ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN SỐ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Định nghĩa đạo hàm:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (*)$$

For a finite 'Δx'

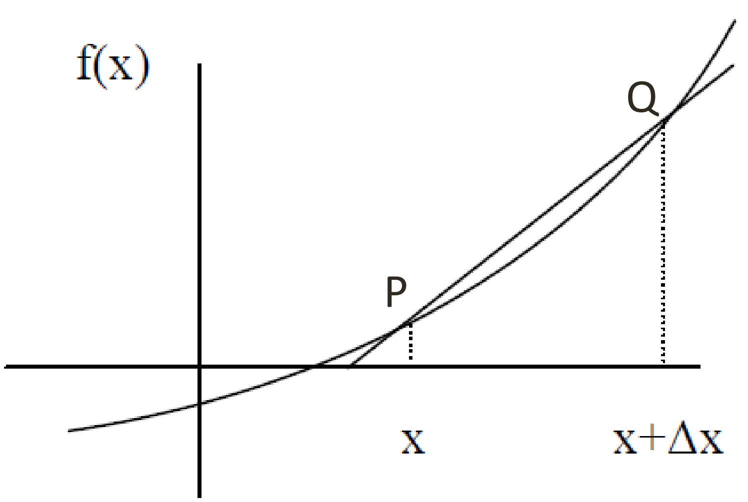
$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Đạo hàm là giới hạn nếu có của giới hạn trong (*).
Nếu ta bỏ đi giới hạn, tức là bỏ đi lim($\Delta x \to 0$), ta sẽ có một công thức xấp xỉ đơn giản của đạo hàm.
Ngoài ra, ta còn có thể xây dựng thêm các công thức đạo hàm khác dựa vào công thức nội suy Lagrange hoặc Newton hoặc theo công thức khai triển Taylor.

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Định nghĩa đạo hàm:**

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Theo công thức xấp xỉ ở trên thì vế trái f'(x) là hệ số góc của tiếp tuyến tại x, còn vế phải là hệ số góc của cát tuyến PQ đi qua x.
Theo hình vẽ ta thấy, nếu Δx càng bé thì công thức xấp xỉ càng tốt. (điều này có chắc chắn trong tính toán số hay không?)
Lưu ý: Theo công thức tính xấp xỉ này thì ta không cần quan tâm đến hàm f(x), mà chỉ cần các điểm nội suy (x,f(x)) và (x+Δx,f(x+Δx)).

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Công thức sai phân lùi để tính đạo hàm cấp 1:**

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Theo công thức xấp xỉ trên, để tính đạo hàm f'(x) tại điểm x_i ta sử dụng các điểm nội suy (x_i,f(x_i)) và (x_{i-1},f(x_{i-1})). Ở đây, f'(x_i) được tính theo x_{i-1} nên ta gọi là sai phân lùi. Còn ngược lại theo công thức ở trang sau f'(x_i) được tính theo x_{i+1} thì được gọi là sai phân tiến. Cuối cùng, nếu f'(xi) được tính theo x_{i-1} và x_{i+1} thì được gọi là sai phân trung tâm.

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Công thức sai phân tiến để tính đạo hàm cấp 1:**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} + 0(\Delta x)$$

Theo công thức xấp xỉ trên, để tính đạo hàm f'(x) tại điểm x_i ta sử dụng các điểm nội suy $(x_i, f(x_i))$ và $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Ở đây, $f'(x_i)$ được tính theo x_{i+1} nên ta gọi là sai phân tiến.

Lứu ý: trong công thức trên ta thấy số hạng $0(\Delta x)$, gọi là sai số, ở công thức này sai số phụ thuộc Δx (bậc 1) nên sai số ở công thức này cũng như ở công thức sai phân lùi là tuyến tính.

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Công thức sai phân trung tâm để tính đạo hàm cấp 1:**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + 0(\Delta x)^2$$

Theo công thức xấp xỉ trên, để tính đạo hàm f'(x) tại điểm x_i ta sử dụng các điểm nội suy $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ và $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$, nên ta gọi là sai phân trung tâm.
Lứu ý: trong công thức trên ta thấy số hạng $0(\Delta x)^2$, gọi là sai số, ở công thức này sai số phụ thuộc $(\Delta x)^2$ (bậc 2) nên sai số ở công thức này cũng như ở công thức sai phân lùi là bậc 2.
Vậy so sánh các công thức ta thấy công thức sai phân trung tâm cho kết quả tốt hơn, điều này một phần là do ta sử dụng nhiều thông tin hơn so với công thức sai phân tiến/lùi.
Ngoài những công thức này, sinh viên có thể tìm hiểu thêm các công thức sai phân với số điểm nội suy nhiều hơn như 3 và 5 điểm nội suy trong sách giáo trình (Numerical Analysis, Richard L. Burden, J. Douglas Faires.)

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Công thức sai phân tiến để tính đạo hàm cấp 2:**

$$f''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{(\Delta x)^2} + 0(\Delta x)$$

Để tính đạo hàm cấp 2 thì ta cần ít nhất là 3 điểm nội suy $(x_i,f(x_i))$, $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ và $(x_{i+2},f(x_{i+2}))$, đối với công thức sai phân tiến. Điều này tương tự cho công thức sai phân lùi và sai phân trung tâm.

Công thức sai phân lùi cũng tương tự, đạo hàm cấp 2 tại x_i sẽ được tính thông qua x_{i-1} và x_{i-2}.

- **Công thức sai phân trung tâm để tính đạo hàm cấp 2:**

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{(\Delta x)^2} + 0(\Delta x)^2$$

So sánh hai công thức ta thấy công thức sai phân trung tâm cho sai số bậc 2, còn sai phân tiến/lùi cho sai số bậc 1.

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Ví dụ**

Tính đạo hàm số với bảng số liệu cho như sau

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.3	1.9507	
-0.2	2.0421	
-0.1	2.0601	

a) Dùng công thức sai phân tiến, lùi và trung tâm tính các giá trị đạo hàm cấp 1 của hàm f(x).

x	f(x)	f'(x)		
		Lùi	Trung tâm	Tiến
-0.3	1.9507			0.914
-0.2	2.0421	0.914	0.547	0.18
-0.1	2.0601	0.18		

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Ví dụ**

Tính đạo hàm số với bảng số liệu cho như sau

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.3	1.9507	
-0.2	2.0421	
-0.1	2.0601	

b) Giả sử hàm f(x)=2cos(2x)-x. Tính sai số tương đối (%) từ câu a)

Tiến	f'(x)=-4sin(2x)-1	Sai số tương đối (%)		
		Lùi	Trung tâm	Tiến
-0.3	1.258			27.344
-0.2	0.557	64.093	1.795	67.684
-0.1	-0.205	178.804		

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Ví dụ**

Cho hàm $f(x) = 3xe^x - cosx$ và giá trị hàm tại các điểm cho bên dưới
Tính xấp xỉ đạo hàm cấp 2 f’’(1.3) theo bảng số liệu với khoảng chia h lần lượt là 0.1 và 0.01. So sánh kết quả với f’’(1.3).

x	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
$f(x)$	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

Giải: Lưu ý, do dữ liệu ở bảng chỉ đủ để tính đạo hàm cấp 2 bằng công thức sai phân trung tâm nên ta sẽ chỉ làm cho công thức sai phân trung tâm.
Với h=0.1

$$f''(1.3) \approx \frac{f(1.4) - 2f(1.3) + f(1.2)}{h^2} = 36.641$$

Với h=0.01

$$f''(1.3) \approx \frac{f(1.31) - 2f(1.3) + f(1.29)}{h^2} = 36.5$$

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Ví dụ**

Giải: So sánh với f’’(1.3):

$$f''(x) = (3xe^x + 3e^x + sinx)' = 3xe^x + 3e^x + 3e^x + cosx$$

$$f''(1.3) = 36.59353$$

$$\epsilon(0.1) = \frac{|36.59353 - 36.641\,|}{36.59353}100 = 0.12972\%$$

$$\epsilon(0.01) = \frac{|36.59353 - 36.5\,|}{36.59353}100 = 0.27841\%$$

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Ví dụ**

Nhận xét:
- Sai số ứng với h=0.1 bé hơn với h=0.01. Điều này có vẻ mâu thuẫn với lý thuyết khi mà ta đã biết được rằng sai số tỉ lệ thuận với h (nghĩa là h càng bé thì sai số càng bé).
- Thực tế thì nghịch lý này xảy ra là do sự bất ổn định trong công thức tính xấp xỉ đạo hàm. Người ta chứng minh được rằng sai số trong các công thức còn tỷ lệ nghịch với h nữa, nghĩa là, khi h quá bé thì sai số sẽ tăng trở lại. Sự tăng này do sai số khi làm tròn trong quá trình tính toán. Để hạn chế sự bất ổn định này, người ta sẽ chọn h không quá bé hoặc phải lấy nhiều chữ số sau dấu phẩy hơn (lấy nhiều chữ số có nghĩa).

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **I. ĐẠO HÀM SỐ**
- **Ví dụ**

Để tính đạo hàm cấp 2 f’’(1.3) theo công thức sai phân tiến/lùi thì đối với ví dụ này ta cần thêm dữ liệu.
Để minh họa sử dụng công thức sai phân tiến chẳng hạn: ta có thể tính đạo hàm f’’(1.2) với h=0.1 (tương tự có thể tính f’’(1.29) với h=0.01)

$$f''(1.2) \approx \frac{f(1.4)-2f(1.3)+f(1.2)}{h^2} = 36.641$$

$$f''(1.29) \approx \frac{f(1.31)-2f(1.3)+f(1.29)}{h^2} = 36.641.$$

Tương tự đối với việc áp dụng công thức sai phân lùi.

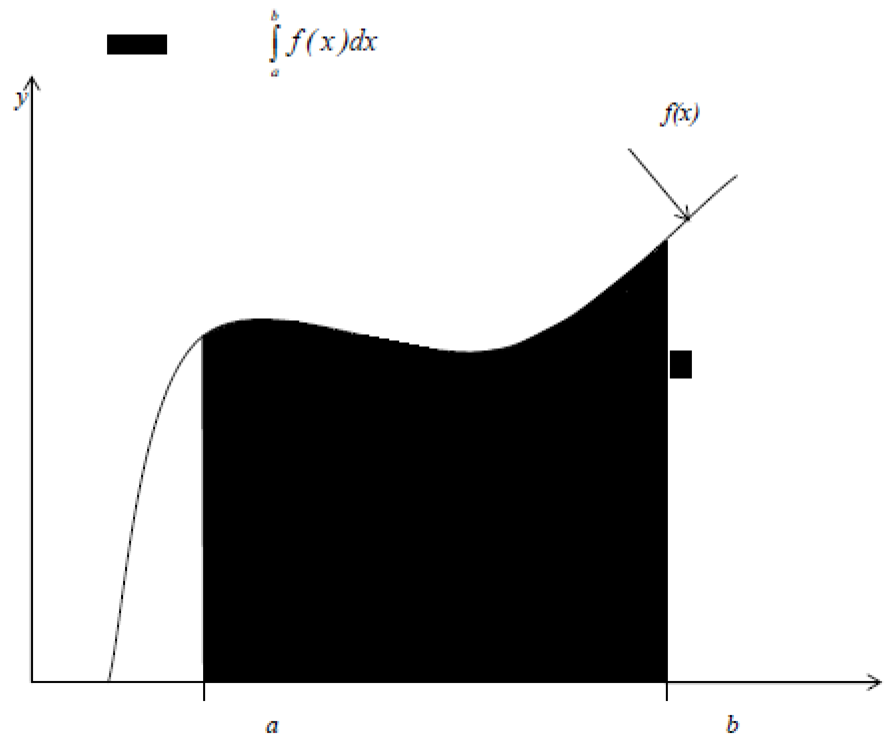
TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **II. TÍCH PHÂN SỐ**
- **II.1. Công thức hình thang**

Công thức hình thang với một khoảng chia.

Cho hàm f(x)>0 liên tục trong [a,b]. Khi đó tích phân xác định của f(x) trong [a,b] chính là diện tích của hình thang cong (phần to đen hình bên).

$$I = \int_a^b f(x)dx$$



TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **II. TÍCH PHÂN SỐ**
- **II.1. Công thức hình thang**

Công thức hình thang với một khoảng chia.

Diện tích này đơn giản có thể được xấp xỉ bởi diện tích hình thang như hình bên.

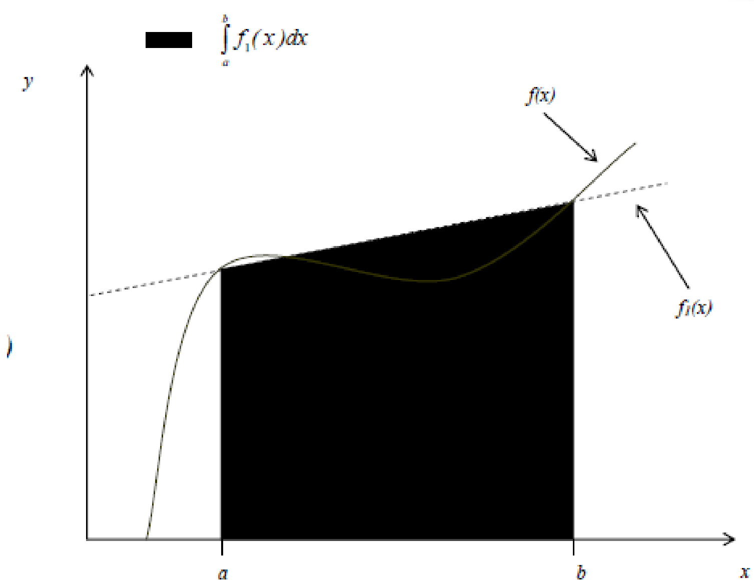
Nhìn vào hình ta có thể nhận ra, diện tích hình thang này chính là tích phân của đường thẳng, $f_1(x)$, trong [a,b]

$$\int_a^b f_1(x)dx$$

$$= \int_a^b [f_{(a)} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]dx$$

$$= \frac{1}{2}(b - a)[f(b) + f(a)]$$

Đây chính là công thức hình thang với 1 khoảng chia

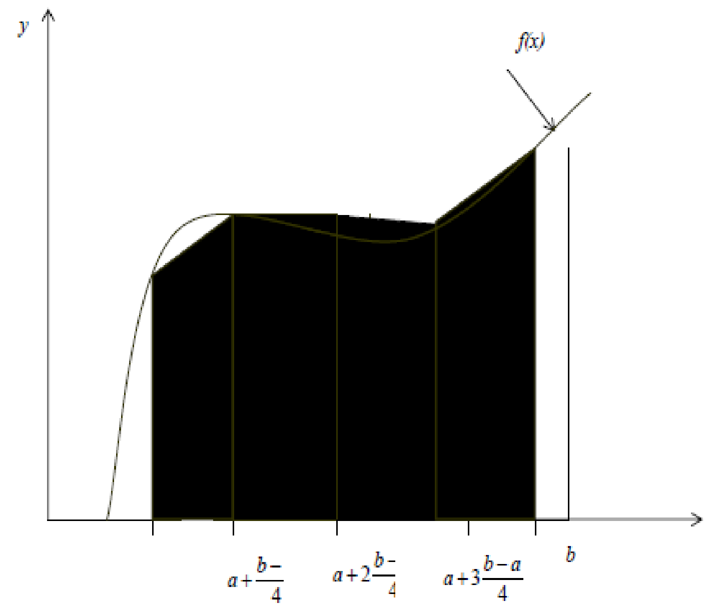


TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **II. TÍCH PHÂN SỐ**
- **II.1. Công thức hình thang**

Công thức hình thang với số khoảng chia bất kì.

Giả sử [a,b] được chia thành n khoảng chia bằng nhau, với khoảng chia h=(b-a)/n. (Hình bên minh họa cho số khoảng chia là 4).



Diện tích hình thang cong lúc này sẽ được xấp xỉ bằng tổng bốn hình thang (phần tô đen) như hình bên. Mỗi diện tích hình thang nhỏ được tính bằng công thức được thiết lập ở trên. Khi đó diện tích hình thang cong

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \ldots + \int_{a+(n-2)h}^{a+(n-1)h} f(x)dx + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)dx$$

Được xấp xỉ bằng $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\} + f(b)\right]$$

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **II. TÍCH PHÂN SỐ**
- **II.1. Công thức hình thang**

Ở trên là công thức tính tích phân số bằng công thức hình thang với trường hợp tổng quát với số khoảng chia là n.

- Trong cách thiết lập công thức này, ta đã xấp xỉ hàm f(x) bằng hàm nội suy đa thức tuyến tính trong từng khoảng chia. Cũng bởi vì chỉ xấp xỉ tuyến tính một đường cong f(x) nên sai số trong công thức này tương đối lớn và ta có thể tăng sự hội tụ bằng cách tăng số khoảng chia lên.
- Một cách khác để tăng tốc độ hội tụ là ta sử dụng các hàm đa thức xấp xỉ bậc cao, bậc 2 chẳng hạn, khi đó ta sẽ có công thức 1/3 Simpson (phải là đa thức thì mới tích phân được, hàm bất kì chưa chắc tích phân được nhé). Tổng quát, khi sử dụng đa thức cấp n ta sẽ được công thức xấp xỉ tích phân Newton-Cotes.
- Mặc dù tăng bậc đa thức có thể tăng tốc độ hội tụ nhưng bù lại, việc tính tích phân có thể sẽ lâu hơn. Ví dụ như công thức 1/3 Simpson thì cần ít nhất 3 điểm trong 1 khoảng chia để tính (công thức hình thang chỉ cần 2 điểm).
- Do đó trong tính toán cần cân nhắc để việc tính toán chính xác và tiết kiệm.

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **II. TÍCH PHÂN SỐ**
- **II.1. Công thức hình thang**

Trong tính toán số, nên nhớ tính nhiều chưa chắc sẽ cho kết quả tốt vì sự cộng dồn sai số làm tròn có thể dẫn đến sự bất ổn định.

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **II. TÍCH PHÂN SỐ**
- **II.1. Công thức hình thang**

Ví dụ: tính tích phân xấp xỉ

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx$$

Bằng công thức tích phân hình thang trong trường hợp:
a) Một khoảng chia
b) Bốn khoảng chia

Giải:
a) Với một khoảng chia

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx \approx \frac{1}{2}[f(2)+f(1)](2-1) = \frac{1}{2}[\sqrt{5}+\sqrt{2}]$$

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **II. TÍCH PHÂN SỐ**
- **II.1. Công thức hình thang**

Ví dụ: tính tích phân xấp xỉ

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx$$

Bằng công thức tích phân hình thang trong trường hợp:
a) Một khoảng chia
b) Bốn khoảng chia

Giải:
a) Với một khoảng chia

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx \approx \frac{1}{2}[f(2)+f(1)](2-0) = \left[\sqrt{5}+1\right] = 3.236$$

Giá trị chính xác của tích phân trên 2.958.

Sai số: $\epsilon(\%) = \frac{|3.236-2.958|}{2.958}100 = 9.398\%$

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **II. TÍCH PHÂN SỐ**
- **II.1. Công thức hình thang**

Giải:

b) Với bốn khoảng chia

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx \approx \frac{1}{2.4}\{f(2) + 2[f(0.5) + f(1) + f(1.5)] + f(1)\}(2-0)$$
$$= 2.976$$

Giá trị chính xác của tích phân trên 2.958.

Sai số: $\epsilon(\%) = \frac{|2.976-2.958|}{2.958}100 = 0.608\%$