

电动力学(卷I)(第一版)



探星阁物理学讲义（理论物理系列）

电动力学(卷I)

(第一版)

LD 编

第一版前言

电动力学是研究电磁场动力学性质的一门学科，研究对象包括静止的电磁场和运动的电磁场。对静止电磁场的研究构成静电学和静磁学，主要研究在给定源、导体、介质分布的情况下如何求解空间中的电磁场分布。而对运动的电磁场的研究才构成了电动力学这门学科的应有之义，包括对电磁波在空间中的传播、电磁场在不同参考系间的变换以及电磁辐射等问题的研究。而本卷作为电动力学系列讲义的第一卷，研究静止的电磁场以及电磁波的传播问题。至于电磁场如何在不同参考系间变换，以及电磁波如何产生即电磁辐射问题我们留到第二卷中介绍。

我还记得我在大一的时候问我表哥：电磁学和电动力学有什么区别？他的回答是：“凡是名字中出现‘力学’二字的对数学要求都很高。”因此，对于这两门课的区别，我现在的理解如下。

电磁学帮助我们建立了对电磁世界中基本概念，比如电场、电势、电介质；磁场、磁矢势、磁介质；以及电磁感应等等诸多方面，的初步认识，帮助我们搭建了一个雏形的框架，形成了一个初步的物理图像；而且电磁学的授课逻辑是“归纳”，其任务之一是从各种实验事实中归纳出电磁领域的基本实验定律，并加以简单运用以辅助理解。但是由于数学功夫的不足，我们无法看清这些概念的更深刻的内涵与它们之间更深刻的联系。

从这个角度来讲，电动力学毋宁说成是电磁学的2.0版本，对于这门课的学习首先要求我们掌握更高阶的数学知识，包括但不限于矢量分析、张量与微分几何的语言。而对于本卷的内容，只是掌握矢量分析就已经足够了，它们被罗列在了第一章“数学准备I”中。在掌握了数学语言之后，再把电磁学中归纳出的实验定律“翻译”成 Maxwell 方程组，然后你会发现这就是几乎所有你拥有的——利用 Maxwell 方程组，外加一些其他零星的实验定律，比如线性介质的规律、Ohm 定律等等，你就可

以一步一步地推出本讲义的全部内容。仿佛 Euclid 的《几何原本》一样，是一个公理化的演绎体系。

因此，本讲义重点突出的是这个推导和演绎的过程，而对于电磁相关的基本的物理概念、物理定律如何得出、如何理解等问题相对地就没有特别细致地说明，因为笔者认为这是电磁学课程及其讲义的职责。所以，读者要想彻底明白本讲义所讲的内容，请确保你已经学好了电磁学，明白了这些基本概念、基本定律的基本物理内涵。

当然这也并不意味着推导演绎比归纳总结更加重要、数学功夫比物理理解更加重要，而是恰恰相反——你只有理解了你笔尖下的算式你才算学懂了物理。有了理解之后，数学功夫也是必要的。我记得杨振宁先生曾经将各个伟大物理学家的风格用一个词加以凝结，其中对 Pauli 的概括就是“Power”，我觉得是在说 Pauli 有很了得的数学功底，这些给予了他很大的力量。希望我们都变得更有力量！

最后在附录中，我加入了一些其他的东西，有一些和我本人的学习、成长相关，还有一些科学史¹，希望分享给大家，与大家共勉。

我想把这本讲义献给我的父母，他们一直是我坚实的后盾；献给我的老师和同学们，特别是 ZMQ、WYR、HZA、WYT 和 CYY 同学，感谢他们在学习过程中同我进行许多的交流讨论，让我受益良多；献给探星阁，梦开始的地方，也希望探星阁越来越好；献给书院的学辅和学弟学妹们，希望这份讲义可以对你们的电动力学学习有所参考价值、有所帮助，或许明年我可以拿这一份小册子开讨论班。

由于是第一版且笔者水平有限，本小册子一定会有一大堆的问题。如果读者发现了任何的知识性错误、非知识性错误（比如错别字、符号勘误等），或者你觉得有哪些内容怎样写可以更好，请不要犹豫，欢迎立刻联系我们！²

期待你的读后感，让我们一起把这份讲义打磨得越来越好！

LD

2025 年盛夏

¹ 科学史的内容是我从《法拉第、麦克斯韦和电磁场——改变物理学的人》这本书中看来的。那是2024年夏天，我上大一，当时电磁学和高数的期中考试都考崩了，就想从科学史中寻找安慰。所幸的是我发现并下单了这本书，它鼓励我走出了那段情绪低落的日子。

² 联系方式：微信公众号搜索“探星阁”，并在聊天框或者发布本小册子推送的评论区留言。

目录

1 数学准备I	1
1.1 指标法	3
1.1.1 Einstein 求和约定	3
1.1.2 Kronecker 符号与 Levi - Civita 符号	3
1.1.3 矢量分析常用公式推演	4
1.2 并矢	12
1.2.1 并矢的基本运算规则	12
1.2.2 并矢公式	13
2 Maxwell 方程组	17
2.1 真空中的 Maxwell 方程组	18
2.1.1 为什么要关注电磁场的散度和旋度	18
2.1.2 真空静电场的散度与旋度	18
2.1.3 真空静磁（感应）场的散度与旋度	20
2.1.4 涡旋电场	21
2.1.5 位移电流	23
2.1.6 真空中的 Maxwell 方程组	25
2.2 连续介质中的 Maxwell 方程组	26
2.2.1 电极化场 \mathbf{P} 与电位移场 \mathbf{D}	26
2.2.2 连续介质中的位移电流	28
2.2.3 磁化场 \mathbf{M} 与磁场 \mathbf{H}	29
2.2.4 Maxwell 方程组的一般形式与连续介质中的 Maxwell 方程组	32

2.3 电磁场的边值关系	33
2.3.1 电场的边值关系	33
2.3.2 磁场的边值关系	34
3 静电学	37
3.1 静电场的 Poisson 方程及其解的唯一性定理	38
3.1.1 静电场的 Poisson 方程	38
3.1.2 一般情形的唯一性定理	39
3.1.3 以导体为边界的唯一性定理	39
3.1.4 有衔接条件的唯一性定理	40
3.2 唯一性定理的妙用	43
3.2.1 Faraday 笼	43
3.2.2 镜像法求解电势分布	45
3.3 分离变量法求电势分布	51
3.3.1 球坐标系下 Laplace 方程的解	51
3.3.2 Legendre 函数的母函数	51
3.3.3 再论球型 Faraday 笼	53
3.3.4 在匀强外场中极化的电介质球	57
3.4 Green 函数法求电势分布	60
3.4.1 Green 函数法的基本精神	60
3.4.2 三类 Green 函数	61
3.4.3 典型的第一类 Green 函数	62
3.4.4 Green 函数法的应用	63
3.5 静电场的能量密度	65
3.5.1 真空中静电场的能量密度	65
3.5.2 有介质存在的情形	67
3.6 电偶极矩	69
3.6.1 电偶极子产生的电场	69
3.6.2 电偶极子在外场中的能量与受力情况	69
3.6.3 电偶极子的电荷密度	70

3.6.4 电偶极层	71
3.6.5 电荷体系的电偶极矩	72
3.6.6 极化电荷的电偶极矩	73
3.6.7 导体球与介质球的等效电偶极矩	74
4 静磁学	77
4.1 磁矢势与磁标势	78
4.1.1 磁矢势	78
4.1.2 磁矢势的简单应用	79
4.1.3 磁标势	80
4.1.4 磁标势的简单应用	82
4.2 静磁场的能量密度	86
4.2.1 真空中静磁场的能量密度	86
4.2.2 有介质存在的情形	89
4.3 磁矩	90
4.3.1 电流环产生的磁矢势	90
4.3.2 磁偶极子	92
4.3.3 电流环在外场中的能量与受力情况	93
4.3.4 电流体系的磁矩	94
4.3.5 磁化电流的磁矩	96
4.3.6 地磁场	97
5 电磁波的传播	99
5.1 电磁场的 d'Alembert 方程及其平面波解	100
5.1.1 d'Alembert 方程的导出	100
5.1.2 d'Alembert 方程的平面波解	101
5.1.3 Helmholtz 方程	104
5.2 电磁波的偏振	105
5.2.1 平面电磁波是横波	105
5.2.2 各类偏振态	106
5.2.3 旋光性	110

5.3 电磁波的能量	111
5.3.1 电磁波的能量密度	111
5.3.2 电磁场能流密度矢量——Poynting 矢量	112
5.4 平面电磁波的反射与折射	116
5.4.1 反射定律与折射定律	116
5.4.2 反射折射的 Fresnel 公式	118
5.4.3 反射光折射光的能流关系与增透膜	120
5.5 导体中的电磁波	124
5.5.1 导体中的电荷	124
5.5.2 导体中的平面电磁波	124
5.5.3 垂直入射情形	127
5.6 谐振腔与波导管	131
5.6.1 以导体为边界时的边界条件	131
5.6.2 矩形谐振腔	132
5.6.3 矩形波导管	134
A 追忆高中往事	137
B 岁月留痕	141
C Michael Faraday	143
D James Clerk Maxwell	147

Chapter 1

数学准备I

电动力学的数学基础（之一）是矢量分析。学习了微积分之后，我们已经有了矢量分析中基本的概念，如梯度、散度、旋度，以及掌握了两个重要的积分恒等式——Gauss 公式与 Stokes 公式。

而在矢量分析中会遇到各种各样的矢量运算、算符运算与公式推演，用传统方法去一项一项地展开计算必然显得冗杂、繁琐。我们需要新的数学工具，它就是指标法¹。我们本讲义的行文全部采用了指标法的语言，因此有必要在第一章将其交代清楚。

第一章首先介绍了能够为物理学家节省纸墨的小技巧——Einstein 求和约定，它已经被广泛地运用到了现代理论物理学中。然后引入（且仅引入了）了两个重要的符号——Kronecker 符号和 levi-Civita 符号，在行文中还穿插着介绍了它们的一些代数性质。接着，我们利用了上述工具，将矢量分析中常用的公式打包推演了一遍，从中读者可以明显感受到指标法的威力与魅力。

此外，由于某些积分恒等式表示的需要，我们还要引入并矢，作为一种“记忆的拐棍儿”²。

然而，本讲义所用到的数学公式并不全部包含在第一章中，在后续章节中会偶尔插播所用到的数学公式，并现场给出指标法证明。

下面分享一下笔者撰写第一章时所用的参考资料：

¹这个名字是我本人起的，我不知道有无官方名称。

²“记忆的拐棍”的基本性质是：本身没有实际意义，但是你知道它了之后就可以帮你记住（或者说掌握）一些东西。这是我从我们电动力学老师那学来的词儿。其实不只是并矢，指标法也具有这样的性质。

- 首先是杨孔庆老师的《数学物理方法》，是蓝色皮的那一版。我的指标法就是从这本书的第一章中了解到的³。这本书虽说错误比较多，并非是主流教材，但是其中有指标法还是很不错的。
- 然后就是郭硕鸿老师的《电动力学（第四版）》，我从这本书的附录中了解到了并矢。

下面进入第一章，数学准备章节I。这一章的内容是进入电磁世界的入场券！

³ 尽管初识指标法是2024年寒假，我表哥的讲学内容。

1.1 指标法

1.1.1 Einstein 求和约定

今后我们约定，凡是某项中出现两重复指标求和的形式时，均省略去求和号。这是一种官方约定，称为 **Einstein 求和约定**。

作为例子：设有两个矢量 $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$, 则它们的内积为：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_i b_i$$

最后一个等号我们就启动了Einstein求和约定。注意，今后讨论中我们均这样做，除非特别声明。

1.1.2 Kronecker 符号与 Levi - Civita 符号

定义 **Kronecker 符号**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (1.1)$$

定义 **Levi - Civita 符号**:

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} = \begin{cases} -1, & \tau(p_1 \cdots p_n) \text{ 为奇数} \\ 0, & p_i = p_j (\exists i, j = 1, 2, \cdots, n) \\ 1, & \tau(p_1 \cdots p_n) \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $\tau(p_1 \cdots p_n)$ 为排列 $p_1 \cdots p_n$ 的逆序数，这在线性代数中是一个基本概念。

若我们推广排列和逆序数之定义，可以直接记为：

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} = (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_n)} \quad (1.3)$$

1.1.3 矢量分析常用公式推演

下面我们用指标法推演矢量分析中常用的数学公式。我们约定以下所有场（矢量场与标量场）均为连续可微的场，除非特别声明。

1. 行列式

n 阶行列式之传统定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (1.4)$$

请注意，这里 p 有重复指标，而 l 没有重复。利用新的Levi - Civita符号改写之：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

物理中所需要的多为3阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$$

作为例子：写出3阶行列式的非 Einstein 求和形式的公式。本例可以作为一个辅助，辅助读者接受 Einstein 求和。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} \\ &= \varepsilon_{1jk} a_{11} a_{j2} a_{k3} + \varepsilon_{2jk} a_{21} a_{j2} a_{k3} + \varepsilon_{3jk} a_{31} a_{j2} a_{k3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_{12k}a_{11}a_{22}a_{k3} + \varepsilon_{13k}a_{11}a_{23}a_{k3} \\
&+ \varepsilon_{21k}a_{12}a_{21}a_{k3} + \varepsilon_{23k}a_{12}a_{23}a_{k3} \\
&+ \varepsilon_{31k}a_{13}a_{21}a_{k3} + \varepsilon_{32k}a_{13}a_{22}a_{k3} \\
&= \varepsilon_{123}a_{11}a_{22}a_{33} + \varepsilon_{132}a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ \varepsilon_{213}a_{12}a_{21}a_{33} + \varepsilon_{231}a_{12}a_{23}a_{31} \\
&+ \varepsilon_{312}a_{13}a_{21}a_{32} + \varepsilon_{321}a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

一个建议是：若你无法理解下面几页的公式推演，就在你的脑海中进行这个展开成一长串的过程，然后利用这个展开后的长串去理解我们所进行的一些操作。这常常会起到帮助。

2. 矢量叉乘、三重积与三重矢积

- 矢量叉乘：

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i A_j B_k \quad (1.5)$$

- 三重积：

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i C_i = (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) C_i \\
&= \varepsilon_{ijk} C_i A_j B_k
\end{aligned}$$

把 ε_{ijk} 的 i, j, k 3 个指标进行偶对换，其符号不变，故我们能得到一个有用的公式：

$$\varepsilon_{ijk} C_i A_j B_k = \varepsilon_{jki} A_j B_k C_i = \varepsilon_{kij} B_k C_i A_j$$

即：

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (1.6)$$

- 三重矢积

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \varepsilon_{ijk} e_i A_j (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k \\ &= \varepsilon_{ijk} e_i A_j \varepsilon_{kmn} B_m C_n\end{aligned}$$

下面要引入一个常用的公式（证明略，可自行验证）

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

于是：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ik} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jk} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kk} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

由于 ε_{kmn} 的指标中只要有重复的，它就会变成0，故对于最后非零的结果而言，不会出现 ik 或 jk 或 mk 或 nk 指标相同的情况，于是这个行列式就变成了：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & 0 \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix} \\ &= \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}\end{aligned}\tag{1.7}$$

这个公式相当常用。有了这公式，我们有：

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \varepsilon_{ijk} e_i A_j (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} e_i A_j B_m C_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\mathbf{e}_i A_j B_m C_n \\
&= \delta_{im}\delta_{jn} \mathbf{e}_i A_j B_m C_n - \delta_{in}\delta_{jm} \mathbf{e}_i A_j B_m C_n \\
&= \mathbf{e}_i A_j B_i C_j - \mathbf{e}_i A_j B_j C_i
\end{aligned}$$

即：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.8)$$

其中我们还用到了一个小技巧（或者说其实就是一种理解方式）

$$\delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i = A_j B_j \quad (1.9)$$

你可以称之为 δ_{ij} 的“挑选指标的功能”。

3. 梯度场的散度与旋度

- 散度

$$\nabla \cdot \nabla u = \partial_i(\nabla u)_i = \partial_i \partial_i u = \nabla^2 u \quad (1.10)$$

- 旋度

$$\nabla \times \nabla u = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\nabla u)_k = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j \partial_k u$$

而：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j \partial_k u &= -\varepsilon_{ikj} \mathbf{e}_i \partial_j \partial_k u \\
&= -\varepsilon_{ikj} \mathbf{e}_i \partial_k \partial_j u \\
&= -\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j \partial_k u
\end{aligned}$$

故：

$$\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j \partial_k u = 0$$

即：

$$\nabla \times \nabla u = 0 \quad (1.11)$$

这也反映了一个重要的结论：像 ε_{ijk} 这样相邻指标做一次交换符号变号的性质叫做“反对称性”；而像 $\partial_j \partial_k$ 这样交换指标（从而变成 $\partial_k \partial_j$ ）但符号不变的性质叫“对称性”。一个结论是当某项中同时出现对称指标与反对称指标的元素时，该项必为0。其原因很好地体现在了上述证明过程中。

4. 叉乘场的散度与旋度

- 散度

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \partial_i (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i \\
 &= \partial_i (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k + \varepsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k \\
 &= \varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k - \varepsilon_{ikj} (\partial_i B_k) A_j \\
 &= (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

从这个例子(以及 (1.11) 那个例子)可以看出 ε_{ijk} 在算式中指标的顺序是重要的，且调换顺序时须考虑符号的变化。

- 旋度

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k \\
 &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\varepsilon_{mnk} A_m B_n) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} \mathbf{e}_i (\partial_j A_m) B_n + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} \mathbf{e}_i (\partial_j B_n) A_m \\
 &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \mathbf{e}_i (\partial_j A_m) B_n + (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \mathbf{e}_i (\partial_j B_n) A_m \\
 &= \mathbf{e}_i B_j \partial_j A_i - \mathbf{e}_i (\partial_j A_j) B_i + \mathbf{e}_i (\partial_j B_j) A_i - \mathbf{e}_i A_j \partial_j B_i \\
 &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

我们发现其中出现了一个奇怪的东西 $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$, 它是这样一个矢量:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} &= (B_1 \partial_1 + B_2 \partial_2 + B_3 \partial_3)(A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (B_1 \partial_1 A_1 + B_2 \partial_2 A_1 + B_3 \partial_3 A_1) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (B_1 \partial_1 A_2 + B_2 \partial_2 A_2 + B_3 \partial_3 A_2) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (B_1 \partial_1 A_3 + B_2 \partial_2 A_3 + B_3 \partial_3 A_3) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

这个式子常与跟“并矢”有关的公式一起使用, 对于什么是并矢及其相关公式敬请往下看.

5. 点乘场的梯度

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= e_i \partial_i (A_j B_j) \\ &= e_i B_j \partial_i A_j + e_i A_j \partial_i B_j \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) e_i B_j \partial_m A_n + (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) e_i A_j \partial_m B_n + e_i B_j \partial_j A_i + e_i A_j \partial_j B_i \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} e_i A_j \partial_m B_n + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} e_i B_j \partial_m A_n + e_i B_j \partial_j A_i + e_i A_j \partial_j B_i \\ &= \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned} \tag{1.14}$$

6. Gauss 公式与 Stokes 公式

Gauss 公式与 Stokes 公式为:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot dl = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$$

或者这样改写:

$$\iiint_V dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \oint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \tag{1.15}$$

$$\oint_{\partial S} dl \cdot \mathbf{A} = \iint_S d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.16)$$

我们将微分变量 dV 、 $d\mathbf{s}$ 写在前面是有道理的：这样保证了矢量分析中一大堆的积分恒等式有一种便于记忆的结构。

上面二式的指标表示为：

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} ds_i A_i = \iiint_V dV \partial_i A_i \\ \oint_{\partial S} dl_i A_i = \iint_S \varepsilon_{ijk} ds_j \partial_k A_i \end{cases} \quad (1.17)$$

在矢量分析中有好多奇怪的积分恒等式，它们的推导与证明普遍要用到 Gauss 公式与 Stokes 公式，需要我们保持对其指标形式的敏感性。只要出现了相同的结构，就可以使用 Gauss 公式与 Stokes 公式了。

下面举两个例子，首先第一个例子是：

$$\begin{aligned} \iiint_V dV \nabla \times \mathbf{A} &= \iiint_V dV \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j A_k \\ &= \mathbf{e}_i \iiint_V dV \partial_j (\varepsilon_{ijk} A_k) \\ &= \mathbf{e}_i \iiint_V dV [\partial_1 (\varepsilon_{1ik} A_k) + \partial_2 (\varepsilon_{2ik} A_k) + \partial_3 (\varepsilon_{3ik} A_k)] \end{aligned}$$

其中 $\partial_1 (\varepsilon_{1ik} A_k) + \partial_2 (\varepsilon_{2ik} A_k) + \partial_3 (\varepsilon_{3ik} A_k)$ 俨然是一个场的散度的结构，这场是：

$$\boldsymbol{\xi}_i = (\varepsilon_{i1k} A_k, \varepsilon_{i2k} A_k, \varepsilon_{i3k} A_k)$$

于是，利用 Gauss 定理，我们得到：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \mathbf{e}_i \iint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot (\varepsilon_{ijk} A_k \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i \iint_{\partial V} (ds_l \mathbf{e}_l) \cdot (\varepsilon_{ijk} A_k \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i \iint_{\partial V} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j ds_l \varepsilon_{ijk} A_k \\ &= \mathbf{e}_i \iint_{\partial V} \delta_{lj} ds_l \varepsilon_{ijk} A_k \\ &= \mathbf{e}_i \iint_{\partial V} \varepsilon_{ijk} ds_j A_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{\partial V} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i ds_j A_k \\
 &= \iint_{\partial V} d\mathbf{s} \times \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

即：

$$\iiint_V dV \nabla \times \mathbf{A} = \iint_{\partial V} d\mathbf{s} \times \mathbf{A} \quad (1.18)$$

第二个例子是：

$$\begin{aligned}
 \iint_S d\mathbf{s} \times (\nabla u) &= \iint_S \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i ds_j \partial_k u \\
 &= \mathbf{e}_i \iint_S ds_j \varepsilon_{ijk} \partial_k u \\
 &= \mathbf{e}_i \iint_S \varepsilon_{jki} ds_j \partial_k u \\
 &= \mathbf{e}_k \iint_S \varepsilon_{ijk} ds_i \partial_j u \\
 &= \mathbf{e}_k \iint_S \varepsilon_{ijm} ds_i \partial_j (u \delta_{km}) \\
 &= \mathbf{e}_k \iint_S d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\xi}_k) \\
 &= \mathbf{e}_k \oint_{\partial S} dl \cdot \boldsymbol{\xi}_k \\
 &= \mathbf{e}_k \oint_{\partial S} dl_i u \delta_{ki} \\
 &= \oint_{\partial S} dl_i \mathbf{e}_i u \\
 &= \oint_{\partial S} dl u
 \end{aligned}$$

其中：

$$\boldsymbol{\xi}_k = (u \delta_{k1}, u \delta_{k2}, u \delta_{k3})$$

所以我们得到：

$$\iint_S d\mathbf{s} \times \nabla u = \oint_{\partial S} dl u \quad (1.19)$$

今后如果我们遇到了某些积分式要进行转化时，要时刻想着找 Gauss 公式与 Stokes 公式的指标结构。

1.2 并矢

1.2.1 并矢的基本运算规则

顾名思义，**并矢**即把两个矢量不做点叉乘而并排放在一起，长这样： \mathbf{AB} 。 \mathbf{AB} 仅是一个记号，在数学上并矢实质上是个矩阵：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} (B_1 \ B_2 \ B_3) = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix} \\
 &= A_1B_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_1B_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_1B_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + A_2B_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_2B_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_2B_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + A_3B_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_3B_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A_3B_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= A_1B_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + A_1B_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + A_1B_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \\
 &\quad + A_2B_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + A_2B_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + A_2B_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\
 &\quad + A_3B_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + A_3B_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + A_3B_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

既然并矢是 3×3 的方阵，矢量可以视为一个 1×3 或 3×1 的矩阵，故并矢和矢量的运算有两种。我们规定：

(1) 左乘

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} (B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3) \\
 &= \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

(2) 右乘

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB}) &= (C_1 \ C_2 \ C_3) \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix} \\
 &= (C_1A_1 + C_2A_2 + C_3A_3)(B_1 \ B_2 \ B_3) \\
 &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

为了使某些公式的结构具有统一性，我们不论是在名称上还是形式上都认为上述两种运算称为**并矢点乘矢量**，其结果仍为一个矢量。并矢与矢量作用的方式为“就近作用”。以上所有东西都是我们新约定与构造的规则，其作用是帮助我们搭建好用的公式以及帮助我们做一些证明。

由于矩阵的运算一般不具有交换律，因此并矢与矢量进行点乘时，各矢量的顺序切不可乱动！

1.2.2 并矢公式

(1)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \partial_i \mathbf{e}_i \cdot (A_j B_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) \\
&= \partial_i \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k A_j B_k) \\
&= \partial_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) (A_j B_k \mathbf{e}_k) \\
&= \partial_i \delta_{ij} (A_j B_k \mathbf{e}_k) \\
&= \partial_i (A_i B_k \mathbf{e}_k) \\
&= (\partial_i A_i) B_k \mathbf{e}_k + (A_i \partial_i) B_k \mathbf{e}_k \\
&= (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

啊哈！终于是出现了 $\mathbf{A} \cdot \nabla$ 这个算符。注意，并矢公式的推导必须遵守在刚刚的(1) 中定义的规则才行！

(2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) &= A_i \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \partial_j B_k) \\
&= A_i \delta_{ij} \partial_j B_k \mathbf{e}_k \\
&= A_i \partial_i B_k \mathbf{e}_k \\
&= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

注：

$$\nabla \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} (B_1 \ B_2 \ B_3) = \begin{pmatrix} \partial_1 B_1 & \partial_1 B_2 & \partial_1 B_3 \\ \partial_2 B_1 & \partial_2 B_2 & \partial_2 B_3 \\ \partial_3 B_1 & \partial_3 B_2 & \partial_3 B_3 \end{pmatrix}$$

(3) 推广了的含有并矢的Gauss公式

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\!\oint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}) \\
&= \mathbf{e}_i \oint\!\!\!\oint_{\partial V} (B_i \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{e}_i \iiint_V \nabla \cdot (B_i \mathbf{A}) dV \\
&= \mathbf{e}_i \iiint_V (\nabla B_i \cdot \mathbf{A} + B_i (\nabla \cdot \mathbf{A})) dV \\
&= \iiint_V ((\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} + A_j (\partial_j B_i) \mathbf{e}_i) dV \\
&= \iiint_V ((\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}) dV \\
&= \iiint_V dV \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{B})
\end{aligned}$$

即

$$\oint_{\partial V} ds \cdot (\mathbf{A} \mathbf{B}) = \iiint_V dV \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{B}) \quad (1.24)$$

从中我们也看出了把微分变量提到最前面是明智的。

以上我们讲的都是一些数学公式，并未涉及物理。后面我们将会利用这些公式，根据电磁学基本的实验原理，探索电与磁的世界！

Chapter 2

Maxwell 方程组

第二章我们介绍电动力学的基本方程—— Maxwell 方程组。实际上 Maxwell 方程组有积分形式和微分形式，本讲义一律采取微分形式。

本章第一节，我们首先说明了为什么要关注电磁场的散度和旋度。

物理学基本方程一定来源于基本实验定律，本章从第二节开始，首先利用电磁学基本实验定律——Coulomb 定律、Biot-Savart 定律、Faraday 电磁感应定律，以及不是实验定律而是 Maxwell 天才般设想的位移电流，搭建了真空中的 Maxwell 方程组。然后在引入了电极化场、电位移场、磁化场、磁场之后，推导出了 Maxwell 方程组的一般形式，以及在连续介质中的 Maxwell 方程组。最后介绍了在后续各个章节都十分重要的电磁场的边值关系。

写本章时，笔者的参考资料有：

- 郭硕鸿老师的《电动力学（第四版）》，这本书作为电动力学的入门书是很合适的。

下面一起来欣赏一下这套被称为物理学界最优美的方程组吧！

2.1 真空中的 Maxwell 方程组

2.1.1 为什么要关注电磁场的散度和旋度

在开始冗杂的公式推导之前，我想谈一个常被各主流教材忽略却又令我本人觉得很重要，并不应该忽视的问题——我们为什么要关注电磁场的散度和旋度？有一种说法是说：“我们为了知道某一点的场是如何对空间中其他位置的场产生影响，必须要去研究如散度、旋度这样的微分关系”。这种说法有一定道理。

我本人比较喜欢和欣然接受的另一种观点源自于一本书，名字叫做《法拉第、麦克斯韦和电磁场——改变物理学的人》¹。作者是[美]Nancy Forbes与[英]Basil Mahon。

这一本书讲述了 Faraday 与 Maxwell 的生平，包括他们的生活、科学思考等（甚至还包含了Faraday在化学领域的故事与贡献），是一本非常好的书！这本书的第十章《假想的流体》，介绍了 Maxwell 是如何将电磁场与流体的流速场进行类比来研究的，从而给Faraday的力线找到了一个很好的物理图像。散度和旋度本是流体流速场的概念，其中散度来描写一个源或者汇的强度，而旋度被用来描写涡流现象。

这样一来我们就不难理解为什么现在谈及电磁场，我们重点关注之一就是其散度和旋度，是伟大的 Maxwell 教授的流体流速场的类比为我们引了一个好路。感兴趣的读者不妨进一步去读一读我推荐的这本书的对应章节。

2.1.2 真空静电场的散度与旋度

所谓静电场，即是说静止电荷产生的电场，场强不随时间改变，因而只是空间坐标的函数，即：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

物理规律的唯一来源是实验，关于静电场的实验规律是 **Coulomb 定律**，它指出在真空中静止点电荷之间的作用力为：

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (2.1)$$

¹顺便提一下，我所阅读的版本是2020年5月的第1版，由宋峰等三位老师翻译，并且由机械工业出版社出版。这本书是我2024年春夏学习电磁学时候读完的一本书，真的很不错。

从而电场强度：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.2)$$

点电荷是连续分布的电荷的一种极端情形，对于最一般的电荷连续分布的情况，真空中的静电场强度分布为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.3)$$

下面求其散度与旋度：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\mathbf{r}') \cdot 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j \frac{x_k - x'_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \left[\delta_{jk} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - 3 \frac{(x_k - x'_k)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right] \\ &= \mathbf{0} - \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

上面在求旋度时，我们用到了对称与反对称指标同时出现时该项为 0 的结论。

2.1.3 真空静磁（感应）场的散度与旋度

所谓静磁（感应）场，即是说恒定电流产生的磁场，静磁场的基本实验定律是 **Biot - Savart 定律**，它指出在真空中电流元产生的磁感应场为：

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.6)$$

于是，电流环产生的磁感应场即为：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Idl \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.7)$$

我们在说电流环时是并未考虑其截面积大小的，因而电流分布是电流密度分布的一类极端情况，对于更一般的电流密度分布体系，有 $Idl = \mathbf{J}dV$ ，从而磁感应场分布为：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.8)$$

下面求其散度与旋度：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \nabla \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[(\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \left(\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{J} + \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] \\ &\quad - dV' \left[(\nabla \cdot \mathbf{J}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[0 + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') - 0 + (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 4\pi \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) - (\nabla \cdot \mathbf{J}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]$$

对于一个空间区域 V , 易知有:

$$\iint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{J} = -\frac{d}{dt} \iiint_V dV \rho$$

故:

$$\iiint_V dV \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0$$

令 V 缩小至一点, 可得电荷守恒方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

对于恒定电流必有 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 从而有 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 回到 $\nabla \times \mathbf{B}$ 中来, 有:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\partial V} d\mathbf{s}' \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

上面第二项为 0, 因为在 \mathbf{J} 分布的边界上必有 \mathbf{J} 与 $d\mathbf{s}'$ 正交, 否则电流要跑出边界了。

2.1.4 涡旋电场

现在我们研究时变的场, 我们知道变化的磁场能产生电场, 这即是电磁感应现象, 而变化的电场也能产生磁场, 这需要引入所谓位移电流的概念, 本小节先讨论前一种情况, 即磁生电。

Faraday 电磁感应定律是描述这一现象的基本定律, 它指出:

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_{\text{涡}} = -\frac{d}{dt} \iint_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = -\iint_S d\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

另一方面，有：

$$\oint_{\partial S} dl \cdot \mathbf{E}_{\text{涡}} = \iint_S d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_{\text{涡}})$$

由于 S 的任意性，有：

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\text{涡}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.13)$$

这些方程的物理图像是：变化的磁场会产生有旋度的涡旋电场，其旋度由上式给出。

另一方面，在数学上可以证明：若 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，则必存在矢量势 \mathbf{A} ，使得：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.14)$$

这里称 \mathbf{A} 为磁矢势，可验证， \mathbf{A} 可以等于：

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.15)$$

既然 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，从而有：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_{\text{涡}}$$

所以，一个直觉（或者说直观上的想法）即为：

$$\mathbf{E}_{\text{涡}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.16)$$

下面来计算涡旋电场的散度：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{涡}} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iiint dV' \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{d\mathbf{s}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathbf{r} - \mathbf{r}'} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

现在我们把涡旋电场的散度与旋度都搞定了！于是我们就知道了两种产生电场的

方式——由静电荷产生的静电场以及由变化磁场产生的电场，除此之外不再有其它产生电场的方式。我们将任一电场分解为静电场与涡旋电场，并求一般电场的散度与旋度：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{静}} + \nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{涡}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_{\text{静}} + \nabla \times \mathbf{E}_{\text{涡}} = \mathbf{0} + \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.19)$$

2.1.5 位移电流

位移电流是描绘变化电场产生磁场的一种很好的图像。

在恒定电流情形下，若空间中有电流 \mathbf{J} ，则会产生磁场，其旋度是 $\mu_0 \mathbf{J}$ 。可是如果涉及非恒定的电流呢？我们来看下面这个例子：

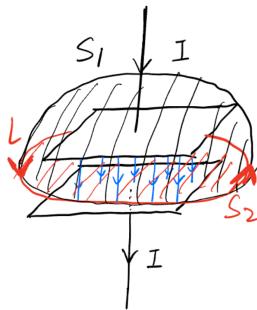


图 2.1：电容器引起的矛盾

如图 (2.1) 所示，一平行板电容器的电荷量均匀增大，于是可认为导线上是传导电流 $I = \frac{dq}{dt}$ ，现在取一个回路 L ，位置在两极板之间，方向与 I 满足右手螺旋，取两个曲面 S_1 、 S_2 ，它们均以 L 为边缘，区别是一个被 I 穿过，另一个不被 I 穿过。下面我们说明对于非恒定电流情形，(2.11) 式不再成立。

若 (2.11)，仍然成立，则对 L 回路求 \mathbf{B} 的环量：

- 一方面：

$$\oint_L d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \iint_{S_1} d\mathbf{s} \cdot \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 I$$

- 另一方面：

$$\oint_L dl \cdot \mathbf{B} = \iint_{S_2} d\mathbf{s} \cdot \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

产生了佯谬！说明 (2.11) 式是不完备的！它当然是不完备的，因为在推导它时，没有考虑变化的电场。

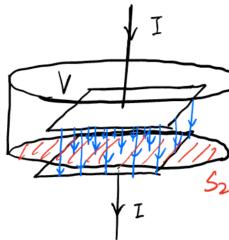


图 2.2

不难看到，虽说没有 \mathbf{J} 穿透 S_2 ，却有变化的电场线穿透了 S_2 ，这说明变化的电场线与电流线在产生磁场这方面效力是一样的！对于上面那个体系，易知：

$$\oint_L dl \cdot \mathbf{B} = \mu_0 I = \mu_0 \frac{dq}{dt} = \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\varepsilon_0 \iint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \right) = \iint_{S_2} d\mathbf{s} \cdot \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

这说明 $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 的形为犹如一个电流密度一样，由于历史的原因我们称之为位移电流密度，于是，引入位移电流之后，Biot - Savart 定律应改写为：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{\partial t} \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{\partial t} \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

由上式易知：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.21)$$

在证明 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的过程中要用到：

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

这个式子的另一物理意义是：虽然在时变情况下传导电流 \mathbf{J} 不再连续，但 $\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 总“电流”是连续的。换句话说：引入位移电流拯救了电流的连续性！

2.1.6 真空中的 Maxwell 方程组

综合 (2.18)、(2.19)、(2.20)、(2.21) 四式，我们有：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (2.22)$$

这就是真空中的 Maxwell 方程组，下一节我们还要讲介质中的 Maxwell 方程组，它们是电磁学的基石。

2.2 连续介质中的 Maxwell 方程组

2.2.1 电极化场 P 与电位移场 D

电介质就是绝缘体²。绝缘体不能传导电流，但并不意味着它不能与电场发生相互作用。一个有趣的现象是，电场会使电介质产生极化，即让一个原本不显电性的物质产生两个电极。现在我们感兴趣的问题是：其背后的微观机理是什么？

电介质分子分为极性分子与非极性分子。若是极性分子，本身就带有电偶极矩，在外电场中受一个力偶，使电偶极矩转向成和外电场相同的方向；若是非极性分子，则外电场会诱导其产生电偶极矩，进而让分子转向。

我们认为介质所在空间中任一微小邻域中都有大量的分子，而任一微小邻域中的外场强 E_0 又可视为均匀的，从而统计平均地看，这些分子转向排列后的电偶极矩矢量应是一个绕定的与 E_0 同方向的矢量（尽管分子在热运动），而只有该处的 E_0 发生改变，才会改变电偶极矩矢量和。

如果用“场”的观点与精神，我们说电场引起介质中产生了电极化场，其场量为电极化强度矢量，定义为某点处分子电偶极矩的平均值：

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (2.23)$$

其中 ΔV 为包裹点 r 的小体积元。

注意我们这一节的标题是“连续介质中的 Maxwell 方程组”，我们应该把 P 理解为空间中的“场”，而“连续介质”即是说 P 这个场是连续的。

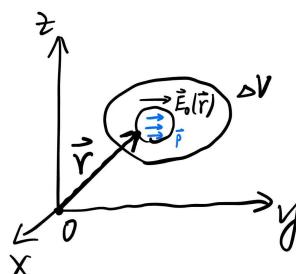


图 2.3: 电极化场的图像

²事实上我也不太理解为什么要把绝缘体叫电介质，因为电的作用的传递是不需要媒介的，这或许是历史的原因，在人们对电磁场的认识还不太完备时起的名字。我们就暂时不去管它啦。

下面我们求电极化场的散度。我们在介质空间内部取一个面积微元 $d\mathbf{s}$ ，计算：

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{\sum \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V} \\ &= \frac{Nq_p \mathbf{l} \cdot d\mathbf{s}}{\mathbf{l} \cdot d\mathbf{s}} \\ &= Nq_p = -q_{p\text{内}}\end{aligned}\quad (2.24)$$

其中 $q_{p\text{内}}$ 是指未穿过面积微元的总的极化电荷。于是，利用散度的定义，易知：

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint d\mathbf{s} \cdot \mathbf{P}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{-q_{p\text{内}}}{\Delta V}$$

最后右边这一项不正是某一点处电荷体密度的定义吗？故我们有：

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_p \quad (2.25)$$

分子极化之后，在 ΔV 内部会产生一个与 \mathbf{E}_0 方向相反的电场 \mathbf{E}' ，我们称之为退极化场，而把 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ 叫做介质中的电场。实验³表明，有一大类介质满足：

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.26)$$

这类介质称为线性介质， χ_e 称为介质的电极化系数。我们这份讲义将只会研究线性介质。

直接对 (2.26) 式求散度，并结合 (2.25) 式可得：

$$\chi_e (\rho_f + \rho_p) = -\rho_p$$

其中 ρ_f 是自由电荷密度， f 做 free 解，这样叫是为了区分它和极化电荷。上式即：

$$\rho_p = -\frac{\chi_e}{\chi_e + 1} \rho_f \quad (2.27)$$

这是介质中某点极化电荷与自由电荷之间的关系。从这式我们可以得出结论：对于线性介质，若介质内部没有自由电荷，则介质内也不会出现极化电荷，从而无电荷，

³其实我很感兴趣这类实验是怎么做的。

电荷仅分布在介质表面或分界面；但若往介质中塞一个电荷进去，只有在自由电荷周围那一圈会出现极化电荷，就像自由电荷的小跟班一样。

下面我们定义电位移矢量⁴：

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (2.28)$$

从而也定义了电位移矢量场。为什么要构造这样一个场呢？因为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_f + \rho_p - \rho_p = \rho_f \quad (2.29)$$

可见 \mathbf{D} 的散度仅出现自由电荷，而自由电荷对于我们而言是更可控的。对于线性介质，易知：

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} \stackrel{\text{记为}}{=} \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \stackrel{\text{记为}}{=} \epsilon \mathbf{E} \quad (2.30)$$

其中 ϵ_r 为相对介电常数， ϵ 为介电常数， ϵ_0 为真空介电常数。引入介电常数 ϵ 之后，线性介质中电场的散度可以改写为：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (2.31)$$

2.2.2 连续介质中的位移电流

介质中位移电流的定义与真空中不同。

若我们仍然沿用真空中位移电流（密度）的定义，即：

$$J_D = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} - \mathbf{P}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

易知电偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{l} = q\mathbf{x}_+ + (-q)\mathbf{x}_-$ ，其中 \mathbf{x}_+ 与 \mathbf{x}_- 分别为正电荷和负电荷的位矢。故：

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{\sum_{\Delta V} q_i \mathbf{x}_i}{\Delta V}$$

我们认为对于极化电荷， q_i 是固定的，而改变 \mathbf{E}_0 仅改变 \mathbf{x}_i 。这不论对于哪种极化

⁴对于非线性的介质我们同样可以定义电位移矢量。至于它为何叫“电位移”，或许是因为它与位移电流有密切联系，但欲探其究竟，须去查阅科学史。

方式都是合理的。从而：

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\sum_{\Delta V} q_i \mathbf{v}_i}{\Delta V}$$

我们进一步认为，在 ΔV 内的所有极化电荷，其拥有的速度相同，都为 \mathbf{v} 。从而：

$$\left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} = \frac{N q_p \mathbf{v}}{\Delta V} = n q_p \mathbf{v} = \mathbf{J}_p(\mathbf{r})$$

这里 \mathbf{J}_p 的物理图像是由于极化电荷的位移而产生的电流⁵。从而：

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_p \quad (2.32)$$

可是，我们实际上定义 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 为位移电流，而非 $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 。不难发现二者只在真空中是相同的。此外，在介质中 $\nabla \cdot (\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = 0$ 同样满足，这也可以认为是我们定义它为位移电流的原因之一。

2.2.3 磁化场 \mathbf{M} 与磁场 \mathbf{H}

对于磁介质有两种图像——磁矩与磁偶极矩图像。前者认为不存在所谓磁荷；后者认为存在磁荷、磁偶极矩和磁极化场，从而电极化场中的概念和结论可以全然类比、照搬。但是前者才是正确的观点，我们认为后者是前者在数学上的一种等效，但不具备物理意义。所以我们只是讲磁矩图像。

简要用经典图像交代一下电流环产生的磁矩在匀强磁（感应）场中的行为：一个旋转的电流环产生的磁矩是和其转轴平行的，在匀强外磁场中磁矩（亦即转轴）会绕着外磁场的方向进动。这就是所谓 Lamor 进动。详情可以参考理论力学教材。

磁化强度矢量 \mathbf{M} 定义为某点处磁矩的平均值：

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta V} \quad (2.33)$$

定义了磁化强度矢量也就定义了磁化场。

重要的是下面我们来看其物理意义。把一个磁介质放入外磁（感应）场 \mathbf{B}_0 中，其内部的分子电流（的磁矩）会绕着 \mathbf{B}_0 的方向进动⁶，在空间中的平均效果是会产

⁵ 这才是真正的“位移”电流，Maxwell 当年起“位移电流”这个名字时就是用的类似这样的图像，只不过他借助了“以太”。

⁶ 不过，在许多资料中，直接说分子电流环沿着外磁场方向排列。从统计平均的角度看，这样说也是一个可以的图

生一个附加的磁场 \mathbf{B}' , 这个附加磁场与外磁场的方向是相同的, 使得介质内的总磁场等于 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ 。我们也可以认为这一磁场就是由与磁场方向严格平行的“等效的电流环磁矩”产生的, 这样可以让我们做下面的计算, 请往下看。

下面来求磁化场的旋度, 这同样须用 \mathbf{M} 的定义来计算。

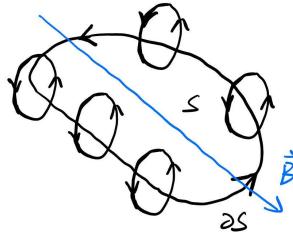


图 2.4: 磁化场的图像

如图, 考虑在磁介质空间内的一个闭合回路 ∂S 。下面计算 \mathbf{M} 的环量:

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{M} = \oint_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta V} = \oint_{\partial S} \frac{d\mathbf{l} \cdot NIS}{d\mathbf{l} \cdot \mathbf{S}} = I_M$$

从其中 I_M 就是穿过 S 面的总磁化电流⁷, 要考虑正负。从而磁化强度场的旋度为:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M \quad (2.34)$$

而对于介质中某点处有:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \left(\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_p + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \left(\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_M + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

其中 \mathbf{J}_f 为传导电流, 从而:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

像, 而且我们下面的一个图就要用到这一图像。

⁷这里的电流就应该是我们上面说的那个“等效的电流环磁矩”上的电流。

引入磁场强度矢量 \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

从而:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.35)$$

实验表明, 对于某一类线性磁介质, 有:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.36)$$

其中 μ 叫做磁导率 (μ_0 叫真空磁导率) 若我们引入 ε 与 μ 改写 (2.35) 得:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_f + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

这与 (2.21) 就对应上了, 突出了线性介质与真空的区别。

和 (2.27) 式一样, 我们也可以求出某点的 \mathbf{J}_m 与 \mathbf{J}_f 的关系 (假设在静场中, 无位移电流) 对于线性介质, 易知有:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} \right) = \nabla \times \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{J}_f$$

从而有:

$$\mathbf{J}_M = (\mu_r - 1) \mathbf{J}_f \quad (2.37)$$

其中 μ_r 是所谓相对磁导率。

2.2.4 Maxwell 方程组的一般形式与连续介质中的 Maxwell 方程组

引入了 \mathbf{D} 与 \mathbf{H} 后, Maxwell 方程组的一般形式⁸为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

而在线性介质中, 因为有:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

从而有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_f + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

这可以当成是连续介质中的 Maxwell 方程组。

⁸注意到在推导以下各式时, 我们只是用了真空中的 Maxwell 方程组与 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 的定义(从而 \mathbf{P} 、 \mathbf{M} 的定义), 而并不要求介质本身为线性, 这就是我把下式讲成是 Maxwell 方程组的“一般形式”的道理。只要你接受了电极化场、磁化场、电位移场、磁场强度场, 下式就在任何介质中成立, 当然也包括无介质的真空。

2.3 电磁场的边值关系

2.3.1 电场的边值关系

所谓电场的边值关系，就是在两个不同介质的边界附近处电场应满足的关系。边值关系在许多涉及有微分方程求解的地方都十分地重要。

下面我们利用 Maxwell 方程组导出电场的边值关系。

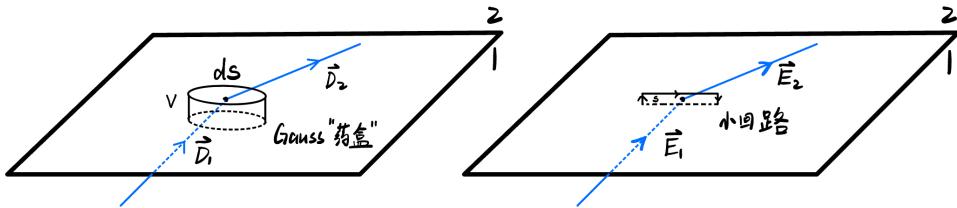


图 2.5: 电场的边值关系

如图，在介质 1、2 的分界面上，分别取 Gauss 药盒与小回路⁹，并利用 Maxwell 方程组，易得：

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{D} &= (D_{2n} - D_{1n})ds = \sigma ds \\ \oint_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} &= (E_{2t} - E_{1t})dl = - \iint_S d\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = ds \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

该式省略是因为 ds 是比 dl 更高一阶的小量。于是，我们得到：

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2t} - E_{1t} = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

还可将上两式改写为更数学的形式，对于第一式，显然其等价于：

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$$

其中 \hat{n} 为由1介质指向2介质的单位法向量。而上面第二式即：

⁹ 所谓 Gauss 药盒，就是一个圆柱体，底面半径为小量，但是其高度又远远小于底面半径，因此求通量的时候可以只考虑上下底面而不考虑侧面的通量；而所谓小回路，就是一个小的矩形回路，长为小量，但是宽又远远小于长，因此求环量时可以只考虑长而不考虑宽上的环量。至于为什么那个圆柱要叫 Gauss 药盒，据说是由于高斯非常喜欢阿司匹林。

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

故 $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \parallel \hat{n}$, 由于我们考察的是很小的一个面元, 由于对称性, \mathbf{E}_1 与 \mathbf{E}_2 一定共面, 所以上式即:

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$$

于是现在我们有:

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \\ \hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.41)$$

这就是电场的边值关系。

2.3.2 磁场的边值关系

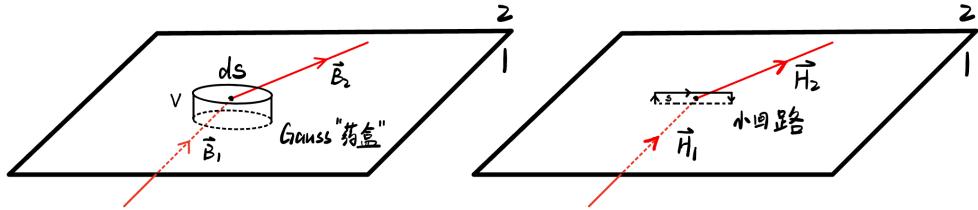


图 2.6: 磁场的边值关系

下面推导磁场边值关系。同理, 取 Gauss 药盒与小回路, 可得:

$$\iint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = (B_{2n} - B_{1n})ds = 0$$

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{H} = (H_{2t} - H_{1t})dl = \alpha dl + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\sim = \alpha dl$$

同样出于对称性的考虑, 这里的电流面密度 α 与 \mathbf{n} 正交平行。故:

$$\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2t} - H_{1t} = \alpha \end{cases} \quad (2.42)$$

或者改写成矢量式：

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \quad (2.43)$$

这就是磁场边值关系。

Chapter 3

静电学

静电学问题的主要目标就是在给定电荷、电介质、导体分布的前提下，求体系稳定时空间的电势（从而电场）分布。

求解电势分布的方法有很多，本章首先介绍了静电学问题的一条重要的基本定理——Poisson 方程解的唯一性定理¹，并且讨论了如何妙用唯一性定理直接给出电势分布的案例，包括神奇的 Faraday 笼的原理和镜像法。然后，我们介绍了求电势分布的其他方法，包括分离变量法和 Green 函数法。接着，我们介绍了静电场的能量密度，它是电场物质性的生动物理图像之一；最后介绍了一个很重要的概念——电偶极矩，其重要性和基本性体现在了电势和电场的多极展开式中。

本章笔者用到的参考资料有

- David Tong 的讲义²——Electromagnetism。这份讲义由于内容较少，且与国内教学大纲不匹配，因此不适合作为教材，但确实一本极好的参考书，字里行间充满启发性的火花。
- 然后还是郭硕鸿老师的《电动力学（第四版）》。

欢迎进入第三章的冒险！

¹用我们老师的话说就是：“唯一性定理相当于给了我们一块免死金牌”。我觉得有道理。

²他的讲义完全开源，网址是：<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/teaching.html>，得益于我的理论力学老师的推荐，他说每一个学理论物理的人都值得去学一学David Tong的讲义。

3.1 静电场的 Poisson 方程及其解的唯一性定理

3.1.1 静电场的 Poisson 方程

静电场由于电场和磁场不随时间变换，因此 Maxwell 方程组不含时变项，退化为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

今后我们将只考虑线性介质，故有：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

这便是整个静电学的基本方程。由于 \mathbf{E} 是无旋场，故可引入电（标）势 φ ，使得：

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (3.3)$$

求其散度得³：

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.4)$$

(3.4) 式即为电势的 Poisson 方程。对于没有自由电荷 ρ 分布的空间区域，电势满足：

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.5)$$

(3.5) 式即为电势的 Laplace 方程。下面我们证明一个十分重要的结论，即电势的 Poisson 方程的解的唯一性定理。

³这里要讲一个费大夫的故事了：传说有一位费大夫艺术十分高超，专治肺炎。有一天一个人来找费大夫看病，说自己胃疼，费大夫就告诉他说：“这好办，你先回家洗个澡，然后把窗户打开，站在窗边吹半个小时风再来找我就行了”！这位病人难以置信，问费大夫这样一来肯定会得肺炎的啊！费大夫说：“这就对啦！因为只有把你的病转成肺炎我才能给你治啊！”

那么其实我们求 (3.3) 式的散度也是同样的逻辑——物理学家不会处理一阶的偏微分方程，但是对二阶的偏微分方程（这里是 Poisson 方程）有一套相当成熟的处理方式，因此物理学家先把问题转化成“肺炎”，就是转化成二阶的，再进行处理。

3.1.2 一般情形的唯一性定理

电势的 Poisson 方程的解的唯一性定理是说：设有一个空间区域 V ，其内部电势满足 Poisson 方程，若再确定了其边界 ∂V 上各点处的电势 $\varphi|_{\partial V}$ 或其法向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial V}$ ，则其内部的电势分布唯一确定。下面证明之。

设有两个电势分布 φ_1, φ_2 均满足上述边界条件，且均是 Poisson 方程之解，则 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ 是 Laplace 方程之解，且满足 $\varphi|_{\partial V} = 0$ 或者 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial V} = 0$ 。考虑如下体积分：

$$\iiint_V dV \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) = \iiint_V dV [(\nabla \varphi)^2 + \varphi \nabla^2 \varphi] = \iiint_V dV (\nabla \varphi)^2$$

另一方面，利用 Gauss 公式可知：

$$\iiint_V dV \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) = \oint_{\partial V} ds \cdot \varphi \nabla \varphi = \oint_{\partial V} ds \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

从而：

$$\iiint_V dV (\nabla \varphi)^2 = 0$$

只能是：

$$\nabla \varphi = \mathbf{0}$$

故：

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi_1 = -\nabla \varphi_2$$

也就是说 V 内的电势被唯一确定（因为其产生的电场唯一确定）。

3.1.3 以导体为边界的唯一性定理

若区域 V 以导体为边界，则唯一性定理可稍事修改：若确定了导体边界的电势 $\varphi|_{\partial V}$ 或总电荷 Q ，即可唯一确定 V 内电势分布。下证明之：

由上小节易知，对于 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ，有：

$$\iiint_V dV (\nabla \varphi)^2 = \oint_{\partial V} ds \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

若边界电势确定, 则 $\varphi|_{\partial V} = 0$, 上式为 0; 若边界总电荷确定, 则由于导体是一个等势体⁴, 其边界电势为同一个值, 故上式积分化为:

$$\begin{aligned}\iiint_V dV (\nabla \varphi)^2 &= \varphi|_{\partial V} \iint_{\partial V} ds \frac{\partial \varphi}{\partial n} \\ &= \varphi|_{\partial V} \left(\iint_{\partial V} ds \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \iint_{\partial V} ds \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \\ &= \varphi|_{\partial V} \frac{Q - Q}{\varepsilon} = 0\end{aligned}$$

从而均有:

$$\nabla \varphi = \mathbf{0}$$

故 V 内的 φ 唯一确定。

读者不难将唯一性定理推广至既有导体边界, 又有介质边界的普遍情形。

3.1.4 有衔接条件的唯一性定理

第二章中我们已经了解到了电磁场的边界条件:

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \\ \hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \end{cases}$$

此外, 由于在界面附近 \mathbf{E} 为有限值, 故电势 φ 不会跃变, 从而在界面上有电势的连续性:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{3.6}$$

下面我们把唯一性定理推广至有衔接条件的情形。所谓衔接条件, 就是除了区域边界条件之外, 在区域内部的分界面处的边界条件。我们首先考虑最简单的情形, 即设界面将 V 分为两部分 V_1, V_2 , 其中的介电常数分别为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 则区域内的 Poisson

⁴这一结论我们默认读者在电磁学课程中已经掌握。或者, 读者也可以借助于电磁场边值关系去推导, 只需把其中一侧的介质换成导体, 并且认为导体内部没有电场。

方程为：

$$\nabla^2 \varphi = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_1} & (V_1) \\ \frac{\rho}{\varepsilon_2} & (V_2) \end{cases}$$

设 φ_1, φ_2 均为上述方程之解，且满足：在 ∂V 上各点的 φ 或 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial V}$ 确定；界面处 $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_1 = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_2$ 成立。记 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ，则 φ 满足：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \varphi|_{\partial V} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial V} = 0 \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_1 - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_2 = 0 \end{cases}$$

考虑如下积分：

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \iiint_{V_1} dV \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) + \varepsilon_2 \iiint_{V_2} dV \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) \\ &= \varepsilon_1 \iiint_{V_1} dV (\nabla \varphi)^2 + \varepsilon_2 \iiint_{V_2} dV (\nabla \varphi)^2 \\ &= \varepsilon_1 \oint_{\partial V_1} ds \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varepsilon_2 \oint_{\partial V_2} ds \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \\ &= \varepsilon_1 \iint_{\partial V_1} ds \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varepsilon_2 \iint_{\partial V_2} ds \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \iint_{\text{边界}} ds \varphi \left(\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中 ∂V_1 为 V_1 分得的 ∂V ， ∂V_2 同理。于是我们仍有：

$$\nabla \varphi = \mathbf{0}$$

故 V 内的 φ 唯一确定。

至此，电势 Poisson 方程解的唯一性定理被推广至了含有衔接条件的情形。

最后，我们指出，尽管以上我们讨论的定理叫“唯一性定理”，但是严格咬文嚼字的话，电势解其实不是“唯一”的，而是相差了一个任意常数。称 Poisson 解具有唯一性应该是一种惯例。不过，由电势解得到的电场分布却是“唯一”的，我们也可以从这个方面去把握这“唯一”性。

3.2 唯一性定理的妙用

3.2.1 Faraday 笼

一个密闭性良好的导体接地后便构成一个 **Faraday 笼**，其功用是阻止电场线进入或逃出，我们来分析其工作原理。

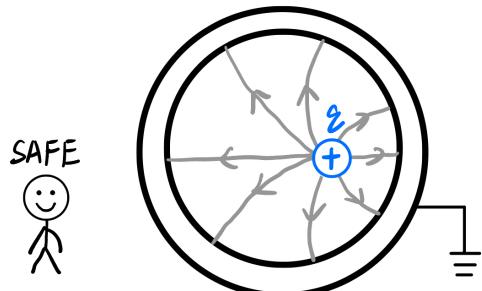


图 3.1: 接地, 笼内有电荷, 笼外人安全

设无穷远处电势为 0。首先，在笼中放一个电荷，笼的外表面接地，则外表面电势强于零。设笼外电势 φ 满足 $\varphi = 0$ ，则这一解满足边界条件，因此是唯一解，故笼外 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \mathbf{0}$ ，无电场分布。

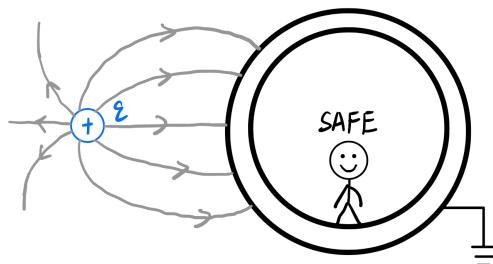


图 3.2: 接地, 笼外有电荷, 笼内人安全

下面在笼外放一个电荷，外表面接地，从而内表面电势为 0。同理可知笼内 $\varphi = 0$ ，无电场分布。

以上虽然我们画的笼的形状为球形，实际上任何形状的导体壳均可胜任，因为导体是个等势体。

下面我们思考一个问题：这里接地的动作是否必要呢？

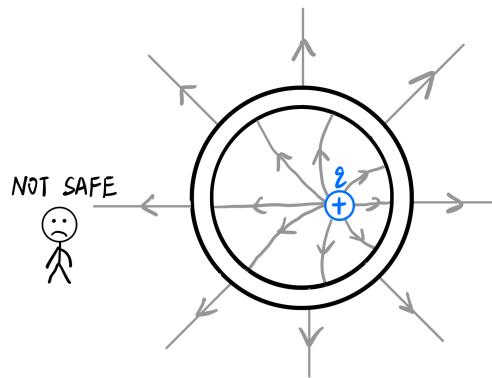


图 3.3: 不接地, 笼内有电荷, 笼外人不安全

首先是电荷在笼内, 若不接地, 则笼外会有电场。因为这时外表面会有 q 的总电荷。根据解的唯一性定理, 笼外电势分布如同只有一个带电 q 的外表面存在一样——这当然会产生电场了!

特别地, 若笼为正球体, 则外电场呈点电荷电场一样的辐射状, 即:

$$\mathbf{E}_{\text{外}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

电势:

$$\varphi_{\text{外}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

因为 $\varphi_{\text{外}}$ 满足边界条件 (即外表面总电荷为 e , 且无穷远处电势为 0), 所以是唯一解。

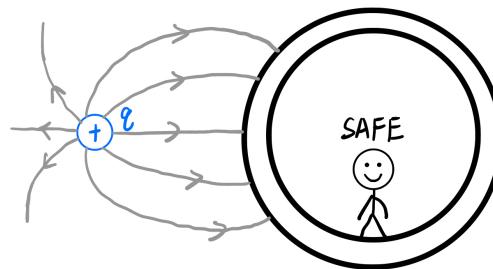


图 3.4: 不接地, 笼外有电荷, 笼内人安全

但接下来, 若电荷在笼外, 则即使笼不接地, 笼内也无电场。因为笼内区域的

边界条件为内表面总电荷为 0，而 $\varphi_{\text{内}} = \text{const}$ 满足这一边界条件，因而是唯一解。

3.2.2 镜像法求解电势分布

镜像法的核心精神即用区域外的一个点电荷去等效区域边缘上的感应电荷或极化电荷在区域内产生的电场。下面来举例说明（除非特别声明，我们一般仍假定无穷远点为电势零点）。

1. 无穷大接地导体平面

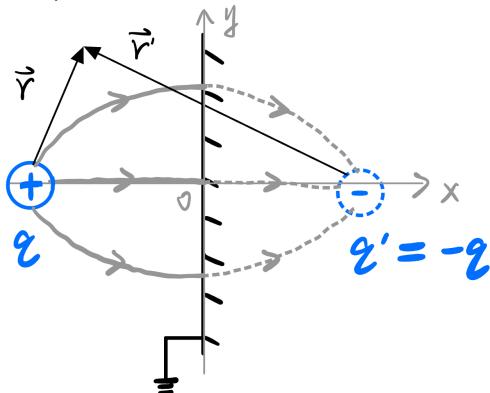


图 3.5: 无穷大接地导体平面

如图 (3.5)，在一无穷大接地导体平面前 d 处有一点电荷 q 。欲求 q 所在那一侧的空间电势分布，只需把导体平面想象成一面镜子，在 q 的像点置一 $q' = -q$ 的“像电荷”，则 q 那一侧的电势分布就如同由 q 与 q' 联合产生一样，即：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r'} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad (3.7)$$

由于该解满足方程 $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$ 以及边界条件，从而是唯一解。于是，导体上的感应电荷产生的电场被等效成了 q' 的电场。

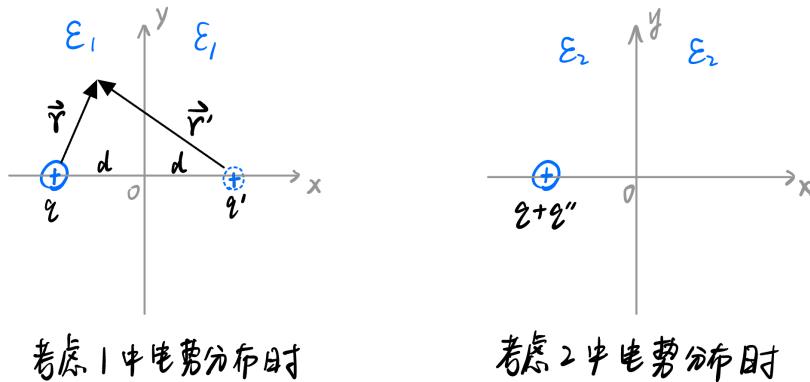


图 3.6: 无穷大介质分界面

2. 无穷大介质分界面（加上 2025.6.10 晚间 zmy 的讨论）

设一分界面将空间分为 1、2 两部分，分别充满介电常数为 ε_1 、 ε_2 的线性均一介质，并设分界面上无自由电荷。将一点电荷 q 放在 $\mathbf{r}_0 = (-d, 0, 0)$ 处。

设 1、2 中的电势分别为 φ_1 、 φ_2 ，它们满足：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = -\frac{q}{\varepsilon_1} \delta(\mathbf{r}) \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0 \\ \varphi_1|_{\infty} = \varphi_2|_{\infty} = 0 \end{cases}$$

且在界面上，有： $\varphi_1 = \varphi_2$ 、 $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ 。

设：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left[\frac{q}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{q + q''}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

显然它们这样的形式满足各自的 Poisson (或 Laplace) 方程，下面要做的是看看什么样的 q' 与 q'' 能使它们同样满足衔接边界条件，这样我们就找到了唯一解。

将它们代入到衔接边界条件中，得：

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \frac{q+q'}{\sqrt{d^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{q+q''}{\sqrt{d^2+y^2+z^2}} \\ -\frac{\varepsilon_1}{4\pi\varepsilon_1} \frac{(q-q')d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\varepsilon_2}{4\pi\varepsilon_2} \frac{(q+q'')d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

于是，

$$\begin{cases} \frac{q+q'}{\varepsilon_1} = \frac{q+q''}{\varepsilon_2} \\ q'+q'' = 0 \end{cases}$$

得：

$$\begin{cases} q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \\ q'' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \end{cases}$$

从而，电势分布为：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left[\frac{q}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} + \frac{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} \right] \\ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} \end{cases} \quad (3.8)$$

由唯一性定理知，这样的电势产生的电场是唯一情况。

3. 球形 Faraday 笼

设导体球半径为 R ，距球心 d 处有一点电荷 q 。这是一个 Faraday 笼，之前我们说笼内无电场，现在来看看笼外的电场。

首先看导体球接地的情形，这时球外表面电势为 0。现在我们要找一像电荷 q' ，使得 q' 与 q 联合作用下球外表面电势为 0 —— Apollonius 球定理使得这一点成为可能。

由于对称性， q' 应与 O 、 q 共线，设其距 O 点 d' 远。取两个特殊点考虑，即图

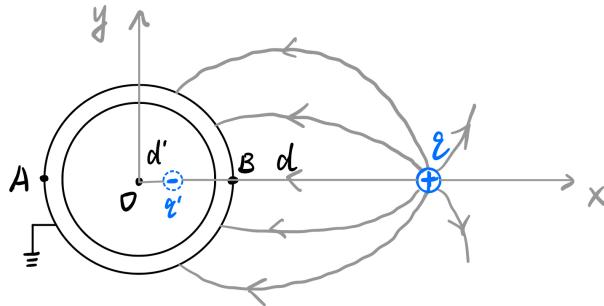


图 3.7: 接地的球形 Faraday 笼

中 A 、 B 两点。

$$\begin{cases} \frac{q'}{R+d'} + \frac{q}{R+d} = 0 \\ \frac{q'}{R-d'} + \frac{q}{d-R} = 0 \end{cases}$$

得：

$$\begin{cases} q' = -\frac{R}{d}q \\ d' = \frac{R^2}{d} \end{cases}$$

故球外电势分布为：

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{\left(x - \frac{R^2}{d}\right)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} - \frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2r\frac{R^2}{d}\cos\theta}} \right) \quad (3.9) \end{aligned}$$

其中第二个括号是在球坐标下的结果。这结果表明导体球上的感应电荷在球外产生的电场被等效为 q' 在球外产生的电场。

那如果这个导体球未被接地呢？

若不接地，则可认为导体球外表面有两套感应电荷，第一套与接地情形的感应电荷分布一样，等效成 q' ；第二套均匀分布在外表面，且总和为 $q'' = -q' = \frac{R}{d}q$ ，这样的分布下，导体仍为等势体且满足 $\mathbf{E} = 0$ 的边界条件，因此其产生的电场是唯

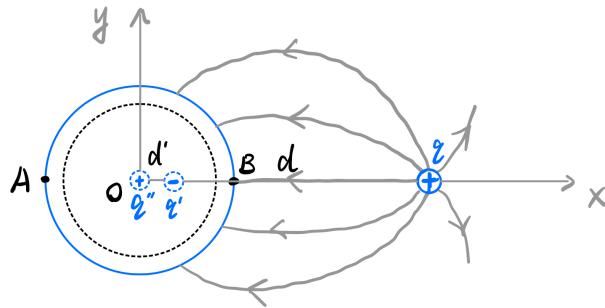


图 3.8: 不接地的球形 Faraday 笼

一解。从而球外电势分布为：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}} - \frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2r\frac{R^2}{d}\cos\theta}} + \frac{\frac{R}{d}q}{r} \right) \quad (3.10)$$

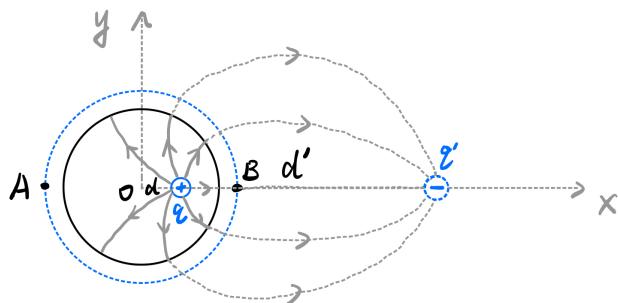


图 3.9: Faraday 笼有一个电荷

最后，若我们在笼内距球心 d 处放一点电荷，笼内电势如何分布？我们直接讨论一般情况即笼子不接地的情况。同理，感应电荷将分为两套，一套等效为 $q' = -\frac{R}{d}q$ ，放在 Oq 连线上距 O 为 $d' = \frac{R^2}{d}$ 远处。这样的分布满足边界条件，因此是唯一解。

从而，笼内电势分布为：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\frac{R}{d}q}{R} \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{\left(x - \frac{R^2}{d}\right)^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad (3.11)$$

易知，不论笼子接地与否， φ 均为此解。

3.3 分离变量法求电势分布

3.3.1 球坐标系下 Laplace 方程的解

对于 Poisson 方程：

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

得益于 Laplace 算符是线性算符，因此在一定的边界条件下，其解可以表示为 $\varphi^* + \tilde{\varphi}$ 的形式，其中 φ^* 为 Poisson 方程的特解， $\tilde{\varphi}$ 为 Laplace 方程：

$$\nabla^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (3.12)$$

的解。在球坐标系下用分离变量法求解 Laplace 方程，可得其解的基本形式为：

$$\tilde{\varphi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l^m(\cos \theta) (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) \quad (3.13)$$

其中 $P_l^m(\cos \theta)$ 为连带 Legendre 函数， A_l, B_l, C_m, D_m 为任意常数。这个形式太复杂了！不过所幸的是许多体系都具有球对称性，这时我们取其对称轴为极轴建立球坐标，Laplace 方程的解与 φ 无关，因此 m 恒为零，从而解的形式变为：

$$\tilde{\varphi} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (3.14)$$

其中 $P_l(\cos \theta)$ 为 Legendre 函数，其具体形式太复杂了，我们接下来仅需记住前 3 个，它们是：

$$\begin{cases} P_0(\cos \theta) = 1 \\ P_1(\cos \theta) = \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \end{cases}$$

3.3.2 Legendre 函数的母函数

下面通过一个例子来看何为 Legendre 函数的母函数。

如图 (3.10)，在 $(0, 0, R)$ 处放一点电荷 q ，用分离变量法求空间中的电势分

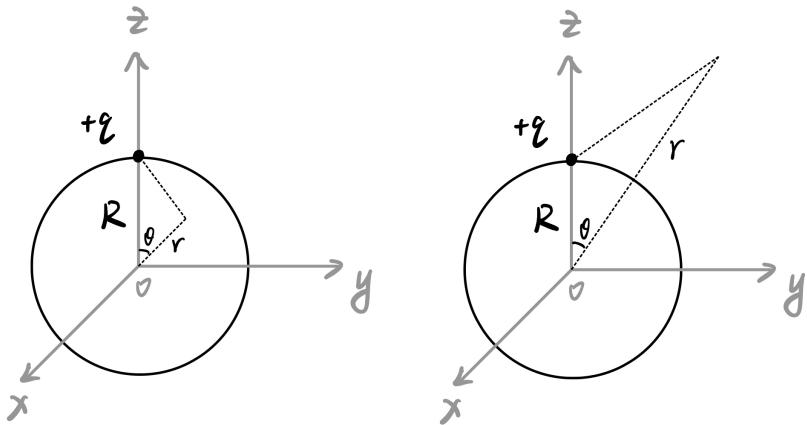


图 3.10: Legendre 函数的母函数

布。易知

$$\varphi = \sum_l \left(A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

首先看球内电势 φ_1 , 此时 $r < R$ 。由于 $\varphi(0)$ 为有限值, 故 $B_l = 0$, 从而:

$$\varphi_1(r) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

另一方面, 由于是点电荷, 故:

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \cos \theta}}$$

同时置 $\cos \theta = 1$, 可以证明 $P_l(1) = 1$, 故有:

$$\sum_l A_l r^l P_l(1) = \sum_l A_l r^l = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[1 + \frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \dots \right] = \sum_l \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{r}{R}\right)^l$$

从而 $A_l = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^{l+1}}$, 代回可得

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_l \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \cos \theta}}$$

从中我们可知：

$$\sum_l x^l P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x \cos \theta}} \quad (0 < x < 1)$$

而若 $x > 1$, 即 $\frac{1}{x} < 1$, 则有:

$$\sum_l \frac{1}{x^l} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2 \cos \theta}{x}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2-2x \cos \theta}}$$

从而:

$$\sum_l \frac{1}{x^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x \cos \theta}} \quad (x > 1)$$

于是, 我们有:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x \cos \theta}} = \begin{cases} \sum_l x^l P_l(\cos \theta) & (0 < x < 1) \\ \sum_l \frac{1}{x^{l+1}} P_l(\cos \theta) & (x > 1) \end{cases} \quad (3.15)$$

因此, $f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x \cos \theta}}$ 被称为 **Legendre 函数的母函数**。

3.3.3 再论球型 Faraday 笼

下面我们用分离变量法再处理一下半径为 R 的球型 Faraday 笼的问题。

1. 不接地, 笼内有电荷 q , 求笼内外电场

按老样子建立球坐标, q 在 $r_0 = (0, 0, d)$ 处, 球内外的电势为 φ_1 、 φ_2 , 则易知:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = -\frac{e\delta(r)}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

设 $\varphi_1 = \varphi_1^* + \tilde{\varphi}_1$, φ_1^* 视为 e 产生的电势, 即

$$\varphi_1^* = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd \cos \theta}}$$

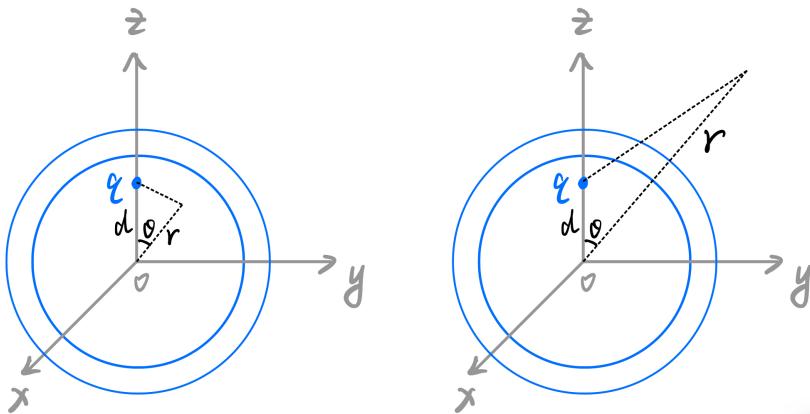


图 3.11: 再论球型 Faraday 笼

显然有: $\nabla^2 \varphi_1^* = -\frac{e\delta(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$, 而 $\tilde{\varphi}_1$ 视为感应电荷产生的电势, 则有:

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}_1 = 0$$

从而:

$$\tilde{\varphi}_1 = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

边界条件 (导体是一个等势体, 尽管不知道电势具体是多少, 但先设出来):

$$\varphi_1|_{r=R} = \sum_l A_l R^l P_l(\cos \theta) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta}} = \varphi_0$$

进一步化简:

$$\varphi_1|_{r=R} = \sum_l A_l R^l P_l(\cos \theta) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{R}\right)^2 - 2\frac{d}{R} \cos \theta}} = \sum_l \left[A_l R^l + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \left(\frac{d}{R}\right)^l \right] P_l(\cos \theta)$$

从而有:

$$\begin{cases} A_0 = \varphi_0 - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ A_l = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \left(\frac{d}{R^2}\right)^l \quad (l \neq 0) \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1 &= \varphi_0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_l \left(\frac{rd}{R^2} \right)^l P_l(\cos\theta) \\ &= \varphi_0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{rd}{R^2} \right)^2 - 2 \frac{rd}{R^2} \cos\theta}} \\ &= \varphi_0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{R}{d} q}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{d} \right)^2 + r^2 - 2 \frac{R^2}{d} r \cos\theta}}\end{aligned}$$

故:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{R}{d} q}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{d} \right)^2 + r^2 - 2 \frac{R^2}{d} r \cos\theta}}$$

现在的问题是 φ_0 是几? 往下看。由于 $\nabla^2 \varphi_2 = 0$, 从而易知:

$$\varphi_2 = \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

由 $\varphi_1|_{r=R} = \varphi_2|_{r=R}$ 得

$$\sum_l \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) = \varphi_0$$

从而 $B_0 = \varphi_0 R$, $B_l = 0$ ($l \neq 0$), 故:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0 R}{r}$$

由 Gauss 定理可得:

$$\iint_{\partial V} ds \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) = 4\pi R^2 \cdot \frac{\varphi_0 R}{R^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

从而 $\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$, 故:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R} + \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}} - \frac{\frac{R}{d} e}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{d} \right)^2 + r^2 - 2 \frac{R^2}{d} r \cos\theta}} \right] \\ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \end{cases}$$

这同我们用镜像法所得结果相同，这不奇妙吗？

2. 置于匀强外场中

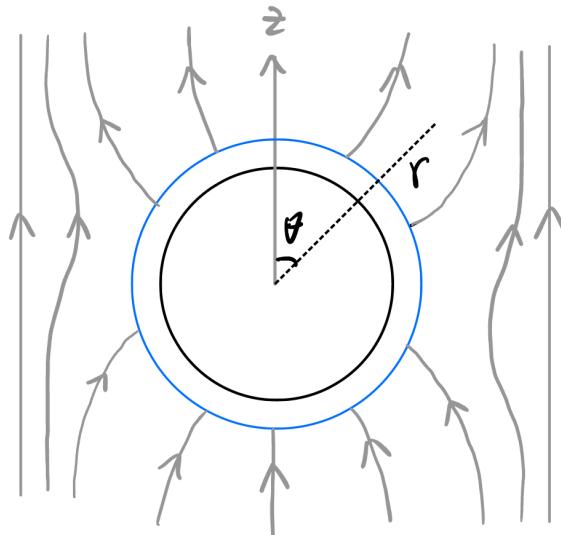


图 3.12: 匀强外场中的 Faraday 笼

这时不可再认为无穷远处电势为零了，因为匀强电场已延伸至无穷远。

设笼（导体球）置于均匀外场 $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$ 之中，球内电势显然为常量，设其为 φ_0 。下面来求球外电势 φ 。

设 $\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0 - E_0 r \cos \theta$ ，这样的物理意义很明显， $\tilde{\varphi}$ 是感应电荷产生的电势， $-E_0 r \cos \theta$ 这一项是外场造就的电势。易知：

$$\tilde{\varphi} = \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

边界条件为：

$$\varphi|_{r=R} = \sum_l \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) + \varphi_0 - E_0 R \cos \theta = \varphi_0$$

从而 $B_1 = E_0 R^3$ ， $B_l = 0$ ($l \neq 1$)。于是：

$$\tilde{\varphi} = \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta$$

故

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta - E_0 r \cos \theta = \varphi_0 + r^3 \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \quad (3.16)$$

我们再稍微驻足一下，来求一下感应电荷面密度的分布。对导体球表面施用电场的边值关系，并注意到导体内部无电场，即得：

$$\sigma = \hat{n} \cdot \mathbf{D} = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = -\varepsilon_0 \left(\frac{-2E_0 R^3}{R^3} \cos \theta - E_0 \cos \theta \right) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (3.17)$$

这即是说：球面上一个分布为 $\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$ 的面电荷，能在球内产生一个 $-E_0 \hat{z}$ 的匀强电场，同 \mathbf{E}_0 的外场相消。此外，这一面电荷分布在球外产生电场的形式与一个电偶极子相同，我们在 2.5 节会讲。

3.3.4 在匀强外场中极化的电介质球

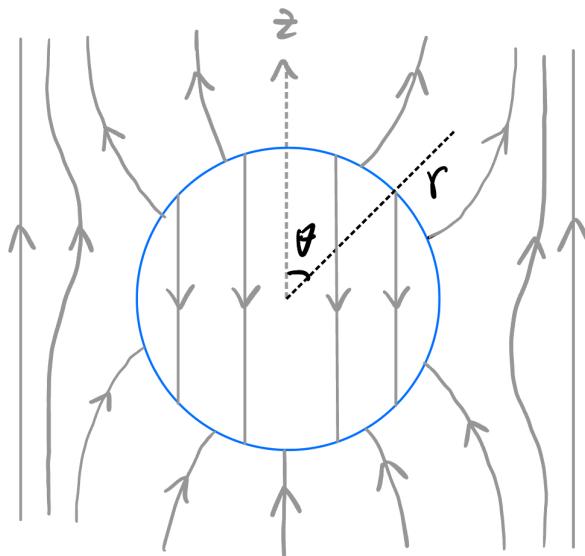


图 3.13: 匀强外场中的电介质球

现在把导体球换成一个半径同样为 R 、介电常数为 ε 的介质球，将之置于匀强外场 \mathbf{E}_0 中，求球内外的电势分布 φ_1 、 φ_2 。首先看 φ_1 ，设 $r = 0$ 处即原点处电势为 φ_0 ，显然有：

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

然后是 φ_2 , 显然有:

$$\varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

这一问题中必须保证的边界条件有:

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \implies \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

与

$$\varphi_1 \Big|_{r=R} = \varphi_2 \Big|_{r=R}$$

利用这些等量关系, 可得:

$$\begin{cases} \sum_l \left(A_l R^l - \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta \\ \varepsilon \sum_l l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -\varepsilon_0 \sum_l (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) - \varepsilon_0 E_0 \cos \theta \end{cases}$$

故:

$$\begin{cases} A_1 R - \frac{B_1}{R^2} = -E_0 R \\ \varepsilon A_1 + \varepsilon_0 \frac{2B_1}{R^3} = -\varepsilon_0 E_0 \end{cases}$$

解之得:

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{3\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} \\ B_1 = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0 R^3}{\varepsilon+2\varepsilon_0} \end{cases}$$

故:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_0 - \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} E_0 r \cos \theta = \varphi_0 - \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \\ \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta = \varphi_0 - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} R^3 \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \end{cases} \quad (3.18)$$

容易发现介质球内部电场为 $\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0$, 为匀强场。这说明极化电荷产生的所谓退极化场为:

$$\mathbf{E}' = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_0 = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 \quad (3.19)$$

利用 (3.17) 式反推知, 极化电荷面密度分布为:

$$\sigma_p = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \cos \theta \quad (3.20)$$

3.4 Green 函数法求电势分布

3.4.1 Green 函数法的基本精神

设有一区域 V , 其中有电荷分布, V 的边界记为 ∂V 。 V 区域中电势的 Green 函数定义为如下方程的解:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0} \quad (3.21)$$

如果 V 中的电势分布为 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, 说明在 V 内只有 \mathbf{r}' 处有一个电荷量为 1 的点电荷, V 内其余地方无电荷分布, 但 V 外的区域可以有任意的电荷分布。 V 外区域不同的电荷分布决定了不同的 G 的具体形式。下面我们证明: 对于给定的 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, 若再已知 $\varphi|_{\partial V}$ 与 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial V}$, 则可利用 G 求出 V 内的电势分布 $\varphi(\mathbf{r})$ 。

考虑如下积分:

$$\begin{aligned} \iiint_V dV' \nabla' \cdot [\varphi(\mathbf{r}) \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] &= \oint_{\partial V} ds' \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \\ &= \iiint_V dV' \nabla' \varphi \cdot \nabla' G + \iiint_V dV' \varphi \nabla'^2 G \end{aligned}$$

利用 Green 互易定理 (证明从略) :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (3.22)$$

得:

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla'^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

故:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} ds' \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} &= \iiint_V dV' \nabla' \varphi \cdot \nabla' G - \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V dV' \varphi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &= \iiint_V dV' \nabla' \cdot (G \nabla' \varphi) - \iiint_V dV' G \nabla'^2 \varphi - \frac{1}{\epsilon_0} \varphi(\mathbf{r}) \\ &= \oint_{\partial V} ds' G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} + \iiint_V dV' \frac{\rho}{\epsilon_0} G - \frac{\varphi(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

于是得：

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \varepsilon_0 \iint_{\partial V} ds' \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] \quad (3.23)$$

这就是用 Green 函数求解电势分布的基本方程。

3.4.2 三类 Green 函数

若 G 满足边界条件 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = 0$, 则 (3.23) 简化为：

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \varepsilon_0 \iint_{\partial V} ds' \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \quad (3.24)$$

此时仅需已知 $\varphi|_{\partial V}$ 即可求解。满足 $G|_{\partial V} = 0$ 的 G 称为第一类 Green 函数。

同理, G 满足：

$$-\varepsilon_0 \iint_{\partial V} ds \frac{\partial G}{\partial n} = -\varepsilon_0 \iiint_V dV \nabla^2 G = 1$$

若事先取 G 满足 $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$ (S 为边界面积), 则 (3.23) 简化为：

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \iiint_V dV' \rho G + \varepsilon_0 \iint_{\partial V} ds' \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} + \frac{\varphi}{\varepsilon_0 S} \right) \\ &= \iiint_V dV' \rho G + \varepsilon_0 \iint_{\partial V} ds' G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} + \bar{\varphi}|_{\partial S} \end{aligned} \quad (3.25)$$

此时需已知 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial S}$ 和 φ 在边界上的均值 $\bar{\varphi}|_{\partial S}$ 。满足 $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$ 的 G 称为第二类 Green 函数。

此外, 对仅知 $(\alpha \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n})|_{\partial S} = f$ ($\alpha, \beta \neq 0$) 的情况, 若取 G 满足 $(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n'})|_{\partial S} = 0$, 则可推得:

$$\beta \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \right)|_{\partial S} = fG$$

代入 (3.23) 得：

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V dV' G \rho + \frac{\varepsilon_0}{\beta} \iint_{\partial V} ds' f G \quad (3.26)$$

满足 $(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n'})|_{\partial V} = 0$ 的 G 称为第三类 Green 函数。

实际应用中，第一类 Green 函数使用最广泛。

3.4.3 典型的第一类 Green 函数

下面列举几类典型的第一类 Green 函数：

1. 无穷大平面边界

由镜像法结论，Green 函数为：

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] \quad (3.27)$$

2. 球面边界

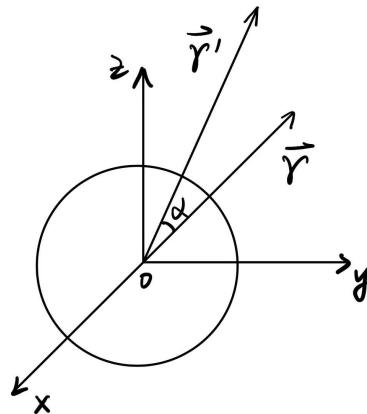


图 3.14: 以球面为边界的第一类 Green 函数

由镜像法，球坐标下 Green 函数为：

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\alpha}} - \frac{\frac{R}{r'}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{r'}\right)^2 - 2r \cdot \frac{R^2}{r'} \cos\alpha}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 + R^2 - 2rr' \cos\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中 $\cos \alpha = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$, 球坐标示意:

3. 无界空间

这一情形是全空间仅 \mathbf{r}' 处有大小为 1 的点电荷, Green 函数为:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \quad (3.29)$$

3.4.4 Green 函数法的应用

作为一个例子: 已知 xoy 平面上的电势分布:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_0, & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求上半空间的电势分布。

该问题应该用以无穷大平面为边界的第一类 Green 函数:

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}} \right]$$

代入 Green 积分公式, 电势为:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \iiint_V dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \epsilon_0 \iint_{xoy} ds' \varphi \left(-\frac{\partial G}{\partial z'} \right) \\ &= \frac{z\varphi_0}{2\pi} \iint_{xoy} ds' \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{z\varphi_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{[\rho'^2 + \rho^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi' - \phi) + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{z\varphi_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{[\rho^2 + z^2]^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi' - \phi)}{\rho^2 + z^2} + \dots \right] \\ &= \frac{z\varphi_0 R^2}{2(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3z\varphi_0 R^4}{8(\rho^2 + z^2)^{5/2}} + \dots \end{aligned}$$

上面的推导过程中我们使用了柱坐标并且进行了 Taylor 展开, 结果只显示了前两

项。

3.5 静电场的能量密度

3.5.1 真空中静电场的能量密度

首先考虑最简单的情形，两个点电荷体系。要把握电场的能量，我们必须认识到：电场对电荷做正功，电场能量减少，反之亦然。现在有两个点电荷 q_1, q_2 ，空间中存在由它们激发出的电场。现在想象 q_1 与 q_2 各自发生了一小段假想的⁵位移 $d\mathbf{r}_1$ 与 $d\mathbf{r}_2$ ，电场力做功为：

$$\begin{aligned}
 dW &= q_1 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 \\
 &= q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_1 + q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_2 \\
 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \\
 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{d|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \\
 &= -d \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) \\
 &= -d \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) \\
 &= -d \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{q_2} + q_2 \varphi_{q_1}) \\
 &= -d E_e
 \end{aligned}$$

故，该体系下静电场的能量为：

$$E_e = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{q_2} + q_2 \varphi_{q_1}) \quad (3.30)$$

将此式推广至一般的带电体系，有：

$$E_e = \frac{1}{2} \iiint_V dV \varphi \rho$$

⁵这有点虚功原理的意思在了

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \iiint_{R^3} dV \varphi \rho \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{R^3} dV \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{R^3} dV \varphi \nabla \cdot \mathbf{E} \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{R^3} dV \nabla \cdot (\varphi \mathbf{E}) - \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{R^3} dV \mathbf{E} \cdot \nabla \varphi \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\text{无穷远}} ds \cdot \varphi \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{R^3} dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \\
&= \iiint_{R^3} dV \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

这里 φ 理解为除去该点其它电荷在该点产生的电势，它等于该点的电势，因为该点上的电荷在该点产生的电势为零⁶。 V 以外区域 ρ 为零，故将积分区域扩大至 R^3 不会影响积分结果。可见 $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ 在这里充当了能量密度的角色，我们称之为静电场的能量密度：

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tag{3.32}$$

有电场线的地方才有 E ，因此我们有一个很生动的说法是：电场能量储存于电场线中。这是种很好的理解方式⁷。下面我们不妨来看一个很生动的例子。

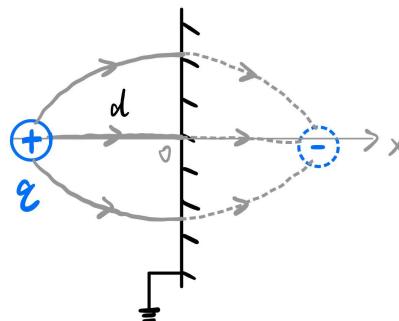


图 3.15: 无穷大接地导体平面前距离为 d 处有一点电荷

无穷大接地导体平面前距离为 d 处有一点电荷 q ，试求整个体系的电场能。

⁶ 要证明这个结论，只需注意 dV 是三阶小量，而 $\frac{1}{r}$ 的分母是一阶小量，从而 $\frac{\rho dV}{r}$ 是二阶小量，也是小量，可以忽略。

⁷ 为了与这一物理图像搭配，我们还需要接受：电通量表征着穿过某一平面的电场线的根数，等等。Faraday 引入的“场线”为电磁场提供了一种很直观且很生动的描述与理解的方式，值得我们去思考与体会。感兴趣的读者可以参阅我前面推荐的那本书《法拉第、麦克斯韦和电磁场——改变物理学的人》，尤其是其中的第十章《假想的流体》。

首先用传统方法去求，考虑 q 发生了一小段假想的位移 $\delta\mathbf{r}$ 。注意到 q 与 q' 互为镜像，从而有 $\delta\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ ，故电场力做的功为：

$$\begin{aligned}\delta W &= \frac{q\mathbf{E}}{2} \cdot (\delta\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}') \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\delta\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \delta \left(\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)\end{aligned}$$

于是，该体系的势能为：

$$E_e = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d} \quad (3.33)$$

所以，势能为双点电荷情形的一半，这是因为 q' 为像电荷而不是真实电荷，因此一方面 q' 不会被做功，另一方面有 $\delta\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ ，于是就出现了 $\frac{1}{2}$ 因子。

但若用能量储存在电场中的观点来看的话， $\frac{1}{2}$ 因子的出现是显然的——因为这时只存在一半的电场线，自然只储存有一半的电场能！

3.5.2 有介质存在的情形

有介质存在时，电场能定义为：

$$\begin{aligned}E_e &= \frac{1}{2} \iiint_V dV \varphi \rho_f \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \varphi \rho \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3} dV \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}\end{aligned}$$

因此有介质存在时，电场能量密度为：

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (3.34)$$

从中可以发现， $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ 是上式在真空中的特例。

在上面的推导中， φ 是自由电荷、极化电荷一同产生的电势，但电场能只包含了自由电荷在势场中的势能。

至此有的读者可能就会有疑问了：为什么不考虑极化电荷在势场中的电势能呢？实际上也可以这样考虑，这样的话，那电场的能量密度似乎永远只有一个表达式，那就是 $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ 。但其实不然，这个式子与 (3.34) 的差值叫做介质的极化能，极化能往往是负值。而我们认为电场能量既包括了电荷的电势能，也包括了极化能。因此有介质存在时的电场能量密度仍然由 (3.34) 式给出。关于极化能的物理图像，感兴趣的读者可以参考 Jackson 或者 Landau 的电动力学教材。

3.6 电偶极矩

3.6.1 电偶极子产生的电场

相距为 l 的一对正负电荷产生的电势为:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{l}{2}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{l}{2}|} \right)$$

电偶极子是将上述体系的 l 趋于零, 电荷量 q 趋于无穷大从而二者乘积保持不变的情形, 因此计算电偶极子 $\mathbf{p} = ql$ 产生的电势, 应该将上式进行 Taylor 展开并保留领头项:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla \frac{1}{r} - \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (3.35)$$

进而可得 \mathbf{p} 产生的电场为:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i e_i \partial_i \frac{p_j x_j}{r^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{p_j \delta_{ij} e_i}{r^3} - \frac{3p_j x_j x_i e_i}{r^5} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.6.2 电偶极子在外场中的能量与受力情况

设电偶极子 \mathbf{p} 所在处电场强度为 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, 则 \mathbf{p} 在外场中的能量为:

$$V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (3.37)$$

所受电场力为：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= -\nabla V = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \\
 &= \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{p} \\
 &= (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

所受力矩为：

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} &= q \left[\frac{\mathbf{l}}{2} \times \mathbf{E} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2} \right) - \frac{\mathbf{l}}{2} \times \mathbf{E} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{\mathbf{p}}{q} \times \left[\mathbf{E} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2} \right) - \mathbf{E} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} \right) \right] \\
 &\approx \frac{\mathbf{p}}{q} \times \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla \right) \mathbf{E} - \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla \right) \mathbf{E} \right] \\
 &= q\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\
 &= \mathbf{l} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\
 &= \mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

3.6.3 电偶极子的电荷密度

点电荷（原点处）的电荷密度为：

$$\rho = q\delta(\mathbf{r})$$

电偶极子的电荷密度可表示为：

$$\begin{aligned}
 \rho &= q\delta \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} \right) - q\delta \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2} \right) \\
 &= -q \left[\delta(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}) + \dots \right] + q \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}) + \dots \right] \\
 &\approx -q \left[\frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}) \right] \\
 &= -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}) = -(\mathbf{p} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r})
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

另一种思路：对 (3.35) 式作用 Laplace 算符：

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left[\mathbf{p} \times (\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}) + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left[(\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \partial_i \left(p_j \partial_j \frac{x_i}{r^3} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_j \partial_j \left(\partial_i \frac{x_i}{r^3} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_j \partial_j [4\pi\delta(\mathbf{r})] \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

结合 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, 对比得：

$$\rho = -(\mathbf{p} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r})$$

3.6.4 电偶极层

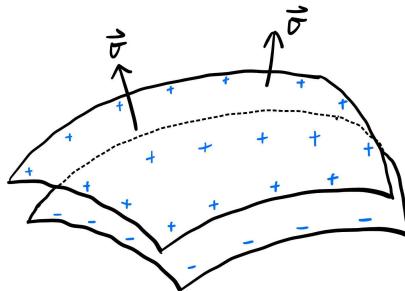


图 3.16: 电偶极层

电荷面密度处处相反，且相聚很近的一对带电平面称为电偶极层，可以看成是一层电偶极子。设电偶极层为曲面 S ，电偶极子面密度为 $\tau = \sigma ds$ ，则面外电势分布为：

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{d\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
&= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S d\Omega \\
&= \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

其中 Ω 为立体角。电偶极层界面上下两侧电势跃变为:

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{3.42}$$

3.6.5 电荷体系的电偶极矩

我们已知无界空间 Green 函数为:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

从而区域 V 中电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ 产生的电势为:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \iiint_V dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \varepsilon_0 \iint_{\text{无穷远}} ds' \left(G \frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

对 $\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 按 \mathbf{r} 进行 Taylor 展开:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V dV' \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} - \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}' + \dots \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V dV' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \dots
\end{aligned}$$

定义电荷体系的电偶极矩:

$$\mathbf{p} = \iiint_V dV' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \tag{3.44}$$

则体系电势展开式为:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \tag{3.45}$$

体系电场展开式为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) + \dots \quad (3.46)$$

上面两个展开式叫做电势和电场的多极展开，从中可以窥见一个道理：电多极矩和点电荷一样是基本的元素。顺便提一下，可以想到，展开式的高阶项分别对应了更高阶的电多极矩，比如电四极矩、电八极矩等等，产生的电势或电场，。

再来看能否用 (3.44) 式表示电荷分布体系在外场中的能量。设电荷分布在区域 V 中，则体系在外场中的能量为：

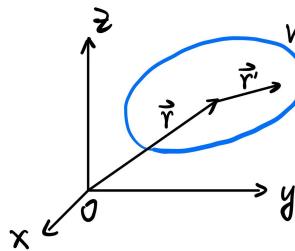


图 3.17：电荷分布体系在外场中的能量

$$\begin{aligned} E_e(\mathbf{r}) &= \iiint_V dV' \rho(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \\ &= \iiint_V dV' \rho(\mathbf{r}') [\varphi(\mathbf{r}) + \mathbf{r}' \cdot \nabla \varphi + \dots] \\ &= \varphi(\mathbf{r}) Q - \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} + \dots \end{aligned}$$

说明 (3.44) 是一个自洽的定义！

3.6.6 极化电荷的电偶极矩

最后再来看一个有趣的问题：极化介质中极化电荷的电偶极矩与其极化强度场 \mathbf{P} 的关系是什么？

要小心，极化介质除了有体极化体电荷 $\rho_p(\mathbf{r})$ ，还会有极化面电荷 $\sigma_p(\mathbf{r})$ ，因此

极化电荷的电偶极矩应为：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \iiint_V dV \mathbf{r} \rho_p(\mathbf{r}) + \iint_{\partial V} dS \mathbf{r} \sigma_p(\mathbf{r}) \\
 &= - \iiint_V dV \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{P} + \iint_{\partial V} (d\mathbf{s} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{r} \\
 &= \iiint_V dV [\nabla \cdot (\mathbf{P}\mathbf{r}) - (\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{r}] \\
 &= \iiint_V dV (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{r} \\
 &= \iiint_V dV \mathbf{P}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

只要回顾到电极化场的定义 $\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_{\text{分子}}}{\Delta V}$, 则上式就有十分生动的物理图像了！

3.6.7 导体球与介质球的等效电偶极矩

1. 导体球的等效电偶极矩

导体球在匀强外场中感应电荷产生的电势为：

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi} &= \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta \\
 &= \frac{R^3 \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^5} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_{\text{eq}} \cdot \mathbf{r}}{r^3}
 \end{aligned}$$

对比得等效电偶极矩：

$$\mathbf{p}_{\text{eq}} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0 \tag{3.48}$$

2. 介质球的等效电偶极矩

介质球极化电荷产生的电势为：

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi} &= \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta \\
 &= \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} R^3 \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^5}
 \end{aligned}$$

对比得等效电偶极矩：

$$\mathbf{p}_{\text{eq}} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \mathbf{E}_0 \quad (3.49)$$

Chapter 4

静磁学

和静电学相呼应，静磁学问题的主要目标是在给定电流、导体、磁介质分布的前提下，求空间中的磁矢势或磁标势（进而磁场）分布。

由于静磁场是无源场，因此可以引入磁矢势来描述磁场的分布。而在没有传导电流分布的区域中，磁场是无旋场，从而也可以引入磁标势来描述磁场分布。我们本章一开始先介绍了这两类势函数，以及它们的简要应用；接着，和静电学问题相呼应，我们介绍了静磁场的能量密度；然后我们介绍了磁矩，它也是和电偶极矩相呼应的物理量；同时我们还引入了磁偶极子，它虽然没有现实的对应体，但却可以帮助我们简化公式的计算与推导。

本章的参考资料有：

- 还是郭硕鸿老师的《电动力学（第四版）》。
- 以及 David Tong 的讲义，它在磁矩相关公式的推导时给我带来启发。

下面，欢迎进入第四章的冒险！

4.1 磁矢势与磁标势

4.1.1 磁矢势

静磁学问题中， Maxwell 方程组退化为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \end{cases} \quad (4.1)$$

我们将只考虑线性介质，从而有：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \end{cases} \quad (4.2)$$

由于 \mathbf{B} 是无源场，故可以引入磁矢势 \mathbf{A} ，使得：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.3)$$

上式可做为磁矢势 \mathbf{A} 的定义，但是原则上并未对 \mathbf{A} 的散度做出任何限制。本章我们均默认有：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.4)$$

这被称为 **Coulomb 规范**，其中的道理我们放在第 7 章去谈。这样一来，将上式代入 (4.2) 第二式，得：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

即：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (4.5)$$

\mathbf{A} 的各个分量均满足 Poisson 方程，于是我们在第 2 章中关于 Poisson 方程解的性质就都能派上用场了。Coulomb 规范使得 \mathbf{A} 的求解变得简便。

现在，若我们规定无穷远处 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ，则利用无界空间的 Green 函数，可以得到

真空中无界空间 \mathbf{A} 的表达式为:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \iiint_{R^3} dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{\mu_0} \iint_{\text{无穷远}} ds' \left(G \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} - \mathbf{A} \frac{\partial G}{\partial n} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\end{aligned}\quad (4.6)$$

其中 $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 是满足 $G|_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\rightarrow\infty} = 0$ 的方程 $\nabla^2 G = -\mu\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 的解, V 是有电流分布的区域.

由 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 、 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 可得矢势 \mathbf{A} 的边界条件:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \begin{cases} \hat{n} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = 0 \\ \hat{n} \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{A}_2}{\mu_2} - \frac{\nabla \times \mathbf{A}_1}{\mu_1} \right) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.7)$$

4.1.2 磁矢势的简单应用

下面举例说明矢势 \mathbf{A} 在静磁学中的应用.

1. 圆电流环产生的磁场

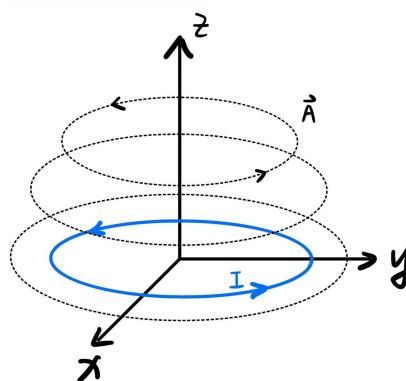


图 4.1: 圆形电流环产生的磁矢势

先计算矢势:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

由对称性可知，在柱坐标系下看，有：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\rho, z) &= A(\rho, z)\hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{e}_\phi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi R d\phi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\phi + z^2}} \\
 &= \frac{\mu_0 I R \hat{e}_\phi}{4\pi \sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} \cos\phi \cdot \left(1 - \frac{2R\rho\cos\phi}{R^2 + \rho^2 + z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\phi \\
 &= \frac{\mu_0 I R \hat{e}_\phi}{4\pi \sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} \left(\cos\phi + \frac{R\rho\cos^2\phi}{R^2 + \rho^2 + z^2} + \dots\right) d\phi \\
 &= \frac{\mu_0 I R^2 \hat{e}_\phi}{4(R^2 + \rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \dots
 \end{aligned}$$

而利用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 即可求出磁场分布。

4.1.3 磁标势

对于没有自由电流分布的区域， $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ ，从而可以引入磁标势 φ_m ，使得：

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m \quad (4.8)$$

但是，除了“没有自由电流分布”这一限制之外，还有一种情形需要小心，那就是

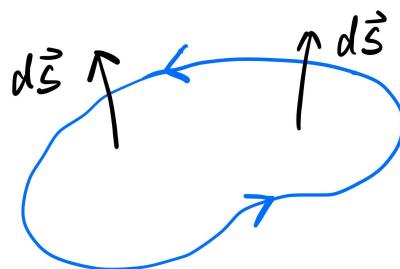


图 4.2: 电流线圈

有电流线圈存在时的情形。下面来看一个电流线圈产生的磁标势。利用公式¹：

$$\oint_L dl \times \mathbf{A} = \nabla \iint_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A} - \iint_S d\mathbf{s} (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

得：

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{I}{4\pi} \oint_L dl \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{I}{4\pi} \iint_S \nabla' \left[d\mathbf{s}' \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] - \frac{I}{4\pi} \iint_S d\mathbf{s}' \cdot \nabla' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= -\frac{I}{4\pi} \nabla \iint_S d\Omega' + I \iint_S d\mathbf{s}' \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= -\nabla \frac{I\Omega}{4\pi} + I \iint_S d\mathbf{s}' \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\end{aligned}$$

于是，对于有电流圈存在的情况，要求我们首先事先选取一个以 L 为边界的曲面 S ，则对于那些不在该曲面上的点 \mathbf{r} ，该处的磁标势为：

$$\varphi_m = \frac{I\Omega}{4\pi} \quad (4.9)$$

我们有如下结论：① S 面界面上下有一个一个磁标势跃变 $\Delta\varphi_m = \varphi_+ - \varphi_- = I$
 ② φ_m 的分布与 S 面的选择有关，十分诡异！③ S 面上的 φ_m 是发散值（因为有 $d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ）因此无意义，我们只能关注 S 面外的 φ_m 分布。

由此可见磁标势远比电（标）势要奇异，是一个“怪胎”。不过由于磁标势与电（标）势满足同样的方程，求解电势分布的各个方法都可以照搬到这里，因此利用磁

¹附上该公式的证明过程：

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{A} \times dl &= \varepsilon_{ijk} \oint_L A_n dl_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \iint_S \varepsilon_{kmn} dS_m \partial_j (\varepsilon_{ink} A_n) \\ &= \varepsilon_{ijk} \iint_S \varepsilon_{kmn} \varepsilon_{ink} dS_m \partial_j A_n \\ &= \varepsilon_{ijk} \iint_S (d_{min} \delta_{jn} - d_{mnj} \delta_{in}) dS_m \partial_j A_n \\ &= \varepsilon_{ijk} \iint_S dS_i \partial_j A_j - \varepsilon_{ijk} \iint_S dS_m \partial_i A_m \\ &= \iint_S d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \iint_S \nabla(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s})\end{aligned}$$

标势我们得以比较方便地求解某些体系的磁场分布，下面来举一些例子。

4.1.4 磁标势的简单应用

1. 匀强磁场中的磁介质球

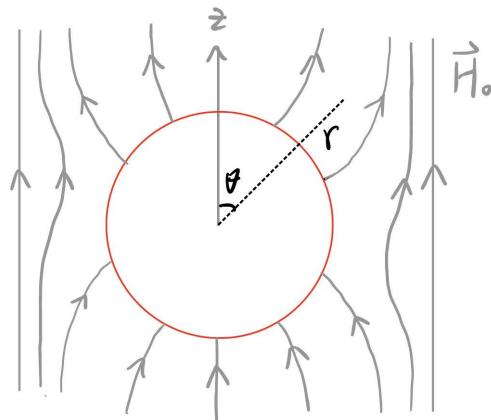


图 4.3: 匀强磁场中的磁介质球

一个半径为 R 的磁介质球置于匀强外磁场中，下面用分离变量法求空间中的磁场分布。设球内外的磁标势分别为 φ_1 、 φ_2 。则有

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = 0 \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

$$r = R \text{ 处}, \varphi_1 = \varphi_2, \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

易知 φ_1 、 φ_2 的解的基本形式为：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta) \\ \varphi_2 = -H_0 r \cos \theta + \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \end{cases}$$

由 $\varphi_1|_{r=R} = \varphi_2|_{r=R}$ 得:

$$\sum_l A_l R^l P_l(\cos \theta) = -H_0 R \cos \theta + \sum_l \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

故:

$$A_1 R = -H_0 R + \frac{B_1}{R^2}, \quad A_l = B_l = 0 \ (l \neq 1)$$

由 $\mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}|_{r=R} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}|_{r=R}$ 得:

$$\mu A_1 = -\mu_0 H_0 - 2\mu_0 \frac{B_1}{R^3}$$

联立解得:

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 \\ B_1 = \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 R^3 \end{cases}$$

于是:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\frac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 r \cos \theta \\ \varphi_2 = -H_0 r \cos \theta + \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta \end{cases}$$

进而 $\mathbf{H}_1 = -\nabla \varphi_1$, $\mathbf{H}_2 = -\nabla \varphi_2$. 我们从中可以知道, 介质球表面磁化电流产生的磁标势为:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + H_0 r \cos \theta = \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 r \cos \theta \\ \tilde{\varphi}_2 = \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta \end{cases}$$

此时磁介质球表面无磁荷分布为:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \hat{e}_r \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)|_{r=R} \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 \cos \theta + H_0 \cos \theta + 2 \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 \cos \theta \\ &= 3 \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 \cos \theta \end{aligned}$$

下面有必要要求一下磁化电流面密度。由: $\hat{e}_r \times (\mu \mathbf{H}_2 - \mu \mathbf{H}_1)|_{r=R} = \mu_0 \boldsymbol{\alpha}_m$ 可

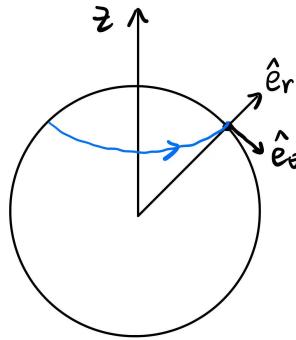


图 4.4: 磁化电流面密度分布

得:

$$\left(\mu \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \mu_0 \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi = \mu_0 \alpha_m$$

于是:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 \sin \theta - H_0 \sin \theta + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 \sin \theta \right) \hat{e}_\phi \\ &= 3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 \sin \theta \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

如是正弦分布的面电流在球外产生一磁偶极场:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= \mu_0 \mathbf{H}_2 = -\mu_0 \nabla \tilde{\varphi}_2 \\ &= -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} R^3 \frac{\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

而在球内产生一匀强场:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mu \mathbf{H}_1 - \mu_0 \mathbf{H}_0 \\ &= -\mu \nabla \varphi_1 - \mu_0 \mathbf{H}_0 \\ &= \left(\frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} - \mu_0 \right) \mathbf{H}_0 \\ &= 2\mu_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0 \end{aligned}$$

抽象出最一般的结论，对于球面电流分布：

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \sin \theta \hat{e}_\phi$$

其在球内外产生的磁感应场分别为：

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \frac{2\mu_0}{3}\alpha \hat{e}_z \\ \mathbf{B}_2 = -\nabla \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \end{cases} \quad (4.10)$$

其中 $\mathbf{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\alpha \hat{e}_z$ 为体系的磁矩（详见 3.2 节）

4.2 静磁场的能量密度

4.2.1 真空中静磁场的能量密度

要把握磁场的能量，我们必须意识到磁场是靠产生感应电动势来释放能量的。我们还是先来考虑一个最简单的情况，即单个电流线圈的磁场能。电流线圈产生磁感线，依据对电场的讨论，我们自然能预料到磁场能储存于磁感线中。

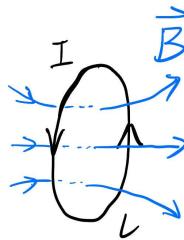


图 4.5: 磁场能储存在磁感线中

首先来看单个电流环的磁场能。磁场能的释放依靠的是感应电动势，或者说涡旋电场对电荷（电流）做功，这功的功率为：

$$P = \frac{dW}{dt} = I\mathcal{E}_{\text{感}} = -I \frac{d\Phi_m}{dt}$$

和讨论电场力做功时同样，这里的改变可以认为是一个假想的改变。从而磁能的减少量为：

$$dE_m = -dW = Id\Phi_m = Id(LI) = d\left(\frac{LI^2}{2}\right) = d\left(\frac{\Phi_m I}{2}\right)$$

其中 L 为自感系数。从而电流环储存的电能为：

$$E_m = \frac{I\Phi_m}{2} \quad (4.11)$$

下面我们讨论一般情形，即连续的电流分布体系的磁场能。注意到电流密度：

$$\mathbf{J} = nqS\mathbf{v}/S = nq\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}$$

而涡旋电场的功率为:

$$\begin{aligned} P_{\text{涡}} &= \iiint_V \rho dV \mathbf{E}_{\text{涡}} \cdot \mathbf{v} \\ &= \iiint_V dV \mathbf{E}_{\text{涡}} \cdot \mathbf{J} \\ &= -\frac{dE_m}{dt} \end{aligned}$$

同样, 这里的 \mathbf{v} 引起的位移也是一个假想的位移。第二章讲涡旋电场时候我们提到, 涡旋电场与磁矢势的关系为:

$$\mathbf{E}_{\text{涡}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

从而:

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= \iiint_V dV \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV \left(\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V'} dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \iiint_{V'} dV dV' \frac{\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\partial t} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \iiint_V dV' dV \frac{\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\partial t} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \iiint_{V'} dV dV' \frac{\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\partial t} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \iiint_V dV \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \end{aligned}$$

注意, 上面的推导过程中利用了 V 与 V' 是同一区域, 所以我们可以自由地对换 r 与 r' 的位置。有了上面的结果, 从而有:

$$\iiint_V dV \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \iiint_V dV \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J}$$

从而有:

$$\frac{dE_m}{dt} = \iiint_V dV \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \iiint_V dV \left(\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \iiint_V dV \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \right)
 \end{aligned}$$

我们终于把对时间的求导算符提到了最前面。从而，磁场能为

$$E_m = \iiint_V dV \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \quad (4.12)$$

注意到上式与电场能量密度 $E_e = \iiint_V dV \frac{1}{2} \varphi \rho$ 是对应的²，从中我们得以窥见矢势为什么叫矢“势”，很有趣。

所以，利用 Maxwell 方程组，磁场能为：

$$\begin{aligned}
 E_m &= \frac{1}{2} \iiint_V dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV (\nabla \times \mathbf{B} / \mu_0) \cdot \mathbf{A} \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\text{无穷远}} d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \\
 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \frac{B^2}{2\mu_0}
 \end{aligned}$$

我们讨论静磁， \mathbf{B} 不随 t 改变，故不考虑位移电流。从而我们有磁场能量密度：

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.13)$$

² 此外，(4.12) 式还可以从 $E_m = \frac{\Phi_m I}{2}$ 导出，只要我们将连续分布的电流体系拆解成无穷多个电流环：

$$\begin{aligned}
 E_m &= \frac{1}{2} \sum_i \Phi_{mi} I_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i \left(\iint_{S_i} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \right) I_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i \left(\oint_{\partial S_i} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \right) I_i = \sum_i \left(\oint I_i d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i \left(\iiint_{\delta V_i} dV \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_V dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

4.2.2 有介质存在的情形

有介质存在时，磁场能定义为传导电流在矢势场中的能量：

$$\begin{aligned}
 E_m &= \iiint_V dV \frac{1}{2} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{A} \\
 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2} \oint_{\text{无限远}} d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \\
 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} dV \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

于是磁场能量密度为：

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (4.14)$$

可见 $\frac{B^2}{2\mu_0}$ 仅是在真空中的特例。和先前在讨论电场能时一样，磁场能应为所有电流在势场中的能量： $\iiint_V dV \frac{1}{2} (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m) \cdot \mathbf{A} = \iiint_V dV \frac{B^2}{2\mu_0}$ 再加上磁化能，而磁化能量密度恰好等于 $\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2$ 。

4.3 磁矩

4.3.1 电流环产生的磁矢势

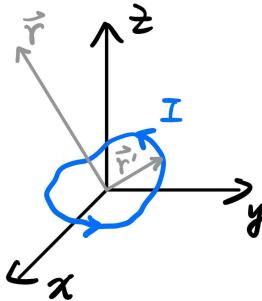


图 4.6: 电流环的磁矩

首先来看电流环在空间产生的磁矢势:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L dl' \left(\frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{dl' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})}{r^3} + \dots \end{aligned}$$

下面来求展开式第一项。

首先注意到有如下关系:

$$\oint_L dl' \cdot \nabla [\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})] = \varepsilon_{ijk} \oint_L dl' \cdot \nabla [x'_i(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})] = \mathbf{0}$$

另一方面, 上式还可以等于:

$$\begin{aligned} \oint_L dl' \cdot \nabla [\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})] &= \varepsilon_{ijk} \oint_L dl'_j \partial_j (x'_i x'_k x_l) \\ &= \varepsilon_{ijk} \oint_L (dl'_j \delta_{ij} x'_k x_l + dl'_j x'_i \delta_{jk} x_l) \\ &= \oint_L \varepsilon_{ijk} dl'_i x'_k x_l + \oint_L \varepsilon_{ijk} x'_i dl'_j x_j \\ &= \oint_L dl' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \left(\oint_L dl' \cdot \mathbf{r} \right) \end{aligned}$$

于是有：

$$\oint_L dl' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} (\oint_L dl' \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

(4.15) 式才是我们需要用到的，有了这一关系，易知磁矢势展开式的首项化为了：

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{dl'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})}{r^3} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{1}{2} \frac{dl'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(dl' \cdot \mathbf{r})}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{r}' \times dl') \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\oint_L \frac{I}{2} (\mathbf{r}' \times dl') \right] \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$

我们定义电流环的磁矩为：

$$\mathbf{m} = I \oint_L \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times dl') = I \iint_S d\mathbf{s} = IS \quad (4.16)$$

于是电流环产生的磁矢势可以表示为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + o\left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}\right)$$

在 \mathbf{r} 和电流环的尺度 \mathbf{r}' 相比很大很大的时候，只考虑第一项，于是有：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.17)$$

4.3.2 磁偶极子

磁偶极子是和电偶极子相呼应的一个概念。欲引出磁偶极子，首先来看电流环在远处产生的磁感应场：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} m_i \partial_i \left(\frac{x_j \hat{e}_j}{r^3} \right) \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[m_i \frac{\delta_{ij} \hat{e}_j}{r^3} - \frac{3m_i x_j \hat{e}_j x_i}{r^5} \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

上面这个式子的形式是不是十分眼熟？回顾电偶极子 \mathbf{p} 产生的电场：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]$$

若定义磁偶极矩：

$$\mathbf{p}_m = \mu_0 \mathbf{m} \tag{4.19}$$

则电流环在远场区产生的磁场强度：

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right] \tag{4.20}$$

这表明我们可以引入磁偶极子：一个电流环的尺度不断缩小为小量，但保持其磁矩

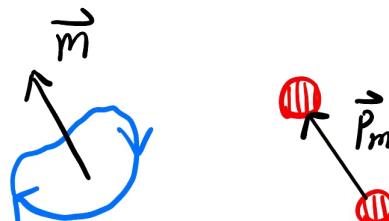


图 4.7: 电流环在远场区活像一个磁偶极矩！

\mathbf{m} 为一宏观量，其产生磁场的行为就如同磁偶极子 $\mathbf{p}_m = \mu_0 \mathbf{m} = q_m \mathbf{l}$ ，其中 q_m 为磁荷。

引入磁偶极子可以在很多场合便利我们的计算，下面举一个例子。我们易知一个宏观的电流环可以视为无穷多个微观电流环的叠加，从而可以视为一 磁偶极层，即和电偶极层相呼应的一个概念。³ 利用这一观点，我们再来求一下电流环产生的磁

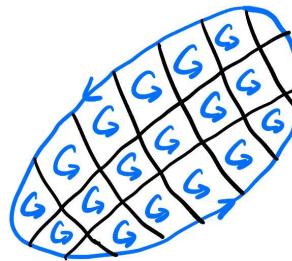


图 4.8：电流环等效为磁偶极层

标势：

$$\begin{aligned}\varphi_m &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \iint_S \frac{d\mathbf{p}_m \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{I}{4\pi} \iint_S \frac{d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{I}{4\pi} \iint_S d\Omega \\ &= \frac{I\Omega}{4\pi}\end{aligned}$$

这与我们在上一小节得出的结果一致。

4.3.3 电流环在外场中的能量与受力情况

本节我们沿用磁偶极子的概念，来便利地推导一些结论。

首先看电流环在外场中的能量，将电流环视为磁偶极层，则有：

$$V = - \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{p}_m = - \iint_S \mathbf{B} \cdot Id\mathbf{s} = -I\Phi \quad (4.21)$$

³而且这里引入磁偶极子在数学上也是严格成立的——因为对于空间中任何一点，不论其在不在远场区，相对于电流环微元而言都是“远处”，所以难怪我们会得到自洽的结果了！

特殊地, 若 \mathbf{B} 为匀强场, 则有:

$$V = -\mathbf{B} \cdot \iint_S Id\mathbf{s} = -\mathbf{B} \cdot \iint_S \frac{I}{2}\mathbf{r}' \times dl' = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (4.22)$$

下面来看电流环在外场中的受力:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = I\nabla \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = I\nabla\Phi$$

若 \mathbf{B} 为匀强场, 则 Φ 为常量, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ 。

最后来看力矩:

$$\boldsymbol{\tau} = \iint_S d\mathbf{p}_m \times \mathbf{H} = \iint_S Id\mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (4.23)$$

若 \mathbf{B} 为匀强场, 则:

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\iint_S Id\mathbf{s} \right) \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4.24)$$

当然, 上述结论也可以直接用定义并 Maxwell 方程组硬算, 但是数学上的困难比较大⁴。

4.3.4 电流体系的磁矩

首先来看连续的电流分布体系产生的磁矢势, 设电流分布在 V 区域中, 易知在全空间 \mathbf{A} 满足:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4.25)$$

⁴不信的话我们举一个例子——电流环在匀强磁场中受到的力矩, 如果不用磁偶极子的概念, 直接硬算的话:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \oint_{\partial S} \mathbf{r} \times (Idl \times \mathbf{B}) \\ &= I \oint_{\partial S} dl(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - I \oint_{\partial S} (\mathbf{r} \cdot dl)\mathbf{B} \\ &= I \iint_S d\mathbf{s} \times \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - I\mathbf{B} \iint_S d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) \\ &= I \iint_S d\mathbf{s} \times (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{r}) - \mathbf{0} \\ &= I \iint_S d\mathbf{s} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{r} = I \iint_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{r}) \\ &= I \iint_S d\mathbf{s} \times \left[\mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = I \iint_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \\ &= \mathbf{m} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

利用无界空间 Green 函数, 可得:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.26)$$

对 \mathbf{r}' 进行 Taylor 展开, 得:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} - \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}' + \dots \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \end{aligned} \quad (4.27)$$

其中第一项:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_V dV' (\mathbf{J} \cdot \nabla') \mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_V dV' [\nabla' \cdot (\mathbf{J} \mathbf{r}') - (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}'] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \iint_{\partial V} (ds' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}' - 0 \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

表明不存在磁单极。而第二项:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}'}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \iiint_V dV' \varepsilon_{ijk} J_i x_j x_k$$

注意到:

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot [\mathbf{J} \mathbf{r}' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})] &= \varepsilon_{ijk} \partial'_i (J_j x'_k x'_l) \\ &= \varepsilon_{ijk} (J_j \delta_{ik} x'_l + J_j x'_k \delta_{il}) \\ &= \mathbf{J} \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r}' (\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned}$$

而

$$\iiint_V dV' \nabla' \cdot [\mathbf{J} \mathbf{r}' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})] = \iint_{\partial V} (ds' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) = 0$$

故

$$\iiint_V dV' [\mathbf{J} \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r}' (\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})] = 0$$

于是第二项：

$$\begin{aligned}\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}'}{r^3} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}'(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})}{2r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r}}{2r^3} \\ &= \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}$$

其中：

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{1}{2} \mathbf{r}' \times \mathbf{J} \quad (4.28)$$

定义为电流体系的磁矩。

也可以顺便说一句，磁矢势展开式的高阶项对应了磁多极矩。

4.3.5 磁化电流的磁矩

像计算极化电荷的电偶极矩一样，我们同样可以计算磁化电流产生的磁矩。对于一个区域 V ，磁化电流包含了内部的体磁化电流与边界上的面磁化电流，故产生

的磁矩为⁵:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m} &= \iiint_V dV \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{J}_m + \oint_{\partial V} ds \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}_m \\
 &= \iiint_V dV \frac{1}{2} \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}) - \oint_{\partial V} \frac{1}{2} \mathbf{r} \times (ds \times \mathbf{M}) \\
 &= \iiint_V dV \frac{1}{2} [\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) - (\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{M}] \\
 &\quad - \oint_{\partial V} \frac{1}{2} ds(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) + \oint_{\partial V} \frac{1}{2} ds \cdot (\mathbf{r} \mathbf{M}) \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_V dV [\nabla \cdot (\mathbf{r} \mathbf{M}) - \mathbf{M} - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{M}] \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_V dV [(\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{M} - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{M} - \mathbf{M} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{M}] \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_V dV (3\mathbf{M} - \mathbf{M}) \\
 &= \iiint_V dV \mathbf{M}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

同样，只要我们熟悉磁化强度的定义，上式的物理图像是很生动的。

4.3.6 地磁场

简单起见，将地球考虑成半径为 R 的，绕 z 轴以 $\omega = \omega \hat{z}$ 匀速旋转的均匀带电球壳，表面电荷面密度为 σ ，球内磁导率为 μ ，球外为真空。下面来求地磁场分布。

首先求表面的面电流分布。在球坐标系下看，易知：

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \hat{e}_\phi$$

⁵ 其中我们用到了一个公式：

$$\oint_{\partial S} ds u = \iiint_V dV \nabla u \tag{4.29}$$

用指标法证明如下：

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial S} ds u &= e_i \oint_{\partial S} ds_i u \\
 &= e_j \oint_{\partial S} ds_i (\delta_{ij} u) \\
 &= e_j \iiint_V dV \partial_i (\delta_{ij} u) \\
 &= \iiint_V dV e_i \partial_i u \\
 &= \iiint_V dV \nabla u
 \end{aligned}$$

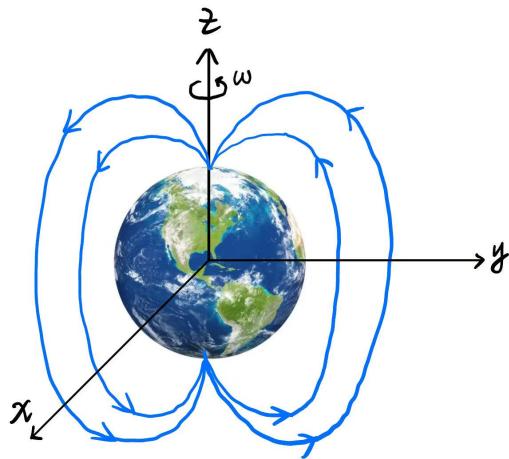


图 4.9: 地磁场

而 α 满足:

$$\alpha \cdot R d\theta dt = \omega R \sin \theta \cdot dt \cdot R d\theta \cdot \sigma$$

即:

$$\alpha = \sigma \omega R \sin \theta \hat{e}_\phi$$

这是一个 $\sin \theta$ 分布的面电流，利用上一节的结论，如是分布的面电流在球内产生匀强场:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R \hat{e}_z$$

在球外产生偶极场:

$$\mathbf{B}_2 = -\nabla \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

其中 $\mathbf{m} = \frac{4\pi R^2}{3} \sigma \omega R$ 为地球的磁矩。从上面的结果可以知道，地磁场矢势的多极展开

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} - \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}' + \dots \right)$$

应只含有偶极项，而没有四极、八极等项。这是因为我们将地球视为均匀带电的正球体的缘故。实际上在天体物理的研究中往往需要求解星体的磁场，如果要求精度较高的话，就不能将星体视为均匀带电的正球体，因此其磁场中就含有多极成分了。

Chapter 5

电磁波的传播

本章我们主要讲电磁波在真空中的传播问题，并且简要提及了导体中的电磁波。讲导体中的电磁波主要是为了说明对于理想导体而言，可以认为其内部没有电磁波因而构成电磁波存在的边界。

首先我们导出了电磁场的 d'Alembert 方程，并且根据 Fourier 变换可知，d'Alembert 方程的任何解都可以表示成无限多个平面波解的连续叠加，因此我们重点研究平面波解——我们研究了平面波的偏振态、能量、反射折射以及在导体中的传播问题。最后，我们简要研究了 d'Alembert 方程的另一类解——驻波解，具体体现在谐振腔和波导管中。

本章的参考文献有：

- 还是郭硕鸿老师的《电动力学（第四版）》
- 然后是田光善老师的电动力学讲义，其中我明白了如何用 Fourier 变换说明平面波的重要地位。

欢迎进入本卷最后一章的冒险！

5.1 电磁场的 d'Alembert 方程及其平面波解

5.1.1 d'Alembert 方程的导出

我们已知 Maxwell 方程组的一般形式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

现在考虑一个无源的空间区域, 即真空中的情形, Maxwell 方程组变为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

若区域为真空, 则:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (5.1)$$

下面取 $\nabla \times \mathbf{E}$ 场的旋度:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E} \\ &= \nabla \times \left(-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

于是：

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (5.2)$$

而：

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

于是：

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = 0 \quad (5.3)$$

(5.2) 与 (5.3) 便是真空中电磁场的 d'Alembert 方程。

5.1.2 d'Alembert 方程的平面波解

下面我们以 (5.2) 为例来分析 d'Alembert 方程解的特征。设 d'Alembert 方程的一般解为 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, 将其展为 Fourier 积分：

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(k_x, k_y, k_z, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega \quad (5.4)$$

其中四重 Fourier 变换：

$$\mathbf{F} = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(x, y, z, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{r} dt \quad (5.5)$$

到 (5.4) 为止的形式并没有完全说明问题，因为这个积分如果作为 d'Alembert 方程的解还必须满足一定的条件，下面来看必须要满足何种条件。

将 (5.4) 代回 d'Alembert 方程，得：

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \mathbf{F}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega = 0$$

上式对于任意被积函数应恒成立，因此对于任意的 \mathbf{F} 与 ω 、 \mathbf{k} ，应有下式恒成立：

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \mathbf{F}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \equiv 0$$

于是我们可以想到——若积分 (5.4) 是 d'Alembert 的解，则必须有：

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}, \omega) = \delta(\omega - ck) \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \quad (5.6)$$

方能使得上面的恒等式成立。于是现在，对于 d'Alembert 方程的一般解，应有如下形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - ck) \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)} d^3 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.7)$$

这说明 d'Alembert 方程的一般解应该是无穷多个形如： $\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 基本项的连续叠加¹，其中 $\omega = ck$ ，这称为色散关系。其中 \mathbf{E}_0 为一复变矢量函数²，每一个不同的 \mathbf{E}_0 都对应着一个不同的解³。

上面那一基本项 $\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 恰好也是 d'Alembert 方程的解，称为 **d'Alembert 方程的平面波解**。其中 \mathbf{E}_0 为复振幅，其幅角为电磁波的初相，模为振幅的大小。须指出，用复数表示的 \mathbf{E} 是无物理意义的，只是简化了计算。只有 \mathbf{E} 的实部或虚部才描述了真实的、有物理意义的波动。我们今后约定取其实部做为有物理意义的真

¹ 由于 (5.7) 这一积分展开的形式和 Fourier 积分的形式是有差别的，因此我们称之为部分 Fourier 积分。

² 在下文讨论 d'Alembert 方程平面波解性质的时候我们会看到，这里的 \mathbf{E}_0 可以为与 \mathbf{k} 正交的任意复变矢量函数。

³ 为了彻底剖析清楚部分 Fourier 变换和 Fourier 变换的关系，我们进一步考虑如下问题：如果已知了 d'Alembert 方程的解 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ，要反求 $\mathbf{E}_0(\mathbf{k})$ 该如何做呢？注意到：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{-ickt}] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{k}$$

于是根据 Fourier 变换，有：

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{-ickt} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}$$

即：

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)} d^3 \mathbf{r} \quad (5.8)$$

实波动的描述。关于平面波的物理图像，在力学课中已经学过，这里不多赘述。

从上面的论述我们可以看出平面波解的特殊地位。因此本章主要研究的对象就是平面电磁波。

同理， \mathbf{H} 的平面波解为：

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)} \quad (5.9)$$

如果电磁波所处的环境不是真空而是线性介质，则 d'Alembert 方程变为：

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (5.10)$$

其中 u 是在介质中的波速。上述方程的平面波解的形式不变：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

只不过实验表明：色散关系 $\frac{\omega}{k} = u(\omega)$ ，波速不再是定值，而是与 ω 有关。

最后来看平面波的干涉问题，从中我们可以发现，利用复数形式表示的平面波即使在叠加之后，其形式仍然是可以不变的，只不过复振幅稍微复杂一些罢了。将 n 个传播方向相同、同频的平面波叠加：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{j=1}^n \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= \sum_{j=1}^n E_{0j} \hat{\mathbf{e}}_j e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

由于 d'Alembert 算符 $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 是线性算符，所以叠加之后的矢量仍为其解。特别地，若各个成分的平面波振动方向都相同，即 $\hat{\mathbf{e}}_j$ 相同，则叠加后的平面波可表示为：

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{e}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \sum_i E_{0i} \hat{\mathbf{e}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (5.12)$$

其中：

$$E_0 = \sum_i E_{0i} \quad (5.13)$$

为 n 个复振幅的模之和，切不可误将之视为实数振幅模的相加！

5.1.3 Helmholtz 方程

若我们在求解 d'Alembert 方程前限定我们只讨论那些可以分离出时间因子的时谐解：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (5.14)$$

则将上述形式代回 d'Alembert 方程中，可得 $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ 满足的方程为：

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0 \quad (5.15)$$

其中 $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ 。这就是 **Helmholtz 方程**，是描述电场强度（复）振幅在空间中分布的微分方程。同理我们也可以写出针对磁场强度的 Helmholtz 方程。

Helmholtz 方程针对的是上述所谓时谐解。而时谐解由于其时空变量是相互分离的，因此其物理图像表现为原地震荡的电磁场强度矢量，仿佛驻波一样实际表现上不构成在空间中的传播。

5.2 电磁波的偏振

5.2.1 平面电磁波是横波

对于平面电磁波，由 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 得：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] &= \partial_i (E_{0i} e^{i(k_j x_j - \omega t)}) \\ &= E_{0i} \partial_i (e^{i(k_j x_j - \omega t)}) \\ &= E_{0i} i k_j e^{i(k_j x_j - \omega t)} \delta_{ij} \\ &= i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0\end{aligned}\tag{5.16}$$

同理，由 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ 得 $i \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$ ，于是 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 的振动方向与传播方向 \mathbf{k} 正交，表明电磁波为横波。同时，还有 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 相正交，因为一方面有：

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}) \\ &= \varepsilon_{ijk} e_i \partial_j (E_{0k} e^{i(k_m x_m - \omega t)}) \\ &= \varepsilon_{ijk} e_i i k_m E_{0k} e^{i(k_m x_m - \omega t)} \delta_{jm} \\ &= i \varepsilon_{ijk} e_i k_j E_{0k} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= i \mathbf{k} \times \mathbf{E}\end{aligned}\tag{5.17}$$

另一方面，有：

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}) \\ &= i \omega \mu_0 \mathbf{H}\end{aligned}\tag{5.18}$$

故：

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H}\tag{5.19}$$

说明 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 相正交，且 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 同相位。

此外，还有振幅关系：

$$kE_0 = \omega\mu_0 H_0 = \frac{k}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \mu_0 H_0$$

故：

$$\sqrt{\epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0 \quad (5.20)$$

这是个较常用的数值关系。

5.2.2 各类偏振态

既然电磁波是横波，自然可以有其偏振。一条平面波应视为传播方向相同而偏振方向不同的平面波的混合。设 \hat{e}_1 、 \hat{e}_2 为两个正交基，且满足 $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k}$ ，于是 \hat{e}_1 、 \hat{e}_2 可代表两个独立的偏振方向。这样一来，沿 \mathbf{k} 正方向传播的任一平面波可表示为（我们以电矢量来代表这个电磁波）：

$$\mathbf{E} = (E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (5.21)$$

其中 E_1 、 E_2 为两独立偏振方向上的复振幅，二者之间不同的大小、初相位关系造就了不同类型的偏振光。在讨论偏振态时，我们都使用实数形式的波动函数。下面首先研究两个简谐量的合成。

我们以合成后的光的电矢量为对象进行说明，它是：

$$\mathbf{E} = E_1 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_1) \hat{e}_1 + E_2 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_2) \hat{e}_2 \quad (5.22)$$

今后我们称前者为 1 光，后者为 2 光。不同类型的偏振光，电矢量 \mathbf{E} 的行为不同。要研究 \mathbf{E} 矢量的行为，其实就是研究如下参数方程：

$$\begin{cases} x = E_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ y = E_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases} \quad (5.23)$$

下面我们要做的是消去 t , 找出 x, y 之间的方程。易知:

$$\begin{cases} \frac{x}{E_1} = -\sin \omega t \sin \phi_1 + \cos \omega t \cos \phi_1 \\ \frac{y}{E_2} = -\sin \omega t \sin \phi_2 + \cos \omega t \cos \phi_2 \end{cases}$$

视之为一个关于 $\sin \omega t, \cos \omega t$ 的线性方程组, 利用 Cramer 法则解之得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \omega t = \frac{\begin{vmatrix} x/E_1 & \cos \phi_1 \\ y/E_2 & \cos \phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cos \phi_2 \cdot \frac{x}{E_1} - \cos \phi_1 \cdot \frac{y}{E_2}}{\sin \Delta \phi} \\ \cos \omega t = \frac{\begin{vmatrix} -\sin \phi_1 & x/E_1 \\ -\sin \phi_2 & y/E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{vmatrix}} = \frac{\sin \phi_2 \cdot \frac{x}{E_1} - \sin \phi_1 \cdot \frac{y}{E_2}}{\sin \Delta \phi} \end{array} \right.$$

其中 $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$ 。

利用 $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, 得 x, y 之间的方程:

$$\left(\frac{\cos \phi_2 \frac{x}{E_1} - \cos \phi_1 \frac{y}{E_2}}{\sin \Delta \phi} \right)^2 + \left(\frac{\sin \phi_2 \frac{x}{E_1} - \sin \phi_1 \frac{y}{E_2}}{\sin \Delta \phi} \right)^2 = 1$$

化简后即:

$$\left(\frac{x}{E_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{E_2} \right)^2 - 2 \frac{xy}{E_1 E_2} \cos \Delta \phi = \sin^2 \Delta \phi \quad (5.24)$$

其中 $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$, 取 $[-\pi, \pi]$ 之间的值。利用这个公式, 我们得以分类讨论各种光的偏振态。

1. 线偏振光

若 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 0$ 或 π , 则有:

$$\left(\frac{x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{E_2}\right)^2 \pm 2\frac{x}{E_1} \frac{y}{E_2} = \left(\frac{x}{E_1} \mp \frac{y}{E_2}\right)^2 = 0$$

从而:

$$y = \pm \frac{E_2}{E_1} x \quad (5.25)$$

表明 \mathbf{E} 矢量的箭头在一条直线上运动, 是为线偏振光。

合成之后的偏振方向为:

$$\hat{e} = \frac{E_1 \hat{e}_1 \pm E_2 \hat{e}_2}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}$$

振幅大小为:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

2. 圆偏振光

若 $E_1 = E_2 = E$, 且 $|\Delta\phi| = \frac{\pi}{2}$, 则有:

$$\left(\frac{x}{E}\right)^2 + \left(\frac{y}{E}\right)^2 = 1 \quad (5.26)$$

即合成后的 \mathbf{E} 矢量在半径为 E 的圆周上运动。

圆偏振光又分为左旋与右旋两种⁴:

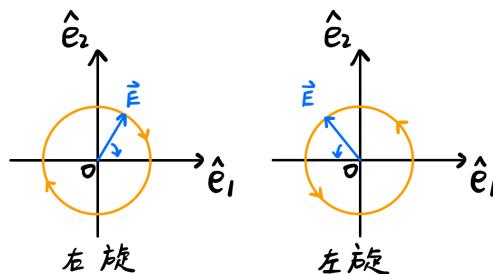


图 5.1: 左旋和右旋圆偏振光

⁴对于左旋圆偏振光和右旋圆偏振光各个资料中说法并不统一。我们定义迎着光看, 电矢量顺时针转动的为右旋, 逆时针转动的为左旋。

- 若 $\phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{2}$, 则为右旋圆偏振光, 此时:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0 \hat{e}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + E_0 \hat{e}_2 \cos \left[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{e}_1 - E_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{e}_2\end{aligned}$$

这是一个大小为 E_0 , 以 ω 角速度顺时针旋转的矢量。

- 若 $\phi_2 - \phi_1 = -\frac{\pi}{2}$, 则为左旋偏振光, 此时:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0 \hat{e}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + E_0 \hat{e}_2 \cos \left[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{e}_1 + E_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{e}_2\end{aligned}$$

这是一个大小为 E_0 , 以 ω 为角速度逆时针旋转的矢量。

3. 椭圆偏振光

若 $\Delta\phi \neq 0$, 且 $E_1 \neq E_2$, 则:

$$\left(\frac{x}{E_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{E_2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{xy}{E_1 E_2} \cdot \cos \Delta\phi = \sin^2 \Delta\phi \quad (5.27)$$

这是一个椭圆方程。若 $|\Delta\phi| = \frac{\pi}{2}$, 则为一正椭圆; 若 $|\Delta\phi| \neq \frac{\pi}{2}$, 则为一斜椭圆。可用二次型理论求其具体形态。

椭圆偏振光自然也有左右旋之分。若 $0 < \Delta\phi < \pi$, 则为右旋光; 若 $-\pi < \Delta\phi < 0$, 则为左旋光。

4. 自然光与部分偏振光

以上三种偏振态, 1 光和 2 光的相位差是稳定的。但自然界中的绝大多数光线, 并没有确定的相位关系, 是为自然光与部分偏振光。

自然光即那些与传播方向正交的所有偏振方向上光强均相同, 但各偏振方向的光彼此之间没有固定的相位关系; 而部分偏振光即那些各偏振方向上光强不同, 且也无固定相位关系的光。

关于各类偏振光的实验规律, 在光学课中已经学过, 在此不再赘述。

5.2.3 旋光性

具有旋光性的晶体中有线偏振光通过时，光的偏振方向将被旋转。我们规定：迎着光传播方向看，顺时针旋光的为右旋光性；反之则为左旋光性。

下面来解释发生旋光的原因。在上一小节中，我们是把圆偏振光视为两个相位相差 $\pm \frac{\pi}{2}$ 的线偏振光的合成；反之，下面我们要将一线偏振光视为两旋转方向相反但振幅同频的圆偏振光的合成。

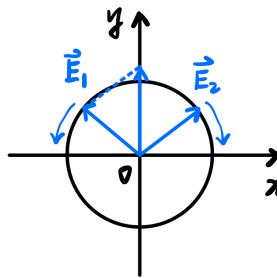


图 5.2: 把线偏振光分解为圆偏振光的叠加

对于由手性分子构成的介质而言，左旋光与右旋光在其中通过时速率不同，因而 1 光（左旋）和 2 光（右旋）的波矢就不相同，分别记为 k_1 、 k_2 。若 $v_1 > v_2$ ，则 $k_1 < k_2$ 。

设在 $z = 0$ 处 $t = 0$ 时刻 E_1 、 E_2 重合；而 $t = t$ 时刻在 $z = z$ 处：

$$\theta_1 = \omega t - k_1 z = -k_1 z, \quad \theta_2 = \omega t - k_2 z = -k_2 z$$

故 $\theta_1 > \theta_2$ ，因此偏振方向逆时针旋转，是为左旋光性；反之，若 $v_1 < v_2$ ，则为右旋光性。

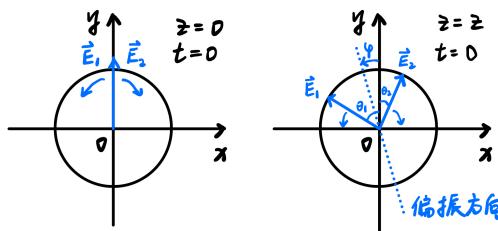


图 5.3: 左旋光性

5.3 电磁波的能量

5.3.1 电磁波的能量密度

在第三章与第四章中，我们已经知道了静电场与静磁场的能量密度：

$$\begin{cases} w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ w_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \end{cases} \quad (5.28)$$

可以把上式推广至时变电磁场中，由于电场强度和磁场强度是时变的，故 w_e , w_m 分别为瞬时能量密度。

相较于瞬时能量密度，我们更关注的是其在一个周期内的时间平均值。下面我们首先看一个颇实用的数学结论：

设两个同频的时谐物理量：

$$\begin{cases} f = f_0 e^{-i\omega t} \\ g = g_0 e^{-i\omega t} \end{cases}$$

下面求 f 与 g 在一个周期内的平均值：

$$\begin{aligned} \overline{fg} &= \frac{1}{T} \int_0^T f_0 \cos \omega t \cdot g_0 \cos(\omega t + \phi) dt \\ &= \frac{f_0 g_0}{T} \int_0^T (\cos^2 \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \phi) dt \\ &= \frac{f_0 g_0 \cos \phi}{T} \int_0^T \left(\frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \right) dt \\ &= \frac{f_0 g_0 \cos \phi}{T} \cdot \frac{T}{2} \\ &= \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \phi \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(fg^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f^* g) \end{aligned} \quad (5.29)$$

其中 ϕ 为 f 与 g 的相位差。有了这结论，可以方便地求出平面电磁波的平均能量密

度：

$$\bar{w} = \bar{w}_e + \bar{w}_m = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{4}\mu_0 H_0^2$$

由于有振幅关系：

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_0}H_0$$

故：

$$\bar{w} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 \quad (5.30)$$

对于非平面波而是一般形式的时变电磁场而言，由于 d'Alembert 方程的任一解可表示为平面波的连续线性叠加。考虑频率为 ω 的部分，其场分布为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 k e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

从而该频率成分的平均能量密度为：

$$\bar{w} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \operatorname{Re}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \quad (5.31)$$

5.3.2 电磁场能流密度矢量——Poynting 矢量

在推导 w_e 与 w_m 时，我们总是假设体系有了一个假想的变动，看场做了多少功（率），从而找到了场能的改变量（率），进而得到场能的表达式。接下来我们让体系真正地产生一个变动。

电荷 e 在电磁场中要受到力的作用，描述这力的公式为 Lorentz 力公式，相应的力为 **Lorentz 力**：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho dV (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.32)$$

这里的 \mathbf{E} 包括静电场与涡旋电场。现在让电荷体系真正地发生一个变动，看看

Lorentz 力（对自由电荷）做了多少功（率）：

$$\begin{aligned}
 P &= \iiint_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \\
 &= \iiint_V dV \rho_f \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\
 &= \iiint_V dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f \\
 &= \iiint_V dV \mathbf{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \iiint_V dV \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{d}{dt} \iiint_V dV \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2
 \end{aligned}$$

上式第一项：

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_0} \iiint_V dV \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= -\frac{1}{\mu_0} \iiint_V dV \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \iiint_V dV \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\
 &= -\oint_{\partial V} ds \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{d}{dt} \iiint_V dV \frac{1}{2\mu_0} B^2
 \end{aligned}$$

从而，我们有：

$$P = -\oint_{\partial V} ds \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{d}{dt} (E_e + E_m)$$

进而：

$$-\oint_{\partial V} ds \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{d}{dt} (E_e + E_m) + P \quad (5.33)$$

我们对上式做如下诠释： $\frac{d}{dt} (E_e + E_m)$ 为 V 区域内场线中储存能量的变动率， P 为 V 区域中 Lorentz 力做功的功率，也许产生机械能或热。这两项加在一起代表了 V 区域内的能量的变动率，而它们又等于一个矢量在 V 边界上的负通量，这个矢量就是 **Poynting 矢量**⁵：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (5.34)$$

⁵ 这里还有一个“榨油专家”的故事：所谓榨油专家就是“鲁花 5s 压榨花生油”，它掌握的榨油技术能够榨出别的技术榨不出来的油。那么 Poynting 也算是一个榨油专家，因为 Maxwell 在搞出他的方程组之后，自己肯定是要吃第一口螃蟹，就推导出了 d'Alembert 方程，得到了光速并预言了光就是电磁波。但是然后他就把他的方程组搁置下来了，认为没有什么油可以榨的了。但是 Poynting 作为榨油专家，又从中榨出来了个多流密度矢量来。

Maxwell 方程组是一桶油，d'Alembert 方程是一桶油，Poynting 矢量是半桶油，所以“如果别人问你田老师都教了你些什么？你就回答田老师教了我两桶半油就行啦！”

从而原式改写为：

$$\frac{d}{dt}(E_e + E_m) + P = - \oint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{S} \quad (5.35)$$

这说明我们应把 \mathbf{S} 理解成能流密度矢量，若有一面元 $d\mathbf{s}$ ，则单位时间内流过 $d\mathbf{s}$ 的

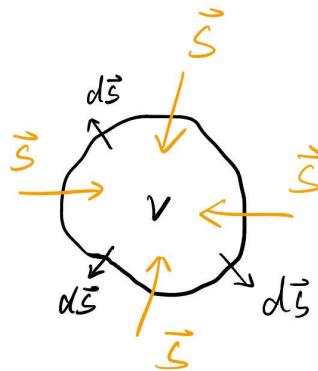


图 5.4: 能流密度矢量

能量为 $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$ 。这样 (5.35) 的物理意义就很明确了： $-\oint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{S}$ 为单位时间自 V 的边界向 V 内注入的能量，它等于 V 区域内总能的增长率，当然是要考虑正负号的——正号才代表真正的“增加”。

以上我们所讨论的都应视为 Poynting 矢量的瞬时值。对于平面波， \mathbf{S} 的瞬时值为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (5.36)$$

其平均值为：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \times \mathbf{H}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \end{aligned}$$

5.2 小节中我们指出 \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{k} 三者正交, 从而有:

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} E_0 H_0 \hat{k} \\
 &= \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{k} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \hat{k} \\
 &= c \bar{w} \hat{k}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

上式给我们提供了一个有趣的物理图像: 能流密度就好似沿着 \hat{k} 方向以光速传播的能量密度。

5.4 平面电磁波的反射与折射

平面波的反射与折射均发生在不同介质的分界面上。我们已经很熟悉，在分界面上，电磁场有边值关系：

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f \\ \hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}_f \end{cases}$$

若为线性介质且界面上不存在自由电荷与电流，则边值关系为：

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \end{cases}$$

下面我们利用上述关系来推导在界面处电磁波的反射、折射规律。

5.4.1 反射定律与折射定律

以电矢量 \mathbf{E} 为例分析。设入射光从介质 2 入射到介质 1 中，且与入射光、反射光、折射光有关的物理量分别不带撇、带一撇、带两撇，它们的波矢与两个独立的偏振方向的示意图如图所示。设：

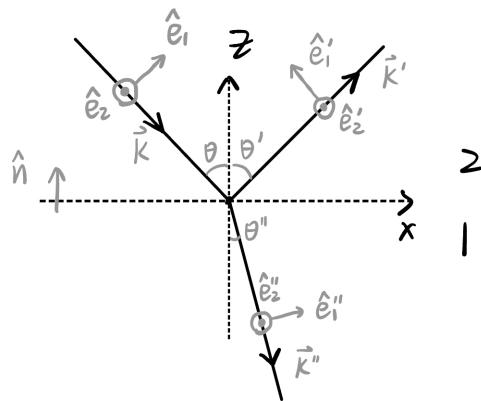


图 5.5: 光从2介质打到介质分界面上

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_0^{(1)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}'^{(1)} = \mathbf{E}_0'^{(1)} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}''^{(1)} = \mathbf{E}_0''^{(1)} e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}_0^{(2)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}'^{(2)} = \mathbf{E}_0'^{(2)} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}''^{(2)} = \mathbf{E}_0''^{(2)} e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{cases}$$

其中 $\mathbf{E}_0^{(1)}$ 为复振幅，其余同理。且带上标“(1)”的电矢量偏振方向平行于入射面（纸面），带上标“(2)”的电矢量偏振方向垂直于入射面。

在分界面上，由 $\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$ 得：

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \hat{n} \times \mathbf{E}'_0 e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} = \hat{n} \times \mathbf{E}''_0 e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}}$$

这个式子在两个介质的分界面上任意 \mathbf{r} 处均成立，故在界面上有：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} \quad (5.38)$$

即：

$$k_x x + k_y y = k'_x x + k'_y y = k''_x x + k''_y y \quad (5.39)$$

由于 x, y 是任意的, 故:

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad k_y = k'_y = k''_y$$

由于 $k_y = 0$, 故 $k'_y = k''_y = 0$, 说明折射光、反射光、入射光共面。此外, 由 $k_x = k'_x = k''_x$ 得:

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda_2} \sin \theta' = \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin \theta''$$

故:

$$\theta' = \theta, \quad \frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.40)$$

以上我们得出了反射定律与折射定律。

5.4.2 反射折射的 Fresnel 公式

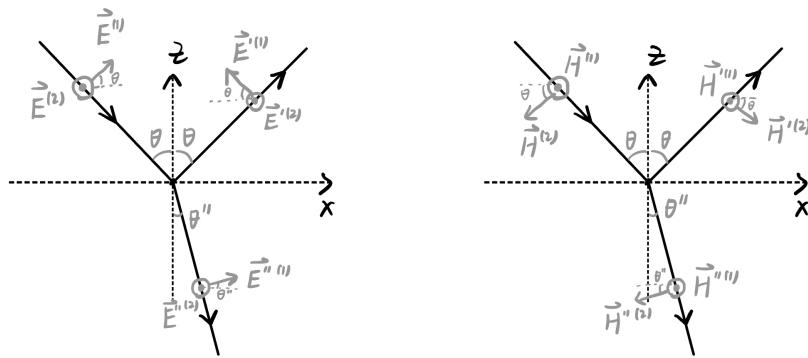


图 5.6: 入射光、反射光、折射光的关系

首先关注 $\mathbf{E}^{(1)}$ 、 $\mathbf{H}^{(1)}$ 等带上标 (1) 的量。由 $\hat{n} \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}' - \mathbf{E}'') = \mathbf{0}$ 得:

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_0^{(1)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \hat{n} \times \mathbf{E}_0'^{(1)} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - \hat{n} \times \mathbf{E}_0''^{(1)} e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{0}$$

由先前的讨论知:

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

从而:

$$E_0^{(1)} \cos \theta - E_0'^{(1)} \cos \theta - E_0''^{(1)} \cos \theta'' = 0$$

同样, 由 $\hat{n} \times (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}'^{(1)} - \mathbf{H}''^{(1)}) = \mathbf{0}$ 得:

$$H_0^{(1)} + H_0'^{(1)} = H_0''^{(1)}$$

由前所述, $H_0^{(1)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_0^{(1)}$, 故:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_0^{(1)} + E_0'^{(1)}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_0''^{(1)}$$

对于一般介质而言, $\mu_1 \approx \mu_2$, 故:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta''}$$

故:

$$\sin \theta'' (E_0^{(1)} + E_0'^{(1)}) = \sin \theta E_0''^{(1)}$$

定义振幅的(复)反射率、(复)透射率为:

$$R^{(1)} = \frac{E_0'^{(1)}}{E_0^{(1)}}, \quad T^{(1)} = \frac{E_0''^{(1)}}{E_0^{(1)}}$$

从而有:

$$\begin{cases} \cos \theta (1 - R^{(1)}) = \cos \theta'' T^{(1)} \\ \sin \theta'' (1 + R^{(1)}) = \sin \theta T^{(1)} \end{cases}$$

解之得:

$$\begin{cases} R^{(1)} = \frac{E_0'^{(1)}}{E_0^{(1)}} = \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \\ T^{(1)} = \frac{E_0''^{(1)}}{E_0^{(1)}} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} \end{cases} \quad (5.41)$$

下面考虑另一偏振方向上的物理量, 即带有上标(2)的量。由 $\hat{n} \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}' - \mathbf{E}'') = \mathbf{0}$, $\hat{n} \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}' - \mathbf{H}'') = \mathbf{0}$ 得:

$$E_0^{(2)} + E_0'^{(2)} = E_0''^{(2)}$$

$$H_0^{(2)} \cos \theta - H_0'^{(2)} \cos \theta - H_0''^{(2)} \cos \theta'' = 0$$

第二个式子即：

$$\sin \theta'' E_0^{(2)} \cos \theta - \sin \theta'' E_0'^{(2)} \cos \theta - \sin \theta E_0''^{(2)} \cos \theta'' = 0$$

从而：

$$\begin{cases} 1 + R^{(2)} = T^{(2)} \\ \sin \theta'' \cos \theta (1 - R^{(2)}) = \sin \theta \cos \theta'' T^{(2)} \end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases} R^{(2)} = \frac{E_0'^{(2)}}{E_0^{(2)}} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \\ T^{(2)} = \frac{E_0''^{(2)}}{E_0^{(2)}} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')} \end{cases} \quad (5.42)$$

上面我们导出了 \mathbf{E} 的两个独立偏振方向上的反射率与透射率公式，即 Fresnel 公式 (5.41) 与 (5.42)，从中我们也可以看出电磁场边值关系的重要性。利用它们也可以通过计算得出 \mathbf{H} 的反射率与透射率。

利用 Fresnel 公式，我们可以讨论 Brewster 角、半波损失等问题，它们在光学课中已经学过，这里不多赘述。不过值得强调的是，从做题的角度讲，没有人能记住这两个公式。遇到具体的反射、折射题目，我们应该直接用边值关系现列方程组、现解出结果才是正确的做题方法。

5.4.3 反射光折射光的能流关系与增透膜

下面我们来研究反射光折射光的能流关系。如图，考虑打在介质分界面上 dS 面积的入射光。根据能量守恒，从 dS 出射的反射光和折射光的能流之和应等于入射到 dS 上光的能流。即：

$$\overline{S} dS \cos \theta = \overline{S'} dS \cos \theta' + \overline{S''} dS \cos \theta'' \quad (5.43)$$

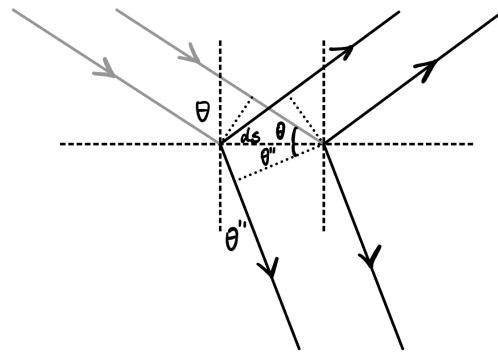


图 5.7: 入射光、反射光、折射光的能流关系

从而有:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} \left(|E_0^{(1)}|^2 + |E_0^{(2)}|^2 \right) \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} \left(|E_0'^{(1)}|^2 + |E_0'^{(2)}|^2 \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \left(|E_0''^{(1)}|^2 + |E_0''^{(2)}|^2 \right) \cos \theta'' \end{aligned} \quad (5.44)$$

代入 Fresnel 公式可以验证这关系是正确的。

下面来考虑一个具体的应用实例——增透膜。如图，一沿 z 方向传播的电磁

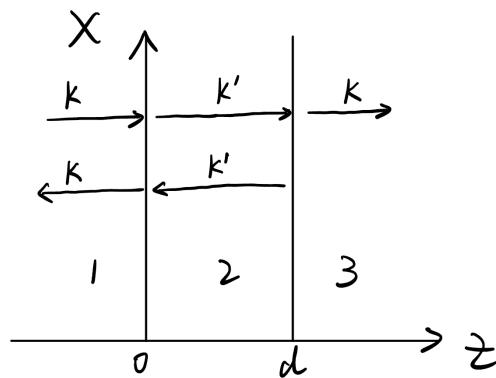


图 5.8: 增透膜的电磁波分布图

波，传递了一介电常数为 ε 的厚为 d 的薄膜。现在问 d 为多少时可以使得反射光能流为 0 ?

不妨取平面波沿 x 轴偏振。在 1、2、3 区域中的电磁波依次记为⁶:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = (E_{10}e^{ikz} + E'_{10}e^{-ikz}) e^{-i\omega t} \hat{e}_x \\ \mathbf{H}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (E_{10}e^{ikz} - E'_{10}e^{-ikz}) e^{-i\omega t} \hat{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2 = (E_{20}e^{ik'z} + E'_{20}e^{-ik'z}) e^{-i\omega t} \hat{e}_x \\ \mathbf{H}_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} (E_{20}e^{ik'z} - E'_{20}e^{-ik'z}) e^{-i\omega t} \hat{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_3 = E_{30}e^{ikz} e^{-i\omega t} \hat{e}_x \\ \mathbf{H}_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{30}e^{ikz} e^{-i\omega t} \hat{e}_y \end{cases}$$

由 $z = 0$ 与 $z = d$ 的边界条件得:

$$E_{10} + E'_{10} = E_{20} + E'_{20}, \quad E_{20}e^{ik'd} + E'_{20}e^{-ik'd} = E_{30}e^{ikd}$$

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_{10} - \sqrt{\varepsilon_0}E'_{10} = \sqrt{\varepsilon}E_{20} - \sqrt{\varepsilon}E'_{20}$$

$$\sqrt{\varepsilon}E_{20}e^{ik'd} - \sqrt{\varepsilon}E'_{20}e^{-ik'd} = \sqrt{\varepsilon_0}E_{30}e^{ikd}$$

解之得:

$$R = \left| \frac{E'_{10}}{E_{10}} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{1 - e^{2ik'd}}{1 - \left(\frac{\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 e^{2ik'd}} \right|^2$$

从而 $R = 0$ 的条件为:

$$\left| 1 - e^{2ik'd} \right| = 1 - \cos 2k'd = 0$$

故:

$$2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda'} \cdot d = 2n\pi$$

即:

$$d = n \cdot \frac{\lambda'}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{5.45}$$

⁶请读者思考: 为什么可以这样记?

这表明增透膜的厚度 d 应为介质中半波长的整数倍。

5.5 导体中的电磁波

正如在本章导言所提及的那样，讲导体中的电磁波主要是为了说明在理想导体的情况下，可以认为导体内部无电磁波，因此导体构成了电磁波存在的边界。这一方面符合我们的生活直觉和常识，另一方面也为下一节讲谐振腔与波导管奠定了基础。

5.5.1 导体中的电荷

设导体体的介电常数为 ϵ ，电导率为 σ 。首先来看导体内部的电荷情况。易知有如下关系：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

故：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0$$

解这个微分方程得：

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \quad (5.46)$$

对于理想导体而言， $\frac{\sigma}{\epsilon}$ 很大，从而导体内的自由电荷密度衰减得很快。若 $\frac{\sigma}{\epsilon} \gg \omega$ ，则可以认为其弛豫时间远小于电磁波的周期，因此在研究导体中电磁波的传播时可以认为导体内部没有 ρ 的分布， ρ 只分布于导体表面。 $\frac{\sigma}{\epsilon} \gg \omega$ 可视为理想导体条件。对于一般的金属导体， $\frac{\sigma}{\epsilon}$ 的数量级为 10^{17} ，因此只要电磁波的波长不短于百纳米级别都可满足该条件。

5.5.2 导体中的平面电磁波

下面我们来分析导体内部的电磁波，导体内部的 Maxwell 方程为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\omega \mu \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = (\sigma - i\omega \epsilon) \mathbf{E} = -i\omega (\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}) \mathbf{E} \end{array} \right. \quad (5.47)$$

记 $\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$ 为复介电常量，故 $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon'\mathbf{E}$ 。从而：

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E} \\ &= i\omega\mu \nabla \times \mathbf{H} \\ &= i\omega\mu (-i\omega\varepsilon')\mathbf{E} \\ &= \omega^2 \varepsilon' \mu \mathbf{E}\end{aligned}\tag{5.48}$$

此时 d'Alembert 方程的平面波解是：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}\tag{5.49}$$

其中， \mathbf{k} 为复向量， k_x, k_y, k_z 均为复数，满足 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \varepsilon' \mu$ 。

下面记：

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y + k_z \hat{e}_z \\ &= \operatorname{Re}(k_x) \hat{e}_x + \operatorname{Re}(k_y) \hat{e}_y + \operatorname{Re}(k_z) \hat{e}_z \\ &\quad + i [\operatorname{Im}(k_x) \hat{e}_x + \operatorname{Im}(k_y) \hat{e}_y + \operatorname{Im}(k_z) \hat{e}_z] \\ &= \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}\tag{5.50}$$

β 称为相位常量， α 称为衰减常量。下面来看 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 满足的关系：

$$\begin{aligned}k^2 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \\ &= (\boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \beta^2 - \alpha^2 + i 2\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ &= \omega^2 \varepsilon' \mu \\ &= \omega^2 \mu \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right)\end{aligned}$$

从而：

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma \end{cases}\tag{5.51}$$

这样，导体中电磁波的平面波解为：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\beta+i\alpha)\cdot r - i\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha \cdot r} e^{i(\beta \cdot r - \omega t)} \quad (5.52)$$

其中 $\mathbf{E}_0 e^{-\alpha \cdot r}$ 为复振幅，实际振幅大小为 $|\mathbf{E}_0| e^{-\alpha \cdot r}$ 。注意，仅由上面的关系还不足以求出 α 与 β ，需要再加上边值关系才可解出它们。当电磁波从介质中入射到导体表面时，设在介质中波矢为 \mathbf{k}_0 ，而在导体中波矢为 \mathbf{k} ，则由前所述可知：

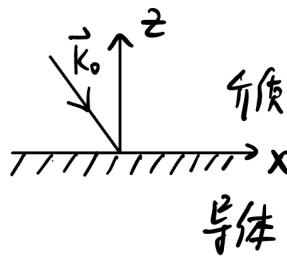


图 5.9: 射向导体表面的电磁波

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

故：

$$\begin{cases} k_{0x} = \beta_x + i\alpha_x \\ k_{0y} = \beta_y + i\alpha_y = 0 \end{cases}$$

由于 k_{0x} 为实数，故 $\alpha_x = \alpha_y = 0$ ， $\beta_x = k_{0x}$ ， $\beta_y = 0$ 。因此 α 仅有 z 分量，说明 α 垂直于入射的导体平面。因此：

$$\begin{cases} \alpha = (0, 0, \alpha_z) \\ \beta = (k_{0x}, 0, \beta_z) \end{cases}$$

从而：

$$\begin{cases} k_{0x}^2 + \beta_z^2 - \alpha_z^2 = \omega^2 \epsilon \mu \\ \alpha_z \beta_z = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma \end{cases} \quad (5.53)$$

解之可得 α_z, β_z ，进而得到 α 与 β 。

5.5.3 垂直入射情形

1. 穿透深度

垂直入射时, $k_{0x} = 0$, 解出 α, β 的模为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \beta = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (5.54)$$

且 α 与 β 均与入射面垂直。如前所述, 我们认为 $\frac{\sigma}{\varepsilon} \gg \omega$, 即 $\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1$, 因此 α 与 β 简化为⁷:

$$\alpha \approx \beta \approx \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon \omega}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (5.55)$$

故 $\alpha = (0, 0, \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}})$, $\beta = (0, 0, -\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}})$ (负号表示传播方向沿 z 轴负方向), 此外还有:

$$k \approx (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\omega \mu \sigma} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

此时, 导体中的平面波为:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} z} e^{i(-\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} z - \omega t)} \quad (5.56)$$

取其实部, 得:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} z} \cos \left(\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} z - \omega t + \phi_E \right) \quad (5.57)$$

⁷ 虽说如此, 但是实际上没有人会这样计算 α 和 β , 而是按照如下方式去计算: 垂直入射时有 $k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + i2\alpha\beta = \omega^2 \mu \varepsilon + i\omega \mu \sigma$ 。由于 $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1$, 故对于 k^2 而言其虚部远大于其实部。所以不妨令 $k^2 \approx i\omega \mu \sigma$, 从而有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = \beta^2 \\ 2\alpha\beta = \omega \mu \sigma \end{array} \right.$$

解之即得: $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$ 。是不是很妙!

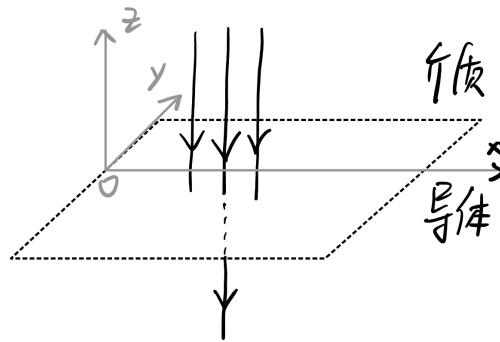


图 5.10: 电磁波正入射到导体表面

穿透深度 δ 定义为 $|\mathbf{E}|$ 衰减为 $\frac{1}{e}|\mathbf{E}_0|$ 时的深度, 故:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (5.58)$$

对于铜来说, 当 $\omega \sim 10^8 \text{ s}^{-1}$ 时, $\delta \sim 10^{-4} \text{ cm}$, 由此可见, 对于高频电磁波, 其电场穿透深度很浅。如果认为导体是绝对的理想导体, 则穿透深度为 0, 从而其内部不存在电场。

下面不妨再看一下磁场的穿透深度。由 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\omega\mu\mathbf{H}$ 得:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} i\mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ &= -\frac{k}{\omega\mu} \hat{e}_z \times \mathbf{E} \\ &= -\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \hat{e}_z \times \mathbf{E} \\ &= -\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} \hat{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} z} e^{i(-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} z - \omega t + \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \quad (5.59)$$

取其实部得:

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} (-\hat{e}_z \times \mathbf{E}_0) e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} z} \cos \left(-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} z - \omega t + \frac{\pi}{4} + \phi_E \right) \quad (5.60)$$

可见， \mathbf{H} 不再与 \mathbf{E} 同步，而是落后了 $\frac{\pi}{4}$ 相位；但是磁场的穿透深度与电场相同从而理想导体内部也不存在磁场，从而不存在电磁波。

此外还有振幅关系：

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{|\mathbf{H}_0|}{|\mathbf{E}_0|} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon}} \gg 1 \quad (5.61)$$

因此在导体中，磁场能量远高于电场能量，尽管它们均很小。

2. 表面反射

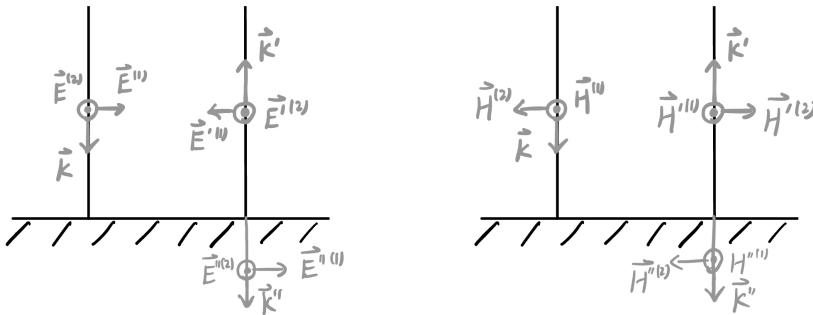


图 5.11：正入射的电磁波在导体表面的反射

我们下面利用边值关系来分析正入射的平面波在导体表面的反射。设入射、反射、透射波分别不带撇、带一撇、带两撇，且入射波从真空入射。

由 $\hat{n} \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}' - \mathbf{E}'') = \mathbf{0}$, $\hat{n} \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}' - \mathbf{H}'') = \mathbf{0}$ 得：

$$\begin{cases} \hat{n} \times [\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = 0 \\ \hat{n} \times [\mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{H}'_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - \mathbf{H}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = 0 \end{cases}$$

故：

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0^{(1)} - \mathbf{E}'_0^{(1)} = \mathbf{E}''_0^{(1)} \\ \mathbf{H}_0^{(1)} + \mathbf{H}'_0^{(1)} = \mathbf{H}''_0^{(1)} \end{cases}$$

由前所述， $H''_0^{(1)} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} E''_0^{(1)} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} (1+i) E''_0^{(1)}$ ，而 $H_0^{(1)} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^{(1)}$, $H'_0^{(1)} =$

$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0'^{(1)}$, 故:

$$\begin{cases} E_0^{(1)} - E_0'^{(1)} = E_0''^{(1)} \\ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_0^{(1)} + E_0'^{(1)}) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu_0}} (1+i) E_0''^{(1)} \end{cases}$$

解之得:

$$R^{(1)} = \frac{E_0'^{(1)}}{E_0^{(1)}} = \frac{1+i-\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}} \quad (5.62)$$

同理可得:

$$R^{(2)} = \frac{E_0'^{(2)}}{E_0^{(2)}} = -\frac{1+i-\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}} \quad (5.63)$$

如果认为导体是绝对的理想导体, 则电磁波在导体上的反射率为 1, 即全部反射。这与理想导体内部无电磁场的结论是不矛盾的。

5.6 谐振腔与波导管

前几节我们只是考虑了 d'Alembert 方程的平面波解，本节我们来考虑其另一类常用解——驻波解。波动方程的驻波解具体应用在谐振腔与波导管等情景中。

5.6.1 以导体为边界时的边界条件

矩形谐振腔与波导管都由导体构成。我们接下来认为所涉及的导体皆是理想导体，即电磁波打在导体表面上被完全反射，导体内没有电磁场，这是 $\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \ll 1$ 的结果。此时，导体构成了边界，下面来关注其边界条件。

由 $\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$ 、 $\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$ 、 $\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$ 、 $\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \alpha$ 并结合导体内部无电磁场的结论，可得对于导体表面的线性介质而言，有：

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \\ \hat{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \hat{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \hat{n} \times \mathbf{H} = \alpha \end{cases} \quad (5.64)$$

上式中的第 2、3 式表明， \mathbf{E} 与导体平面正交， \mathbf{H} 与导体平面平行。我们取 $\hat{n} = \hat{z}$ ，

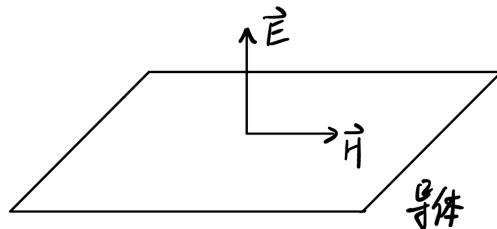


图 5.12: \mathbf{E} 与导体平面正交， \mathbf{H} 与导体平面平行

设介质中无自由电荷分布，由 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 可得在导体表面附近有：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (5.65)$$

由于导体表面附近 $E_x = E_y = 0$ 恒成立，故 $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ ，从而有：

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0 \quad (5.66)$$

这也是一个十分重要的边界条件，表明导体表面附近的电场沿着法向是不发生变化的。

5.6.2 矩形谐振腔

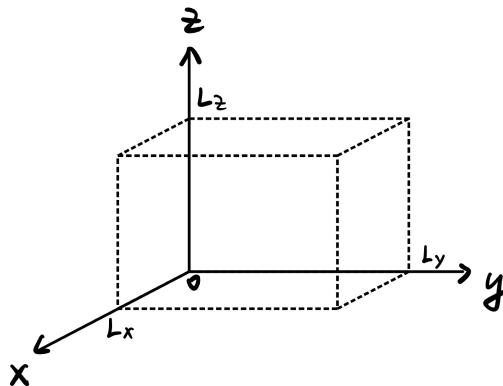


图 5.13: 矩形谐振腔

谐振腔就是一个导体腔，内部可以为真空或充满某种介质。对于如图所示的矩形谐振腔，考虑在其中存在的时谐电磁波（的电场部分）：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z) \cos(\omega t + \phi_E)$$

要求 \mathbf{E}_0 其实就是要求解 Helmholtz 方程的定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0 & \left(k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \epsilon \mu \omega^2 \right) \\ x = 0, L_x \text{ 时}, E_{0y} = E_{0z} = 0, \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} = 0 \\ y = 0, L_y \text{ 时}, E_{0x} = E_{0z} = 0, \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} = 0 \\ z = 0, L_z \text{ 时}, E_{0x} = E_{0y} = 0, \frac{\partial E_{0z}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5.67)$$

用分离变量法得到 \mathbf{E}_0 的各个分量的解的具体形式为:

$$E_{0i} = (A_i^x \cos k_x x + B_i^x \sin k_x x) (A_i^y \cos k_y y + B_i^y \sin k_y y) (A_i^z \cos k_z z + B_i^z \sin k_z z) \quad (5.68)$$

其中 k_x, k_y, k_z 满足 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ 。代入边界条件可得 \mathbf{E}_0 各个分量的驻波解:

$$\begin{cases} E_{0x} = A_x^x \cos k_x x \cdot B_x^y \sin k_y y \cdot B_x^z \sin k_z z = A_x \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_{0y} = A_y^x \sin k_x x \cdot B_y^y \cos k_y y \cdot B_y^z \sin k_z z = A_y \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_{0z} = A_z^x \sin k_x x \cdot B_z^y \sin k_y y \cdot B_z^z \cos k_z z = A_z \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{cases} \quad (5.69)$$

其中:

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L_z} \quad (5.70)$$

n_x, n_y, n_z 各为自然数, 且有一个约束关系:

$$\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L_z}\right)^2 = \left(\frac{k}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c\pi}\right)^2 \quad (5.71)$$

在腔内, 有 $\nabla \cdot \mathbf{E}$, 从而有:

$$\frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial E_{0z}}{\partial z} = 0$$

故:

$$A_x k_x + A_y k_y + A_z k_z = 0 \quad (5.72)$$

这也是一个约束关系。因此, 我们容易发现, 若 n_x, n_y, n_z 中有两个同时为 0, 则 k_x, k_y, k_z 中有两个同时为 0, 那么由上式知第三个也为 0, 从而 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$ 。因此, 对于有物理意义的解而言, n_x, n_y, n_z 至多一个为 0。我们容易得到, 对于上述矩形谐振腔, 其内可以存在的振荡频率有:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2} \quad (5.73)$$

不妨设 $L_x \geq L_y \geq L_z$, 于是 f 的最小值为:

$$f_{\min} = f_{110} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}} \quad (5.74)$$

5.6.3 矩形波导管

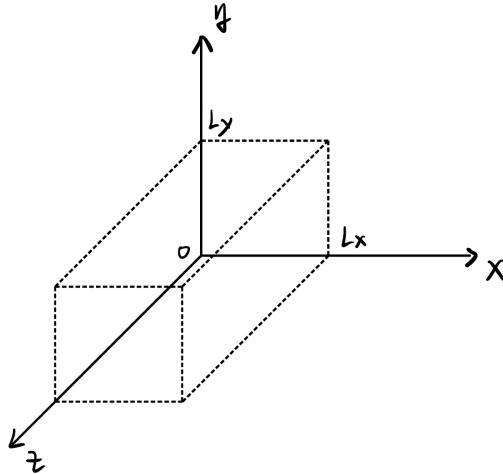


图 5.14: 矩形波导管

把矩形谐振腔的 L_z 无限拉长, 就成了矩形波导管, 它使得电磁振荡可以沿着 z 方向传播。

既然是沿 z 方向传播的电磁振荡, 我们关注如下形式的解:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (5.75)$$

这一形式表明 \mathbf{E} 在时间上、在沿 z 方向的空间上都呈现周期性。把上式代入 d'Alembert 方程并分离出 Helmholtz 方程, 得 \mathbf{E}_0 满足的偏微分方程为:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathbf{E}_0 e^{i k_z z} + \mathbf{E}_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{i k_z z} + k^2 \mathbf{E}_0 = 0 \quad (5.76)$$

即:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathbf{E}_0 + (k^2 - k_z^2) \mathbf{E}_0 = 0$$

进一步分离变量，并考虑侧壁上的边界条件，可得 \mathbf{E}_0 的驻波解：

$$\begin{cases} E_{0x} = A_x \cos k_x x \sin k_y y \\ E_{0y} = A_y \sin k_x x \cos k_y y \\ E_{0z} = A_z \sin k_x x \sin k_y y \end{cases} \quad (5.77)$$

其中 k_x, k_y 满足：

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 - k_z^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - k_z^2 \quad (5.78)$$

且：

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L_y} \quad (5.79)$$

从而此时波导内可以存在的振荡模式为：

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y = A_y \sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z = A_z \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases} \quad (5.80)$$

由 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 可得：

$$k_x A_x + k_y A_y - i k_z A_z = 0 \quad (5.81)$$

因此，同样可知，若 $n_x = n_y = 0$ ，则有 $k_x = k_y = 0$ ， $k_z = k$ 。故 $E_x = E_y = 0$ ， $A_z = 0$ 从而 $E_z = 0$ ，无物理意义。故 n_x, n_y 不能同时为 0。

下面来看能在波导中传播的电磁振荡的频率。易知：

$$k_x^2 + k_y^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - k_z^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2 \right]$$

从而有：

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2 + k_z^2} \quad (5.82)$$

注意， k_z^2 必须大于 0 才能形成传播，若 $k_z^2 < 0$ ，则 k_z 为虚数， $e^{ik_z z}$ 为衰减因子，

无法构成传播。因此，波导管内形成传播的电磁振荡的最小频率即截止频率为：

$$f_{\min} = \frac{1}{2L_x\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (L_x \geq L_y) \quad (5.83)$$

附录 A

追忆高中往事

犹记得我与“场”之间的几个故事，其中最让我感动和铭记的是这第一个关于“原电池”的故事。2021年清明假期，当时我上高一下学期，化学里讲“原电池”的知识（尤其是在化学课本和课堂上出现了“电势”一词，这是我们当时老高考高二的物理知识）。当时班里几位同学讨论的一个热点问题是——原电池中的电流是如何产生的？为什么将铜、锌金属片用导线相连后插入电解质溶液中便能产生电流？同学们各自有各自的见解，大家互相讨论、辩论，最终在2021年4月4日中午由 GJH 同学总结成一篇段文字发表于QQ空间中，简摘如下：

“经过数天奋斗不息，接近一周的讨论，终于解决了这个双液问题。（其实当时大部分说的都是对的，但是没有结合起来，方向也不是特别指明。）

双液原电池是由于铜锌活泼性不同，造成两者之间电势差，……，因此如果没有电解质溶液，是无法形成原电池的。（LD 的理论不完全就是因为这点，因为如果只有金属，没有电解质溶液，只能产生这种趋势）……这基本就是双液原电池的原理了。（YC 、JCH 说的并没有错，只是大部分人当时并没有联系起来。老方 [WHY]，说的是啥我听不明白）

以上如有错误，欢迎纠正”

然而在我看来，这个“双液问题”并没有被“完全解决”。我首先不明白为什么都说铜锌之间存在电势差，但直接将铜锌相连却没有电流产生。当时我心中有一个

模糊的电学框架，所以对“铜锌之间存在电势差，却没有电流”表示怀疑。我觉得或许是我没彻底明白什么是“电势”，所以我想彻底弄明白它，以及弄明白铜锌之间所谓的“电势差”究竟是一个什么样的性质。下面摘录一些上述 QQ 空间文章的评论区中的评论：

- 我：我说太多你也听不懂，我就简单给你说。
- GJH：你简单说又没逻辑。
- 我：要不我下周把物理选修3 - 1给你拿来看看电场是啥。
- GJH：你要是用电场来解决，这个问题就复杂了。
- YC: nesv
- 我：我今天晚上发表说说好好给你们讲讲，等我回家。
- GJH：坐等
- 我：[一个小企鹅喝茶的表情包]

我当晚花了几个小时翻看着物理选修3 - 1第一章“静电场”，然而却没有发表“说说”。我对GJH说要通电话，来给他讲什么是“电势”、“电势差”，不料 GJH 同学在班级群中宣传说“LD要讲课了，关于原电池，大家来听！”最后竟真的招募了另一位观众——ZCX 同学。

我所谓的“讲课”持续了40分钟就被 GJH 打断了，因为我根本讲不清楚电场，也没有成功解决原电池遗留的困难。（这困难最后的解决是第二天 GJH 找到的一篇文章，用的高二课本《化学反应原理》第一章中的思想。）

几年过去了，现在看来曾经那次课“讲课”是有收获的，其中之一是我心中埋下了对“场”的认识的种子。什么是场？在讲课中，我对此问题的回答是：“电场是电荷周围的一种东西，其它电荷在其中能感受到原先那个电荷对它的影响。”。我现在认为这个理解抓住了场的特征——场是空间中分布的“东西”。”

使我加深了对（数学）场的理解的一件事发生在2021年9月30日，国庆节放假的那个离校的下午。笔者家长有事晚到，于是我在教室里闲逛。这时，已经转到高二文科班的GJH来到了这个与他始终紧密联系在一起的中补二班，拿出一本蓝皮书在我眼前晃。是一本大学教材《电磁学》（似乎是陈秉乾著的那个老版本），他说这是他们文科班物理老师的老课本（好像是位朱姓的男老师），说让他参考以写一篇关于

电场的文章。我很眼馋，求他把这本《电磁学》借给我看，我回家给他拍照片。在我的苦苦央求下，他同意把书留在我手里，但要给他拍照以便不打扰他写文章。他回家了，我家长还未来，便坐在窗台上看《电磁学》。结果我就看了没几页，就等来了家长，可这本书却忘了带回家，自然也就没有给GJH拍照，GJH当时非常生气。

幸运的是，这“没几页”的浏览让我捡到了宝。我从某一页中得知了一个对于一个刚上高二的学生来说既费解又令人惊奇的概念（或者说是思想）——“若空间中每一点都对应了一个矢量，则称空间中存在一矢量场；若空间中每一点都对应了一个标量，则称空间中存在一标量场。”相比之下，上述标量场的概念更令我费解。文中举了些例子“例如电场是矢量场；温度、电势则是标量场。”电场是矢量场令人欣然接受，这与我之前对电场的理解不谋而合——之前我认为的“空间中被激发出的东西”现在看来就是“空间中对应的矢量”。但“温度和电势是标量场”在当时看来则是新鲜的、难以一下子接受的，因为你似乎找不到我说的空间中的那个“东西”。

多年之后回想起来，可以认为是高中时我的思维还很朴素，很“不数学”。我欣然接受“标量场”观念是在大一时，在深刻体会了数学中“映射”概念之后。现在看来，上述大学课本中对场的表述是一种数学或几何上的描述，场不过就是空间中分布的函数而已；也可以认为，我高中时期形成的那个场的概念，直接针对的是物理场而非数学场——物理场除了由数学场的数学结构（即空间映射）以外，还有其自己的动力学定律、有能量和动量，是物质的存在形式，是“东西”。从这个观点看，电磁场是物理场，温度、电势是数学场。所以难怪我当时会感觉到奇怪了。

在2022年4月，一次“天一大联考”之后的晚自习，我不想写作业，于是整晚投入了一篇文章的写作之中，文章的名称是《论场和势》，这篇文章现在还在我的笔记本里。

当时我很想总结一下自己已知的关于电磁场的知识与想法。这篇文章是有收获的——我理解了“ $E = -\nabla\varphi$ ”这个公式，但在文章中我错误地说明了“散度”和“旋度”的概念。

最后一个故事发生在2023年1月，过年前。当时老师在钉钉里发了一个文档，里面有一栏是“寒假学生研究性学习……”这勾起了我研究的热情。于是我在钉钉同学群中打广告，招募队友。终于成功招募了三名同学——YZY、WHY、JYT。

我们研究性学习的课题打算取自物理教材的后面“研究性学习”部分提供的课题。经过比较考量，我们最终选择了《必修二》中的“潮汐的成因与现象”，因为这一课题不用做实验，理论性最强、最好出成果。我们的分工是：我与YZY负责分析潮汐现象的成因；WHY负责分析潮汐发电技术；JYT负责上网搜集中国潮汐发电站的资料与图片。

然后WHY发给了我他的成果，一张A4纸的内容。后来杨也给我发来了他的想法，有公式和配图，还有JYT的图片。我整合了众人的成果，参考了一些其它资料，结合自己的思考，写下了文章的第一个版本。第一版用惯性力与非惯性系解释了潮汐现象的成因。但是，我对惯性力与非惯性系这样的解释不满意，认为这样的物理图象不让人信服、让人有所疑虑。尤其是地球在自转时，这惯性力是怎么保持的呢？（换句话说，这惯性力是怎么在地球自转的情况下产生这样的潮汐规律的呢？）这难以想象、也难以理解。

突然，“场”的概念在脑海中闪出。我猛地意识到，若用场的观念去解释潮汐，上面那个问题所带来的疑虑与不安便可以消除。于是我又着手写了第二版的论文。一开篇便开宗明义地引入了“场”的概念与所谓的“引潮力场”。这样，在地球参考系下，空间的性质变得明朗起来——空间中分布着力场，在力场的作用下，海水涨落形成潮汐。这力场被“冻结”在地球周围的空间之中，是空间的属性，自然与地球是否自转无关。潮汐正是在这力场的作用下，和地球自转的共同作用下形成的一种周期现象。事实上，这次思考令我留下了一个观念——非惯性系就相当于惯性系加上一个力场。

我欣然将这些想法同YZY分享，并与他进行了讨论。可惜的是，这篇名为《论潮汐》的文章没有上交学校，因为当时临近一模。总之，“场”的确是一个优秀的物理图象。把非惯性系处理为“力场”，的确能得到直观的图象、省去不少思维负担。

那时我们掌握的知识并不多，却真切地体会到了学习到新东西的最纯粹的喜悦。那是一段永远值得怀念的时光。

（原文写于2024.5.25，第一次修改于2025.4.28，第二次修改于2025.7.5）

附录 B

岁月留痕

Handwritten derivation of the formula for the magnetic dipole moment of a current loop:

$$\begin{aligned} & \oint \vec{r} \times (Id\vec{r} \times \vec{B}) \\ &= \oint d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) \cancel{\text{部分}} \quad \cancel{\text{部分}} \cancel{\text{部分}} \\ & \qquad \qquad \qquad \cancel{\oint (\vec{S} \times \vec{r}) d\vec{S}} \\ &= \oint_C d\vec{s} \times \cancel{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{B}) \\ &= \cancel{\oint_C d\vec{s} \times \vec{B}}. \\ & \qquad \qquad \qquad \cancel{\oint (\vec{S} \times \vec{r}) d\vec{S}} \\ & \qquad \qquad \qquad \cancel{\oint (\vec{S} \times \vec{r}) d\vec{S}} \\ & \qquad \qquad \qquad \cancel{\oint (\vec{S} \times \vec{r}) d\vec{S}} \\ & \qquad \qquad \qquad \cancel{\oint (\vec{S} \times \vec{r}) d\vec{S}} \\ & \qquad \qquad \qquad \cancel{\oint (\vec{S} \times \vec{r}) d\vec{S}} \\ & \nabla \cdot (\vec{A} \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \\ & \cancel{(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}} = \vec{B} \left(\cancel{\frac{\nabla A}{A}} \right) \\ & (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} = \vec{A} \cdot (\nabla \vec{B}) \end{aligned}$$

2025.4.16 中午
康林苑

图 B.1: CYY同学在食堂推导电流环磁矩的手稿 (2025.4.16)

2025.5.28

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{J}_m) dV + \frac{1}{2} \int_{\partial V} (\mathbf{r} \times \alpha_m) dS$$

其中 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$, $\alpha_m = \mathbf{M} \times \hat{n}$

$$\therefore \vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}) dV + \frac{1}{2} \int_{\partial V} \mathbf{r} \times (\mathbf{M} \times \hat{n}) dS \quad (*)$$

由 $\nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M}$

$$= \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}) + \mathbf{M} + \cancel{\mathbf{M} \times (\nabla \cdot \mathbf{r})} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M}$$

~~将 $\nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{r} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \nabla$~~

其中 $(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \nabla$

$\nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \nabla$

知 $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{M} = \nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) M - 3M$

$$\therefore \nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}) - 2M + \nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})$$

$$\therefore \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}) = 2M + \nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) - \nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{--- } \Phi$$

而 $\mathbf{r} \times (\mathbf{M} \times \hat{n}) = \mathbf{M}(\hat{n} \cdot \mathbf{r}) - \hat{n} \times (\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) \quad \text{--- } \Theta$

将 Φ , Θ 代入 $(*)$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V [2M + \nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) - \nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})] dV + \frac{1}{2} \int_{\partial V} [\mathbf{M}(\hat{n} \cdot \mathbf{r}) - \hat{n} \times (\mathbf{r} \cdot \mathbf{M})] dS$$

~~高斯定理~~ ~~张量 Gauss 定理~~

$$= \int_V M dV + \frac{1}{2} \left[\int_{\partial V} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) dS - \int_{\partial V} M(dS \cdot \hat{n}) + \int_{\partial V} \mathbf{M}(dS \cdot \mathbf{r}) - \int_{\partial V} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) dS \right]$$

~~两两抵消~~

$$\therefore \vec{m} = \int_V \vec{M} dV$$

() $\int_{\partial D} u d\vec{l} = \iint_D \nabla u \cdot d\vec{S}$

$\iiint_V \nabla(\vec{M} \cdot \vec{r}) dV = \iint_{\partial V} (\vec{M} \cdot \vec{r}) d\vec{S}$

标记: $\iiint_V \nabla u dV = \iint_{\partial V} u d\vec{S}$

B7: $e_2 \iiint_V \nabla u dV = \partial_2$

$\begin{aligned} \partial_2(u, 0, 0) &= e_2 \iiint_V \partial_2(u, \delta_{ij}) dV \\ \delta_{ij} &= e_2 \iint_{\partial V} u \delta_{ij} dS_j \\ \delta_{ij} &= e_2 \iint_{\partial V} u dS_i \\ \partial_j \delta_{ij} \delta_{ij} &= e_2 \iint_{\partial V} dS \end{aligned}$

标记:

图 B.2: ZMQ 同学推导磁化电流的磁矩的手稿 (黑色水笔部分, 2025.5.28)

附录 C

Michael Faraday

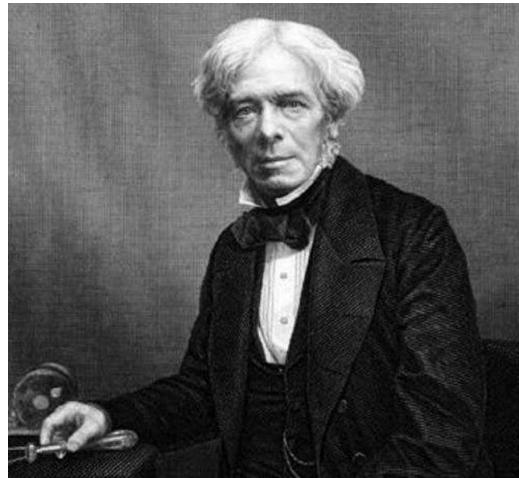


图 C.1: Michael Faraday(1791-1867)

Michael Faraday 1791年9月22日出生萨里郡纽因顿一个贫苦铁匠家庭。小时候由于家境不富裕，没有条件上学，于是只得去书店做学徒。这份学徒的工作让 Faraday 得以阅读经过他手进行装订的书籍，从科学书籍中 Faraday 学到了科学知识，而还有另一本讲个人成长方面的书也让 Faraday 学到了很多。因此从小 Faraday 就励志将来从事科学工作，成为一名科学家。

最令我触动的是 Faraday 有自己的笔记本，专门记录有趣的科学现象。而且这份笔记排版、插图都十分精美，凝结了 Faraday 的许多心血。而且正是靠着这一份

笔记，Faraday 打动了英国皇家学会当时有名的化学家 Humphry Davy，使得 Davy 同意 Faraday 成为其科学助手，Faraday 从此得以登堂入室，与英国皇家学会产生了联系。这一段故事让我更加相信了“有心人天不负”的道理，实在是感人至深，我更加希望保持自己对科学纯粹的热爱！

后来 Faraday 跟着 Davy 去周游欧洲，和许多科学家如 Ampere、Arago、Volta 都有所接触，并且后来一直保持着书信往来。

现在连中学生都知道 Faraday 数学不好，但这并不怪他，因为他的家境实在是不允许他接受良好的数学教育。但是数学不好不但没有限制他探索科学世界，反而没有了数学的束缚，他的想象力得以自由的施展，看待问题拥有自己的一套独到的眼光。

此外，Faraday 还是一个乐于奉献社会的人。他开创了皇家学会每周五晚上公众科学讲堂的先例，也激励着我不断投身于科普事业当中去。

1867年8月25日，迈克尔法拉第因病医治无效与世长辞，享年76岁。他对科学的热爱，他伟大的为人激励着一代又一代青年勇敢地献身于人类的科学事业当中。

上面的内容是我从《法拉第、麦克斯韦和电磁场——改变物理学的人》这本书上看来的。Faraday 是我最喜欢的科学家之一。我第一次了解他还是在九年级的物理课本中，电磁感应那一章。我还记得当时我的物理老师还夸 Faraday 长得帅。高中学电学的时候，人教版老教材的《选修3-1》里有一个阅读资料，里面写了“...但是由于法拉第数学不好...”，我当时还拿笔把这一句划了起来¹，当时我觉得数学不好限制了 Faraday 进一步发展他的理论，认为千万不能像他一样不好好学数学。现在看来实在是错怪 Faraday 了，只怪我当时“太年轻”。

Faraday 是一位天才的实验物理学家，拥有着超凡的直觉，对科学实验有着纯粹的热爱——他会为了能从朋友那里获得一块高质量的棱镜而开心期待；会为了引入一个新的科学名词而和希腊语专家反复商榷其命名；会记录实验日记，并且出版成好几卷本的书籍；会将自己家的地下室改装成实验室。

Faraday 最伟大的科学成就，我认为除了发现电磁感应，就是引入了场和场线的概念，场的概念就不用说了，否定了超距作用，一直沿用至今；而场线的概念启发了 Maxwell 将电磁场同流速场作类比，进而着手研究电磁场的散度与旋度。而且，

¹ 而且还被 GJH 发现了，还问我说你给人家法拉第画起来干嘛...

我本人也十分喜欢场线这一物理图像，这从本讲义中能够体现出来。

附录 D

James Clerk Maxwell

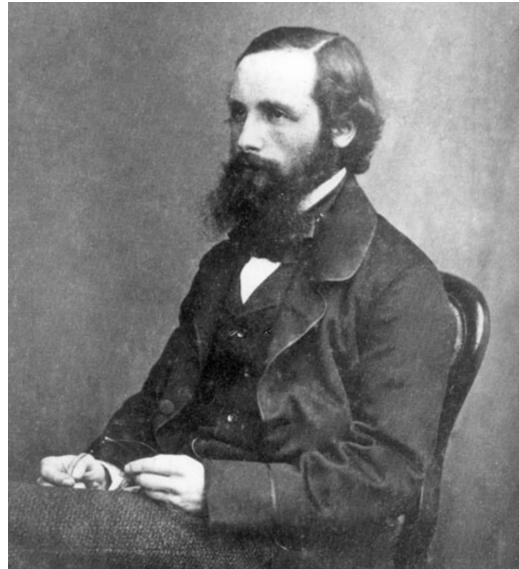


图 D.1: James Clerk Maxwell (1831-1879)

1831年6月13日，James Clerk Maxwell 出生于英国苏格兰爱丁堡。Maxwell 从小生活在庄园之中，家境优渥，拥有一段幸福的、和大自然有着亲密接触的童年，这也奠定了他对于自然、对于科学的兴趣与热爱。很长一段时间都是在家里接受父母的教育，后来才被送到镇上的学校念书。Maxwell 十岁之前母亲就去世了，从此和父亲相依为命。

Maxwell 绝对算得上是一位天才，在中学时期就发表了一篇数学论文。在大学期间还通过了“牧马人”称号考试，而且以第二名的成绩获得 Smith 奖学金¹。

Maxwell 涉足的科学领域也十分广泛——他研究过颜色的起源，研究过土星环的成因，研究电磁场，研究热力学与统计物理学，而且还喜欢做实验²。

而且 Maxwell 的数学功夫肯定也十分了的，但是他在研究电磁场的时候，包括他写下自己的电磁场方程组的时候，并没有使用我们现代人使用的矢量分析的记号³，而是使用的 Hamilton 创造的四元数。

在 Maxwell 父亲去世之后，他接管了自家的庄园，因此他经历了从家乡到学校工作，再从学校返回家乡庄园，又从家乡庄园回到校园工作的人生。但是我想 Maxwell 的内心深处一直住着一个向往大自然的田园男孩⁴。

Maxwell 人生中最后一阶段的工作是担任了 Cavendish 实验室的第一任主任。但是他的主要职责并不是行政或科研，而是负责整理出版 Cavendish 当年的手稿。当 Maxwell 发现 Cavendish 遗留下来的许多颇有价值的手稿时，“就像某人突然发现了好几卷本 Shakespeare 未出版的作品一样激动”⁵。

但是 Maxwell 却在 1879 年因为胃癌过早的去世，时年只有 48 岁。

上面的内容是我从《法拉第、麦克斯韦和电磁场——改变物理学的人》看来的。我第一次听说 Maxwell 这个名字应该也是在初中，当时老师说这个物理学家很厉害，有什么 Maxwell 方程组很有名气，但是我并没有更进一步的去了解。

上了高中之后，是沈克琦老师的《高中物理学》的电磁学卷中有一个关于 Maxwell 的小资料，以及在学物理竞赛的时候接触到了位移电流，从而对他有了更进一步的但也是很粗浅的了解。当时对他的印象停留在他很厉害但是英年早逝、他从理论上预言了变化的电场可以产生磁场进而预言了光就是电磁波。要说对他的生平、对他的为人以及对他的科学贡献有更深刻的认识，还要到了大学读完了《法拉第、麦克斯韦和电磁场——改变物理学的人》这本书以及学完了电动力学之后。

¹ 所以如果他生活在现代中国，应试能力一定也很强，能轻松地考上清华北大。

² 这和人们的刻板印象是完全不同的。比如我的高中老师就曾经说过：“啊，麦克斯韦很牛啊，全靠脑子想，靠笔算，从来不做实验。”其实这是不对的，Maxwell 实际上非常喜欢做实验，从小就是。比如有一次他把自己家改装成实验室，在妻子的协助下做了一个热力学实验，证明了气体的粘度系数和压强无关。

³ 因为我们现代人使用的矢量分析这一套记号是 Heaviside 和 Gibbs 在 Maxwell 过世后独立发明的。

⁴ 我还记得当时大一读这本书的时候特别喜欢听李健老师的《山歌好比春江水》，读到跟 Maxwell 的庄园有关章节的时候歌词特别应景，所以我现在一听这首歌就能想到 Maxwell 的庄园。

⁵ 比如 Maxwell 就发现了 Cavendish 曾经设计了一个特别精妙的实验来验证静电力遵从平方反比律，可惜未曾发表。详情可参看舒幼生老师等编写的《电磁学专题研究》。

麦克斯韦最伟大的科学贡献我认为一定是他统一了电与磁这两种现象，并且预言了电磁波。然而，杨振宁先生有一次在国家天文台做讲座，主题是电磁学的发展史⁶，其中杨先生认为 Maxwell 最伟大的工作是他给了 Faraday 提出的“电紧张状态”一个数学上的解释，就是这个式子：

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

当然，Maxwell 在多个领域都颇有建树。

Newton、Maxwell 和 Dirac 被认为是英国有史以来最伟大的三个理论物理学家。有人曾经把 Newton 的墓志铭⁷ 加以修改，用来赞颂 Maxwell：

The laws of electricity and magnetism lay hid in night;
God said, "Let Maxwell be!"
and here was light.

但是，Maxwell 生活年代的物理学是有其局限性的。比如 Maxwell 本人的电磁理论是建立在以太的假说之下的，认为电磁波的传播需要介质，即以太。正如本讲义讲位移电流的时候所指出的那样，现在人们理解的位移电流和当时 Maxwell 本人提出位移电流的初衷是完全不同的，当时是借助了以太⁸。

我曾经和我的朋友们谈论起一件事——假如 Maxwell 是一个长寿的人，他活到了 100 岁即 1931 年，会发生什么？如果 Maxwell 足够长寿，他将会看到 Hertz 设计了精妙的实验证实了电磁波的存在；会看到 Lorentz 以及后来的 Maxwell 学派是如何将电动力学发扬光大；会看到新世纪的开端 Plank 是如何引入能量量子化从而敲开了量子世界的大门；会看到 Einstein 如何将他的方程组推广到不同参考系下的变换情形从而建立了狭义相对论；会看到 Bohr 是如何命令电子运动从而发现了氢原子能级；会看到 Einstein 如何建立了广义相对论进而成为了世界物理学家之首；还会看到 Heisenberg 如何建立矩阵力学，以及 Schrodinger 如何建立波动力学……

⁶ bilibili 上有讲座的录像，感兴趣的读者可以去参看。

⁷ Newton 墓志铭的英文版如下：

Nature and nature's laws lay hid in night;
God said, "Let Newton be!"
and all was light.

⁸ 感兴趣的读者不妨去读一读《法拉第、麦克斯韦和电磁场——改变物理学的人》这本书，里面讲得很详细。

我相信他一定会很满意。