第 I 部

BdG モデルハミルトニアンについて

1　定義

BdG モデルハミルトニアン $\mathcal{H}$ は以下のように表される。

$$\mathcal{H} = \int \vec{\Psi}^\dagger \tilde{H} \vec{\Psi} dr \tag{1}$$

$$\int dr = \int dxdy \tag{2}$$

$$\vec{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_\uparrow \\ \Psi_\downarrow \\ \Psi_\uparrow^\dagger \\ \Psi_\downarrow^\dagger \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \hat{h}(r) & \hat{\Delta}(r) \\ -\hat{\Delta}^*(r) & -\hat{h}^*(r) \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\hat{h} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu_F \right] \hat{\sigma}_0 \tag{5}$$

$$(\hat{\sigma}_0 : \text{単位行列}) \tag{6}$$

$$\hat{\Delta}(r) = \begin{cases} \Delta_0 \left(i\hat{\sigma}_2 \right) & \text{s-wave} \\ \Delta_0 \frac{i\partial x}{k_F} \hat{\sigma}_1 & p_x\text{-wave} \\ \Delta_0 \frac{1}{k_f} \left(\hat{\sigma}_1 + i\hat{\sigma}_2 \right) & p_x + ip_y \end{cases} \tag{7}$$

$$\vec{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{L_y}} \sum_{k_y} \vec{\Psi}_{k_y}(x) e^{ik_y y} \tag{8}$$

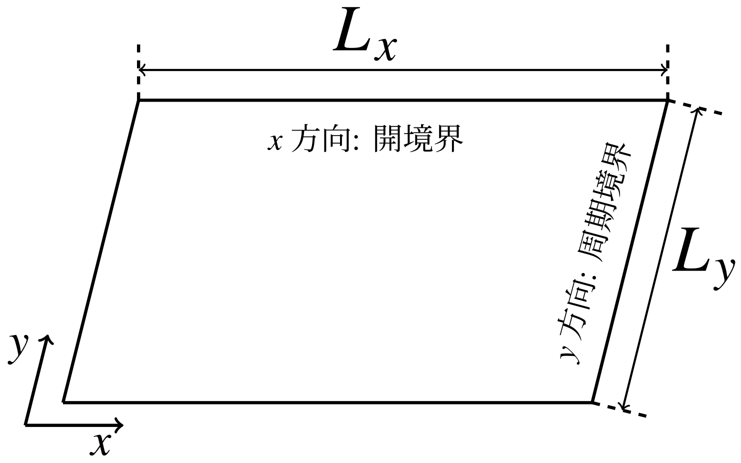

図 1　考える系

2　問題

2.1　ハミルトニアン $\mathcal{H}$ をフーリエ変換せよ

式 (1) に式 (8) を代入して計算していく。

$$\mathcal{H} = \int\int \left(\frac{1}{\sqrt{L_y}} \sum_{k_y} \vec{\Psi}^{\dagger}_{k_y}(x) e^{-ik_y y} \right) \tilde{H} \left(\frac{1}{\sqrt{L_y}} \sum_{k'_y} \vec{\Psi}_{k'_y}(x) e^{ik'_y y} \right) dxdy \tag{9}$$

ここで

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

より、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ は、

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu_F & 0 & 0 & \Delta_0 \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu_F & -\Delta_0 & 0 \\ 0 & -\Delta_0^* & \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu_F & 0 \\ \Delta_0^* & 0 & 0 & \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu_F \end{bmatrix} \tag{14}$$

これを、式 (9) に代入して計算していく。
このとき、

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}^\dagger_{k_y}(x) e^{-ik_y y} \tilde{H} \vec{\Psi}_{k'_y}(x) e^{ik'_y y} &= e^{-ik_y y}\left[\Psi_\uparrow^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu_F\right) + \Psi_\downarrow^* \Delta_0^*\right] \Psi_\uparrow e^{ik'_y y} \\ &+ e^{-ik_y y}\left[\Psi_\downarrow^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu_F\right) - \Psi_\uparrow^* \Delta_0^*\right] \Psi_\downarrow e^{ik'_y y} \\ &+ e^{-ik_y y}\left[-\Psi_\downarrow^* \Delta_0 + \Psi_\uparrow^* \left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu_F\right)\right] \Psi_\uparrow e^{ik'_y y} \\ &+ e^{-ik_y y}\left[\Psi_\uparrow^* \Delta_0 + \Psi_\downarrow^* \left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu_F\right)\right] \Psi_\downarrow e^{ik'_y y} \end{aligned}$$

よって、式 (1) は、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{L_y}\int dx \sum_{k_y}\left[\Psi_\uparrow^* \left(-\frac{\hbar^2 k_y^2}{2m}\nabla^2 - \mu_F\right)\Psi_\uparrow + \Psi_\uparrow^* \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi_\uparrow + \Psi_\downarrow^* \Delta_0^* \Psi_\uparrow \Psi_\downarrow^* \left(-\frac{\hbar^2 k_y^2}{2m}\nabla^2 - \mu_F\right)\Psi_\downarrow + \Psi_\downarrow^* \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi_\downarrow + \Psi\right.$$