gewählt. Quadratische Gütefunktionale sind bereits aus dem Abschnitt ? bekannt und haben wichtige Anwendungen bei statistische Aufgabenstellungen. Das 1-Norm-Gütefunktional tritt z.B. bei der Verbrauchsoptimierung auf, während Probleme, bei denen der ungünstigste Fall (Worst-Case) betrachtet wird, oft auf Maximum-Norm-Gütefunktional führen.

*Beispiel 4.2.* Falls für den Prozess (4.1) bzw. das quadratische Funktional (4.14) speziell die Bedingungen

$$H_u = H_p, \quad C = I, \quad r[k+i|k] = 0, \quad Q_y[i] = Q_y, \quad Q_{\Delta u}[i] = Q_{\Delta u} \quad \forall i$$

erfüllt sind, so kann (4.14) mit  $\bar{Q}_x := Q_y^T Q_y$  und  $\bar{Q}_{\Delta u} := Q_{\Delta u}^T Q_{\Delta u}$  in der Form

$$\begin{aligned} V[k] = & \sum_{i=1}^{H_p-1} \hat{x}[k+i|k]^T \bar{Q}_x \hat{x}[k+i|k] + \sum_{i=0}^{H_p-1} \Delta \hat{u}[k+i|k]^T \bar{Q}_{\Delta u} \Delta \hat{u}[k+i|k] \\ & + \hat{x}[k+H_p|k]^T \bar{Q}_x \hat{x}[k+H_p|k] \end{aligned} \quad (4.18)$$

geschrieben werden. Abgesehen von dem Term  $\hat{x}[k|k]^T \bar{Q}_x \hat{x}[k|k]$ , der aber durch die Wahl der  $\Delta \hat{u}[k+i|k]$  ( $i = 0, \dots, H_p - 1$ ) nicht beeinflusst wird, ist das Gütefunktional (4.18) gleich dem aus dem Abschnitt ? bekannten LQR-Funktional (angewendet auf den MPR-Prozess).  $\diamond$

Die Beschränkungen der Regelgröße, der Steuergrößendifferenzen und der Steuergrößen werden nachfolgend durch lineare Nebenbedingungen in der Form

$$M[k] \begin{bmatrix} \mathcal{Z}[k] \\ \Delta \mathcal{U}[k] \\ \mathcal{U}[k] \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.19)$$

dargestellt.

*Beispiel 4.3.* Gegeben seien ein Single Input Single Output (SISO)-Prozess, das Gütefunktional

$$V[k] = \max_{i=0, \dots, H_u-1} |\Delta \hat{u}[k+i|k]|$$

und die Nebenbedingungen

$$|\hat{y}[k+i|k] - r[k+H_p|k]| \leq \frac{1}{i+1} |y[k] - r[k+H_p|k]| \quad (i = 1, \dots, H_p) \quad (4.20)$$

$$\hat{y}[k+H_p|k] = r[k+H_p|k].$$


Durch das Gütefunktional wird das Maximum der Steuergrößenänderung minimiert. Diese Aufgabenstellung kann für ein mechanisches System dessen Steuergrößen Kräfte oder Momente sind, als eine Minimierung des sogenannten maximalen Rucks (das ist die Ableitung der Kraft bzw. des Momentes) interpretiert werden. Die Nebenbedin-

**Abbildung 4.3:** Veranschaulichung der Nebenbedingungen zum Beispiel 4.2

gungen der Aufgabe sind Forderungen an den Verlauf der Regelgröße. Wie in der Abb. 4.3 veranschaulicht, wird eine fortschreitende Annäherung an den Wert  $r[k+H_p|k]$  der Referenztrajektorie am Ende des Prädiktionshorizontes erzwungen sowie für den Zeitpunkt  $k+H_p$  ein exaktes Erreichen dieses Wertes verlangt. Die eingezeichnete Trajektorie  $y^{(1)}[k+i|k]$  ist ein Beispiel für einen diesbezüglich zulässigen Verlauf. Stellt man zusätzlich die Monotonieforderung

$$\hat{y}[k+i+1|k] \geq \hat{y}[k+i|k], \quad (4.21)$$

so darf die Regelgröße den Wert  $r[k+H_p|k]$  nicht überschreiten. Der Verlauf  $y^{(2)}[k+i|k]$  ist dann in diesem Sinne zulässig.  $\diamond$

Es ist eine Übung unter Darstellung des Gütefunktionals und der Beschränkungen für die Steuer- und Regelgrößen  im Anhang zu finden.

## 4.3 Darstellung der Steuerungsaufgabe als Optimierungsproblem und numerische Lösung

### 4.3.1 Aufgabe mit $\|\cdot\|_2$ -Funktional ohne Beschränkung der Steuer- und Regelgröße

Betrachtet werden Aufgaben, bei denen das Funktional (4.14) zu minimieren ist und als Nebenbedingung allein die Prozessgleichung (4.13) auftritt. Mit den Abkürzungen

$$\mathcal{Q}_y[k] := \begin{bmatrix} Q_y[1] & & \\ & \ddots & \\ & & Q_y[H_p] \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{\Delta\mathcal{U}}[k] := \begin{bmatrix} Q_{\Delta\mathcal{U}}[0] & & \\ & \ddots & \\ & & Q_{\Delta\mathcal{U}}[H_u - 1] \end{bmatrix}$$

und

$$\mathcal{T}[k] := \begin{bmatrix} r[k+1|k] \\ \vdots \\ r[k+H_p|k] \end{bmatrix}$$

gilt

$$V(k) = \|\mathcal{Q}_y(\mathcal{Z}[k] - \mathcal{T}[k])\|_2^2 + \|\mathcal{Q}_{\Delta\mathcal{U}}\Delta\mathcal{U}[k]\|_2^2 \quad (4.22)$$

Mit  $\mathcal{E}[k] := \mathcal{T}[k] - \Psi x[k] - \Upsilon u[k-1]$  wird die Differenz zwischen der Referenztrajektorie  $\mathcal{T}[k]$  und der freien Bewegung  $\Psi x[k] + \Upsilon u[k-1]$  des MPR-Prozesses (nicht des Prozesses!) bezeichnet. Somit gilt

$$\begin{aligned} V[k] &= \|\mathcal{Q}_y(\Theta\Delta\mathcal{U}[k] - \mathcal{E}[k])\|_2^2 + \|\mathcal{Q}_{\Delta\mathcal{U}}\Delta\mathcal{U}[k]\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y(\Theta\Delta\mathcal{U}[k] - \mathcal{E}[k]) \\ \mathcal{Q}_{\Delta\mathcal{U}}\Delta\mathcal{U}[k] \end{bmatrix} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

und man erhält die Lösung  $\Delta\mathcal{U}^*[k]$  der unbeschränkten Optimierungsaufgabe

$$\min_{\Delta\mathcal{U}[k]} V[k] \quad (4.24)$$

als Quadratmittellösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y\Theta \\ \mathcal{Q}_{\Delta\mathcal{U}} \end{bmatrix} \Delta\mathcal{U}[k] \cong \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y\mathcal{E}[k] \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Da  $\mathcal{Q}_{\Delta\mathcal{U}}$  positiv definit ist, ist die Lösung eindeutig.

*Bemerkung 4.1.* Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ) habe vollen Spaltenrang und es sei  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist im generischen Fall die Lösungsmenge des Gleichungssystems  $Ax = b$

leer. Die Aufgabe der Bestimmung der Quadratmittellösung, i.Z.

$$Ax \cong b \quad \text{bzw.} \quad \|Ax - b\|_2 \rightarrow \min, \quad (4.26)$$

hat dann die eindeutige Lösung  $x^* = A^+b$ . Die Matrix  $A^+ := (A^T A)^{-1} A^T$  heisst *Pseudoinverse* zu  $A$  und die Matrix  $P := AA^+$  heißt Projektor auf das Bild im  $A := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$  von  $A$ . Die Berechnung von  $x^*$  kann z.B. mit der Singulärwertzerlegung oder der QR-Zerlegung von  $A$  erfolgen. In MATLAB verwendet man zur Bestimmung der Quadratmittellösung  $x^*$  den Backslash-Operator:  $x^* = A \backslash b$ .  $\blacklozenge$

**Abbildung 4.4:** Interpretation der Quadratmittellösung  $Ax \cong b$

*Bemerkung 4.2* (Struktur des MPR-Reglers). Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, p$ ). Weiter sei  $x$  Lösung von

$$Ax \cong B \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$x = A \backslash (B \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} A \backslash b_1 & \dots & A \backslash b_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Aus (4.25) folgt damit

$$\Delta \mathcal{U}^*[k] = \begin{bmatrix} \Delta u^*[k|k] \\ \vdots \\ \Delta u^*[k + H_u - 1|k] \end{bmatrix} = \bar{K} \mathcal{E}[k] \quad \text{mit} \quad \bar{K} := \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y \Theta \\ \mathcal{Q}_{\Delta \mathcal{U}} \end{bmatrix} \backslash \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sei  $K := \bar{K}(1 : n_{\mathcal{U}}, :)$ , wobei  $n_{\mathcal{U}}$  die Länge des Vektors  $u[k]$  ist. Gemäß dem Schritt (S2) des Algorithmus der modellprädiktiven Regelung aus Abschnitt 4.2.1 ist die im Schritt  $k$  ausgegebene Steuergröße gleich

$$\Delta u[k] = \Delta u^*[k|k] = K \mathcal{E}[k] = K (\mathcal{T}[k] - \Psi x[k] - \Upsilon u[k-1]).$$

Die Multiplikation der Signale  $\mathcal{T}[k]$ ,  $x[k]$  und  $u[k-1]$  mit zeitunabhängigen Matrizen zur Ermittlung der optimalen Steuergröße  $u^*[k]$  stellt ein lineares und zeitinvariantes Regelgesetz dar. Die Struktur des realisierten Reglers ist in der Abb. 4.5 dargestellt. Man stellt fest, dass durch die geschickte Nutzung der Gleichung (4.27) zur Berechnung der optimalen Steuergröße im jeweils aktuellen Schritt keine Online-Optimierung mehr

erforderlich ist. ◆

### 4.3.2 Aufgabe mit $\|\cdot\|_2$ -Funktional und Beschränkung

Die in Abschnitt 4.3.1 betrachtete Aufgabe wird nun auf den Fall beschränkter Steuer- und Regelgrößen erweitert. Die Aufgabe besteht nun in der Minimierung von

$$V[k] = \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y (\Theta \Delta \mathcal{U}[k] - \mathcal{E}[k]) \\ \mathcal{U}_{\Delta \mathcal{U}} \Delta \mathcal{U}[k] \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (4.28)$$

unter der Nebenbedingung (4.19), d.h.

**Abbildung 4.5:** Struktur den MPR-Reglers zur Minimierung von (4.14) bei unbeschränkten Steuer- und Regelgrößen

$$M[k] \begin{bmatrix} \mathcal{Z}[k] \\ \Delta \mathcal{U}[k] \\ \mathcal{U}[k] \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.29)$$

Mit  $\mathcal{Z}[k] = \Psi x[k] + \Upsilon u[k-1] + \Theta \Delta \mathcal{U}[k]$  und

$$\mathcal{U}[k] = \begin{bmatrix} I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots \\ I & \dots & I \end{bmatrix} \Delta \mathcal{U}[k] + \begin{bmatrix} u[k-1] \\ \vdots \\ u[k-1] \end{bmatrix}$$

kann man (4.29) in die Form

$$\Xi \Delta \mathcal{U}[k] \leq \xi \quad (4.30)$$

mit einer Matrix  $\Xi = \Xi[k]$  und einem Vektor  $\xi = \xi[k]$  überführen. Weiter gilt für die Zielfunktion

$$\begin{aligned} V[k] &= (\Theta \Delta \mathcal{U}[k] - \mathcal{E}[k])^T \mathcal{Q}_y^T \mathcal{Q}_y (\Theta \Delta \mathcal{U}[k] - \mathcal{E}[k]) + \Delta \mathcal{U}[k]^T \mathcal{Q}_{\Delta u}^T \mathcal{Q}_{\Delta u} \Delta \mathcal{U}[k] \\ &= \Delta \mathcal{U}[k]^T H \Delta \mathcal{U}[k] - \Delta \mathcal{U}[k]^T G + F \end{aligned}$$

mit  $H := \Theta^T \mathcal{Q}_y^T \mathcal{Q}_y \Theta + \mathcal{Q}_{\Delta u}^T \mathcal{Q}_{\Delta u}$ ,  $G := 2\Theta^T \mathcal{Q}_y^T \mathcal{Q}_y \mathcal{E}[k]$  und  $F := \mathcal{E}[k]^T \mathcal{Q}_y^T \mathcal{Q}_y \mathcal{E}[k]$ . Also ist  $V[k]$  eine quadratische Zielfunktion und mit der linearen Nebenbedingung (4.30) ist

$$\min_{\Delta \mathcal{U}[k]} V[k] \text{ bei } \Xi \Delta \mathcal{U}[k] \leq \xi \quad (4.31)$$

eine Aufgabe der Quadratischen Optimierung. Die Lösung kann im Allgemeinen nur durch numerische Verfahren bestimmt werden. Der zulässige Bereich der Aufgabe ist



aufgrund der ausschließlich linearen Nebenbedingungen konvex und es gibt weiter

$$\frac{\partial^2 V[k]}{\partial \Delta \mathcal{U}[k]^2} = 2H \geq 0.$$

Damit ist (4.31) ein konvexes Optimeirungsproblem, d.h. falls eine Lösung dieser Aufgabe existiert, ist jede lokale Minimalstelle auch stets eine globale Minimalstelle. Darüber hinaus ist aufgrund von  $\mathcal{Q}_{\Delta u} > 0$  sogar  $H > 0$  erfüllt und daher ist die Zielfunktion  $V[k]$  streng konvex, d.h. im Falle der Existenz ist die Lösung von (4.31) dann sogar eindeutig. Unter diesen Umständen kann die Lösung  $\Delta \mathcal{U}^*[k]$  der Aufgabe (4.31) numerisch effizient mit Algorithmen der Quadratischen Optimierung bestimmt werden<sup>1</sup>.

### 4.3.3 Aufgabe mit $\|\cdot\|_1$ - und $\|\cdot\|_\infty$ -Funktional

Bei Aufgaben mit dem Funktional (4.15) oder (4.16) bzw. (4.17) muss man nicht zwischen dem Fall unbeschränkter Steuer- und Regelgrößen und dem Fall beschränkter Steuer- und Regelgrößen unterscheiden, da sich in jedem Fall ein Optimierungsproblem mit Beschränkungen ergibt. Formt man die Zielfunktion  $V[k]$  analog dem Abschnitt 4.3.2 um, so erhält man für das Gütefunktional (4.15)

$$V[k] = \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y (\Theta \Delta \mathcal{U}[k] - \mathcal{E}[k]) \\ \mathcal{Q}_{\Delta \mathcal{U}} \Delta \mathcal{U}[k] \end{bmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y \Theta \\ \mathcal{Q}_{\Delta \mathcal{U}} \end{bmatrix} \Delta \mathcal{U}[k] - \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y \mathcal{E}[k] \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_1 \quad (4.32)$$

und für die Gütefunktionale (4.16) und (4.17) erhält man

$$V[k] = \|\mathcal{Q}_y \Theta \Delta \mathcal{U}[k] - \mathcal{Q}_y \mathcal{E}[k]\|_\infty \quad (4.33)$$

bzw.

$$V[k] = \|\mathcal{Q}_{\Delta \mathcal{U}} \Delta \mathcal{U}[k]\|_\infty. \quad (4.34)$$

Die Minimierung von  $V[k]$  unter der Nebenbedingung (4.30) kann dann als Aufgabe der Linearen Optimierung dargestellt werden<sup>2</sup>, denn mit Matrizen  $F$  und  $C$  sowie Vektoren  $f$  und  $d$  passender Dimension kann die Aufgabe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Fx - f\|_1$$

- 
- 1 In MATLAB ist zur Lösung der Aufgabe der Quadratischen Programmierung die Routine `quadprog` implementiert, die speziell für den durch Ungleichungsbeschränkungen gekennzeichneten Problemtyp (4.31) einer Aktiven-Mengen-Strategie nach [?] verwendet. Der Aufruf erfolgt mit  $\Delta \mathcal{U}[k] = \text{quadprog}(2H, G, \Xi, \xi)$ .
  - 2 Die numerische Lösung von Aufgaben der Linearen Optimierung kann wie für Aufgaben der Quadratischen Optimierung durch eine Aktive-Mengen-Strategie erfolgen. In MATLAB erfolgt die Lösung von  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$  bei  $Ax \leq b$  durch  $x = \text{linprog}(c, A, b)$

durch

$$\min_{\substack{\mu \in \mathbb{R}^1 \\ \eta \in \mathbb{R}^m \\ x \in \mathbb{R}^n}} \mu \text{ bei } \mu \geq 0, \mathbb{1}^T \eta \leq \mu, -\eta \leq Fx - f \leq \eta, Cx \leq d$$

und die Aufgabe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Fx - f\|_\infty$$

durch

$$\min_{\substack{\delta \in \mathbb{R}^1 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \delta \text{ bei } \delta \geq 0, -\mathbb{1}^T \delta \leq Fx - f \leq \mathbb{1}^T \delta, Cx \leq d$$

gelöst werden. Hierbei ist  $\mathbb{1} := \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$ .

## 4.4 Stabilität prädiktiver Regelungen

### 4.4.1 Problembeschreibung

Der in Abschnitt 4.2.1 beschriebene prinzipielle Algorithmus der modellprädiktiven Regelung stellt eine Rückführung dar, womit potenziell die Gefahr der Instabilität des entstehenden Regelkreises besteht. Zur Erläuterung wird als eine einfache Form des quadratischen Gütefunktional das Funktional

$$V[k] = \sum_{i=1}^{H_p} \|\hat{x}[k+i|k]\|_2^2 \quad (4.35)$$

betrachtet, wobei für die Länge des Steuer- und des Prädiktionshorizonts  $H_u = H_p$  gelten soll. Beschränkungen hinsichtlich der Steuer- und Zustandsgröße sollen nicht vorliegen. Im Zeitpunkt  $k$  wird die optimale Steuerfolge  $(\Delta u^*[k+i|k])_{i=0,\dots,H_p-1}$  berechnet, die dann die optimale Zustandstrajektorie  $(x^*[k+i|k])_{i=1,\dots,H_p}$  liefert. Gemäß dem Algorithmus der modellprädiktiven Regelung wird dann  $\Delta u[k] := \Delta u^*[k|k]$  gesetzt und mit dieser Steuergröße ergibt sich (unter der Annahme, dass keine Störgrößen oder Modellunbestimmtheiten auftreten) der Folgezustand  $x[k+1] = x^*[k+1|k]$ . Würde man dann im Zeitpunkt  $k+1$  das Gütefunktional

$$\tilde{V}[k] = \sum_{i=1}^{H_p-1} \|\hat{x}[k+1+i|k+1]\|_2^2 \quad (4.36)$$

minimieren, so würde nach dem BELLMANSchen Optimalitätsprinzip für die optimale Zustandstrajektorie  $\tilde{x}^*[k+1+i|k+1] = x^*[k+1+i|k]$  ( $i = 1, \dots, H_p - 1$ ) gelten. Jedoch löst man im Zeitpunkt  $k+1$  die Aufgabe mit dem Gütefunktional

$$V[k+1] = \sum_{i=1}^{H_p} \|\hat{x}[k+1+i|k+1]\|_2^2 \quad (4.37)$$

und bestimmt damit den im Allgemeinen von  $\tilde{x}^*[k+1+i|k+1]$  abweichenden Verlauf  $x^*[k+1+i|k+1]$ . Weiter gilt dann  $x[k+2] = x^*[k+2|k+1]$ . Setzt man diese Überlegung fort, so erhält man eine Trajektorie  $x[k+i]$  ( $i = 1, \dots, H_p$ ) des Zustandes im MPR-Regelkreis, die im Normalfall von der zum Zeitpunkt  $k$  bestimmten optimalen Prädiktion  $x^*[k+i|k]$  abweichen wird (siehe Abb. 4.6).

Hätte der Prädiktionshorizont eine unendliche Länge, so würde der tatsächliche Verlauf der Zustandstrajektorie  $x[k+i]$  mit dem Verlauf der optimalen Prädiktion  $x^*[k+i|k]$  übereinstimmen (falls keine Störgrößen wirken und keine Modellunbestimmtheiten auftreten). Bei einer endlichen Länge werden  $x[k+i]$  und  $x^*[k+i|k]$  jedoch im Allgemeinen voneinander verschieden sein, so dass sich dann nicht nur die Güte des Regelkreises (gegenüber der aufgrund der Vorhersage  $x^*[k+i|k]$  über dem Prädiktionshorizont erwarteten Güte) verschlechtern wird, sondern sogar ein instabiler Regelkreis resultieren kann.

**Abbildung 4.6:** Zur Abweichung zwischen der optimalen Trajektorie  $x^*[k+i|k]$  und dem tatsächlichen Verlauf  $x[k+i]$  ( $i = 1, \dots, H_p$ )

*Beispiel 4.4.* Gegeben seien der stabiler Prozess

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$

und das quadratische Gütefunktional

$$V[k] = \hat{x}[k+1|k]^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \hat{x}[k+1|k].$$

Beschränkungen seien nicht vorhanden. Mit den Prozessgleichungen  $\hat{x}_1[k+1|k] = \hat{u}[k|k]$  und  $\hat{x}_2[k+1|k] = x_1[k|k] = x_1[k]$  erhält man

$$\begin{aligned} V[k] &= \hat{x}_1[k+1|k]^2 + 6\hat{x}_2[k+1|k]^2 + 4\hat{x}_1[k+1|k]\hat{x}_2[k+1|k] \\ &= \hat{u}[k|k]^2 + 6x_1[k]^2 + 4\hat{u}[k|k]x_1[k] \end{aligned}$$

und weiter

$$\frac{\partial V[k]}{\partial \hat{u}[k|k]} = 2\hat{u}[k|k] + 4x_1[k] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\hat{u}[k|k]}_{=:u^*[k]} = -2x_1[k].$$

Der mit diesem (optimalen) Regelgesetz geschlossene Regelkreis wird durch die Differenzengleichung  $x[k+1] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$  beschrieben und ist offensichtlich instabil.  $\diamond$

#### 4.4.2 Stabilität des geschlossenen Kreises bei endlichem Optimierungshorizont durch eine Endbedingung für den Prozesszustand

Der folgende Satz liefert eine erste Aussage über die Stabilität einer modellprädiktiven Regelung.

**Satz 12.** *Gegeben seien der Prozess  $x[k+1] = f(x[k], u[k])$  mit stetigem  $f$  und einem stationären Punkt für  $(x[k], u[k]) = (0, 0)$ . Das Gütefunktional sei*

$$V[k] = \sum_{i=1}^{H_p} l(\hat{x}[k+i|k], \hat{u}[k+i-1|k])$$

*mit stetigem  $l$ ,  $l(x, u) \geq 0$  und  $l(x, u) = 0$  genau dann, wenn  $(x, u) = (0, 0)$ . Als Endbedingung sei  $\hat{x}[k+H_p|k] = 0$  gegeben und die Beschränkungen seien  $\hat{u}[k+i|k] \in U$  und  $\hat{x}[k+i|k] \in X$  für gegebene Mengen  $U$  und  $X$ . Für jedes  $k$  existiert eine optimale Stellfolge  $(u^*[k+1|k])_{i=0,1,\dots,H_p-1}$  und es sei  $u^*[k|k]$  die im Schritt  $k$  auf den Prozess aufgeschaltete Steuergröße.*

*Dann ist  $(x, u) = (0, 0)$  eine asymptotische stabile Gleichgewichtslage des geschlossenen Kreises.*

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $f(x[k], 0) \neq 0$  für  $x[k] \neq 0$ . Die Funktion

$$(x[k], \hat{u}[k|k], \dots, \hat{u}[k+H_p-1|k]) \mapsto V[k]$$

ist stetig und damit ist der Minimalwert

$$\mathcal{V}(x[k]) := \min_{\hat{u}[k|k], \dots, \hat{u}[k+H_p-1|k]} V[k]$$

stetig in  $x[k]$ . Wir zeigen jetzt, dass  $\mathcal{V}$  eine strikte Ljapunov-Funktion für  $x[k+1] = f(x[k], u^*[k|k])$  ist.

1. „ $\mathcal{V}$  ist positiv definit“:

- Aus  $l \geq 0$  folgt die Ungleichung  $\mathcal{V}(x) \geq 0$ .
- Sei  $x[k] = 0$ . Setze  $u^*[k|k] := 0$ , dann folgt  $x^*[k+1|k] = 0$ , setze  $u^*[k+1|k] := 0$ , dann ist  $x^*[k+2|k] = 0$  usw. Somit gilt  $\mathcal{V}(x[k]) = 0$ .  
Umgekehrt sei  $\mathcal{V}(x[k]) = 0$ . Wegen  $f(x[k], 0) \neq 0$ ,  $l \geq 0$  und  $l = 0 \Leftrightarrow (x, u) = (0, 0)$  ist dann  $x[k] = 0$ .  
Also gilt  $\mathcal{V}(x) \Leftrightarrow x = 0$ .

2. „ $\mathcal{V}(x[k+1]) < \mathcal{V}(x[k])$  für  $x[k] \neq 0$ “:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(x[k+1]) &= \min_{\hat{u}[k+1|k], \dots, \hat{u}[k+H_p|k]} \sum_{i=1}^{H_p} l(\hat{x}[k+i+1|k], \hat{u}[k+i|k]) \\
 &= \min_{\dots} \left\{ \sum_{i=1}^{H_p} l(\hat{x}[k+i|k], \hat{u}[k+i-1|k]) - l(\hat{x}[k+1|k], \hat{u}[k|k]) + \right. \\
 &\quad \left. l(\hat{x}[k+H_p+1|k], \hat{u}[k+H_p|k]) \right\} \\
 &\leq \min_{\hat{u}[k+1|k], \dots, \hat{u}[k+H_p-1|k]} \left\{ \sum_{i=1}^{H_p} l(\hat{x}[k+i|k], \hat{u}[k+i-1|k]) - \right. \\
 &\quad \left. l(\hat{x}[k+1|k], \hat{u}[k|k]) \right\} + \\
 &\quad \min_{\hat{u}[k+H_p|k]} \sum_{i=1}^{H_p} l(\hat{x}[k+H_p+1|k], \hat{u}[k+H_p|k]) \\
 &= \underbrace{\min_{\hat{u}[k|k], \hat{u}[k+1|k], \dots, \hat{u}[k+H_p-1|k]} V[k]}_{=\mathcal{V}(x[k])} - \underbrace{l(\hat{x}[k+1|k], u^*[k|k])}_{>0 \text{ wegen } f(x[k], 0) \neq 0} + \\
 &\quad \underbrace{\min_{\hat{u}[k+H_p|k]} \sum_{i=1}^{H_p} l(\hat{x}[k+H_p+1|k], \hat{u}[k+H_p|k])}_{=0} \\
 &< \mathcal{V}(x[k]).
 \end{aligned}$$

□

*Bemerkung 4.3.* Für den Satz 12 gibt es allgemeinere Formulierungen. So kann dieser Satz z.B. auf die Endbedingung  $\hat{x}[k+H_p|k] = r[k+H_p|k] \neq 0$ , d.h. auf den Fall beliebiger Referenztrajektorien, und auf die Bewertung der Steuergrößendifferenz  $\Delta u$  (anstelle bzw. zusätzlich zur Steuergröße  $u$ ) erweitert werden (siehe [?]). ♦

Die Voraussetzung der Existenz einer optimalen Steuerfolge mit der in  $H_p$  Schritten der Zustand  $x = 0$  erreicht wird, ist eine sehr starke Voraussetzung, die z.B. bei einem kurzen Horizont  $H_p$  und bei Steuergrößenbeschränkungen häufig nicht erfüllt ist. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, kann diese Voraussetzung insbesondere für lineare Prozesse abgeschwächt werden, indem der Endzustand lediglich geeignet gewichtet wird.

### 4.4.3 Stabilität des geschlossenen Kreises bei endlichem Steuerhorizont durch eine Gewichtung des Endzustandes

Wir betrachten zunächst die Aufgabe mit quadratischem Gütefunktional bei unendlichem Optimierungshorizont (d.h. einem unendlichen Steuer- und Prädiktionshorizont)

$$V[k] = \sum_{i=1}^{\infty} \|Q_x \hat{x}[k+i|k]\|_2^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \|Q_{\Delta u}[i] \Delta \hat{u}[k+i|k]\|_2^2 \rightarrow \min. \quad (4.38)$$

Nach den Überlegungen in Abschnitt 4.4.1 gilt aufgrund des unendlichen Horizonts

$$x[k+i] = x^*[k+i|k] \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (4.39)$$

d.h. es kann aus dem Verlauf der optimalen Prädiktion auf das Verhalten (speziell auf die Stabilität) des MPR-Regelkreises geschlossen werden, denn falls  $V[k]$  einen endlichen Wert aufweist, so impliziert dies  $x[k+i] \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ . Betrachtet man

**Abbildung 4.7:** Optimale Trajektorie  $x^*[k+i|k]$  und dem tatsächlicher Verlauf  $x[k+i]$  bei unendlichem Horizont

hingegen einen endlichen Steuerhorizont und einen unendlichen Prädiktionshorizont

$$V[k] = \sum_{i=1}^{\infty} \|Q_y \hat{y}[k+i|k]\|_2^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|Q_{\Delta u}[i] \Delta \hat{u}[k+i|k]\|_2^2 \rightarrow \min, \quad (4.40)$$

so gilt aufgrund von  $H_u < \infty$  die Gleichung (4.39) im Allgemeinen nicht mehr. Im Weiteren wird vorausgesetzt, dass der Prozess stabil sei, das Paar  $(A, Q_y C_y)$  beobachtbar ist und für die Steuergröße am Ende des Steuerhorizontes  $\hat{u}[k+H_u|k] = 0$  gilt, was dann wegen (4.4) auch  $\hat{u}[k+H_u+i|k] = 0 \forall i \geq 0$  impliziert. Somit gelten

$$\hat{y}[k+H_u+i|k] = C_y A^i \hat{x}[k+H_u|k] \quad (i = 1, 2, \dots)$$

und

$$\sum_{i=H_u}^{\infty} \|Q_y \hat{y}[k+i|k]\|_2^2 = \hat{x}[k+H_u|k]^T \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{\infty} (A^T)^i C_y^T Q_y^T Q_y C_y A^i \right)}_{=: \bar{Q}} \hat{x}[k+H_u|k].$$

Da die Matrix  $A$  stabil ist, existiert die Matrix  $\bar{Q}$  und kann als eindeutige Lösung der Ljapunov-Gleichung

$$A^T \bar{Q} A = \bar{Q} - C_y^T Q_y^T Q_y C_y \quad (4.41)$$

bestimmt werden. Da  $(A, Q_y C_y)$  beobachtbar ist, ist  $\bar{Q}$  positiv definit. Damit gilt

$$\begin{aligned} V[k] &= \hat{x}[k+H_u|k]^T \bar{Q} \hat{x}[k+H_u|k] \\ &+ \sum_{i=1}^{H_u-1} \|Q_y \hat{y}[k+i|k]\|_2^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|Q_{\Delta u}[i] \Delta \hat{u}[k+i|k]\|_2^2 < +\infty \end{aligned} \quad (4.42)$$

also ist insbesondere auch

$$\mathcal{V}(x[k]) := \min_{\Delta \hat{u}[k|k], \dots, \Delta \hat{u}[k+H_u-1|k]} V[k] < +\infty. \quad (4.43)$$

Man findet

$$\mathcal{V}(x[k+1]) \leq \mathcal{V}(x[k]) - \|Q_y y^*[k+1|k]\|_2^2 - \|Q_{\Delta u} \Delta u^*[k|k]\|_2^2,$$

also gilt  $\mathcal{V}(x[k+1]) \leq \mathcal{V}(x[k])$ . Weiter wird in [?] gezeigt, dass es im Fall  $x[k] \neq 0$  ein  $i_0 \in \{1, \dots, n_x\}$  gibt, wobei  $n_x$  die Länge des Vektors  $x[k]$  bezeichnet, so dass sogar  $\mathcal{V}(x[k+i_0]) < \mathcal{V}(x[k])$  erfüllt ist. Wegen  $\mathcal{V} \geq 0$  und  $\mathcal{V}$  stetig, ist  $\mathcal{V}$  eine Ljapunov-Funktion zur Gleichgewichtslage  $x = 0$ . Und bei geeigneter Indizierung ist  $\mathcal{V}$  sogar eine strikte Ljapunov-Funktion. Weiter folgt aus  $\|x[k]\|_2 \rightarrow +\infty$  dann  $\mathcal{V}(x[k]) \rightarrow +\infty$ . Also ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil!

*Bemerkung 4.4.* Wegen (4.42) ergibt sich eine Aufgabe mit endlichem Prädiktionshorizont bzw. Steuerhorizont und einer Gewichtung des Endzustandes durch die positiv definite Matrix  $\bar{Q}$ . Diese Gewichtungsmatrix kann gemäß (4.41) durch das MATLAB-Kommando  $\bar{Q} = \text{dlyap}(A^T, C_y^T Q_y^T Q_y C_y)$  bestimmt werden. Die Gewichtung des Endzustandes ist praktisch eine wesentlich schwächere Voraussetzung als das Einführen einer Endbedingung der Form  $\hat{x}[k+H_u|k] = 0$  wie in Abschnitt 4.4.2.

Die beschriebene Vorgehensweise kann auf instabile Prozesse, auf von Null verschiedene Referenztrajektorien, auf beschränkte Steuer- und Regelgrößen sowie auf  $\|\cdot\|_1$ - und  $\|\cdot\|_\infty$ -Gütefunktionale erweitert werden (siehe [?]). ◆





# Anhang

---

<b>A Übungen</b>	A-3
Übungen Kapitel 1	A-3
Übung - Definitheit und Extremstellen	A-3
Kuhn-Tucker-Bedingung	A-3
Beispiele zur Quadratischen Optimierung	A-3
Projektion auf Untervektorraum	A-4
Projektion eines Vektors	A-4
Finden eines zulässigen Startwertes für den Aktiven Mengen Algorithmus	A-4
Erweiterung des Aktiven Mengen Algorithmus	A-5
Aktiver Mengen Algorithmus	A-5
Übungen Kapitel 2	A-5
Vorgehensweise zur analytischen Bestimmung der Optimallösung	A-5
Vorgehensweise zur numerischen Bestimmung der Optimallösung	A-6
Übungen Kapitel 3	A-6
Das zeitdiskrete linear-quadratische Regler-Problem	A-6
Beispiel der räumlichen Führung	A-6
Übungen Kapitel 4	A-7
Darstellung des Gütefunctionals und der Beschränkungen für die Steuer- und Regelgrößen	A-7



## Übungen Kapitel 1

### Definitheit und Extremstellen

Bestimmen Sie von beiden Funktionen die Definitheit und die Extremstellen!

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (ax_1^2 + bx_2^2) \Rightarrow Hf_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$
$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^3 \Rightarrow Hf_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

**Lösung**

### Kuhn-Tucker-Bedingung

Finden Sie alle Lösungen von  $f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2}$  bei  $g_1(x) = x_1 + x_2^2 \leq 0$ !  
Skizzieren Sie ihr Ergebnis.

**Lösung**

### Beispiele zur Quadratischen Optimierung

Seien  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $q = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$  und  $d = 1$ . Lösen Sie die folgenden Aufgaben

- a)  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$
- b)  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$  bei  $Cx = d$

## Lösung

### Projektion auf Untervektorraum

Seien  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Berechnen Sie

- a)  $Pb$ .
- b)  $(I - P)b$ .
- c)  $(I - P)P$ .
- d)  $Pb + (I - P)b$ .
- e)  $(Pb)^T(I - P)b$ .
- f) Was ist das kleinste  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ , so dass  $\|Pb\|_2 \leq \alpha\|b\|_2$  erfüllt ist?

## Lösung

### Projektion eines Vektors

- a) Für  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $d = 1$  projiziere  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  auf  $M$  (Skizze)!
- b) Für  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  projiziere  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  auf  $M$  (Skizze)!

## Lösung

### Finden eines zulässigen Startwertes für den Aktiven Mengen Algorithmus

Erweitern Sie den Algorithmus um die Auffindung eines zulässigen Startpunktes!

**Lösung****Erweiterung des Aktiven Mengen Algorithmus**

Erweitern Sie den Algorithmus um die Aufgabe der linearen Optimierung und die Verwendung von GNB als aktive UNB!

**Lösung****Aktiver Mengen Algorithmus**

Wiederholen Sie das Beispiel 1.5 mit dem Aktiven Mengen Algorithmus mit dem Startwert  $x^0 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

**Lösung****Übungen Kapitel 2****Vorgehensweise zur analytischen Bestimmung der Optimallösung**

1. Bestimmen Sie die optimale Steuerfunktion zu folgenden Problemen

a)  $J = \int_0^1 u(t)^2 dt \rightarrow \min$  bei  $\dot{x} = u - c$  mit gegebenen Konstanten  $c > 0$  sowie  $x(0) = 0$  und  $x(1) = 1$ .

b)  $J = \int_0^{t_b} u(t)^2 dt \rightarrow \min$  bei  $\dot{x} = u - c$  mit gegebenen Konstanten  $c > 0$  sowie  $x(t_b) = 0$  und  $x(1) = 1$ ,  $t_b$  ist frei.

Diskutieren Sie für die beiden Probleme jeweils die Abhängigkeit der Lösung, d.h. von  $u$  und  $J$ , vom Parameter  $c$ . Vergleichen Sie die Ergebnisse der Lösung der beiden Probleme miteinander.

2. Bestimmen Sie eine optimale Steuerfunktion für die Aufgabenstellung

$$J = \int_0^1 u_1(t)^2 + u_2(t)^2 dt \rightarrow \min$$

bei

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_1, \dot{x}_4 = x_2$$

$$x_3(1) - x_4(1) = 0$$

für die Anfangszustände

a)  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0,$

b)  $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1, x_4(0) = 0.$

### Vorgehensweise zur numerischen Bestimmung der Optimallösung

Implementieren Sie den Algorithmus und testen Sie ihn am Beispiel 2.3. Beachten Sie, dass eine sinnvolle Wahl von  $\alpha$  für ein Konvergenzverhalten notwendig ist.

## Übungen Kapitel 3

### Das zeitdiskrete linear-quadratische Regler-Problem

Überführen Sie die Beispiel ?? und Beispiel ?? aus Abschnitt ?? jedoch ohne Endbedingungen und Stellgrößenbeschränkungen in ein zeitdiskretes LQR-Problem.

### Beispiel der räumlichen Führung

1. Überlegen Sie, warum in (3.55) eine konstante Rückführung mit  $F_{12}$  anstelle von  $F_{10}$  zu besseren Ergebnissen führen könnte.
2. Praktisch steht die Gierwinkelrate  $\Delta\dot{\gamma}$  nicht direkt als Steuergröße zur Verfügung. Vielmehr kann diese nur zeitlich verzögert beeinflusst werden, was über die Differentialgleichung  $T \cdot \Delta\ddot{\gamma} + \Delta\dot{\gamma} = u$  mit einer Zeitkonstante  $T$  (deutlich unter einer Sekunde) modelliert werden kann. Stellen Sie die lineare zeitvariante Zustandsdif-

ferentialgleichung für das resultierende System 2. Ordnung auf und machen Sie sich anhand eines Beispiels durch Simulation klar, dass ein zeitlich konstanter Regler im Vergleich zum zeitvarianten LQR-Regler zu deutlichen Stabilitätsproblemen führt.

## Übungen Kapitel 4

### **Darstellung des Gütefunktional und der Beschränkungen für die Steuer- und Regelgrößen**

Stellen Sie die Beschränkungen (4.20) und (4.21) in der allgemeinen Form (4.19) dar!

#### **Lösung**







