Lý thuyết đồ thị

Tuần học 15/3-22/3

Các khái niệm cơ bản

- **Đơn đồ thị vô hướng**: Một đồ thị G=(V,E) bao gồm một tập không rỗng hữu hạn V mà có các phần tử gọi là đỉnh và một tập E mà các phần tử của nó gọi là cạnh, đó là các cặp không sắp thứ tự của các đỉnh.
- **Đơn đồ thị có hướng:** Một đồ thị G=(V,E) bao gồm tập các đỉnh V và tập các cạnh E là các cặp có thứ tự của các đỉnh thuộc V.

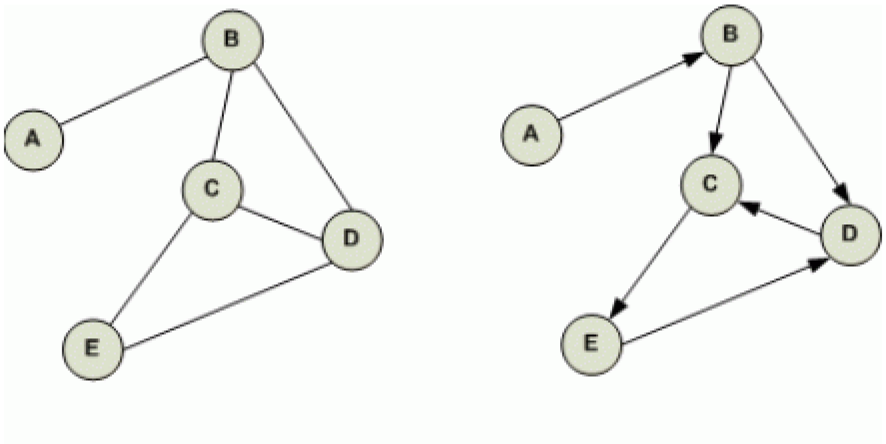


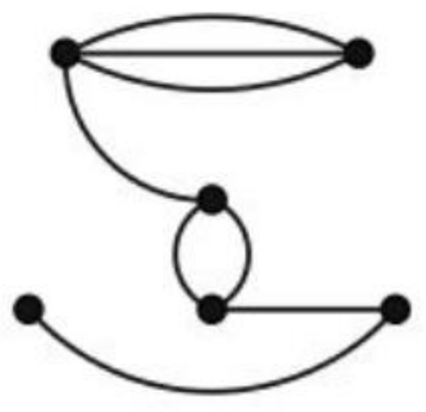
Fig 1. Undirected Graph   Fig 2. Directed Graph

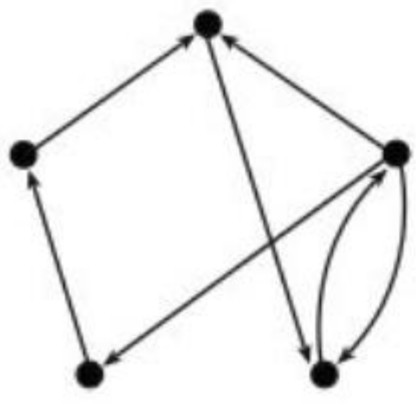
Đường đi từ đỉnh A đến B: ABCDECDB   Chu trình: ABCDECDBA

Đường đi từ A đến E: ABDCE : đường đi đơn   Chu trình đơn: CDEC

Các khái niệm cơ bản

- **Đa đồ thị vô hướng:** Một đồ thị G=(V,E) bao gồm tập các đỉnh V và tập các cạnh E vô hướng, trong đó các cạnh nối 2 đỉnh có thể có nhiều hơn 1 cạnh (các cạnh có cùng đỉnh được gọi là cạnh song song).
- **Đa đồ thị có hướng:** Một đồ thị G=(V,E) bao gồm tập các đỉnh V và tập các cạnh E có hướng, trong đó các cạnh nối 2 đỉnh có thể có nhiều hơn 1 cạnh (các cạnh có cùng đỉnh được gọi là cạnh song song).



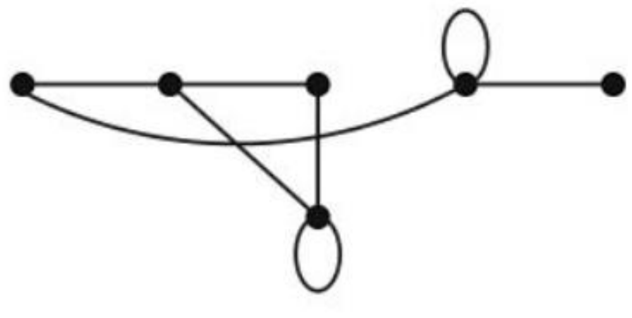


Các khái niệm cơ bản

- **Giả đồ thị**: Một giả đồ thị G=(V,E) bao gồm tập các đỉnh V và tập các cạnh E, trong đó cạnh đi từ một đỉnh đến chính nó gọi là khuyên.

- **Các mô hình đồ thị**: Có nhiều bài toán thực tế có thể mô hình bằng các dạng đồ thị để hệ thống các mối quan hệ giữa các đối tượng.

Ví dụ: Đồ thị lấn tổ trong sinh thái học, đồ thị quen biết, đồ thị ảnh hưởng, đồ thị Hollywood, Thi đấu vòng tròn, đồ thị công tác, đồ thị các cuộc gọi điện thoại, đồ thị web…



Các khái niệm liên quan

- **Đỉnh liền kề**: Hai đỉnh u và v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là liền kề nếu e={u,v} là một cạnh; e được gọi là cạnh liên thuộc với các đỉnh u, v và u, v là 2 đỉnh kề nhau.

Các khái niệm liên quan

- **Bậc của đỉnh trong đồ thị vô hướng:**

Trong đồ thị vô hướng, bậc của đỉnh là số các cạnh liên thuộc với nó, với khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Ký hiệu bậc của đỉnh v là deg(v).

Tính chất:

- Định lý bắt tay: Tổng số bậc của đỉnh bằng 2 lần số cạnh.
- Một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

- **Bậc của đỉnh trong đồ thị có hướng:**

Khi (u,v) là cạnh của đồ thị có hướng G, u là đỉnh đầu và v là đỉnh cuối. Trong đồ thị có hướng **bậc vào** của đỉnh v, $deg^{-}(v)$, là số các cạnh có đỉnh cuối là v. **Bậc ra** của đỉnh v, $deg^{+}(v)$, là số các cạnh có đỉnh đầu là v.

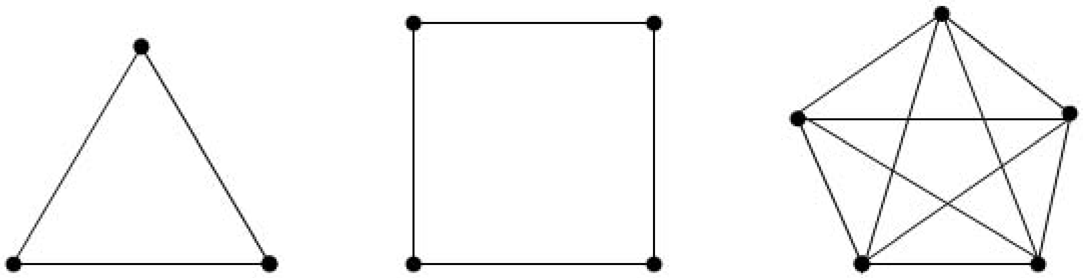
Tính chất:

\- Bậc vào bằng bậc ra của đồ thị có hướng bằng với số cạnh đồ thị.

Một số đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị đầy đủ:**

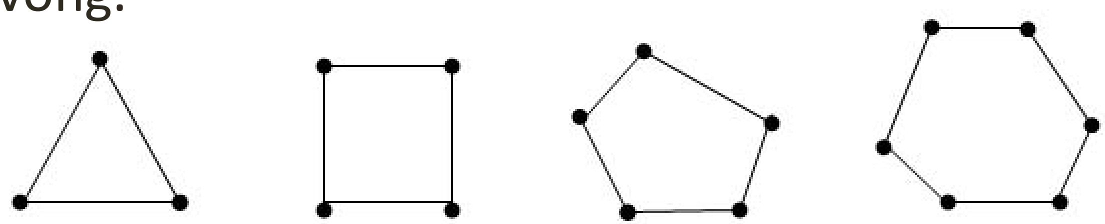
Đồ thị đầy đủ n đỉnh, kí hiệu K_n, là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt.



K_3 K_4 K_5

- **Đồ thị vòng:**

Đồ thị vòng, kí hiệu C_n, là đồ thị có n đỉnh và n cạnh nối các đỉnh thành 1 vòng.

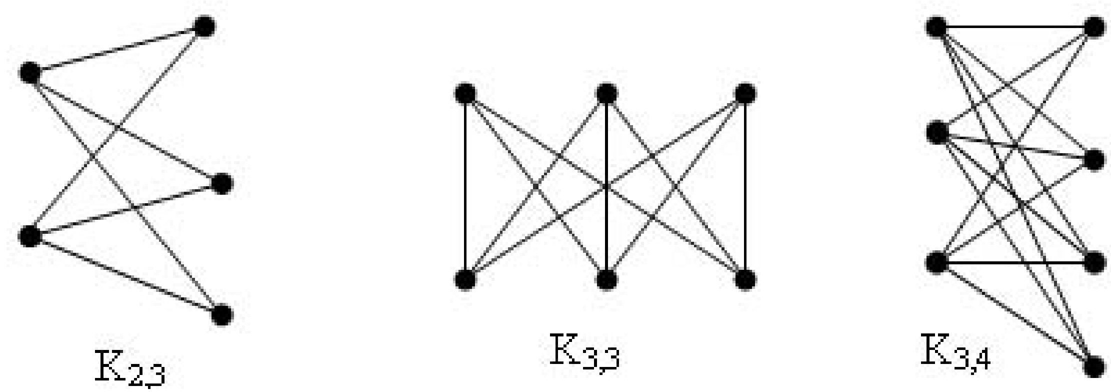


C_3 C_4 C_5 C_6

Một số đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị phân đôi đầy đủ:**

Đồ thị phân đôi đầy đủ Km,n là đồ thị có tập đỉnh được phân thành 2 tập con tương ứng có m đỉnh và n đỉnh và có một cạnh giữa hai đỉnh nếu và chỉ nếu một đỉnh thuộc tập con này và đỉnh thứ hai thuộc tập con kia.



Đường đi

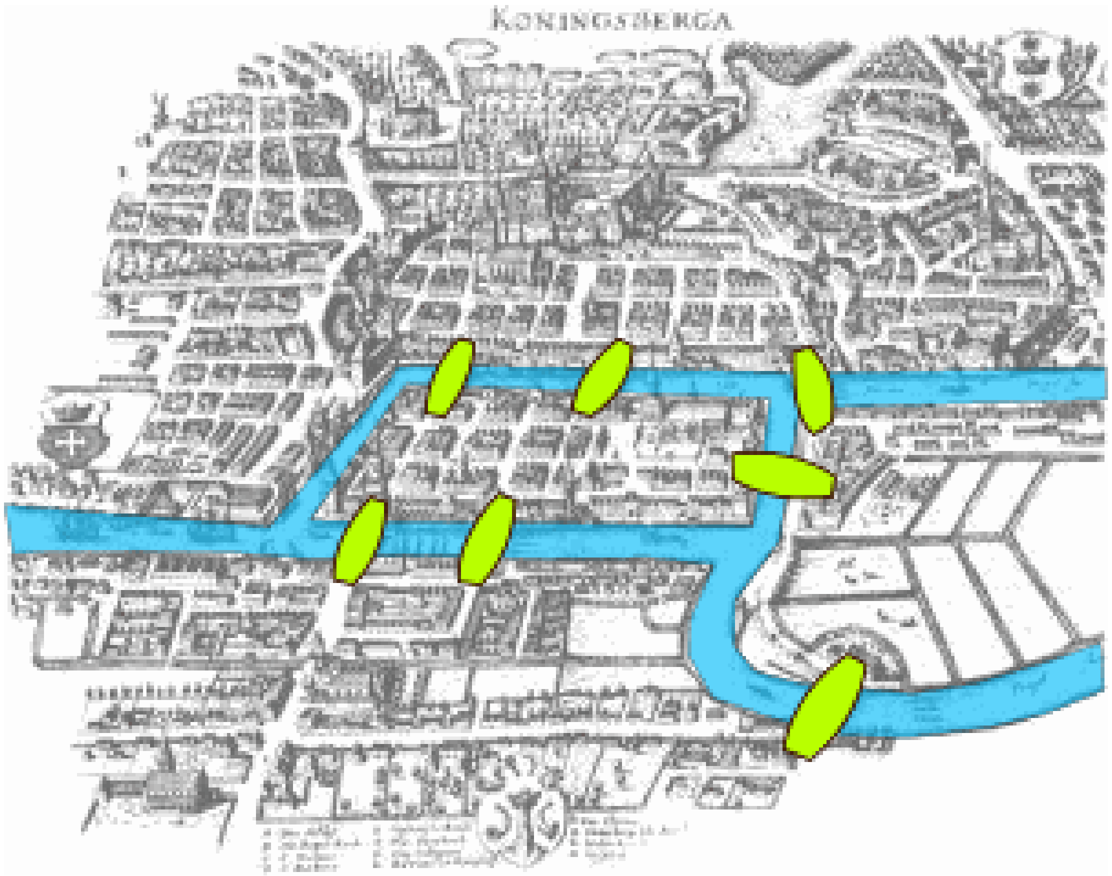
- **Đường đi:**

Đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v có độ dài n của một đồ thị vô hướng là một dãy n cạnh nối các đỉnh, sao cho đỉnh đầu là u và đỉnh cuối là v. Đối với đồ thị đơn thì đường đi được kí hiệu bởi dãy các đỉnh x0, x1, …, xn (không nhất thiết các đỉnh phải khác nhau).

- **Đường đi đơn:** là đường đi không đi qua 1 cạnh quá 1 lần.
- **Chu trình:** là đường đi có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- **Chu trình đơn:** là chu trình không đi qua 1 cạnh quá 1 lần.

Đường đi

- **Bài toán 7 cây cầu**



Đường đi

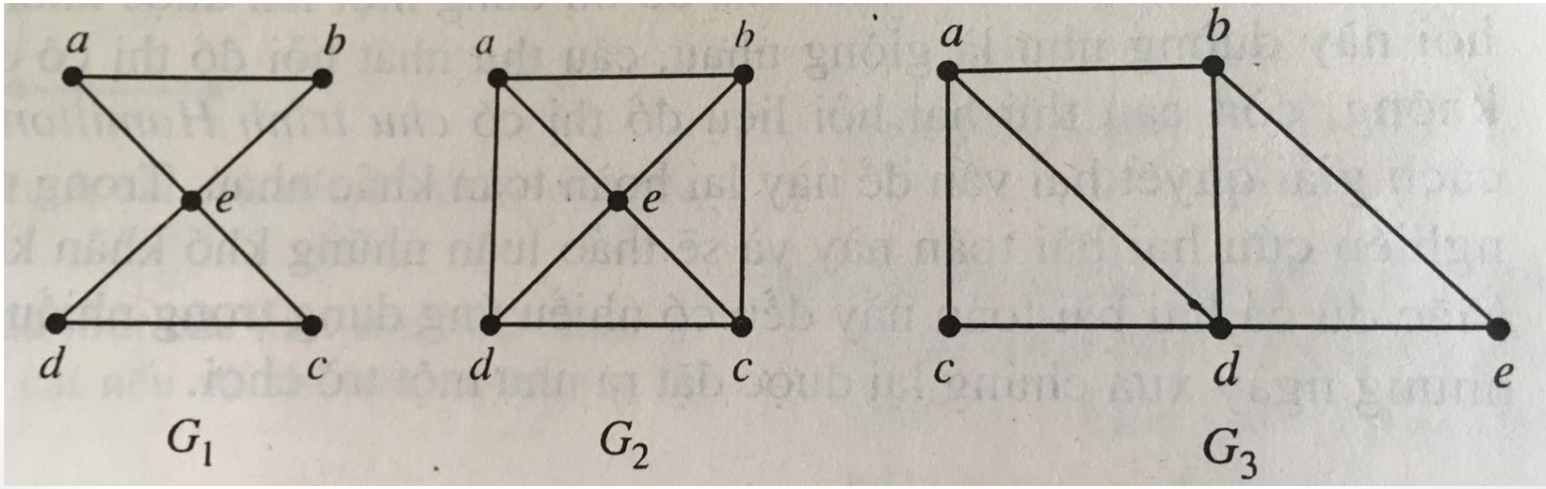
- **Đường đi Euler:**

Đường đi Euler trong đồ thị G là đường đi đơn chứa mọi cạnh của G.

- **Chu trình Euler:**

Chu trình Euler trong đồ thị G là chu trình đơn chứa mọi cạnh của G.

Ví dụ: trong các đồ thị bên dưới, đồ thị nào có chu trình Euler, đường đi Euler, hay chỉ ra chúng



Đường đi

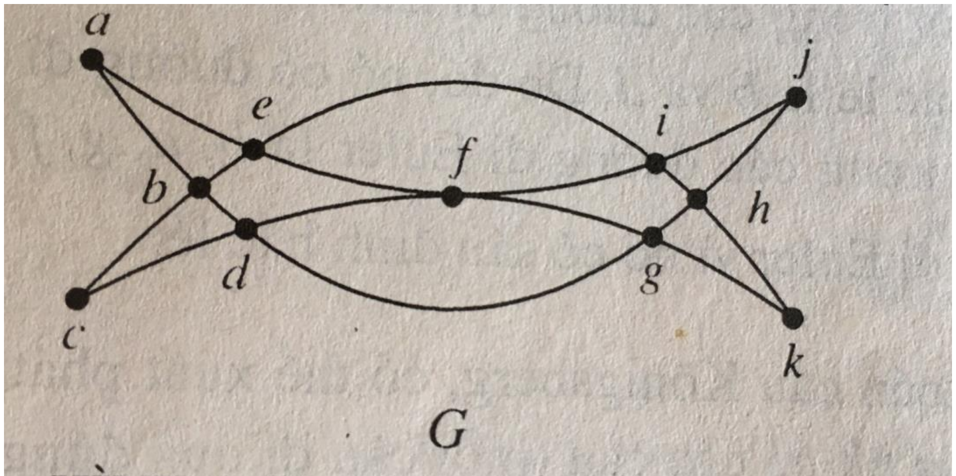
- **Định lý 1: (Điều kiện cần và đủ cho chu trình Euler)**

Một đa đồ thị liên thông **có chu trình Euler** nếu và chỉ nếu **mỗi đỉnh** của nó đều có **bậc chẵn**.

- **Định lý 2: (Điều kiện cần và đủ cho đường đi Euler)**

Một đa đồ thị liên thông **có đường đi Euler** nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó **có đúng hai đỉnh bậc lẻ**.

Ví dụ:



HÌNH 6. Thanh mã tấu của Mohammed.

Đường đi

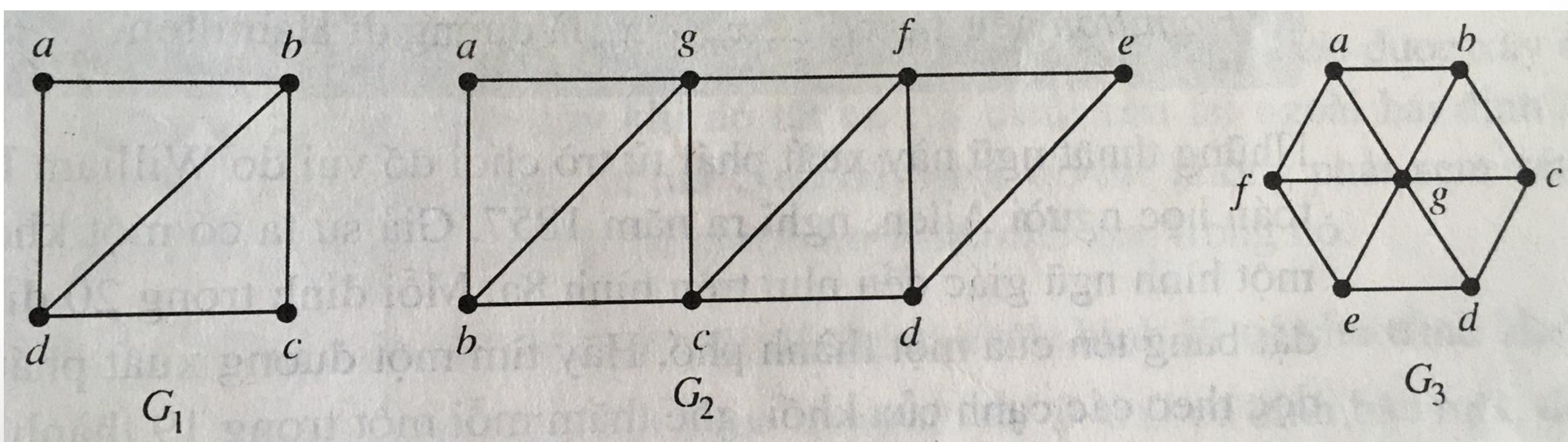
- **Định lý 1: (Điều kiện cần và đủ cho chu trình Euler)**

Một đa đồ thị liên thông **có chu trình Euler** nếu và chỉ nếu **mỗi đỉnh** của nó đều có **bậc chẵn**.

- **Định lý 2: (Điều kiện cần và đủ cho đường đi Euler)**

Một đa đồ thị liên thông **có đường đi Euler** nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó **có đúng hai đỉnh bậc lẻ**.

Ví dụ:



Đường đi

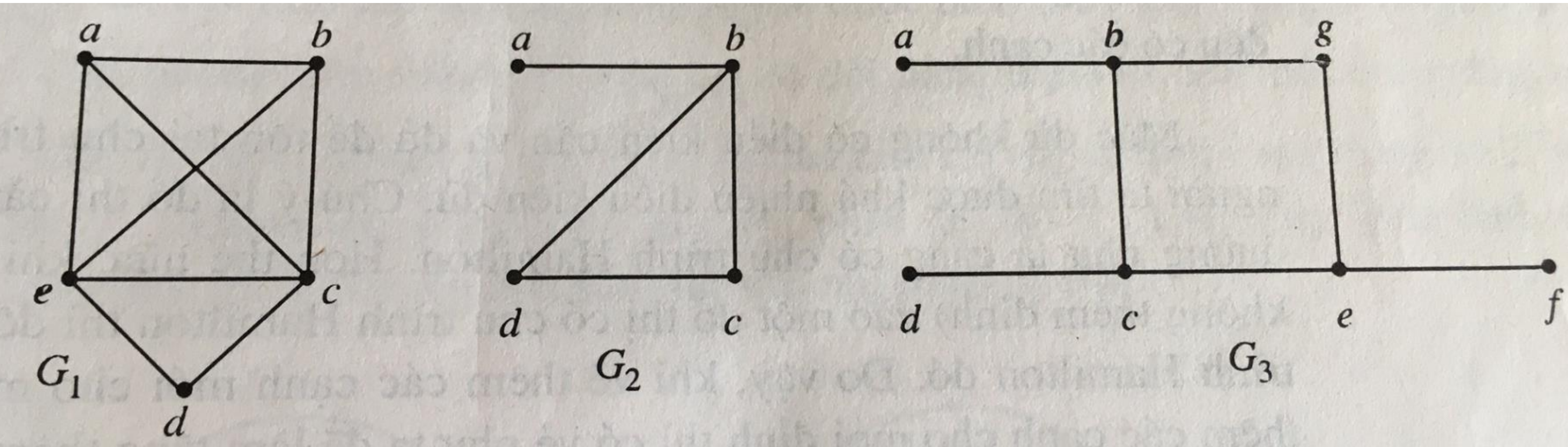
- **Đường đi Hamilton:**

Đường đi Hamilton trong đồ thị G là đường đi qua tất cả các đỉnh và không có đỉnh nào lặp lại.

- **Chu trình Hamilton:**

Chu trình Hamilton trong đồ thị G là chu trình chứa tất cả các đỉnh và không có đỉnh nào lặp lại trừ hai đỉnh đầu và cuối.

Ví dụ:



HÌNH 10. Ba đơn đồ thị.

Đường đi

- Đối với đường đi và chu trình Hamilton ta không có điều kiện cần và đủ để xác định có hay không có chúng trong một đồ thị. Tuy nhiên, cũng có một vài **điều kiện đủ** để ta có thể kiểm tra xem có **tồn tại 1 chu trình Hamilton** trong đồ thị hay không.
- **Định lý Dirac**:

Giả sử G là một đơn đồ thị liên thông có n đỉnh, trong đó $n \geq 3$, khi đó G có chu trình Hamilton nếu **bậc của mỗi đỉnh** ít nhất bằng **n/2**.

- **Định lý Ore:**

Nếu G là một đơn đồ thị n đỉnh, trong đó $n \geq 3$, sao có $\mathbf{deg}(\boldsymbol{u}) + \mathbf{deg}(\boldsymbol{v}) \geq \boldsymbol{n}$ với **mọi cặp đỉnh không liền kề** u và v trong G, thì G sẽ có chu trình Hamilton.

Cả 2 điều kiện này có thể cho thấy một cách trực quan rằng: một đồ thị có càng nhiều cạnh thì sẽ có nhiều khả năng có chu trình Hamilton.

Đường đi

- Do chỉ là điều kiện đủ thôi, nên nếu đồ thị G không thỏa các giả thiết của hai định lý Dirac và Ore thì nó vẫn có thể có chu trình Hamilton.
- Ví dụ: đồ thị C5 có chu trình Hamilton nhưng nó không thỏa các giả thiết của định lý Dirac và Ore