图 (2)

Tan Yiqing

2025 年 11 月 17 日

1 图的存储结构 (续)

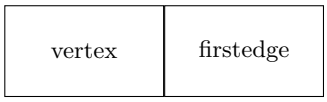
1.1 邻接表

邻接矩阵是存在缺点的，当图比较稀疏时，邻接矩阵中大部分元素为 0，造成存储空间的浪费。为了解决这个问题，可以采用邻接表来存储图。

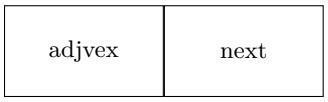
邻接矩阵的时间空间复杂度为 $O(V^2)$，而邻接表的时间空间复杂度为 $O(V+E)$，其中 V 为顶点数，E 为边数。

1.1.1 基本思想

对于图的每个顶点 v_i，将所有邻接于 v_i 的顶点链成一个单链表，称为顶点 v_i 的**边表**（对于有向图则称为出边表），所有边表的头指针和存储顶点信息的一维数组构成了**顶点表**。即如下表：



顶点表



边表

vertex：数据域，存放顶点信息。firstedge：指针域，指向边表中第一个结点。adjvex：邻接点域，边的终点在顶点表中的下标。next：指针域，指向边表中的下一个结点。

1.1.2 无向图的邻接表

1. 求顶点 i 的度: 顶点 i 的边表中结点的个数。
2. 判断顶点 i 和顶点 j 之间是否存在边：测试顶点 i 的边表中是否存在终点为 j 的结点。

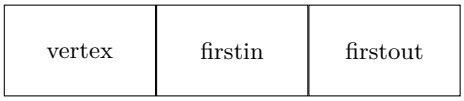
1.1.3 有向图的邻接表

1. 顶点 i 的出度: 顶点 i 的出边表中结点的个数。
2. 顶点 i 的入度: 各顶点的出边表中以顶点 i 为终点的结点个数。
3. 顶点 i 的所有邻接点: 遍历顶点 i 的边表，该边表中的所有终点都是顶点 i 的邻接点。

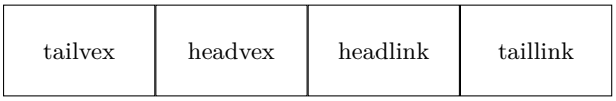
1.1.4 网图的邻接表

存储的时候带上权值即可。

1.2 十字链表

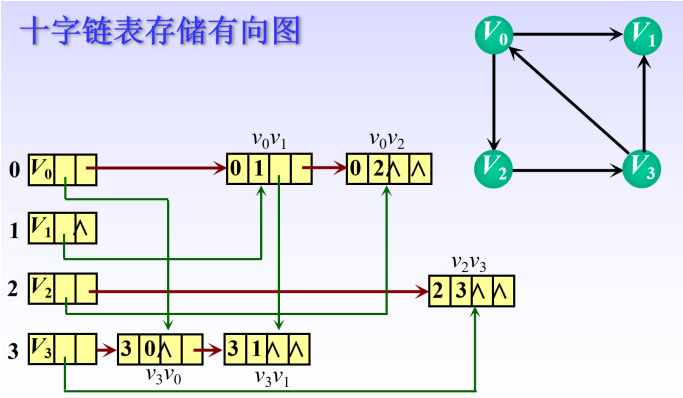


顶点表（十字链表）



边表（十字链表）

十字链表是一种用于表示有向图的数据结构，它结合了邻接表和逆邻接表的特点。每个顶点不仅包含指向其出边的指针，还包含指向其入边的指针，从而实现对有向图的高效存储和操作。



2 最短路径

2.1 基本概念

在非网图中，最短路径是指两顶点之间经历的边数最少的路径。在网图中，最短路径是指两顶点之间经历的边上权值之和最短的路径。

问：给定带权有向图 $G(V,E)$ 和源点 (入度为 0 的点)v V，求从 v 到 G 中其余各顶点的最短路径。

2.2 Dijkstra 算法

2.2.1 算法思想

这类问题有一个特点，假如 $A->V_1->V_2->...->V_k->B$ 是从 A 到 B 的最短路径，那么 $A->V_1->V_2->...->V_i$ 的路径也是 A 到 V_i 的最短路径。即子问题相似。

Dijkstra 算法是一种**贪心算法**，其基本思想是：从源点出发，逐步扩展已知最短路径的顶点集合，每次选择当前距离源点最近的顶点，并更新其邻接顶点的距离，直到所有顶点的最短路径都被确定。

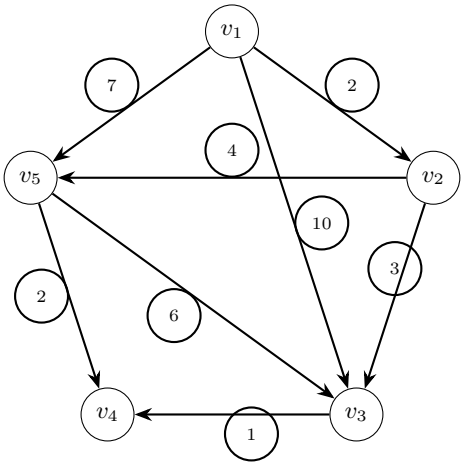
2.2.2 算法步骤

1. 初始化数组 $dist[1..n]$、$path[1..n]$ 和集合 S。令 $S=\{v\}$、$dist[v]=0$；对每个 $u\neq v$：

$$dist[u]=\begin{cases} w(v,u), & (v,u)\in E \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases},\quad path[u]=\begin{cases} v, & (v,u)\in E \\ \varnothing, & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. while（$|S|<n$）循环：
   (a) 在 $V-S$ 中从 $dist[]$ 取最小值，其下标为 k。
   (b) 输出（或记录）当前 $dist[]$ 与 $path[]$ 的状态。
   (c) 修改数组：对每条边 (k,u) 且 $u\in V-S$，若 $dist[k]+w(k,u)<dist[u]$，则 $dist[u]\leftarrow dist[k]+w(k,u)$，$path[u]\leftarrow k$。
   (d) 将顶点 v_k 添加到集合 S。
3. 终止：返回 $dist[]$ 和 $path[]$；沿 $path$ 可回溯最短路径。

注：Dijkstra 要求边权非负。w(v,u) 表示边 (v,u) 的权值。算法复杂度为 $O(n^2)$。



2.2.3 举例分析

给定源点 v_1，构造一个带权有向图（5 个顶点，8 条边），顶点按正五边形排布。边与权值如下：$(v_1, v_2, 2)$，$(v_1, v_5, 7)$，$(v_1, v_3, 10)$，$(v_2, v_3, 3)$，$(v_2, v_5, 4)$，$(v_5, v_4, 2)$，$(v_5, v_3, 6)$，$(v_3, v_4, 1)$。
距离分析（按“算法步骤”的 2.1→2.2→2.3→2.4 顺序）：

- 初始化：$S = \{v_1\}$；$dist = \{0, 2, 10, +\infty, 7\}$（对应 $v_1 \sim v_5$）；$path = \{-, v_1, v_1, -, v_1\}$。
- 第 1 轮：
  1. 选 $k = v_2$（最小 $dist = 2$）。
  2. 输出（本轮开始时）$dist = \{0, 2, 10, +\infty, 7\}$，$path = \{-, v_1, v_1, -, v_1\}$。
  3. 修改：松弛 $v_2 \to v_3 : 2 + 3 = 5 < 10 \Rightarrow dist[v_3] = 5$, $path[v_3] = v_2$；松弛 $v_2 \to v_5 : 2 + 4 = 6 < 7 \Rightarrow dist[v_5] = 6$, $path[v_5] = v_2$。此后 $dist = \{0, 2, 5, +\infty, 6\}$，$path = \{-, v_1, v_2, -, v_2\}$。
  4. $S \leftarrow S \cup \{v_2\}$。
- 第 2 轮：
  1. 选 $k = v_3$（最小 $dist = 5$）。
  2. 输出：$dist = \{0, 2, 5, +\infty, 6\}$，$path = \{-, v_1, v_2, -, v_2\}$。
  3. 修改：松弛 $v_3 \to v_4 : 5 + 1 = 6 < +\infty \Rightarrow dist[v_4] = 6, path[v_4] = v_3$。此后 $dist = \{0, 2, 5, 6, 6\}$，$path = \{-, v_1, v_2, v_3, v_2\}$。
  4. $S \leftarrow S \cup \{v_3\}$。
- 第 3 轮（并列最小 6，取 v_4）：
  1. 选 $k = v_4$。
  2. 输出：$dist = \{0, 2, 5, 6, 6\}$，$path = \{-, v_1, v_2, v_3, v_2\}$。
  3. 修改：v_4 无出边可松弛。
  4. $S \leftarrow S \cup \{v_4\}$。
- 第 4 轮：
  1. 选 $k = v_5$（剩余最小 6）。
  2. 输出：$dist = \{0, 2, 5, 6, 6\}$，$path = \{-, v_1, v_2, v_3, v_2\}$。
  3. 修改：$v_5 \to v_4 : 6 + 2 = 8 > 6$ 不更新；$v_5 \to v_3 : 6 + 6 = 12 > 5$ 不更新。
  4. $S \leftarrow S \cup \{v_5\}$，此时 $S = V$，结束。

最终 $dist = \{0, 2, 5, 6, 6\}$。最短路径：$v_1 \to v_2$；$v_1 \to v_2 \to v_3$；$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4$；$v_1 \to v_2 \to v_5$。

2.3 Floyd 算法

2.3.1 算法思想

问题描述：给定带权有向图 $G(V,E)$，对任意顶点 v_i, v_j V i j ，求顶点 vi 到顶点 vj 的最短路径。

Floyd 算法是一种动态规划算法，其基本思想是通过逐步引入中间顶点，更新任意两顶点之间的最短路径，直到考虑所有顶点作为中间顶点为止。

2.4 Floyd 算法

2.4.1 算法思想

基本思想：对任意 $v_i \to v_j$，依次试探以 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 作为“中间顶点”的可能性。第 k 次试探时，仅允许中间顶点的编号不大于 k，比较两条路径的长度：直接路径 $v_i \to v_j$ 与经由 v_k 的路径 $v_i \to v_k \to v_j$，取较短者作为“当前最优”。经过 n 次比较后，得到 v_i 到 v_j 的最短路径。

2.4.2 算法步骤

1. 初始化二维矩阵 $dist_{-1}[1..n, 1..n]$ 与 $path_{-1}[1..n, 1..n]$：

$$dist_{-1}[i,j] = \begin{cases} 0, & i = j \\ w(i,j), & (i,j) \in E \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad path_{-1}[i,j] = \begin{cases} i, & i = j \\ i \to j, & (i,j) \in E \\ \varnothing, & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. for $k = 1$ 到 n（第 k 轮）：

   (a) 输出上一轮矩阵 $dist_{k-1}$、$path_{k-1}$。

   (b) 对所有 i, j，若 $dist_{k-1}[i,k] + dist_{k-1}[k,j] < dist_{k-1}[i,j]$，则

   $$dist_k[i,j] \leftarrow dist_{k-1}[i,k] + dist_{k-1}[k,j], \quad path_k[i,j] \leftarrow \text{将} path_{k-1}[i,k] \text{ 与} path_{k-1}[k,j] \text{ 拼接去重}$$

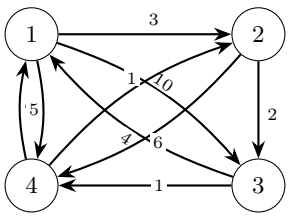
   否则 $dist_k[i,j] \leftarrow dist_{k-1}[i,j]$，$path_k[i,j] \leftarrow path_{k-1}[i,j]$。

   (c) 进入下一轮。

3. 终止：$dist_n$ 与 $path_n$ 为所有顶点对的最短距离矩阵与路径矩阵。时间复杂度 $O(n^3)$。可处理负权边但不可存在负环。

2.4.3 举例分析

构造带权有向图（4 个顶点，9 条有向边）。边集与权值：$(1,2,3)$，$(1,3,10)$，$(1,4,7)$，$(2,3,2)$，$(2,4,6)$，$(3,4,1)$，$(3,1,4)$，$(4,2,1)$，$(4,1,5)$。



初始化矩阵（$dist_{-1}$ 为邻接矩阵，$path_{-1}$ 为原始路径矩阵）：

$$dist_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 & 7 \\ \infty & 0 & 2 & 6 \\ 4 & \infty & 0 & 1 \\ 5 & 1 & \infty & 0 \end{bmatrix}, \quad path_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1\to2 & 1\to3 & 1\to4 \\ \varnothing & 2 & 2\to3 & 2\to4 \\ 3\to1 & \varnothing & 3 & 3\to4 \\ 4\to1 & 4\to2 & \varnothing & 4 \end{bmatrix}$$

第 1 轮（允许中间顶点 1），得到 $dist_0, path_0$：

$$dist_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 & 7 \\ \infty & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 15 & 0 \end{bmatrix}, \quad path_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1\to 2 & 1\to 3 & 1\to 4 \\ \varnothing & 2 & 2\to 3 & 2\to 4 \\ 3\to 1 & 3\to 1\to 2 & 3 & 3\to 4 \\ 4\to 1 & 4\to 2 & 4\to 1\to 3 & 4 \end{bmatrix}$$

第 2 轮（允许中间顶点 2），得到 $dist_1, path_1$：

$$dist_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ \infty & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad path_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1\to 2 & 1\to 2\to 3 & 1\to 4 \\ \varnothing & 2 & 2\to 3 & 2\to 4 \\ 3\to 1 & 3\to 1\to 2 & 3 & 3\to 4 \\ 4\to 1 & 4\to 2 & 4\to 2\to 3 & 4 \end{bmatrix}$$

第 3 轮（允许中间顶点 3），得到 $dist_2, path_2$：

$$dist_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad path_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1\to 2 & 1\to 2\to 3 & 1\to 2\to 3\to 4 \\ 2\to 3\to 1 & 2 & 2\to 3 & 2\to 3\to 4 \\ 3\to 1 & 3\to 1\to 2 & 3 & 3\to 4 \\ 4\to 1 & 4\to 2 & 4\to 2\to 3 & 4 \end{bmatrix}$$

第 4 轮（允许中间顶点 4），得到最终 $dist_3, path_3$：

$$dist_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad path_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1\to 2 & 1\to 2\to 3 & 1\to 2\to 3\to 4 \\ 2\to 3\to 1 & 2 & 2\to 3 & 2\to 3\to 4 \\ 3\to 1 & 3\to 4\to 2 & 3 & 3\to 4 \\ 4\to 1 & 4\to 2 & 4\to 2\to 3 & 4 \end{bmatrix}$$

由 $dist_3$ 可读出任意两点最短距离；由 $path_3$ 可直接读出对应最短路径。

3 最小生成树

3.1 基本概念

1. 生成树：n 个顶点的连通图 G 的生成树是包含 G 中全部顶点的一个极小连通子图。(恰好含有 n-1 条边的连通图)
2. 生成森林：在非连通图中，由每个连通分量都可以得到一棵生成树，这些连通分量的生成树就组成了一个非连通图的生成森林。

命题 1 (边数至少为顶点数则必有回路). *在一个 n 个顶点的无向图 $G = (V, E)$ 中，若边数满足 $|E| \geq n$，则 G 中必存在回路。*

证明. 采用数学归纳法按顶点数 n 证明。**基例**：当 $n \leq 3$ 时，命题显然成立。**归纳假设**：设对所有顶点数 $< n$ 的无向图命题成立。**归纳步**：考虑任意一个顶点数为 n 的无向图 G，且 $|E| \geq n$。分两种情形讨论：

1) G 非连通。设其连通分量为 $G_1, \ldots, G_m$，对应顶点数与边数分别为 $|V_i|, |E_i|$。若存在某个分量 G_t 使得 $|E_t| \geq |V_t|$，由归纳假设 G_t 中存在回路，从而 G 中存在回路。否则对所有 i 都有 $|E_i| \leq |V_i| - 1$，则

$$|E| = \sum_{i=1}^{m} |E_i| \leq \sum_{i=1}^{m} (|V_i| - 1) = \Big(\sum_{i=1}^{m} |V_i| \Big) - m = n - m < n,$$

与 $|E| \geq n$ 矛盾。因此此情形必有回路。

2) G 连通。若存在度为 1 的顶点 w，令 e 为其唯一邻边，删去 w 与 e 得图 $G' = (V \setminus \{w\}, E \setminus \{e\})$。此时 $|V'| = n - 1$ 且

$$|E'| = |E| - 1 \geq n - 1 = |V'|,$$

由归纳假设 G' 中存在回路，故 G 中亦存在回路。若 G 中不存在度为 1 的顶点，则每个顶点度数 ≥ 2。取 G 中一条极长简单路径 $P = v_1 v_2 \cdots v_k$。由于 $\deg(v_k) \geq 2$，v_k 必与 P 中某个早先顶点 v_j（$1 \leq j \leq k-2$）相邻，从而形成回路 $v_j v_{j+1} \cdots v_k v_j$。

综上，命题对 n 成立，归纳完毕。 □

主要内容见图 (3)