



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE NANCY

RAPPORT DE PROJET 2A

TANCRÈDE COHET ET PIERRE GAUTHIER

# Mélange par un écoulement stationnaire de fluide à faible Reynolds

Laboratoire : Institut Élie Cartan

Tuteurs : Pierre Brancher et Jean-François Scheid

*21 Mars 2018*

# Table des matières

<b>1 Position du problème</b>	<b>3</b>
1.0.1 dispositif expérimental . . . . .	3
1.0.2 hypothèses de modélisation . . . . .	6
<b>2 Équations de Navier Stokes</b>	<b>7</b>
2.0.1 Équations de Stokes . . . . .	8
2.0.2 Adimensionnement de l'équation de Stokes . . . . .	9
2.0.3 Formulation variationnelle . . . . .	10
<b>3 Modélisation du champ Magnétique de l'aimant</b>	<b>12</b>
3.1 Mise en forme du problème . . . . .	13
3.2 Méthode des éléments finis . . . . .	16
3.2.1 Le maillage . . . . .	16
3.2.2 Mise en équation . . . . .	18
3.2.3 Passage à un élément de référence . . . . .	20
3.2.4 Calcul du Gradient . . . . .	22
3.2.5 Implémentation algorithmique . . . . .	24
<b>4 Application au problème de Navier-Stokes 3D</b>	<b>27</b>
4.0.1 Méthode des différences finies . . . . .	28
4.0.2 Calcul intrinsèque du champ de vitesse . . . . .	30
4.0.3 Implémentation algorithmique . . . . .	31
<b>A Calcul de la matrice de rigidité</b>	<b>38</b>

# Introduction :

La résolution d'équations à dérivées partielles sont la clé de voute de la modélisation de systèmes physiques et financiers avec des conditions aux limites des systèmes. Cette problématique est particulièrement vraie en mécanique des fluides avec l'utilisation prépondérante de l'équation de Navier Stokes. Il est donc primordial d'avoir des moyens de résolution/simulation numérique de ce genre d'équation, qui respecte les différentes contraintes que posent la théorie des équations à dérivées partielles ( fonctions modélisées respectant les espaces de Sobolev). Une des méthodes numériques de résolution de Navier-Stokes est par exemple la méthode des éléments finis, sur maillage triangulaire.

Le but de ce projet est d'étudier des écoulements chaotiques à faible nombre de Reynolds, c'est à dire des écoulements dont les forces visqueuses sont prépondérantes, qui sont présents typiquement dans l'industrie métallurgique ou dans l'industrie hydro-électrique. Cette problématique de résolution d'équations numériques à dérivées partielles est au cœur des enjeux du projet.

L'approche numérique eulérienne d'un mélange par advection chaotique traite du problème stationnaire avec champ de vitesse sinusoïdale qui correspond à un système de tourbillons orthogonaux, dont le modèle académique analytique a été étudié dans le cadre de la thèse de Valérie Toussaint, que nous allons reprendre avec deux tourbillons d'axes parallèles et un tourbillon qui leur est perpendiculaire. Dans la première partie de notre étude, nous allons présenter le problème, puis le mettre en équation et calculer le champ magnétique d'un aimant afin de calculer le terme source de l'équation de Navier-Stokes.

# Chapitre 1

## Position du problème

Nous devons simuler l'écoulement de fluides non visqueux dans une cuve sous influence d'aimants ferromagnétiques : le fluide est chargé en éléments ferromagnétiques, qui présente un moment magnétique. Chaque particule va se mouvoir sous l'influence du champ magnétique, par le biais des forces de Laplace, qui se font mouvoir les particules de fluide, qui suivent un mouvement d'advection chaotique . On définit l'advection chaotique comme un écoulement dans un fluide dont la trajectoire des point passe par tous les point du domaine. C'est à dire que si on observe le passage d'une particule à travers une section du fluide au bout d'un temps infinis, les points d'impact de la particule recouvreront de manière continue toute la section.

### 1.0.1 dispositif expérimental

Expérimentalement, il est possible de réaliser cet écoulement à l'aide d'une distribution adéquate des forces. Pour cela, on utilise un système composé de parallélépipède, d'aimants permanents et d'électrodes. Le parallélépipède est un mélangeur dans lequel se trouve un liquide faiblement conducteur. Afin de générer un tourbillon, on place deux aimants l'un en face de l'autre sur une moitié du parallélépipède pour créer un champ  $\vec{B}$  vertical sur cette moitié. On place aussi deux électrodes sur les deux autres faces opposées du parallélépipède pour créer un courant uniforme de densité  $\vec{j}$ .

Afin de générer deux tourbillons, on place deux aimants l'un en face de l'autre

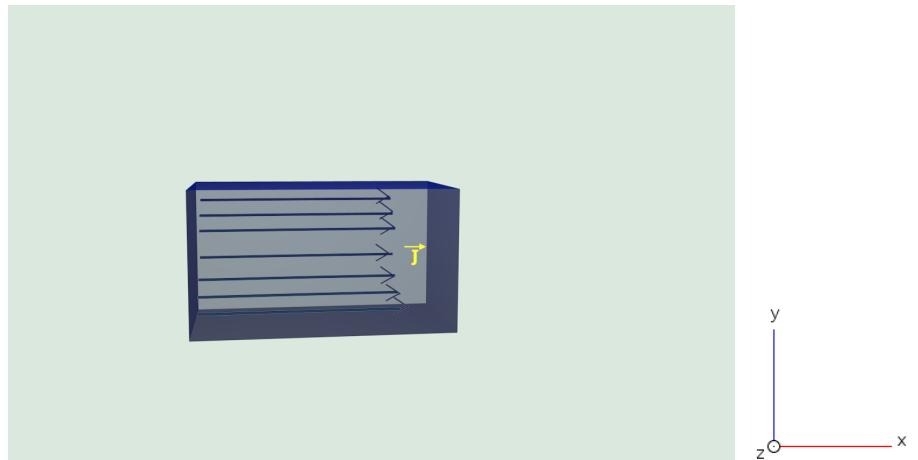


FIGURE 1.1 – liquide faiblement ionisé soumis à un champ électrique  $\vec{E}$

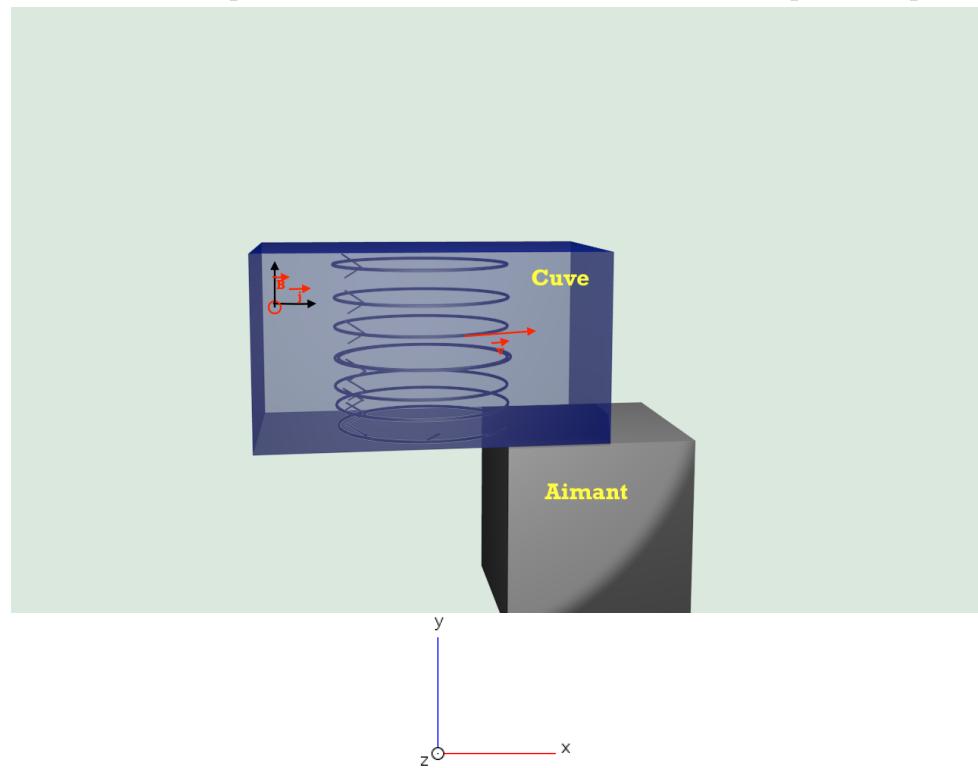


FIGURE 1.2 – liquide faiblement ionisé soumis à un champ électrique et un champ magnétique  $\vec{B}$

sur le deuxième tiers du parallélépipède pour créer un champ  $B$  vertical sur le tiers au milieu. On place aussi deux électrodes sur les faces opposées du parallélépipède pour créer un courant uniforme de densité  $\vec{j}$ . Une force de Laplace est générée, due à la différence de potentiel ( $P_1 - P_0$ ) en présence d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , deux tourbillons sont alors générés dans le parallélépipède

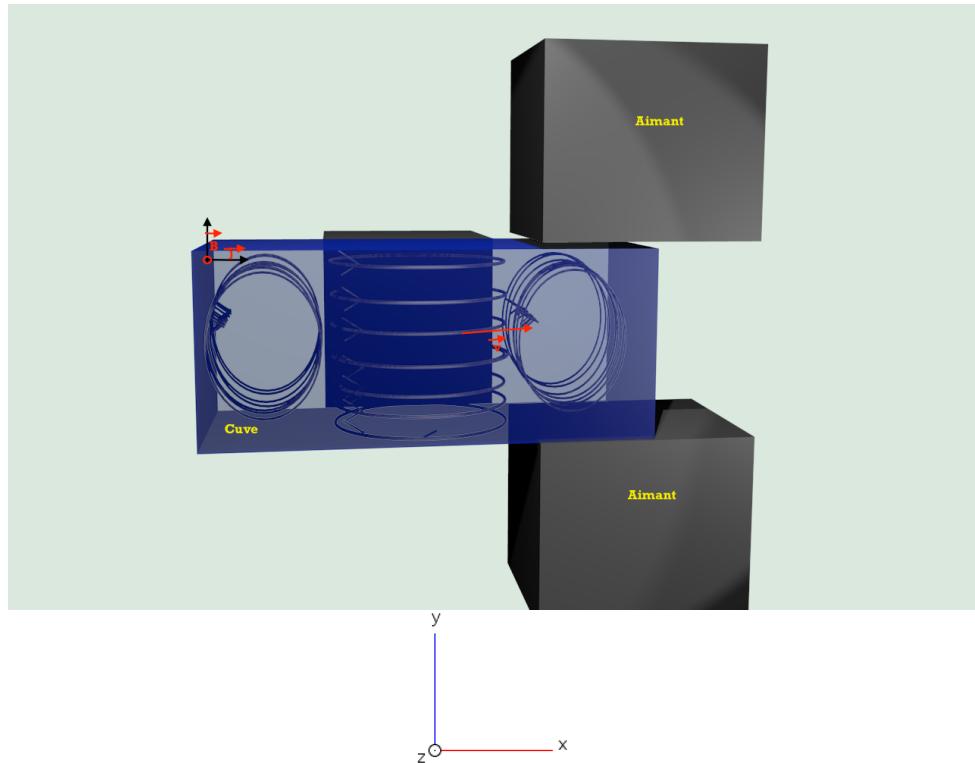


FIGURE 1.3 – advection chaotique avec trois tourbillons

### **1.0.2 hypothèses de modélisation**

Nous devons d'abord modéliser notre système , car dans les cas de système faisant intervenir des équations à dérivées partielles , la bonne définition du système est primordiale, avec notamment la prédominance des conditions aux limites dans la catégorie de problèmes que nous traitons.

Notre système sera modélisé par un fluide visqueux incompressible régi par les équations de Stokes qu'on verra dans le chapitre suivant. Les forces électromagnétiques seront aussi modélisées par des forces constantes dans une certaine région du domaine et générant ainsi les trois tourbillons souhaités. Nous allons nous intéresser tout d'abord aux équations du système.

# Chapitre 2

## Équations de Navier Stokes

D'après ce qui précéde, le fluide considéré suit les équations de Navier-Stokes dont nous allons nous servir pour modéliser le mouvement. Nous supposons que nous avons à notre disposition deux aimants, qui sont perpendiculaires sur les côtés de la cuve, l'un produit un champ  $B_1$ , l'autre produit un champ  $B_2$

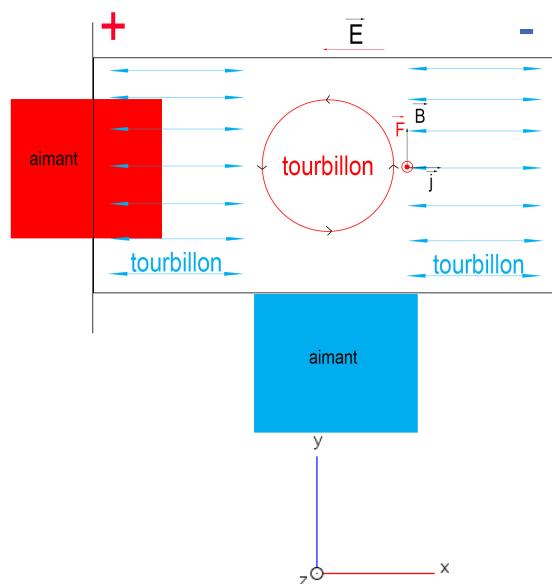


FIGURE 2.1 – advection chaotique avec trois tourbillons

le premier aimant va produire un tourbillon dans le fluide, le deuxième va produire deux tourbillons parallèles, qui sont orthogonaux au premier tourbillon :

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{1,x} \\ B_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{2,y} \\ B_{2,z} \end{pmatrix}$$

Ainsi on peut calculer la force magnétique

$$\vec{f}_1 = j_0 \vec{e}_x \wedge \begin{pmatrix} B_{1,x} \\ B_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix} = j_0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{1,y} \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{f}_2 = j_0 \vec{e}_x \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_{2,y} \\ B_{2,z} \end{pmatrix} = j_0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ -B_{2,z} \\ B_{2,y} \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire pour la force magnétique totale  $\vec{f}$

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} B_{1,x} \\ B_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 2.0.1 Équations de Stokes

Le liquide est un conducteur placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant uniforme  $\vec{J}_0$ . Une force de Laplace  $\vec{f}_l$  est alors créée. La densité

volumique de cette force est donnée par :

$$\vec{f}_l = \vec{j}_0 \wedge \vec{B} = j_0 \times M_0 \times \vec{j} \wedge \vec{B}^*$$

$$\vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{M_0}, \text{ et } j_0 = \frac{\Delta P}{L} \sigma$$

FIGURE 2.2

Avec :

- $\sigma$  : la conductivité du fluide
- $L$  : la longueur de base de la cuve

Afin de pouvoir trouver l'équation de la trajectoire d'un point donné, on cherche tout d'abord à trouver la vitesse dans l'écoulement du fluide contenu dans un domaine  $\Omega$ .

A partir des équations de Navier-Stokes incompressibles, on détermine simultanément la vitesse  $V$  et la pression  $P$ .

On émet les hypothèses suivantes :

Dans un premier temps, nous pouvons négliger les forces d'inertie du fluide comme on a un faible nombre de Reynolds. Le fluide visqueux est en mouvement le long d'une paroi solide fixe d'où une vitesse nulle sur le bord car  $\vec{V}_{\partial\Omega} = \vec{V}_{\text{paroi}} = \vec{0}$

Finalement, on se place en régime stationnaire.

$$\begin{cases} \vec{0} = -\vec{\nabla}P + \mu \vec{\Delta}V + \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div}(\vec{V}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{V} = \vec{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

### 2.0.2 Adimensionnement de l'équation de Stokes

Afin de résoudre un seul système indépendamment des constantes, on adimensionne l'équation de Stokes. Le régime stationnaire sera pris en compte après

adimensionnement.

Posons :

$$\vec{V}'(x, t) = \frac{\vec{V}(x, t)}{V_0} ; \vec{x}' = \frac{\vec{x}}{L_0} ; \vec{f}'(\vec{x}') = \frac{\vec{f}(\vec{x})}{j_0 M_0} ; P' = \frac{P}{P_0} ; t' = \frac{t}{\frac{L_0^2}{\mu}}$$

En injectant dans l'équation de Stokes d'évolution :

$$\left\{ \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{V} + \vec{f} \right.$$

il en résulte :

$$\left\{ \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} = -\frac{L_0 P_0}{\rho \mu V_0} \vec{\nabla} P' + \vec{\Delta} \vec{V}' + \frac{L_0^2 j_0 M_0}{\mu V_0} \vec{f}' \right.$$

On adimensionne par rapport à  $V_0$  et  $P_0$  de sorte que  $\frac{L_0 P_0}{\rho \mu V_0} = 1$  et  $\frac{L_0^2 j_0 M_0}{\mu V_0} = 1$ , le régime stationnaire étant établi :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P' + \vec{\Delta} \vec{V}' + \vec{f}' \text{ dans } \Omega$$

### 2.0.3 Formulation variationnelle

Afin d'obtenir la formulation variationnelle de l'équation de Stokes, on passe dans l'espace des distribution de sorte que pour toute fonctions test  $\varphi$  on a

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} P' \times \vec{\varphi} = \int_{\Omega} -\mu \vec{\Delta} \vec{V}' \times \vec{\varphi} + \int_{\Omega} \vec{f}' \times \vec{\varphi}$$

En appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} P' \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega} \vec{\nabla} V' \cdot \vec{\varphi} = \int_{\Omega} \vec{f}' \cdot \vec{\varphi}$$

Comme précédemment nous nous plaçons dans l'espace  $V_h$  d'approximation polynomiale de degrés 1. Nous pouvons ainsi décomposer les champs de pression  $P'$ , la vitesse  $V'$  et la force  $\vec{f}'$  dans la base des  $(\varphi_i)$  :

$$\begin{cases} V' = \sum_{i=1}^{N_h} V_i \varphi_i \quad \text{où } V_i = V(P_i), \ i = 1, 2, \dots, N_h \\ P' = \sum_{i=1}^{N_h} P_i \varphi_i \quad \text{où } P_i = P(P_i), \ i = 1, 2, \dots, N_h \\ f' = \sum_{i=1}^{N_h} f_i \varphi_i \quad \text{où } f_i = f(P_i), \ i = 1, 2, \dots, N_h \end{cases}$$

On prend  $\varphi = \varphi_i$  un vecteur de la base

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla V_h \cdot \nabla \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} V_i \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} A_{ij} V_i \\ \int_{\Omega} \nabla P_h \cdot \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} P_i \nabla \varphi_i \cdot \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} C_{ij} u_i \\ \int_{\Omega} f \cdot \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} f_i \varphi_i \cdot \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} M_{ij} f_i \end{cases}$$

On peut donc écrire la formulation variationnelle sous la forme d'un problème linéaire :

$$\begin{cases} -A \times V + C \times P = M \times f \text{ sur } \Omega \\ C * V = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La linéarité de l'équation nous permet d'appliquer le principe de superposition et donc de décomposer la résolution du problème en deux résolutions : une pour chaque terme source et ensuite de les sommer. Pour cela, nous allons chercher à calculer le terme source dans la suite, c'est à dire le champ magnétique.

# Chapitre 3

## Modélisation du champ Magnétique de l'aimant

Nous cherchons dans cette partie à déterminer une approximation du champ magnétique  $\vec{B}(x, y, z)$  induit par un aimant (Figure 1). L'objectif sera d'abord de déterminer le champ magnétique dans un milieu quelconque, pour ensuite exploiter ces résultats pour les employer dans la résolution numérique de Navier Stokes.

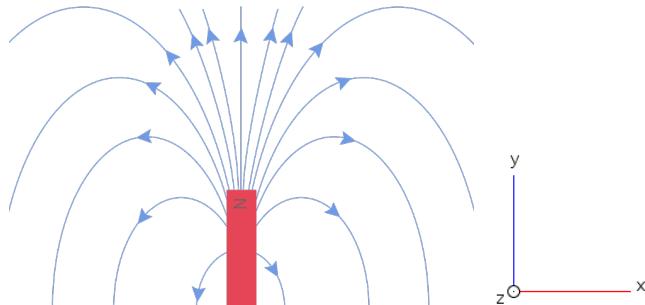


FIGURE 3.1 – champ magnétique d'un aimant coupe 2D

On suppose que l'aimant à une longueur suffisante selon  $\vec{z}$  pour être considéré comme infini selon  $\vec{z}$ . On en déduit donc par le principe de Curie que le champ magnétique est invariant par translation selon  $\vec{z}$ . Ainsi

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y)$$

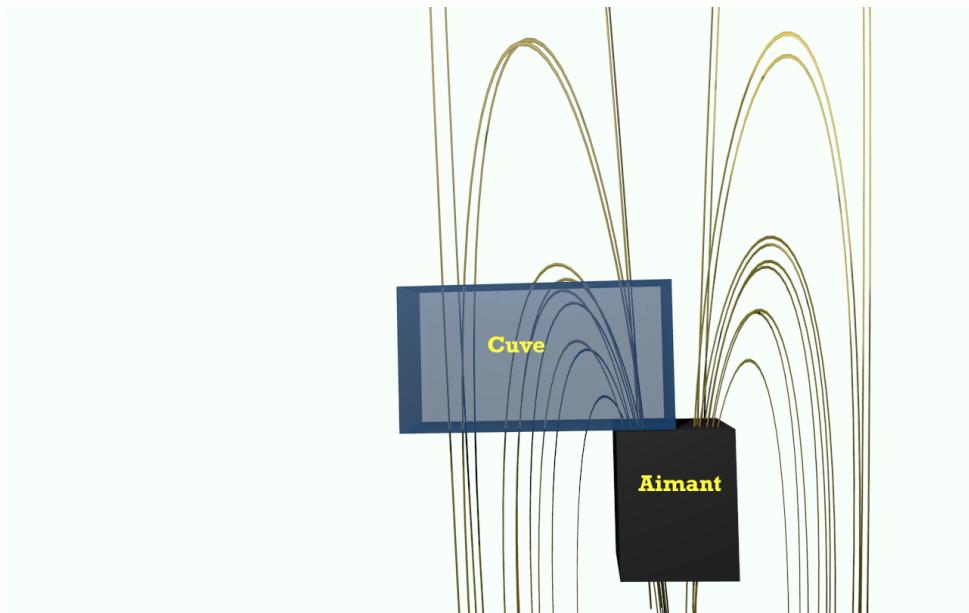


FIGURE 3.2 – advection chaotique avec trois tourbillons

### 3.1 Mise en forme du problème

Nous allons rechercher une solution du champ magnétique dans le domaine de résolution  $\Omega$  (figure 2),  $\Omega \subset R^2$ .

On définit  $\Omega_{int}$  le domaine de l'aimant, et  $\Omega_e$  le domaine extérieur à l'aimant.

$$\Omega_e = \Omega_{int} - \Omega$$

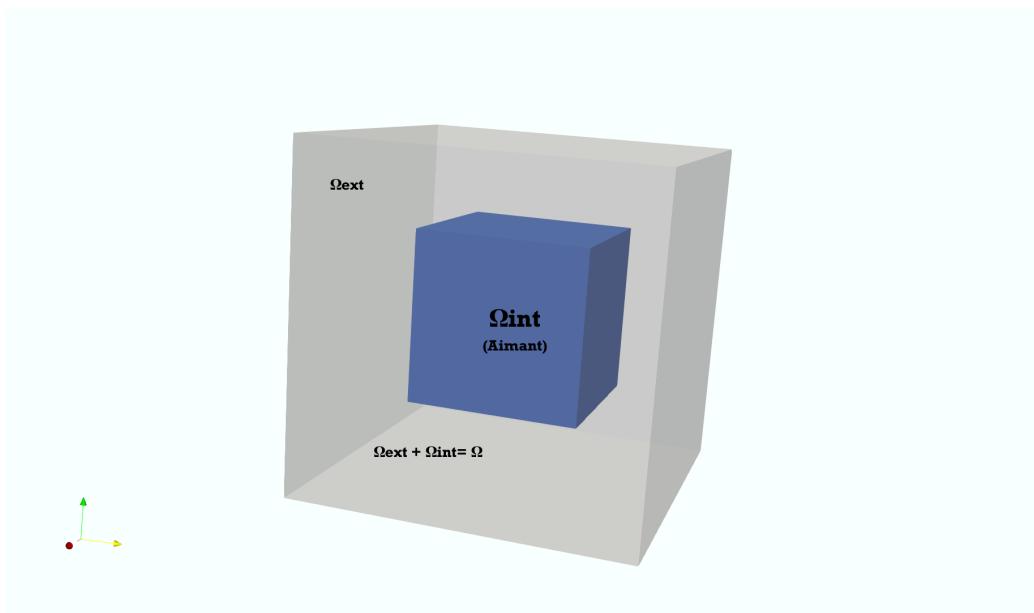


FIGURE 3.3 – domaines de résolution du problème

On se place dans le régime stationnaire comme il n'y a pas de mouvements de l'aimant.

Le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  est la somme du champs magnétique  $\vec{H}$ .

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide.

L'aimantation  $\vec{M}$  est nulle en dehors de l'aimant.

$$\begin{cases} \vec{M} = \vec{0} & \text{dans } \Omega_e \\ \vec{M} = \vec{M}_0 = \text{constante} & \text{dans } \Omega_{\text{int}} \end{cases}$$

Pour trouver le champ magnétique, on appliquer les équations fondamentales de la magnétostatique. L'équation de Maxwell nous donne

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{0} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Le domaine étant simplement connexe,  $\vec{H}$  dérive d'un potentiel  $u$ .

$$\begin{cases} \vec{H} = \text{grad } \vec{u} \\ \vec{B} = \mu_0 \times (\text{grad } u + \vec{M}) \end{cases}$$

Au sens des distributions pour toute fonction  $\varphi$  dans  $D(\Omega)$

$$\langle \text{div } \vec{B}, \varphi \rangle = \langle -\vec{B}, \text{grad } \varphi \rangle$$

On suppose  $\vec{B} \in L^3_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \text{div } \vec{B}, \varphi \rangle &= - \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \text{grad } \varphi \\ \langle \text{div } \vec{B}, \varphi \rangle &= - \int_{\Omega} \mu_0 (\text{grad } u + \vec{M}) \cdot \text{grad } \varphi = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} (\text{grad } u + \vec{M}) \cdot \text{grad } \varphi = 0$$

Et comme  $\vec{M}$  est nul en dehors du domaine  $\Omega_{\text{int}}$  de l'aimant, on obtient (1)

On reconnaît un problème de Dirichlet homogène qui admet une unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  d'après le théorème de Lax-Migram.

$$\forall \varphi \in \Omega, \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\vec{M}_0 \cdot \int_{\Omega_{\text{int}}} \nabla \varphi \quad (3.1)$$

Adimensionnons (1) :

$$\forall \varphi \in \Omega, \frac{1}{|\vec{M}_0|} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega_{\text{int}}} \nabla \varphi$$

On prend pour la suite

$$U = \frac{u}{|\vec{M}_0|}$$

ce qui nous donne

$$\vec{H}^* = \frac{\vec{H}}{M_0}$$

On établit ainsi

$$\boxed{\forall \varphi \in \Omega, \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla \varphi = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi} \quad (3.2)$$

## 3.2 Méthode des éléments finis

### 3.2.1 Le maillage

On recherche une solution approchée de l'équation numériquement en passant de l'espace continu à un espace discret.

On utilise la méthode des éléments finis en recherchant une solution dans l'espace  $V_h = \{u \mid u \in P^1(\Omega^2), u \in H_0^1(R^2)\}$ .

On introduit une triangulation  $T_h$  en subdivisant  $\bar{\Omega}$ ,  
de bord  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Cette triangulation vérifie les propriétés suivantes :

- l'intersection de deux triangles de  $T_h$  doit être réduite à un sommet commun, à une arête commune et entière ou à l'ensemble vide
  - l'aire des triangles ne doit pas être nulle
  - tous les coins du bord  $\Gamma$  sont des sommets de triangles de  $T_h$
- Le maillage ainsi construit est tel que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$$

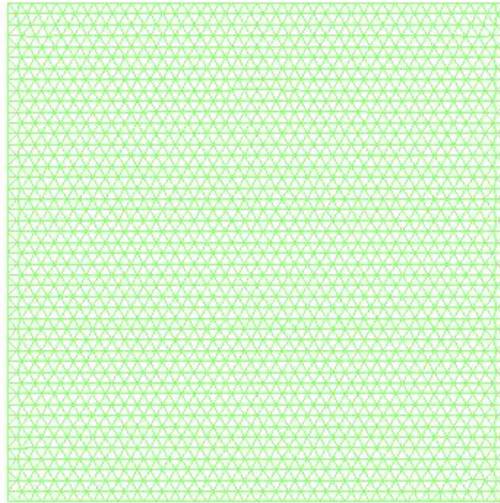


FIGURE 3.4 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D d'un carré  $1 \times 1.05$  avec un pas constant  $h = 0.1$

On note que le maillage est caractérisé par la longueur de la plus petite arrête  $h_{min}$  telle que

$$h_{min} = \min_{K \in T_h} h_K$$

$h_{min}$  va notamment déterminer l'erreur entre la solution continue et la solution discrète. §

On choisit une base de  $V_h$ , on prend la famille des fonctions de base  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}$  telles qu'elles valent 1 en un sommet d'un triangle, et 0 pour tous les autres sommets. On note  $P_1, P_2, \dots, P_{N_h}$  les sommets des triangles du maillage. Les fonctions de base sont donc définies ainsi :

$$\forall i, j \in [1, N_h]^2 \quad \varphi_i \in L^2(\Omega), \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad \varphi_i = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Le support de  $\varphi_i$  est la réunion de tous les triangles ayant pour sommet  $P_i$ . On vérifie que la famille  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$  est une base de  $V_h$ . Ainsi toute fonction  $g$  dans  $V_h$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des  $\varphi_i$

$$g = \sum_{i=1}^{N_h} g_i \varphi_i \quad \text{où } g_i = g(P_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_h$$

### 3.2.2 Mise en équation

Réécrivons (1.2) dans  $V_h$  :

$$\forall \varphi \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi = -\vec{M}_0 \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi$$

Nous pouvons écrire  $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \varphi_i$  où  $U_i = U(P_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_h$  et choisir  $\varphi = \varphi_i$  ainsi

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} u_i \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} A_{ij} u_i$$

avec  $A$  la matrice  $N_h \times N_h$  de coefficients

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$$

et si on introduit le vecteur  $\vec{f}$  de composantes  $f_1, f_2, \dots, f_{N_h}$  définies par

$$f_j = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega} \nabla \varphi_j$$

Alors l'équation (2) revient de manière équivalente à résoudre le système linéaire

$$A \times U = F$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_h} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N_h} \end{pmatrix} \quad A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$$

On appelle A la matrice de rigidité.

### 3.2.3 Passage à un élément de référence

Pour les calculs on utilise un maillage référence normalisé  $\hat{T}$ . On passe du triangle  $T$  à  $\hat{T}$  à l'aide de la transformation  $F$ . On a pour le calcul du gradient de

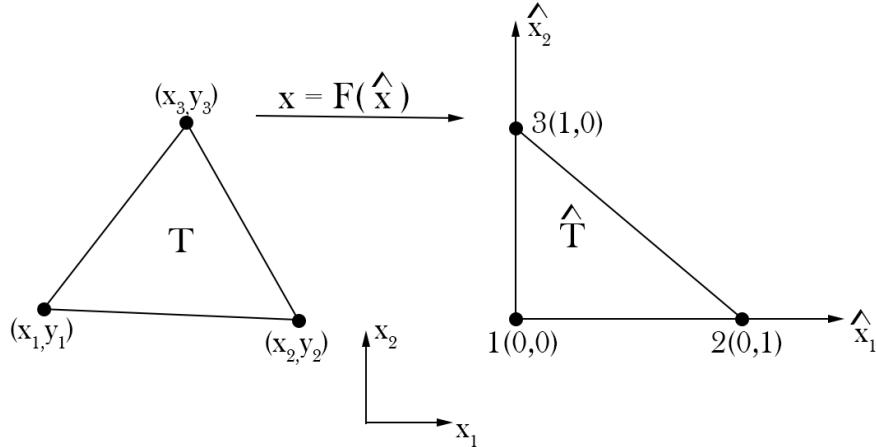


FIGURE 3.5 – passage à un maillage de référence

$$\varphi_i$$

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi} = (J)^T \nabla_x \varphi$$

où  $J$  est la matrice Jacobienne de la transformation. Calculons la matrice Jacobienne qui va dépendre des coordonnées  $(x_i, y_i)$  des sommets pour chaque triangle.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\hat{x}) \\ F_2(\hat{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = J \times \hat{x} + C$$

On obtient ainsi à l'aide d'un changement de variable le calcul de la matrice de rigidité (voir annexe A) :

$$A_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i \cdot \nabla_x \varphi_j = \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j$$

Calculons à présent le terme source  $f_j = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega} \nabla \varphi_j$ .

D'après Green-Ostrogradsky

$$\iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i = \int_{\partial\Omega_{\text{int}}} \varphi_i \cdot \vec{n} \, \partial s$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{\text{int}}} \varphi_i \cdot \vec{n} \, \partial s &= \sum_{e \in \partial\Omega_{\text{int}}} \int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s \\ &= \sum_{e \in \partial\text{supp}(\varphi_i)} \int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s \end{aligned}$$

où  $\vec{n}_e$  est le vecteur unitaire normal sortant à l'arête  $e$ .

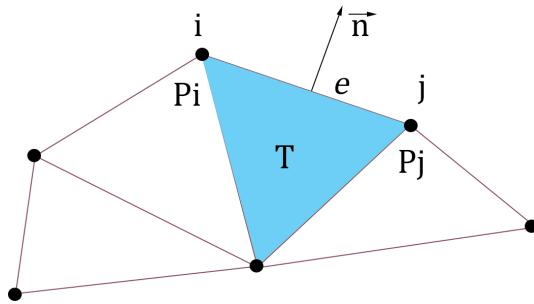


FIGURE 3.6 – arêtes

$$|e| \times \vec{n}_e = \begin{pmatrix} y_j - y_i \\ x_i - x_j \end{pmatrix}$$

avec le changement de variable  $x = s \times \mathbf{P}_i + (1 - s) \times \mathbf{P}_j$ ,  $s \in [0; 1]$

$$\int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s = |e| \left( \int_0^1 \varphi_i \, \partial x \right) \cdot \vec{n}_e$$

avec

$$\int_0^1 \varphi_i \, \partial s = \text{aire du triangle rectangle de coté } |e| \text{ et de hauteur } 1 = \frac{|e|}{2}$$

d'où

$$\int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s = |e| \left( \int_0^1 \varphi_i \, \partial x \right) \cdot \vec{n}_e = \frac{|e|}{2} \cdot \vec{n}_e = \frac{|e|^2}{2} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Au final

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i &= \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, ds = \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \\ \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i &= \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Au final

$$f_j = -\vec{e_y} \cdot \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

### 3.2.4 Calcul du Gradient

Ce que nous voulons obtenir à l'issue de notre étude du potentiel  $u$ , c'est le champ magnétique  $\vec{B}$ , que l'on peut calculer en tout point du maillage par la même méthode numérique, que l'on a utilisé pour calculer le potentiel  $u$ .

On pose donc  $\vec{B} = \nabla u$ .

On écrit la forme variationnelle dans  $V_h$  (ainsi  $B$  suit une décomposition dans  $V_h$ , tel que  $B = \sum_i B_{xi} \varphi_i$  :

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in V_h, \int_{\Omega} B \cdot \varphi &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi \\ \sum_{i,j} \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} B_i \int_T \varphi_i \varphi_j &= \sum_i \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} u_i \int_T \nabla \varphi_i \varphi_j\end{aligned}$$

On peut donc réécrire l'équation précédente comme un problème linéaire sous forme matricielle  $M \times B = C \times U$

Nous pouvons écrire l'équation ci dessus sous forme matricielle, en introduisant  $M$  et  $C$ , définis de la façon suivante :

$$M_{ij} = \int_T \varphi_i \cdot \varphi_j \text{ appellé la matrice de masse}$$

$$C_{ij} = \int_T \nabla \varphi_i \cdot \varphi_j$$

Soit

$$B = M^{-1} \times C \times U$$

On va donc comme la matrice de rigidité, remplir les matrices M et C à l'aide de matrices élémentaires.

Calculons ainsi les termes de la matrice C :

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \iint_{\Omega} \nabla \varphi_i \varphi_j dx = \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} \nabla_K \varphi_i \iint_K \varphi_j dx \\ &= \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} (J^{-1}_K)^T (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} |J_K| \hat{\varphi}_j d\hat{x} \\ &= \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} (J^{-1}_K)^T |J_K| (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_j d\hat{x} \end{aligned}$$

$$C_{ij} = \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} (J^{-1}_K)^T |J_K| (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_j d\hat{x}$$

Calculons une matrice élémentaire de C sur un triangle K du maillage qui aura donc pour composantes (si on se place selon la composante x du gradient )

$$|J_K| \times \begin{pmatrix} \nabla_{\hat{K}} \varphi_{1|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_{\hat{K}} \varphi_{1|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_{\hat{K}} \varphi_{1|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \\ \nabla_{\hat{K}} \varphi_{2|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_{\hat{K}} \varphi_{2|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_{\hat{K}} \varphi_{2|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \\ \nabla_{\hat{K}} \varphi_{3|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_{\hat{K}} \varphi_{3|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_{\hat{K}} \varphi_{3|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

Calculons les intégrales :

$$\begin{cases} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 1/6 \\ \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 1/6 \\ \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 1/6 \end{cases}$$

On a ainsi la matrice élémentaire du terme C sur un triangle K :

$$\frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} \nabla_K \varphi_{1|x} & \nabla_K \varphi_{1|x} & \nabla_K \varphi_{1|x} \\ \nabla_K \varphi_{2|x} & \nabla_K \varphi_{2|x} & \nabla_K \varphi_{2|x} \\ \nabla_K \varphi_{3|x} & \nabla_K \varphi_{3|x} & \nabla_K \varphi_{3|x} \end{pmatrix}$$

Calcul de la matrice M

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \varphi_i \varphi_j$$

Sur un triangle K du maillage , on obtient de la même manière que précédemment

$$\begin{aligned} M_{ij}^k &= \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} |J_K| \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x} \\ &= 2 \times \text{aire}(K) \times \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x} \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer les intégrales

$$\int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x}$$

par symétrie

$$\forall i \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i^2 = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_2^2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{12}$$

$$\forall i \neq j \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i \times \hat{\varphi}_j = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 \hat{x}_2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{24}$$

On en déduit la matrice de masse élémentaire sur un triangle de maillage

$$M^k = \frac{\text{aire}(K)}{12} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 3.2.5 Implémentation algorithmique

Pour la résolution du problème nous utiliserons matlab avec la bibliothèque Mesh2D par Darren Engwirda pour la création du maillage 2D. La résolution est effectué sur un maillage  $5 \times 5$ cm avec en son centre un aimant de taille  $1 \times 1$ cm.

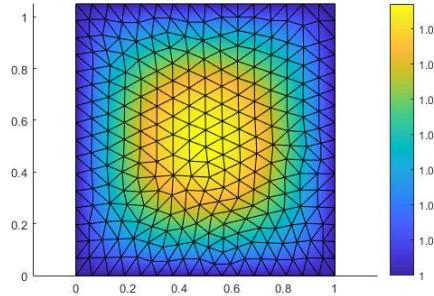


FIGURE 3.7 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D pour la résolution du problème

Pour le calcul nécessaire des différentes matrice afin de résoudre le problème linéaire  $A \times U = F$ , les algorithmes reposent sur la méthodologie suivante : Par exemple pour le calcul de la matrice A :

$$A_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i \cdot \nabla_x \varphi_j = \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \varphi_i \cdot \nabla_{\hat{x}} \varphi_j$$

Le principe consiste à ne pas recherche le support croisé des fonctions phi (ce qui donnerait une complexité trop importante) mais à boucler sur les triangles et placer dans la matrice les contributions correspondantes à chacun de leurs nœuds avec leur indices. Notamment avec l'outil matriciel *sparce* de matlab qui permet d'exploiter en temps de calcul et d'espace mémoire le fait que la matrice A est creuse, comme pour deux fonction  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  l'intersection de leurs support se réduit à deux triangles.

Ainsi pour le calcul de A chaque triangle engendre une matrice  $3 \times 3$  symétrique vu le calcul du terme  $A_{ij}$  dont on place les termes dans la matrice A.

Le principe est le même pour le terme source, pour chaque triangle appartenant au bord de l'aimant avec comme noeuds sur le bord les nœuds  $p_i$  et  $p_j$  on place deux fois le même terme  $\frac{|e|}{2} (0 \ 1)^T \cdot \vec{n}_e$  aux indices  $p_i$  et  $p_j$  dans la matrice du

terme source.

Et de même également pour le calcul des matrices M et C pour le gradient.

## Chapitre 4

# Application au problème de Navier-Stokes 3D

Après l'implantation d'une méthode pour calculer le champ magnétique en 2 dimensions , il nous est nécessaire de nous replacer dans le cas de Navier-Stokes en 3 dimensions.

En effet nous avons effectué l'étude précédente dans le cas d'un milieu neutre de longueur L , et de largeur H, avec les lignes de champ magnétique issue d'un aimant au milieu de l'espace. L'objectif est d'abord d'extraire de cet espace le champ magnétique qui se trouve dans la cuve apposée à l'aimant.

Avant toute chose, il est important de comprendre quelle configuration préalable de modélisation numérique , nous devons prendre pour notre cuve, car l'algorithme de calcul numérique de l'équation de Navier-Stokes 3D vers lequel nous allons devoir exporter les valeurs du champ magnétique prend les valeurs de forces magnétiques de Laplace uniquement sous un certain format. Nous devons donc préalablement présenter l'algorithme de calcul de l'équation de Navier-Stokes 3D sous lequel nous travaillons.

### 4.0.1 Méthode des différences finies

Sous Matlab, nous avons utilisé un algorithme de résolution d'équations dérivées partielles avec la méthode 3D de différences finies : elle consiste à discréteriser le domaine en grille et approcher les opérateurs par des différences, ce qui nous permet d'obtenir une approximation de la vitesse et la pression en chaque nœud de la grille.

Nous allons d'abord nous pencher sur le calcul de la vitesse en deux dimensions selon l'équation de Navier-Stokes, afin de comprendre la généralisation du calcul du champ de vitesse en 3 dimensions.

Le domaine  $\Omega = ]0; L_x[ \times ]0; L_y[ \times ]0; L_z[$  est discréteisé par un maillage uniforme défini par les points :

$$\begin{cases} x_{ij} = \left( \frac{i*L_x}{N+1}, \frac{j*L_x}{N+1} \right), i, j = 0, 1, \dots, N + 1 \\ y_{ij} = \left( \frac{i*L_y}{N+1}, \frac{j*L_y}{N+1} \right), i, j = 0, 1, \dots, N + 1 \\ z_{ij} = \left( \frac{i*L_z}{N+1}, \frac{j*L_z}{N+1} \right), i, j = 0, 1, \dots, N + 1 \end{cases}$$

On cherche les approximations :

$$u_{ij}^{(1)} \approx u_1(x_{ij}) \text{ et } u_{ij}^{(2)} \approx u_2(x_{ij})$$

avec  $u^{(1)}$  et  $u^{(2)}$  les deux composantes de la vitesse exacte  $V$  en 2D. Pour discréteriser le système d'équations 4.1, nous utilisons la méthode de différences finies

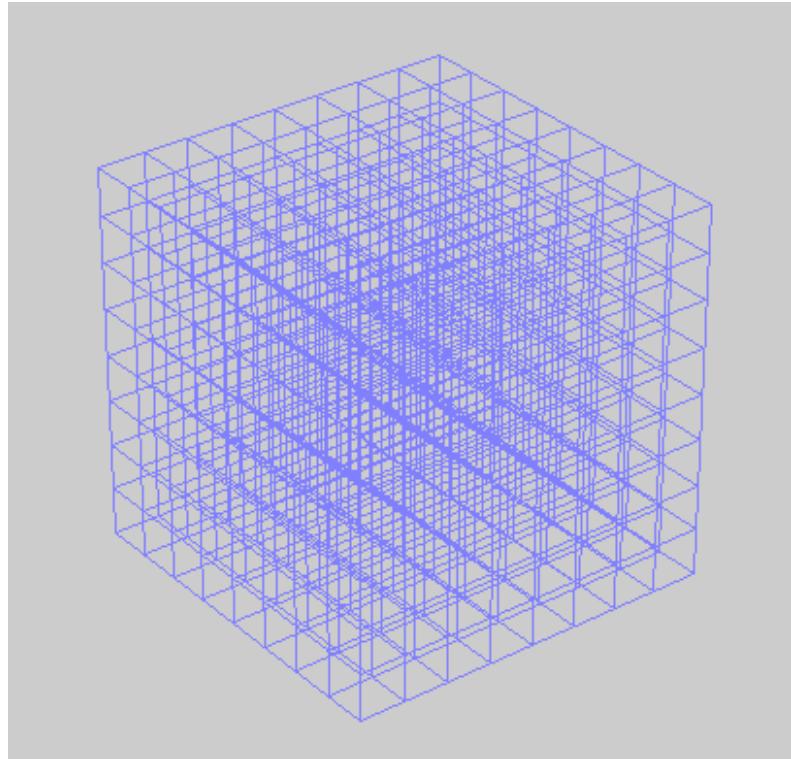


FIGURE 4.1 – domaines de résolution du problème

centrée. On pose  $h = \frac{1}{N+1}$  :

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{ij}^{(k)} + \frac{1}{2h}(p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) = f_{ij}^{(k)} \\ \frac{1}{2h}(u_{i+1,j}^{(1)} - u_{i-1,j}^{(1)}) + \frac{1}{2h}(u_{i+1,j}^{(2)} - u_{i-1,j}^{(2)}) = 0 \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \text{ pour } i,j = 0, \dots, N+1 \end{cases}$$

avec :

$$\Delta_h u_{ij} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})$$

Nous disposons de  $3N^2$  équations . Les maillages sur  $\vec{V}$  et  $P$  sont choisis de sorte que le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues. Le maillage 3D utilisé par l'algorithme est un maillage droit , ce qui implique que les données que l'on va exporter sont calculées et configurées sur la même base de maillage triangulaire en 2 dimensions de l'espace de calcul.

### 4.0.2 Calcul intrinsèque du champ de vitesse

Nous devons d'abord remarquer la similarité entre la résolution de l'équation de Navier-Stokes en 3 dimensions et notre étude précédente visant à déterminer le champ magnétique en deux dimensions via la méthode des éléments finis.

En effet, en posant la formulation mixte du système d'équations de Navier-Stokes, nous retombons sur un espace de distributions semblable à celui utilisé dans le cas  $P_1$  précédent :

Nous cherchons  $(\vec{V}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^3 \cdot L^2(\Omega)$ .

Afin d'obtenir la formulation mixte, nous allons multiplier les deux premières équations de notre système par une fonction test  $\vec{v} \in [H_0^1(\Omega)]^3$  puis intégrer  $\Omega$ , il vient :

si l'on reprend les notations précédentes des éléments finis pour le champ magnétique 2D, avec  $(\vec{\phi}_i)_i$  une base de  $X_h \in [H_0^1(\Omega)]^3$  (l'espace des distributions P1 qui va définir notre espace des vecteurs tridimensionnels pour les éléments finis) et  $M_h \subset L^2(\omega)$  (l'espace des distributions P1 qui va définir notre espace des scalaires pour les éléments finis).

Posons  $\vec{V}_h = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i$  et  $p_h = \sum_{i=1}^n p_i * q_i$ .

On obtient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n u_i \iint_{\Omega} \vec{\nabla}_x \phi_i \vec{\nabla}_x \phi_j + \sum_{i=1}^n p_i \int_{\Omega} q_i \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}_i = (\vec{f}_n, \vec{\phi}_j) \forall j = 1 \dots n \\ \sum_{i=1}^n u_i \int_{\Omega} q_i \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}_i = 0 \forall j = 1 \dots n \end{cases}$$

On traduit ce système en écriture matricielle où on fait apparaître la matrice de Stokes :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec } U = (u_1, \dots, u_n)^T \text{ et } P = (p_1, \dots, p_m)^T$$

L'objectif va être de garnir les matrices de rigidité et de masse selon la même méthode algorithmique que la méthode des éléments finis précédentes : nous bouclons sur la liste des cubes, qui est de format  $[(Nx-1)*Lx;27]$  (le 27 correspond

#### 4.0.3 Implémentation algorithmique

Nous devons adapter notre maillage précédent du calcul de la force de Laplace à l'aide des éléments finis aux besoins de l'algorithme précédent :

tout d'abord nous devons travailler sur un maillage triangulaire droit dont les dimensions coïncident avec le maillage de la base de l'espace de travail précédent. Nous prenons une largeur L , un profondeur P, et une hauteur H pour la cuve avec un nombre de points Nx\*Ny pour le maillage. Afin d'avoir un maillage qui colle à ces contraintes, nous allons utiliser la fonction delaunay de Matlab, qui prend en argument les coordonnées x et y des points de l'espace que nous allons mailler. ci dessous le maillage de l'espace de travail initial sur laquelle nous allons calculer notre fonction champ magnétique :

Néanmoins nous devons auparavant nous replacer dans le contexte initial : le maillage précédent ne servirait qu'à calculer le champ magnétique sur tout l'espace avec l'aimant au milieu de l'espace et avec approximation de quasi nullité de la fonction aux bords de l'espace de travail.

Or ce qui nous intéresse est le calcul du champ magnétique uniquement dans la cuve, qui est accolée à l'aimant. Il y a donc un travail préalable de redécoupage de l'espace après calcul du champ magnétique en dimensionnant l'aimant selon des coordonnées particulières.

L'objectif est d'extraire les noeuds, triangles et valeurs de champ magnétique associés à cette espace. Il faut donc dans les programmes précédents inclure des commandes supplémentaires afin d'assigner à chaque objet précédent un nouvel attribut entre {0, 1, 2} qui détermine si l'on est soit dans l'aimant , soit dans la cuve, soit dans l'espace environnant (notamment avec l'attribut fnum, utilisé dans

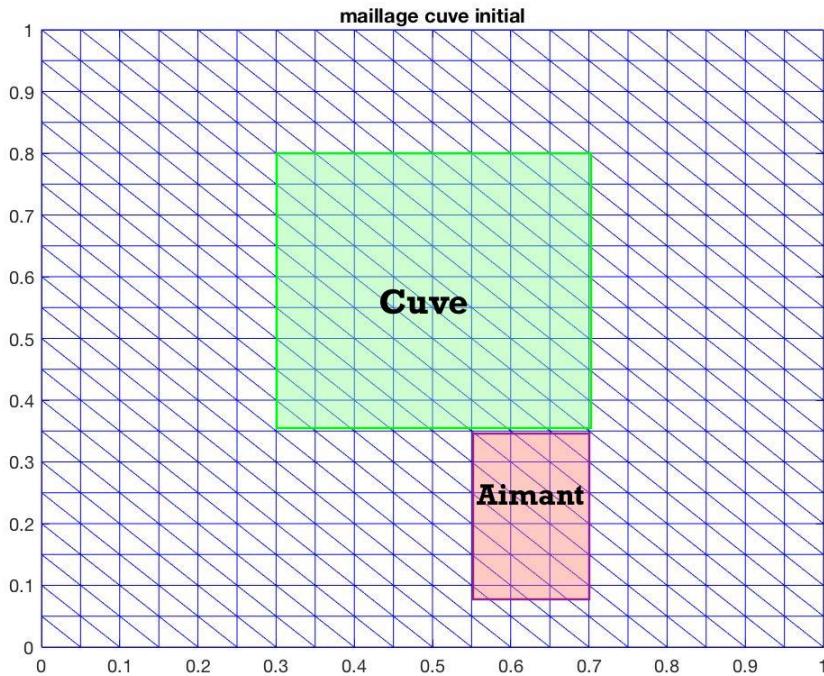


FIGURE 4.2 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D pour la résolution du problème

le calcul du second membre des éléments finis).

Maintenant notre objectif est de pouvoir adapter les données extraites à l'algorithme de Stokes 3D. Le premier obstacle est de réindexer le numéro des triangles pour qu'il y ait une bonne consistance des données lorsque l'algorithme va les utiliser : il faut renommer les triangles dans l'ordre.

Un autre obstacle est la structure de calcul sur les cubes du champ de vitesse par l'algorithme qui se base sur l'équation de Navier Stokes :

l'algorithme de Navier Stokes calcule le champ de vitesse dans le maillage cubique de l'espace, avec par cellule de calcul de 8 cubes , une connectivité de 27 points répartis avec une indexation particulière qu'il faudra prendre en compte lors du transfert des résultats du champ magnétique vers cette algo. On notera la présence par arête de 3 points , et non pas 2 (un de plus au milieu) : en effet l'algorithme utilisé pour résoudre numérique de Navier Stokes est la méthode de différences

finies centrée.

Cette algorithme prend en argument comme vu précédemment la matrice de rigidité  $A$ , et le second membre se rapportant à la force électromagnétique de Laplace. Lorsque l'on veut programmer le second membre dans l'algorithme à partir des coordonnées  $f(x,y)$  dans l'espace 3D pour le mettre au format vectoriel demander par l'algorithme, on remplit le second membre selon la table de connectivité ci dessous.

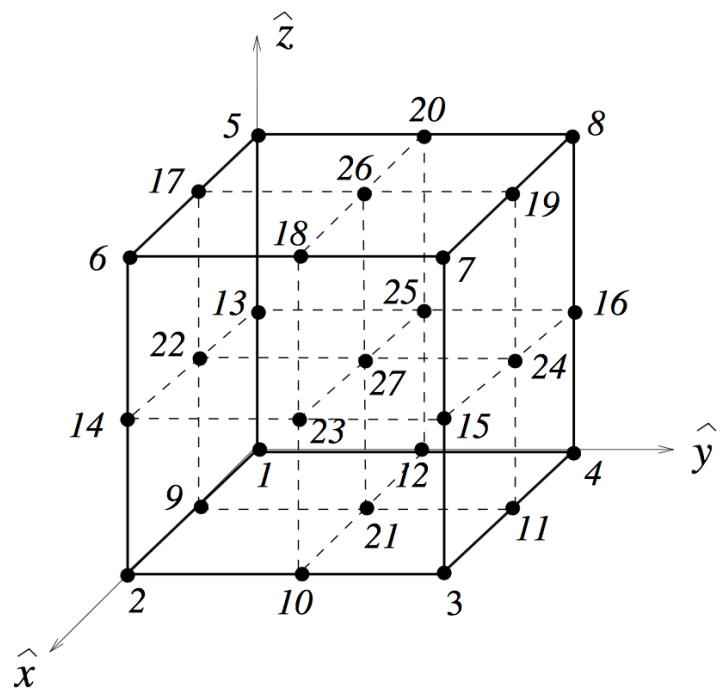


FIGURE 4.3 – table de connectivité pour le remplissage du second membre dans l'algorithme de résolution de l'équation de Navier Stokes

Prenons par exemple les 9 premiers termes de la fonction force de Laplace au niveau  $z = 0$  à partir de l'origine de ce plan dans le maillage de la cuve. Schématiquement si l'on se limite à la portion  $[0; 2/N_x] \cdot [0; 2/N_y]$ , on remplit le vecteur  $\vec{f}_z$

$$\vec{f}_z = \begin{pmatrix} f_z(0, 0) & f_z(1/N_x, 0) & f_z(2/N_x, 0) \\ f_z(0, 1/N_y) & f_z(1/N_x, 1/N_y) & f_z(2/N_x, 1/N_y) \\ f_z(0, 2/N_y) & f_z(1/N_x, 2/N_y) & f_z(2/N_x, 2/N_y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{selon table de connectivité}} \begin{pmatrix} f_z(0, 0) \\ f_z(2/N_x, 0) \\ f_z(2/N_x, 2/N_y) \\ f_z(0, 2/N_y) \\ \dots \\ f_z(1/N_x, 0) \\ f_z(2/N_x, 1/N_y) \\ f_z(1/N_x, 2/N_y) \\ f_z(0, 1/N_y) \\ \dots \\ f_z(1/N_x, 1/N_y) \end{pmatrix}$$

Après formatage du second membre de l'équation à l'algorithme de résolution de Navier Stokes, nous pouvons lancer l'algorithme pour un aimant décentré afin de générer le champ de vitesse dans la cuve. Nous pouvons visualiser facilement le champ de vitesse produit par l'algorithme grâce au programme de visualisation physique Paraview : voici d'abord le champ de vitesse selon l'axe Y, avec l'aimant centré par rapport à la cuve : nous discernons bien deux lignes de courant pour l'aimant centré, et une ligne de courant pour l'aimant excentré sur le côté selon  $\vec{o_x}$ .

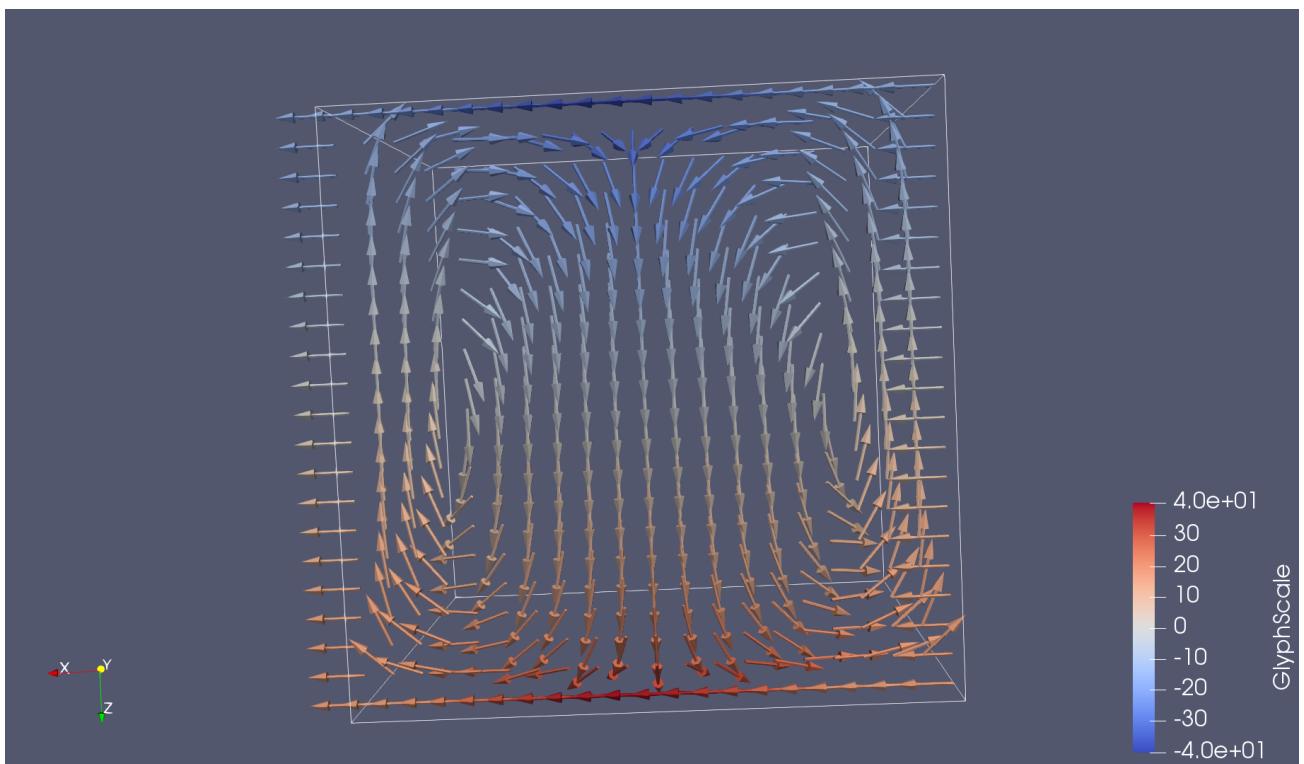


FIGURE 4.4 – champ de vitesse obtenue par l'algorithme Stokes3D selon Paraview pour un aimant centré au niveau  $Y=0$

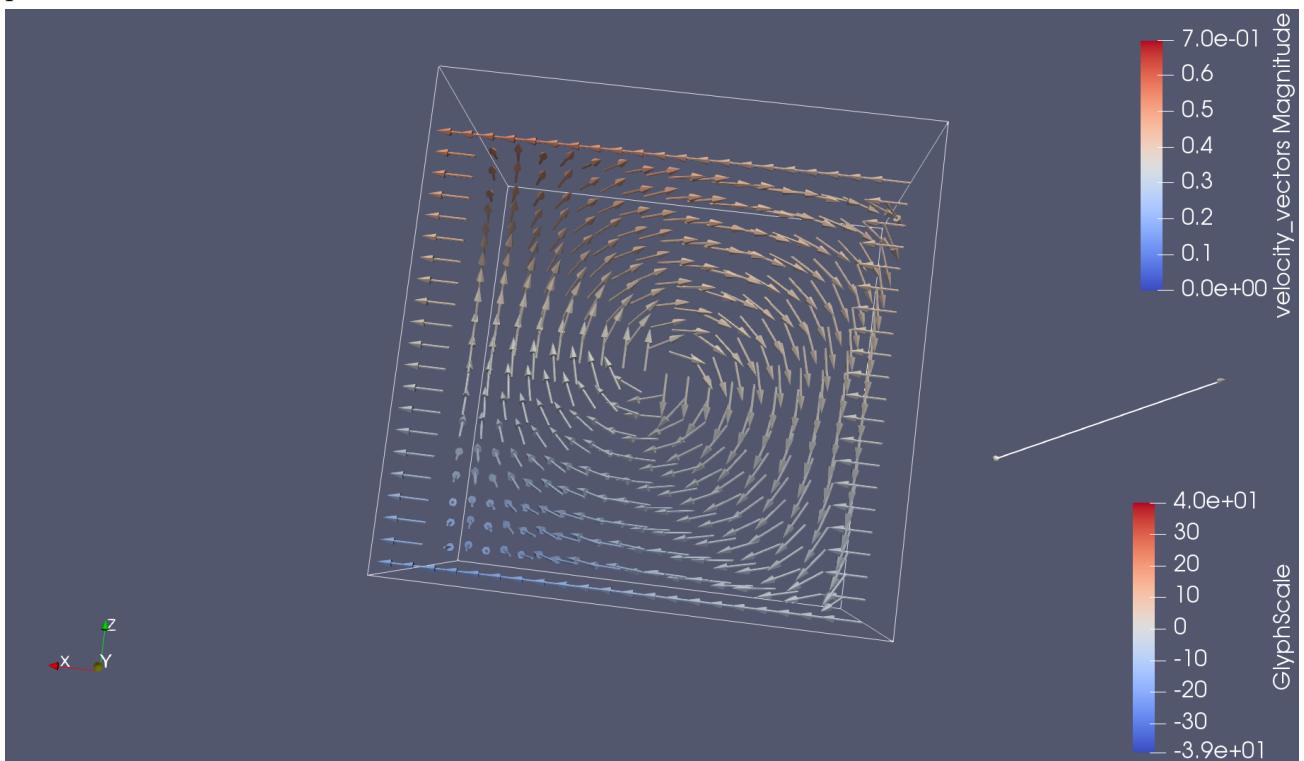


FIGURE 4.5 – champ de vitesse obtenue par l'algorithme Stokes3D selon Paraview pour un aimant décentré au niveau  $Y=0$

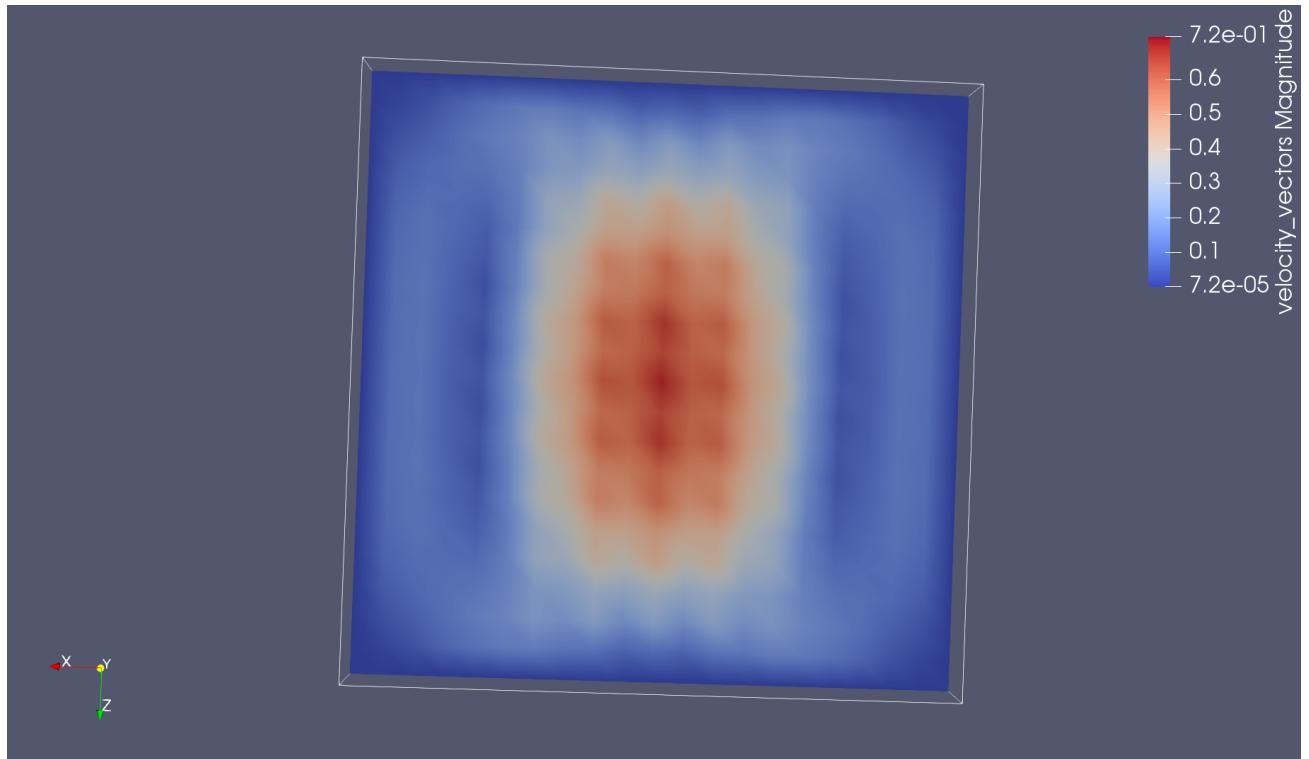


FIGURE 4.6 – champ de vitesse obtenue par l'algorithme Stokes3D selon Paraview pour un aimant centré au niveau Y=0

FIGURE 4.7 – champ de vitesse obtenue par l'algorithme Stokes3D selon Paraview pour un aimant décentré au niveau Y=0

## Annexe A

### Calcul de la matrice de rigidité

La matrice Jacobienne de la transformation est définie par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(\varphi(F(\hat{x}))) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x})$$

Donc

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = J^T \times \nabla_x \varphi$$

Calculons  $\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}$  sur le triangle de référence  $\hat{T}$  :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1 = -\hat{x}_1 + 1 - \hat{x}_2 \\ \hat{\varphi}_2 = \hat{x}_1 \\ \hat{\varphi}_3 = \hat{x}_2 \end{cases}$$

En effet  $\hat{\varphi}_1$  vaut 1 sur le sommet 1 et 0 sur les autres sommets (Figure 3). Ainsi

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$|J| = (x_2 - x_1) \times (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \times (y_2 - y_1) = 2 \times \text{Aire}(T)$$

où  $|J|$  est le déterminant de la matrice  $J$  et ainsi

$$\nabla_x \varphi = (J^{-1})^T \times \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}$$

avec

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix}$$

d'où

$$(J^{-1})^T = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix}$$

$$* = \frac{1}{2 \times \text{aire}(T)} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix}$$

Et le calcul du terme  $A_{ij}$  de la matrice de rigidité, on obtient ainsi avec le changement de variable vers le triangle de référence.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \iint_{(i,j) \in T} \nabla_x \varphi_i \cdot \nabla_x \varphi_j \\ &= \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \iint_{(i,j) \in T} (J^{-1})^T |J| (J^{-1})^T |J| \times \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \times \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j \\ &= \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j \end{aligned}$$

## Bibliographie

"Introduction à l'analyse numérique"(1998), de Jacque Rappaz et Marco Picasso, publié par les Presses polytechniques et universitaires romandes.

"Méthode des éléments finis : élasticité plane" par Yves Daubard, Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique , <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>, 24 mars 2006 – 29 mars 2011

"Analyse numérique des équations de Navier-Stokes",de Jean-François Scheid, Cours de Master 2 Mathématiques (Recherche) - Université de Lorraine, Nancy.

"Projet de deuxième Année : Génération de maillages 2D avec Matlab" de Jean-Philippe LEBOUCHER Benjamin PACCOU avec comme chef de Projet Jonas KOKO, Institut Supérieur d' Informatique, de Modélisation et de leurs Applications