



UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE NANCY

RAPPORT DE PROJET 2A

TANCRÈDE COHET ET PIERRE GAUTHIER

# Mélange par un écoulement stationnaire de fluide à faible Reynolds

Laboratoire : Institut Élie Cartan

Tuteurs : Pierre Brancher et Jean-François Scheid

*21 Mars 2018*

# Table des matières

<b>1 Position du problème</b>	<b>3</b>
1.0.1 dispositif expérimental . . . . .	3
1.0.2 hypothèses de modélisation . . . . .	6
<b>2 Modélisation du champ Magnétique de l'aimant</b>	<b>7</b>
2.1 Mise en forme du problème . . . . .	8
2.2 Méthode des éléments finis . . . . .	10
2.2.1 Le maillage . . . . .	10
2.2.2 Mise en équation . . . . .	12
2.2.3 Passage à un élément de référence . . . . .	14
2.2.4 Calcul du Gradient . . . . .	16
2.2.5 Implémentation algorithmique . . . . .	19
2.2.6 Résultats de la simulation . . . . .	21
<b>3 Équations de Navier Stokes</b>	<b>23</b>
3.0.1 Équations de Stokes . . . . .	24
3.0.2 Adimensionnement de l'équation de Stokes . . . . .	25
3.0.3 Formulation variationnelle . . . . .	26
3.0.4 Implémentation algorithmique . . . . .	27
3.0.5 Calcul des matrices du système linéaire . . . . .	29
3.0.6 Raccordement à la modélisation du champ magnétique . . . . .	29
<b>A Calcul de la matrice de rigidité</b>	<b>38</b>
<b>B Codes Matlab</b>	<b>40</b>
B.0.1 Modélisation du champ magnétique . . . . .	40

# Introduction :

La résolution d'équations à dérivées partielles sont la clé de voute de la modélisation de systèmes physiques et financiers avec des conditions aux limites des systèmes. Cette problématique est particulièrement vraie en mécanique des fluides avec l'utilisation prépondérante de l'équation de Navier Stokes. Il est donc primordial d'avoir des moyens de résolution/simulation numérique de ce genre d'équation, qui respecte les différentes contraintes que posent la théorie des équations à dérivées partielles ( fonctions modélisées respectant les espaces de Sobolev). Une des méthodes numériques de résolution de Navier-Stokes est par exemple la méthode des éléments finis, sur maillage triangulaire.

Le but de ce projet est d'étudier des écoulement chaotiques à faible nombre de Reynolds, c'est à dire des écoulements dont les forces visqueuses sont prépondérantes, qui sont présents typiquement dans l'industrie métallurgique ou dans l'industrie hydro-électrique. Cette problématique de résolution d'équations numériques à dérivées partielles est au cœur des enjeux du projet.

L'approche numérique eulérienne d'un mélange par advection chaotique traite du problème stationnaire avec champ de vitesse sinusoïdale qui correspond à un système de tourbillons orthogonaux, dont le modèle académique analytique a été étudié dans le cadre de la thèse de Valérie Toussaint, que nous allons reprendre avec deux tourbillons d'axes parallèles et un tourbillon qui leur est perpendiculaire.

Cette étude se fait dans la continuité d'un travail effectué par Ismail Mebsout et Oumaima Hammami durant l'année scolaire 2016-2017 où le but sera d'étudier les écoulement en s'affranchissant de certaines simplifications. Dans la première partie de notre étude, nous allons présenter le problème, puis le mettre en équation et calculer la force magnétique composant le terme source de l'équation de Navier-Stokes, pour résoudre numériquement le problème et étudier les résultats.

# Chapitre 1

## Position du problème

Pour générer l'écoulement que nous souhaitons étudier nous allons utiliser les forces de Laplace. Le fluide (de l'eau) considéré non visqueux dans une cuve est ionisé et placé sous influence d'aimants ferromagnétiques. Chaque particule du fluide va se mouvoir sous l'influence du champ magnétique. Notre but est de configurer correctement les champs magnétiques pour obtenir un écoulement chaotique. On peut définir l'advection chaotique comme un écoulement dans un fluide dont la trajectoire des point passe par tous les point du domaine, ou de manière mathématique avec les écoulements de Liapounov. C'est à dire que théoriquement si on observe le passage d'une particule à travers une section du fluide au bout d'un temps infinis, les points d'impact de la particule recouvriront de manière continue toute la section.

### 1.0.1 dispositif expérimental

Expérimentalement, il est possible de réaliser cet écoulement à l'aide d'une distribution adéquate des forces. Pour cela, on utilise un système composé d'un parallélépipède, d'aimants permanents et d'électrodes pour générer un vecteur densité de courant. Le parallélépipède est un mélangeur dans lequel se trouve un liquide faiblement conducteur. Afin de générer un tourbillon, on place deux aimants l'un en face de l'autre sur une moitié du parallélépipède pour créer un champ  $\vec{B}$  vertical sur cette moitié. On place deux électrodes sur les deux autres faces opposées du parallélépipède pour créer un courant uniforme de densité  $\vec{j}$ .

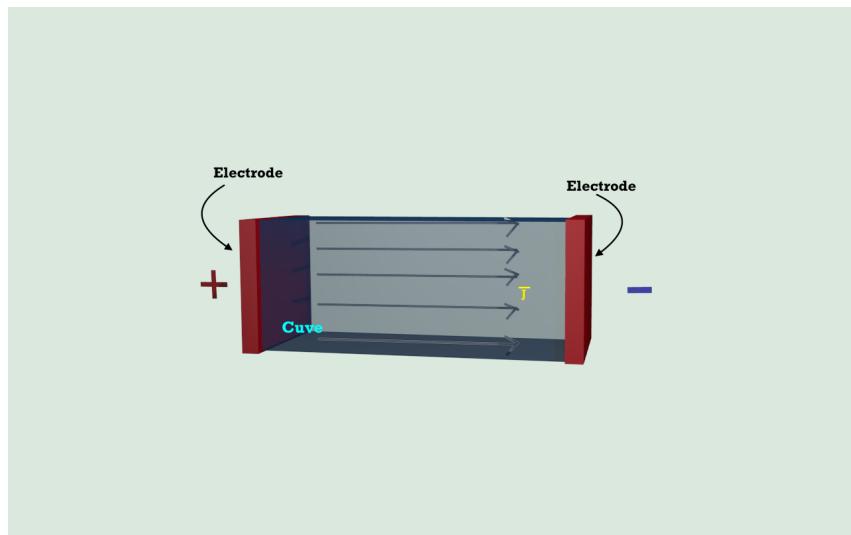


FIGURE 1.1 – liquide faiblement ionisé soumis à un champ électrique  $\vec{E}$ , Blender

On place un aimant de telle manière à générer un champ magnétique plus important sur une moitié du cube que l'autre.

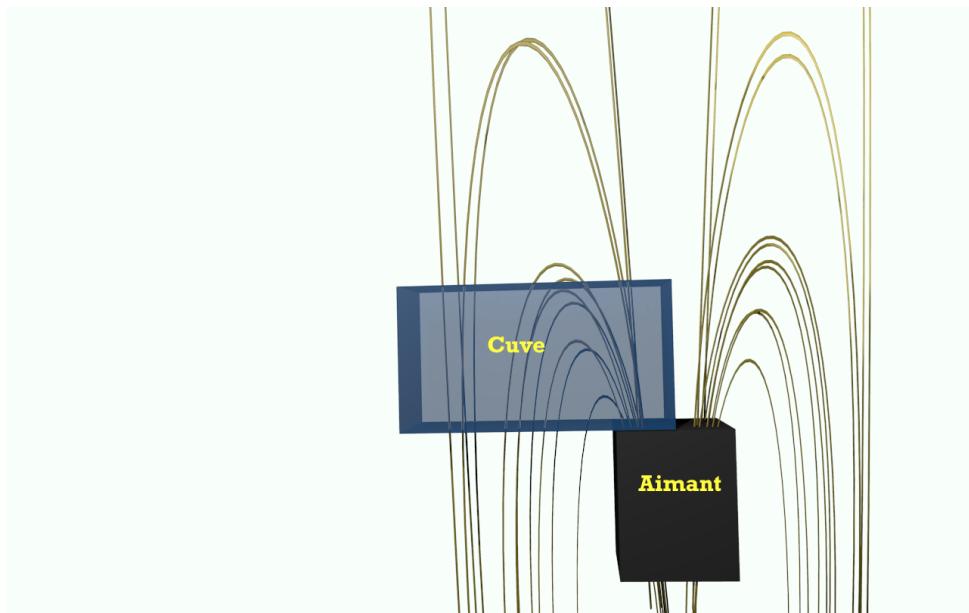


FIGURE 1.2 – lignes de champ magnétique, Blender

La force magnétique  $\vec{f}_l = \vec{j}_0 \wedge \vec{B}$  permet ainsi de générer un tourbillon.

Afin de générer deux tourbillons, on place deux aimants l'un en face de l'autre sur

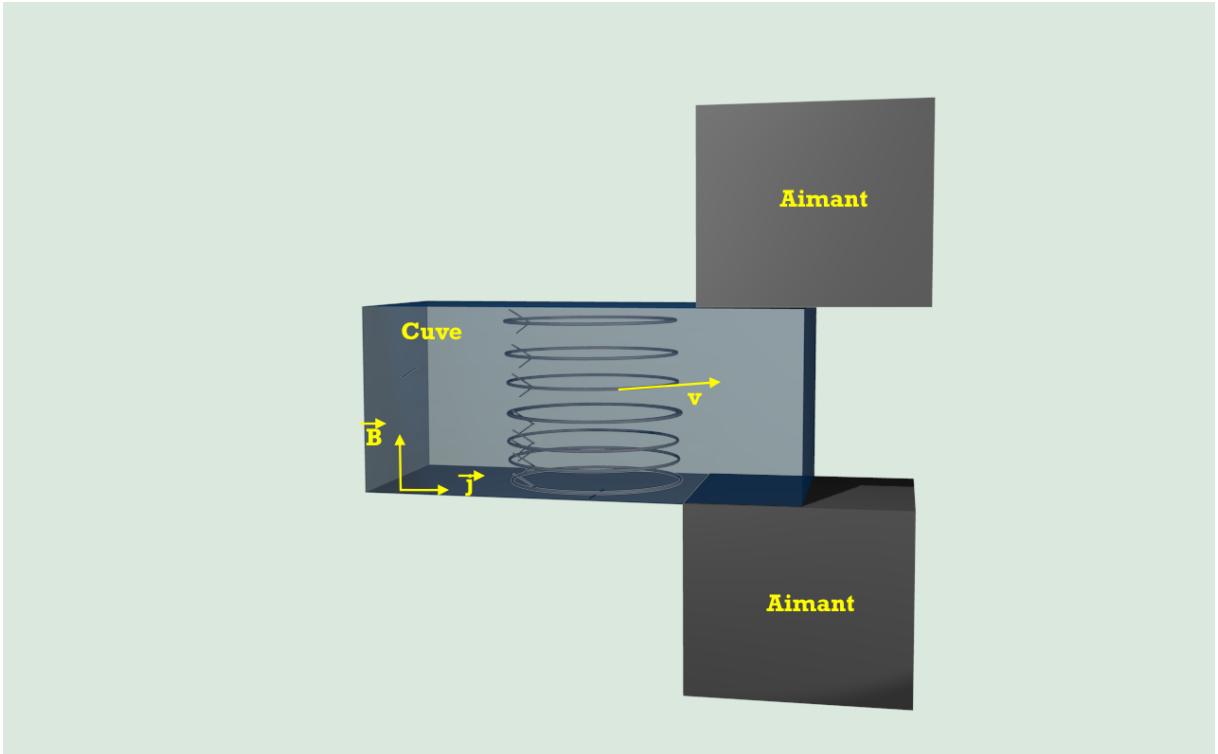


FIGURE 1.3 – liquide faiblement ionisé soumis à un champ électrique et un champ magnétique  $\vec{B}$ , Blender

le deuxième tiers du parallélépipède pour créer un champ  $B$  vertical sur le tiers au milieu. On place aussi deux électrodes sur les faces opposées du parallélépipède pour créer un courant uniforme de densité  $\vec{j}$ . Une force de Laplace est générée, due à la différence de potentiel ( $P_1 - P_0$ ) en présence d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , deux tourbillons sont alors générés dans le parallélépipède

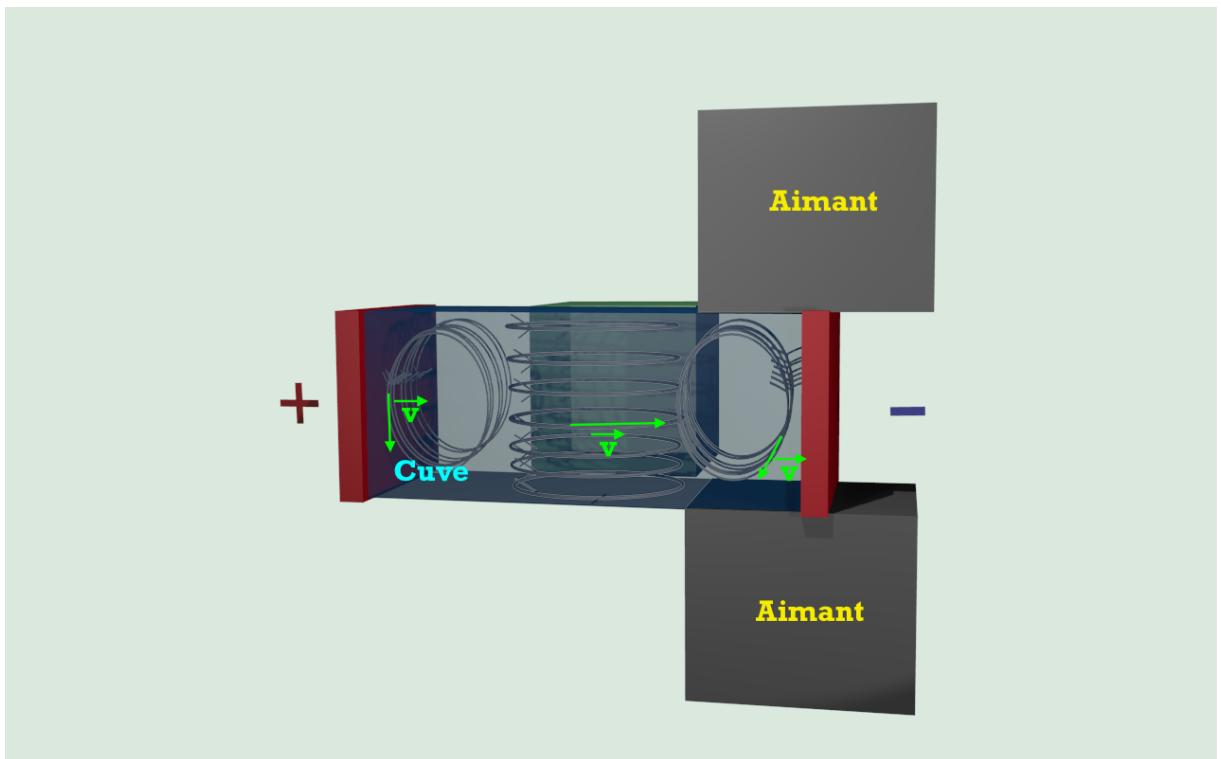


FIGURE 1.4 – configuration avec 2 tourbillons, Blender

### 1.0.2 hypothèses de modélisation

Nous devons d'abord modéliser notre système , car dans les cas de système faisant intervenir des équations à dérivées partielles , la bonne définition du système est primordiale, avec notamment les conditions aux limites.

Notre système {fluide} sera modélisé par un fluide à faible nombre de Reynolds (visqueux) incompressible régi par les équations de Stokes que nous poserons dans le chapitre suivant. La densité de courant  $\vec{j}_0$  est supposé uniforme sur le fluide.

## Chapitre 2

# Modélisation du champ magnétique de l'aimant

Nous allons nous intéresser en premier lieu à modéliser le champ magnétique d'un aimant pour pouvoir obtenir à terme les forces de Laplace s'exerçant sur le fluide pour caractériser l'écoulement.

Nous cherchons ainsi à modéliser le champ d'induction magnétique  $\vec{B}(x, y, z)$  induit par un aimant (Figure 1). L'objectif sera d'abord de déterminer le champ magnétique dans une configuration quelconque, pour ensuite exploiter ces résultats et les employer dans la résolution numérique de Navier Stokes.

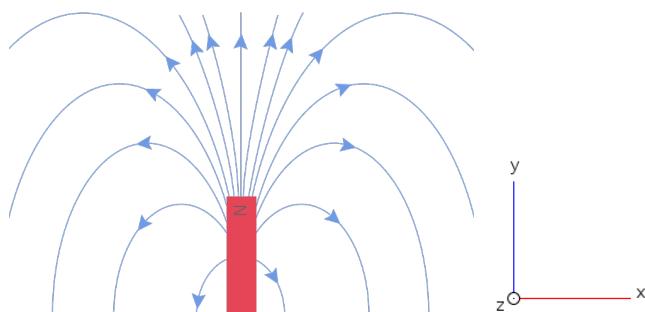


FIGURE 2.1 – champ magnétique d'un aimant coupe 2D

On suppose que l'aimant a une longueur suffisante selon  $\vec{z}$  pour être considéré comme infini selon l'axe  $\vec{z}$ . On en déduit donc par le principe de Curie que le

champ magnétique est invariant par translation selon  $\vec{z}$ . Ainsi

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y)$$

On modélise donc le champ magnétique en deux-dimensions dans cette partie, dans la suite nous considérerons que le champ d'induction aura la même valeur selon la troisième dimension.

## 2.1 Mise en forme du problème

Nous allons rechercher une solution du champ magnétique dans le domaine de résolution  $\Omega$  (figure 2),  $\Omega \subset R^2$ .

On définit  $\Omega_{int}$  le domaine de l'aimant, et  $\Omega_e$  le domaine extérieur à l'aimant.

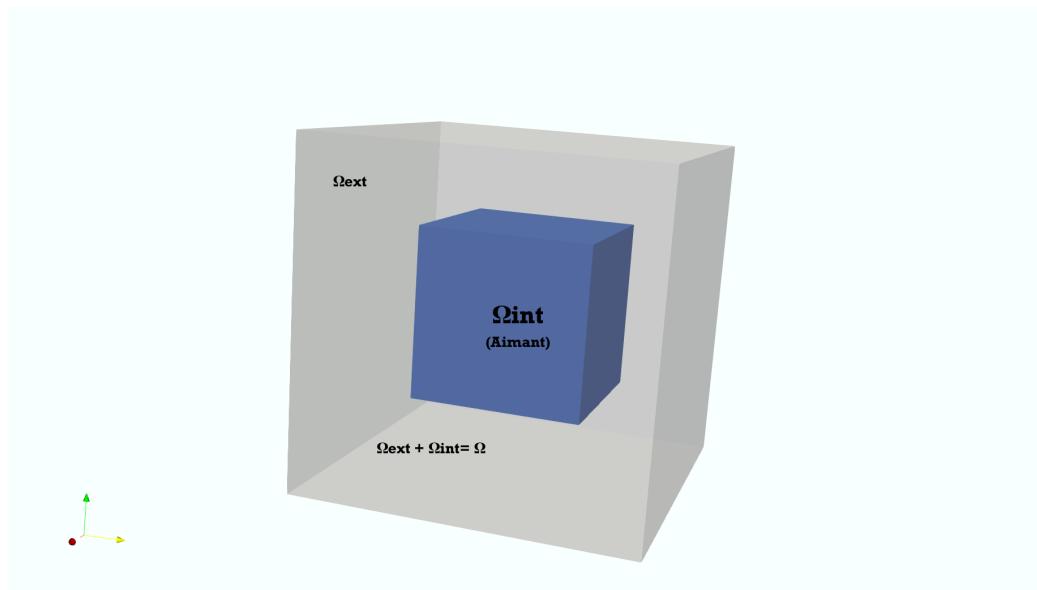


FIGURE 2.2 – domaines de résolution du problème, Blender

$$\Omega_e = \Omega_{int} - \Omega$$

On se place dans le régime stationnaire comme il n'y a pas de mouvements de l'aimant.

Le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  est la somme du champs magnétique  $\vec{H}$ .

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide.

L'aimantation  $\vec{M}$  est nulle en dehors de l'aimant.

$$\begin{cases} \vec{M} = \vec{0} \text{ dans } \Omega_e \\ \vec{M} = \vec{M}_0 = \text{constante dans } \Omega_{\text{int}} \end{cases}$$

Pour trouver le champ magnétique, on appliquer les équations fondamentales de la magnétostatique. L'équation de Maxwell nous donne

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{0} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Le domaine étant simplement connexe,  $\vec{H}$  dérive d'un potentiel  $u$ .

$$\begin{cases} \vec{H} = \vec{\text{grad}} u \\ \vec{B} = \mu_0 \times (\vec{\text{grad}} u + \vec{M}) \end{cases}$$

Au sens des distributions pour toute fonction  $\varphi$  dans  $D(\Omega)$

$$\langle \text{div } \vec{B}, \varphi \rangle = \langle -\vec{B}, \vec{\text{grad}} \varphi \rangle$$

On suppose  $\vec{B} \in L^3(\Omega)$

$$\langle \text{div } \vec{B}, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{\text{grad}} \varphi$$

$$\langle \text{div } \vec{B}, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \mu_0(\vec{\text{grad}} u + \vec{M}) \cdot \vec{\text{grad}} \varphi = 0$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} (\vec{\text{grad}} u + \vec{M}) \cdot \vec{\text{grad}} \varphi = 0$$

Et comme  $\vec{M}$  est nul en dehors du domaine  $\Omega_{int}$  de l'aimant, on obtient (1)

On reconnaît un problème de Dirichlet homogène qui admet une unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  d'après le théorème de Lax-Migram.

$$\forall \varphi \in \Omega, \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\vec{M}_0 \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi \quad (2.1)$$

Adimensionnons (1) :

$$\forall \varphi \in \Omega, \frac{1}{|\vec{M}_0|} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi$$

On prend pour la suite

$$U = \frac{u}{|\vec{M}_0|}$$

ce qui nous donne

$$\vec{H}^* = \frac{\vec{H}}{M_0}$$

On établit ainsi

$$\boxed{\forall \varphi \in \Omega, \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla \varphi = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi} \quad (2.2)$$

## 2.2 Méthode des éléments finis

### 2.2.1 Le maillage

On recherche une solution approchée de l'équation numériquement en passant de l'espace continu à un espace discret.

On utilise la méthode des éléments finis en recherchant une solution dans l'espace  $V_h = \{u \mid u \in P^1(\Omega^2), u \in H_0^1(R^2)\}$ .

On introduit une triangulation  $T_h$  en subdivisant  $\bar{\Omega}$ , de bord  $\Gamma = \partial\Omega$ . Cette

triangulation vérifie les propriétés suivantes :

- l'intersection de deux triangles  $K$  de  $T_h$  doit être réduite à un sommet commun,
  - à une arête commune et entière ou à l'ensemble vide
  - l'aire des triangles ne doit pas être nulle
  - tous les coins du bord  $\Gamma$  sont des sommets de triangles  $K$  de  $T_h$
- Le maillage ainsi construit est tel que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$$

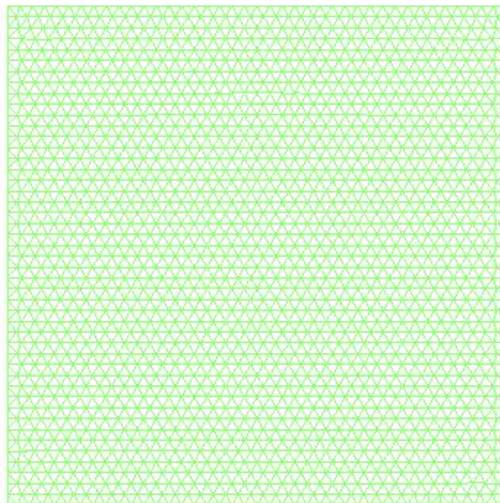


FIGURE 2.3 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D d'un carré  $1 \times 1.05$  avec un pas constant  $h = 0.1$

On note que le maillage est caractérisé par la longueur de la plus petite arrête  $h_{min}$  telle que

$$h_{min} = \min_{K \in T_h} h_K$$

$h_{min}$  va notamment déterminer l'erreur entre la solution continue et la solution

discrète. On choisit une base de  $V_h$ , on prend la famille des fonctions de base  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}$  telles qu'elles valent 1 en un sommet d'un triangle, et 0 pour tous les autres sommets. On note  $P_1, P_2, \dots, P_{N_h}$  les sommets des triangles du maillage. Les fonctions de base sont donc définies ainsi :

$$\forall i, j \in [1, N_h]^2 \quad \varphi_i \in L^2(\Omega), \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad \varphi_i = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Le support de  $\varphi_i$  est la réunion de tous les triangles ayant pour sommet  $P_i$ . On vérifie que la famille  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$  est une base de  $V_h$ . Ainsi toute fonction  $g$  dans  $V_h$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des  $\varphi_i$

$$g = \sum_{i=1}^{N_h} g_i \varphi_i \quad \text{où } g_i = g(P_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_h$$

### 2.2.2 Mise en équation

Réécrivons (1.2) dans  $V_h$  :

$$\forall \varphi \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi = -\vec{M}_0 \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi$$

Nous pouvons écrire  $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \varphi_i$  où  $U_i = U(P_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_h$  et choisir  $\varphi = \varphi_i$  ainsi

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} u_i \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} A_{ij} u_i$$

avec  $A$  la matrice  $N_h \times N_h$  de coefficients

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$$

et si on introduit le vecteur  $\vec{f}$  de composantes  $f_1, f_2, \dots, f_{N_h}$  définies par

$$f_j = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega} \nabla \varphi_j$$

Alors l'équation (2) revient de manière équivalente à résoudre le système linéaire

$$A \times U = F$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_h} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N_h} \end{pmatrix} \quad A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$$

On appelle A la matrice de rigidité.

### 2.2.3 Passage à un élément de référence

Pour les calculer numériquement les matrices on utilise un triangle de référence normalisé  $\hat{T}$ . On passe du triangle  $T$  à  $\hat{T}$  à l'aide de la transformation  $F$ . On a

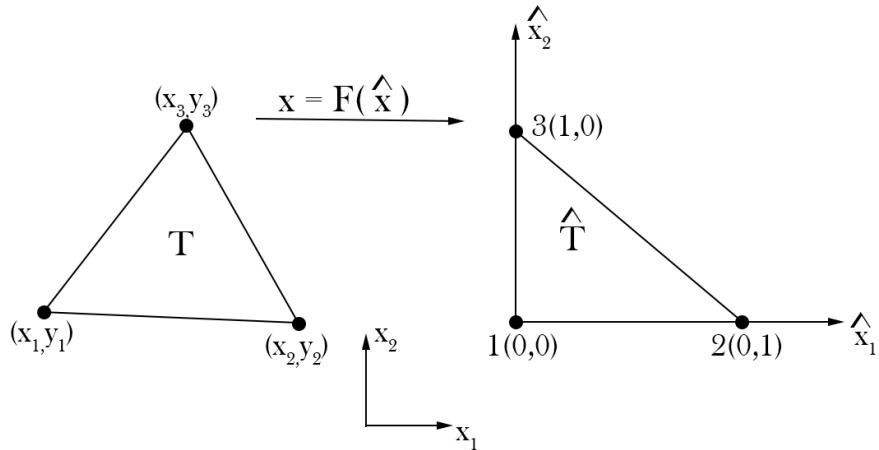


FIGURE 2.4 – passage à un maillage de référence

pour le calcul du gradient de  $\varphi_i$

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi} = (J)^T \nabla_x \varphi$$

où  $J$  est la matrice Jacobienne de la transformation. Calculons la matrice Jacobienne qui va dépendre des coordonnées  $(x_i, y_i)$  des sommets pour chaque triangle.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\hat{x}) \\ F_2(\hat{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = J \times \hat{x} + C$$

On obtient ainsi à l'aide d'un changement de variable le calcul de la matrice de rigidité (voir annexe A) :

$$A_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i \cdot \nabla_x \varphi_j = \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j$$

Calculons à présent le terme source  $f_j = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega} \nabla \varphi_j$ .

D'après Green-Ostrogradsky

$$\iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i = \int_{\partial\Omega_{\text{int}}} \varphi_i \cdot \vec{n} \, \partial s$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{\text{int}}} \varphi_i \cdot \vec{n} \, \partial s &= \sum_{e \in \partial\Omega_{\text{int}}} \int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s \\ &= \sum_{e \in \partial\text{supp}(\varphi_i)} \int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s \end{aligned}$$

où  $\vec{n}_e$  est le vecteur unitaire normal sortant à l'arête  $e$ .

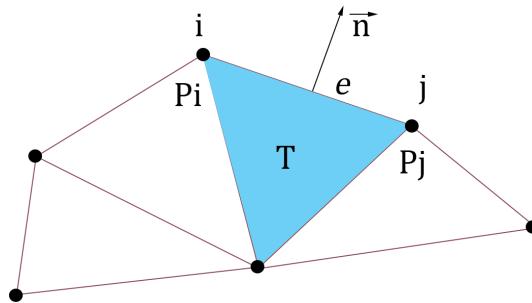


FIGURE 2.5 – arêtes

$$|e| \times \vec{n}_e = \begin{pmatrix} y_j - y_i \\ x_i - x_j \end{pmatrix}$$

avec le changement de variable  $x = s \times \mathbf{P}_i + (1 - s) \times \mathbf{P}_j$ ,  $s \in [0; 1]$

$$\int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s = |e| \left( \int_0^1 \varphi_i \, dx \right) \cdot \vec{n}_e$$

avec

$$\int_0^1 \varphi_i \, ds = \text{aire du triangle rectangle de coté } |e| \text{ et de hauteur } 1 = \frac{|e|}{2}$$

d'où

$$\int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, ds = |e| \left( \int_0^1 \varphi_i \, dx \right) \cdot \vec{n}_e = \frac{|e|}{2} \cdot \vec{n}_e = \frac{|e|^2}{2} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Au final

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i &= \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, ds = \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \\ \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i &= \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Au final

$$f_j = -\vec{e}_y \cdot \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

## 2.2.4 Calcul du Gradient

Les calculs précédents nous permettent de trouver après résolution le potentiel  $u$ , ce que nous voulons obtenir à l'issue de notre étude est le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  que l'on trouve par  $\vec{B} = \nabla u$ .

On écrit la forme variationnelle dans  $V_h$  (ainsi  $\vec{B}$  suit une décomposition dans  $V_h$ , tel que  $\vec{B} = \sum_i B_{xi} \varphi_i$ ) :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in V_h, \quad \int_{\Omega} B \cdot \varphi &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi \\ \sum_{i,j} \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} B_i \int_T \varphi_i \varphi_j &= \sum_i \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} u_i \int_T \nabla \varphi_i \varphi_j \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire l'équation ci dessus sous forme matricielle, en introduisant les matrices M et C, définies de la façon suivante :

$$M_{ij} = \int_T \varphi_i \cdot \varphi_j \text{ appellé la matrice de masse}$$

$$C_{ij} = \int_T \nabla \varphi_i \cdot \varphi_j$$

L'équation devient ainsi un problème linéaire sous forme matricielle

$$M \times B = C \times U$$

Soit

$$B = M^{-1} \times C \times U$$

Calculons ainsi les termes de la matrice C :

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \iint_{\Omega} \nabla \varphi_i \varphi_j dx = \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} \nabla_K \varphi_i \iint_K \varphi_j dx \\ &= \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} (J^{-1}_K)^T (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} |J_K| \hat{\varphi}_j d\hat{x} \\ &= \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} (J^{-1}_K)^T |J_K| (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_j d\hat{x} \end{aligned}$$

$$C_{ij} = \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} (J^{-1}_K)^T |J_K| (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_j d\hat{x}$$

Nous allons calculer pour l'implémentation algorithmique des matrice élémentaires qui vont regrouper sur chaque triangle les contributions croisés des trois nœuds, soit neuf termes dans chaque matrice élémentaire.

Calculons une matrice élémentaire de C sur un triangle K du maillage qui aura donc pour composantes (si on se place selon la composante x du gradient )

$$|J_K| \times \begin{pmatrix} \nabla_{\hat{K}} \varphi_1|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_K \varphi_1|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_K \varphi_1|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \\ \nabla_K \varphi_2|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_K \varphi_2|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_K \varphi_2|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \\ \nabla_K \varphi_3|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_K \varphi_3|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_K \varphi_3|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

Calculons les intégrales :

$$\begin{cases} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 1/6 \\ \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 1/6 \\ \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 1/6 \end{cases}$$

On a ainsi la matrice élémentaire du terme C sur un triangle K :

$$\frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} \nabla_K \varphi_{1|x} & \nabla_K \varphi_{1|x} & \nabla_K \varphi_{1|x} \\ \nabla_K \varphi_{2|x} & \nabla_K \varphi_{2|x} & \nabla_K \varphi_{2|x} \\ \nabla_K \varphi_{3|x} & \nabla_K \varphi_{3|x} & \nabla_K \varphi_{3|x} \end{pmatrix}$$

Calculons également directement les matrices élémentaires pour la matrice de masse M définis par :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \varphi_i \varphi_j$$

Sur un triangle K du maillage, on obtient de la même manière que précédemment

$$\begin{aligned} M_{ij}^k &= \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} |J_K| \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x} \\ &= 2 \times \text{aire}(K) \times \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x} \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer les intégrales

$$\int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x}$$

par symétrie

$$\forall i \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i^2 = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_2^2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{12}$$

$$\forall i \neq j \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i \times \hat{\varphi}_j = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 \hat{x}_2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{24}$$

On en déduit la matrice de masse élémentaire sur un triangle de maillage

$$M^k = \frac{\text{aire}(K)}{12} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 2.2.5 Implémentation algorithmique

Pour la résolution du problème nous utiliserons matlab avec la bibliothèque Mesh2D par Darren Engwirda pour la création du maillage 2D. La résolution est effectué sur un maillage  $5 \times 5$  avec en son centre un aimant de taille  $1 \times 1\text{cm}$ .

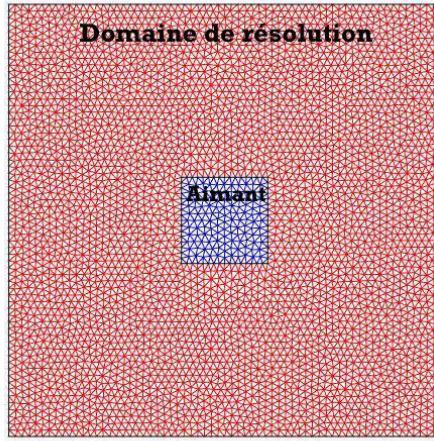


FIGURE 2.6 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D dans la configuration décrite pour un pas  $h = 0.1$

Pour le calcul nécessaire des différentes matrice afin de résoudre le problème linéaire  $A \times U = F$ , les algorithmes reposent sur la même méthodologie de calcul : Par exemple pour le calcul de la matrice A :

$$A_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i \cdot \nabla_x \varphi_j = \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j$$

Le principe consiste à ne pas recherche le support croisé des fonctions  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  (ce qui donnerait une complexité trop importante) mais à boucler sur les triangles et placer dans la matrice les contributions correspondantes à chacun de leurs noeuds avec leur indices. Notamment avec l'outil matriciel *sparse* de matlab qui permet d'exploiter en temps de calcul et d'espace mémoire le fait que la matrice de rigidité A est creuse, comme pour deux fonction  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  l'intersection de leurs support se réduit à deux triangle.

Ainsi pour le calcul de A chaque triangle engendre une matrice élémentaire  $3 \times 3$  (car 3 noeuds pour chaque triangle donc 9 termes croisés) symétrique vu le calcul du terme  $A_{ij}$  dont on place les termes dans la matrice A à chaque itération sur les triangles.

Le principe est le même pour le terme source, pour chaque triangle appartenant au bord de l'aimant avec comme noeuds sur le bord les noeuds  $p_i$  et  $p_j$  on place deux fois le même terme  $\frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \vec{n}_e$  (que l'on a calculé p.21) aux indices  $p_i$  et  $p_j$  dans la matrice du terme source.

Et de même également pour le calcul des matrices M et C pour le gradient, dont nous avons explicité les matrices élémentaires.

Voici une présentation succincte de l'algorithme de résolution, les fonctions utilisées sont détaillé dans l'annexe B.

Pour la génération du maillage, on utilise la fonction meshfaces fournis par la bibliothèque Mesh2D par Darren Engwirda

```
[v,t,fnum] = meshfaces(node,edge,face,hdata); %construction du maillage

v : vecteur colonne regroupant les coordonnées des nœuds
t : table de connectivité des triangle
fnum : numéros de face des triangles du maillages (1 ou 2),
si sur le domaine des l'aimant ou de la cuve
```

Calcul de la matrice de rigidité A et de la matrice de masse M :

```
[M, nn, ibint, ic2] = matrixP1final(v,t,fnum,node1,edge1,node2,edge2);
[A]= matrixP1vect(v,t);
```

On enlève les noeuds sur le bord du domaine de résolution comme la condition aux limite impose que  $\Delta u = 0$  sur le bord, que nous considerons équivalente à  $u = 0$

```
A1 = A1(ic2,ic2); %ic2 sont les noeuds intérieurs du maillage
sol = A1\B; %résolution linéaire
```

Calcul du gradient de  $u$  :

```
B = gradient(u,v,t);  
quiver(X,Y,B_X,B_Y); %affichage du résultat final
```

## 2.2.6 Résultats de la simulation

Voici les résultats de la simulation pour un maillage de pas 0.2 et de taille  $5 \times 5$  pour un aimant de taille  $1 \times 1$ . On voit que les vecteurs suivent les dessins

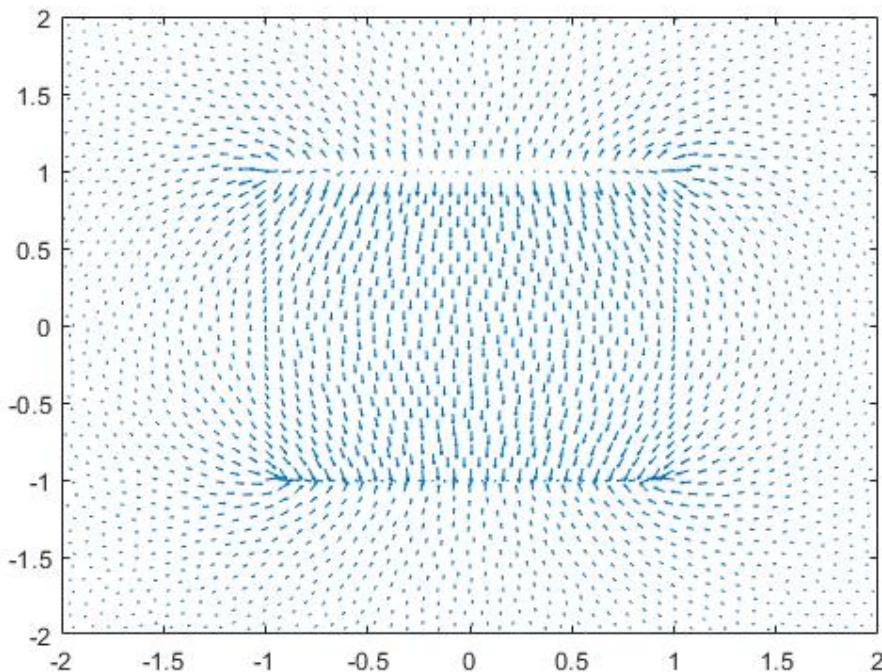


FIGURE 2.7 – affichage résolution centrée sur  $[-2, 2]$

des lignes de champ que l'on peut attendre d'un aimant. On peut s'inquiéter de la discontinuité des valeurs au bord de l'aimant mais ce la est en accord avec la formulation du champ d'induction comme la somme d'un champ d'excitation et d'une aimantation, nulle en dehors de l'aimant  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , d'où cette discontinuité que l'on observe.

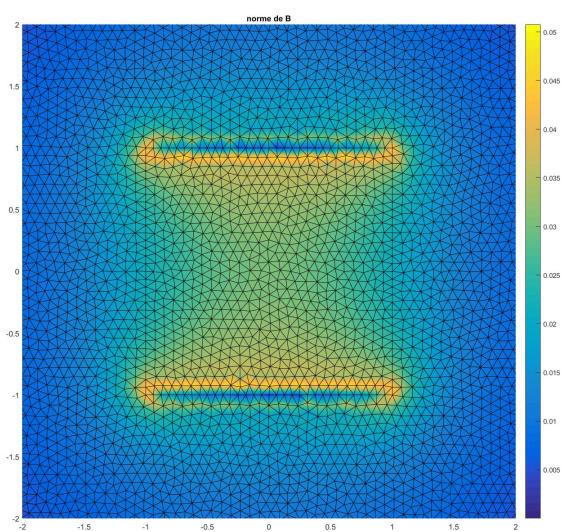


FIGURE 2.8 – affichage résolution centrée sur  $[-2, 2]$

## Chapitre 3

# Équations de Navier Stokes

Nous allons à présent nous intéresser à la modélisation de l'écoulement, qui suit les équations de Navier-Stokes d'après les hypothèses que nous avons émis précédemment. Nous supposons que nous avons à notre disposition deux aimants, qui sont perpendiculaires sur les côtés de la cuve, l'un produit un champ  $B_1$ , l'autre produit un champ  $B_2$ . Le premier aimant va produire un tourbillon dans le fluide, le deuxième va produire deux tourbillons parallèles, qui sont orthogonaux au premier tourbillon . Tout cela dans le but d'obtenir un écoulement tourbillonnaire.



FIGURE 3.1 – les trois tourbillons que nous souhaitons obtenir avec notre dispositif expérimental

### 3.0.1 Équations de Stokes

Le liquide est un conducteur placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant supposé uniforme  $\vec{j}_0$ . Afin de pouvoir trouver l'équation de la trajectoire d'un point donné, on cherche tout d'abord à trouver la vitesse dans l'écoulement du fluide contenu dans un domaine  $\Omega$ .

A partir des équations de Navier-Stokes incompressibles, on détermine simultanément la vitesse  $V$  et la pression  $P$ .

On émet les hypothèses suivantes :

Dans un premier temps, nous pouvons négliger les forces d'inertie du fluide comme on a un faible nombre de Reynolds. Le fluide visqueux est en mouvement le long d'une paroi solide fixe d'où une vitesse nulle sur le bord car  $\vec{V}_{\partial\Omega} = \vec{V}_{\text{paroi}} = \vec{0}$

Finalement, on se place en régime stationnaire.

$$\begin{cases} \vec{0} = -\vec{\nabla}P + \mu\vec{\Delta}V + \vec{f} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{V} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La force  $\vec{f}$  correspond à la force de Laplace induite par le champ magnétique.  
La densité volumique de cette force est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \vec{j}_0 \wedge \vec{B} = j_0 \times M_0 \times \vec{j} \wedge \vec{B}^* \\ \vec{B}^* &= \frac{\vec{B}}{M_0}, \text{ et } j_0 = \frac{\Delta E}{L}\sigma \\ \text{avec } \sigma &: \text{la conductivité du fluide} \\ L &: \text{la longueur de base de la cuve} \\ \Delta E &: \text{la différence de potentiel} \end{aligned}$$

Ainsi on peut calculer la force magnétique pour un champ magnétique  $\vec{B}_1$

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \begin{pmatrix} B_{1,x} \\ B_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{f} &= j_0 \vec{e}_x \wedge \begin{pmatrix} B_{1,x} \\ B_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix} = j_0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{1,y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.0.2 Adimensionnement de l'équation de Stokes

Afin de résoudre un seul système indépendamment des constantes, on adimensionne l'équation de Stokes. Le régime stationnaire sera pris en compte après adimensionnement.

Posons :

$$\vec{V}'(x, t) = \frac{\vec{V}(x, t)}{V_0} ; \vec{x}' = \frac{\vec{x}}{L_0} ; \vec{f}'(\vec{x}') = \frac{\vec{f}(\vec{x})}{j_0 M_0} ; P' = \frac{P}{P_0} ; t' = \frac{t}{\frac{L_0^2}{\mu}}$$

En injectant dans l'équation de Stokes d'évolution :

$$\left\{ \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{V} + \vec{f} \right.$$

il en résulte :

$$\left\{ \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} = -\frac{L_0 P_0}{\rho \mu V_0} \vec{\nabla} P' + \vec{\Delta} \vec{V}' + \frac{L_0^2 j_0 M_0}{\mu V_0} \vec{f}' \right.$$

On adimensionne par rapport à  $V_0$  et  $P_0$  de sorte que  $\frac{L_0 P_0}{\rho \mu V_0} = 1$  et  $\frac{L_0^2 j_0 M_0}{\mu V_0} = 1$ , le régime stationnaire étant établi :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P' + \vec{\Delta} \vec{V}' + \vec{f}' \text{ dans } \Omega$$

### 3.0.3 Formulation variationnelle

Afin d'obtenir la formulation variationnelle de l'équation de Stokes, on passe dans l'espace des distribution de sorte que pour toute fonctions test  $\varphi$  on a

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} P' \times \vec{\varphi} = \int_{\Omega} -\mu \vec{\Delta} \vec{V}' \times \vec{\varphi} + \int_{\Omega} \vec{f}' \times \vec{\varphi}$$

En appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} P' \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega} \nabla V' \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \vec{f}' \cdot \vec{\varphi}$$

Comme précédemment nous nous plaçons dans l'espace  $V_h$  d'approximation polynomiale. Nous pouvons ainsi décomposer les champs de pression  $P'$ , la vitesse  $V'$  et la force  $\vec{f}'$  dans la base des  $(\varphi_i)$  :

$$\begin{cases} V' = \sum_{i=1}^{N_h} V_i \varphi_i & \text{où } V_i = V(P_i), i = 1, 2, \dots, N_h \\ P' = \sum_{i=1}^{N_h} P_i \varphi_i & \text{où } P_i = P(P_i), i = 1, 2, \dots, N_h \\ f' = \sum_{i=1}^{N_h} f_i \varphi_i & \text{où } f_i = f(P_i), i = 1, 2, \dots, N_h \end{cases}$$

On prend  $\varphi = \varphi_i$  un vecteur de la base

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla V_h \cdot \nabla \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} V_i \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} A_{ij} V_i \\ \int_{\Omega} \nabla P_h \cdot \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} P_i \nabla \varphi_i \cdot \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} C_{ij} u_i \\ \int_{\Omega} f \cdot \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} f_i \varphi_i \cdot \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} M_{ij} f_i \end{cases}$$

On peut donc écrire la formulation variationnelle sous la forme d'un problème linéaire :

$$\begin{cases} -A \times V + C \times P = M \times f \text{ sur } \Omega \\ C \times V = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La linéarité de l'équation nous permet d'appliquer le principe de superposition est donc de décomposer la résolution du problème en deux résolutions : une pour chaque terme source et ensuite de les sommer. Pratiquement nous allons résoudre le problème en deux temps : d'un côté pour l'aimant centré qui donne deux tourbillons et d'autres part pour l'aimant décentré qui donne un tourbillon pour ensuite sommer les champs de vitesse après transposition.

### 3.0.4 Implémentation algorithmique

Nous allons à présent mettre en place les calculs précédents de manière numérique sur Matlab en maillant le domaine de résolution qui est ici la cuve qui accueille le fluide .

On pose  $L_x, L_y, L_z$  les dimensions de la cuve selon x, y, et z.

Le domaine  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$  est ainsi discrétisé par un maillage uni-

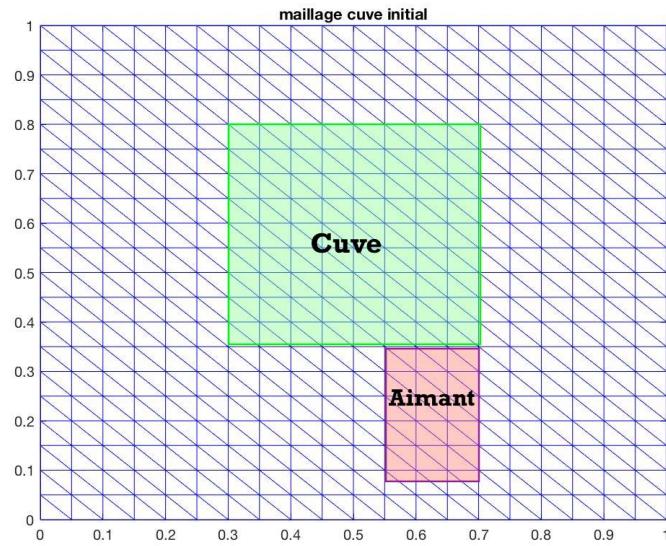


FIGURE 3.2 – affichage résolution centrée sur [-2, 2]

forme défini par les points :

$$\begin{cases} x_{ij} = \left( \frac{i \times L_x}{N+1}, \frac{j \times L_x}{N+1} \right), i, j = 0, 1, \dots, N+1 \\ y_{ij} = \left( \frac{i \times L_y}{N+1}, \frac{j \times L_y}{N+1} \right), i, j = 0, 1, \dots, N+1 \\ z_{ij} = \left( \frac{i \times L_z}{N+1}, \frac{j \times L_z}{N+1} \right), i, j = 0, 1, \dots, N+1 \end{cases}$$

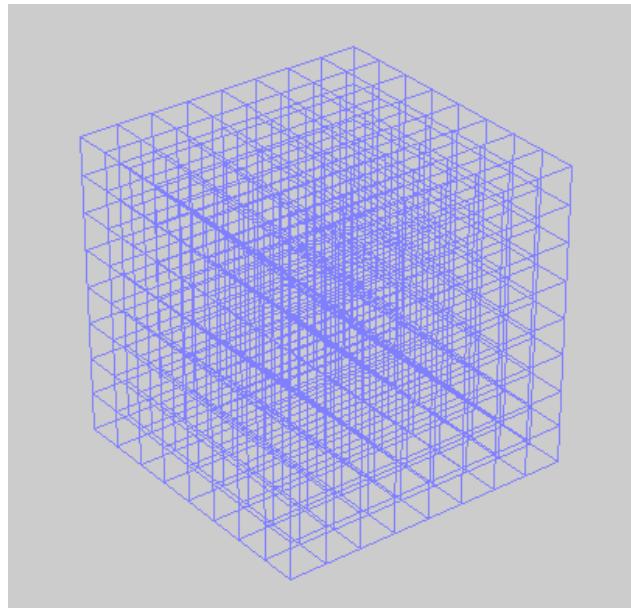


FIGURE 3.3 – maillage du domaine de résolution à l'aide de la fonction matlab *ndgrid*

### 3.0.5 Calcul des matrices du système linéaire

Pareil qu'avant

### 3.0.6 Raccordement à la modélisation du champ magnétique

Pour résoudre le système linéaire qui découle des équation de Navier-Stokes, nous devons reprendre notre travail précédent pour former le second terme  $f$ , matrice colonne regroupant les valeurs scalaires de la force magnétique aux différents point du maillage.

Nous devons donc faire le liens entre le maillage de résolution en trois dimension pour la résolutions des équations régissant l'écoulement et le maillage en deux dimensions sur lequel on calcule le champ magnétique.

Comme nous l'avons énoncé, nous supposons que le champ magnétique est invariant selon le troisième dimensions, il est donc inutile de le recalculer pour chaque 'couche' du maillage 3D, d'autant plus que le maillage 3D est uniforme. La

méthodologie que nous allons donc appliquer consiste à calculer une unique fois le champ magnétique sur une seule couche de maillage (la couche  $z = 0$  en particulier dans l'algorithme) et reprendre les valeurs du champ sur les autres couches.

Ce que nous faisons en pratique est de générer un grand maillage de résolutions 2D pour calculer le champ magnétique, ce qui permet d'atténuer les effets de bord subit par le champ magnétique.

Nous utilisons ensuite la fonction Matlab *delaunay* qui permet à partir du maillage rectangulaire, de définir un maillage triangulaire (comme nous avons travaillé auparavant sur un maillage de type triangulaire quelconque auparavant pour le calcul du champ magnétique). Nous identifions ensuite sur ce maillage de résolution 2D un domaine correspondant à la cuve est un domaine correspondant à l'aimant, en fonction de la configuration choisie. Le maillage sur le domaine assigné à la cuve doit bien sûr correspondre à une couche du maillage de résolution 3D utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

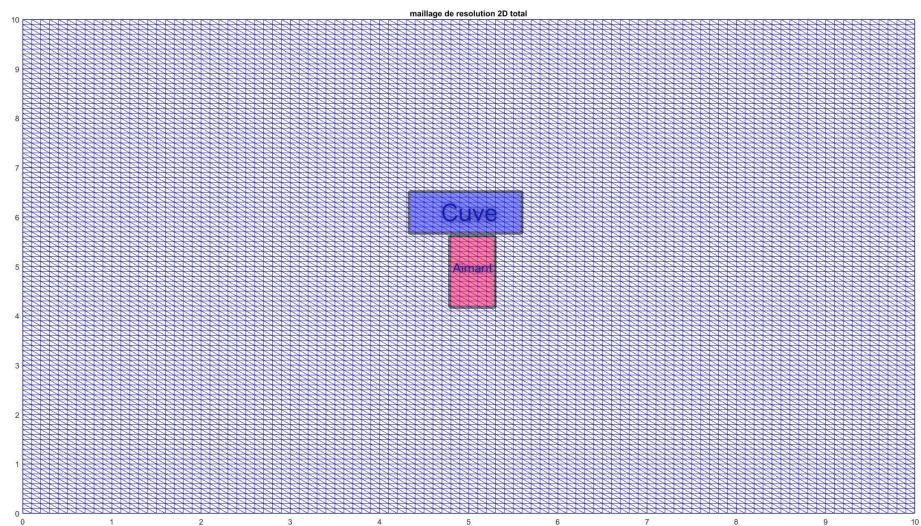


FIGURE 3.4 – configuration dans le cas de la résolution pour la configuration avec l'aimant centré

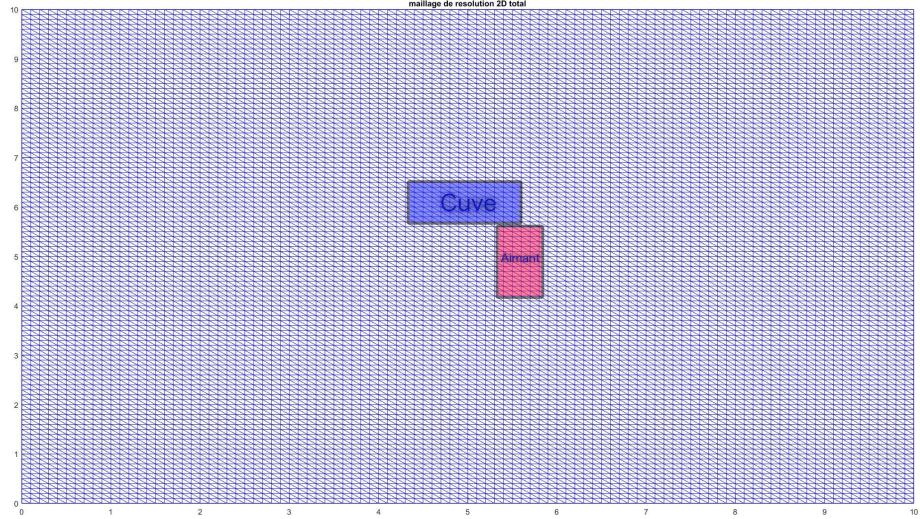


FIGURE 3.5 – configuration dans le cas de la résolution pour la configuration avec l’aimant décentré

Algorithmiquement, pour assigner les différents domaines du maillage de résolution 2D généré, nous utilisons le vecteur label  $fnum$  qui prend sur chaque triangle la valeur 1, 2, ou 3 en fonction du domaine qui lui a été assigné.

Maintenant notre objectif est de pouvoir adapter les données extraites à l’algorithme de Stokes 3D. Le premier obstacle est de réindexer le numéro des triangles pour qu’il y ait une bonne consistance des données lorsque l’algorithme va les utiliser : il faut renommer les triangles dans l’ordre.

Un autre point important est le degré d’interpolation des espaces polynomiaux sur lesquels nous travaillons. En effet nous avons résolu les équations du champ magnétique avec des éléments finis de degrés d’interpolation polynomiales 1 (éléments P1), alors que la résolution des équations de Navier-Stokes nécessite des éléments finis P2. Il faut donc doubler le nombre de points d’interpolations du champ magnétique avant d’injecter le second membre  $f$  dans l’algorithme de résolution des équations de Navier Stokes. Les données prennent alors une nouvelle structure suite à ce dédoublement des points, les matrices ne suivent plus le sens de parcours des données fixé avec la fonction de génération de maillage  $ngrid$ (qui

est une généralisation sur la troisième dimension de *meshgrid*). Ce doublement de point du maillage avec la génération des tables nouvelles tables de descriptions du maillage t et v sont faite par la fonction *mesh3D* fournis par M. Scheid que nous utilisons comme une boîte noire.

On le voit tout de suite avec un affichage avec un affiche *triplot* après avoir appliqué *delaunay* sur les données de la couche 2D du maillage 3D dont on a doublé les points.

```

z = 0;      % niveau z = 0
indz = find(v(:,3) == z); % récupération des indices des nœuds pour le niveau 0
xz = v(indz,1); yz = v(indz,2); vz = [xz, yz];
tz = delaunay(xz,yz);           % triangulation de Delaunay
triplot(tz,xz,yz);      % affichage

```

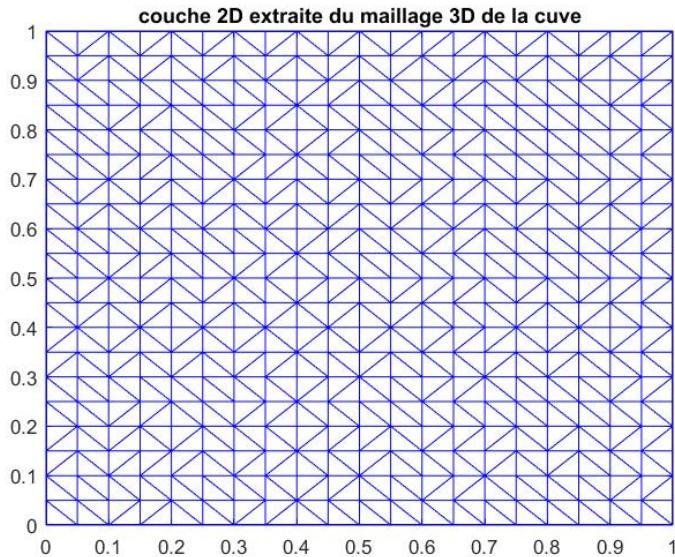


FIGURE 3.6 – affichage avec *triplot* du maillage extrait

Si on compare à une structure de données classiques générée avec *meshgrid* ou *linspace* :

```

t_total_2D = delaunay(v_total_2D(:,1),v_total_2D(:,2));
triplot(t_total_2D ,X_total_2D,Y_total_2D);

```

```
xlim([4.5 5.5]);  
ylim([4.5 5.5]);
```

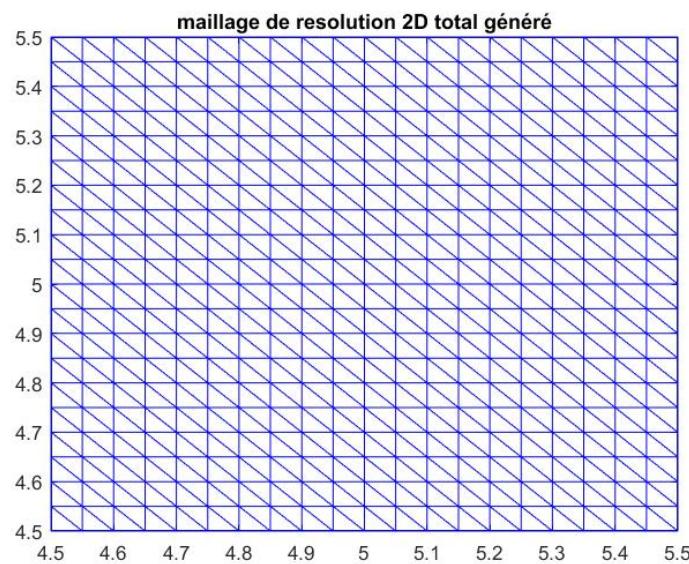


FIGURE 3.7 – affichage avec *triplot* du maillage extrait

Pour comprendre la structure des données il faut alors se rapporter aux tables de connectivité pour le type de maillage 3D générée. On comprend alors que cette

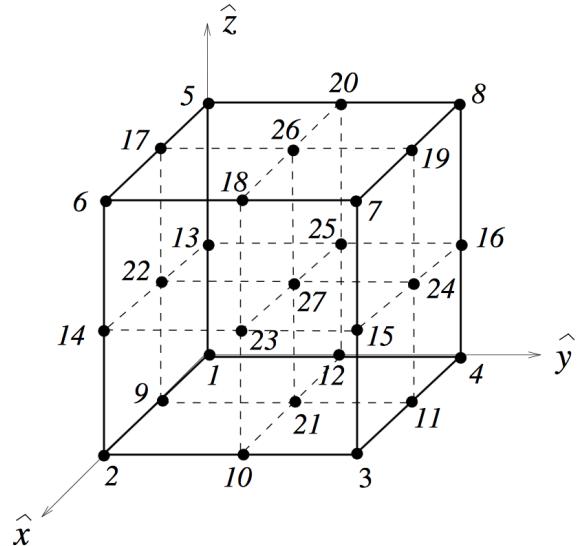


FIGURE 3.8 – table de connectivité, issu du cours *Analyse numérique des équations de Navier-Stokes*, J.-F. Scheid

structure des données ératique est du à l'arrangement de la tables de coordonnées  $v$ . Cela ne pose pas de problème dans la mesure où nous prenons garde à garder la même structure de données tout de long de notre algorithme de résolution est donc d'arranger selon la même structure le second membre  $f$ .

Prenons par exemple les 9 premiers termes de la fonction force de Laplace au niveau  $z = 0$  à partir de l'origine de ce plan dans le maillage de la cuve. Schématiquement si l'on se limite à la portion  $[0; 2/N_x].[0; 2/N_y]$ , on remplit le vecteur  $\vec{f}_z$

$$\vec{f}_z = \begin{pmatrix} f_z(0, 0) & f_z(1/N_x, 0) & f_z(2/N_x, 0) \\ f_z(0, 1/N_y) & f_z(1/N_x, 1/N_y) & f_z(2/N_x, 1/N_y) \\ f_z(0, 2/N_y) & f_z(1/N_x, 2/N_y) & f_z(2/N_x, 2/N_y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{selon table de connectivité}} \begin{pmatrix} f_z(0, 0) \\ f_z(2/N_x, 0) \\ f_z(2/N_x, 2/N_y) \\ f_z(0, 2/N_y) \\ \dots \\ f_z(1/N_x, 0) \\ f_z(2/N_x, 1/N_y) \\ f_z(1/N_x, 2/N_y) \\ f_z(0, 1/N_y) \\ \dots \\ f_z(1/N_x, 1/N_y) \end{pmatrix}$$

Après formatage du second membre de l'équation à l'algorithme de résolution de Navier Stokes, nous pouvons lancer l'algorithme pour un aimant décentré afin de générer le champ de vitesse dans la cuve. Nous pouvons visualiser facilement le champ de vitesse produit par l'algorithme grâce au programme de visualisation physique Paraview : voici d'abord le champ de vitesse selon l'axe Y, avec l'aimant centré par rapport à la cuve : nous discernons bien deux lignes de courant pour l'aimant centré, et une ligne de courant pour l'aimant excentré sur le côté selon  $\vec{o_x}$ .

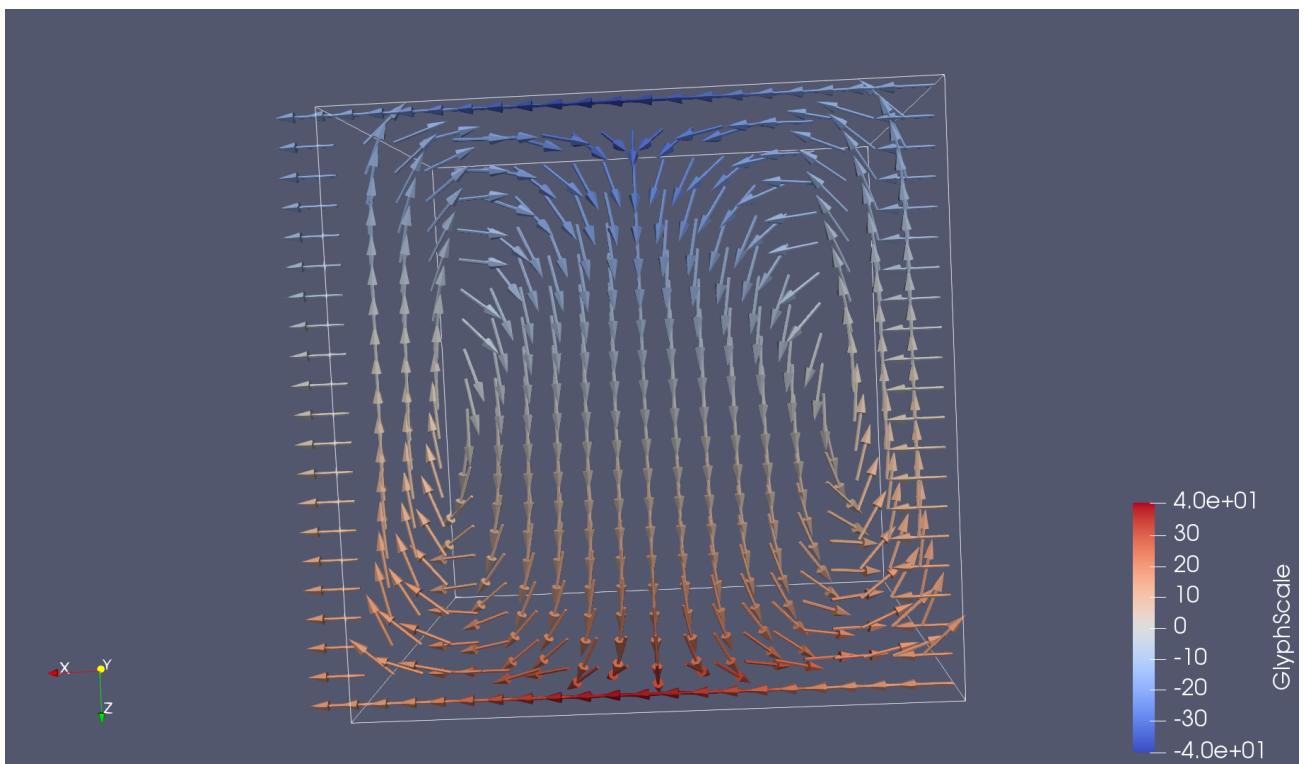


FIGURE 3.9 – champ de vitesse obtenue par l'algorithme Stokes3D selon Paraview pour un aimant centré au niveau Y=0

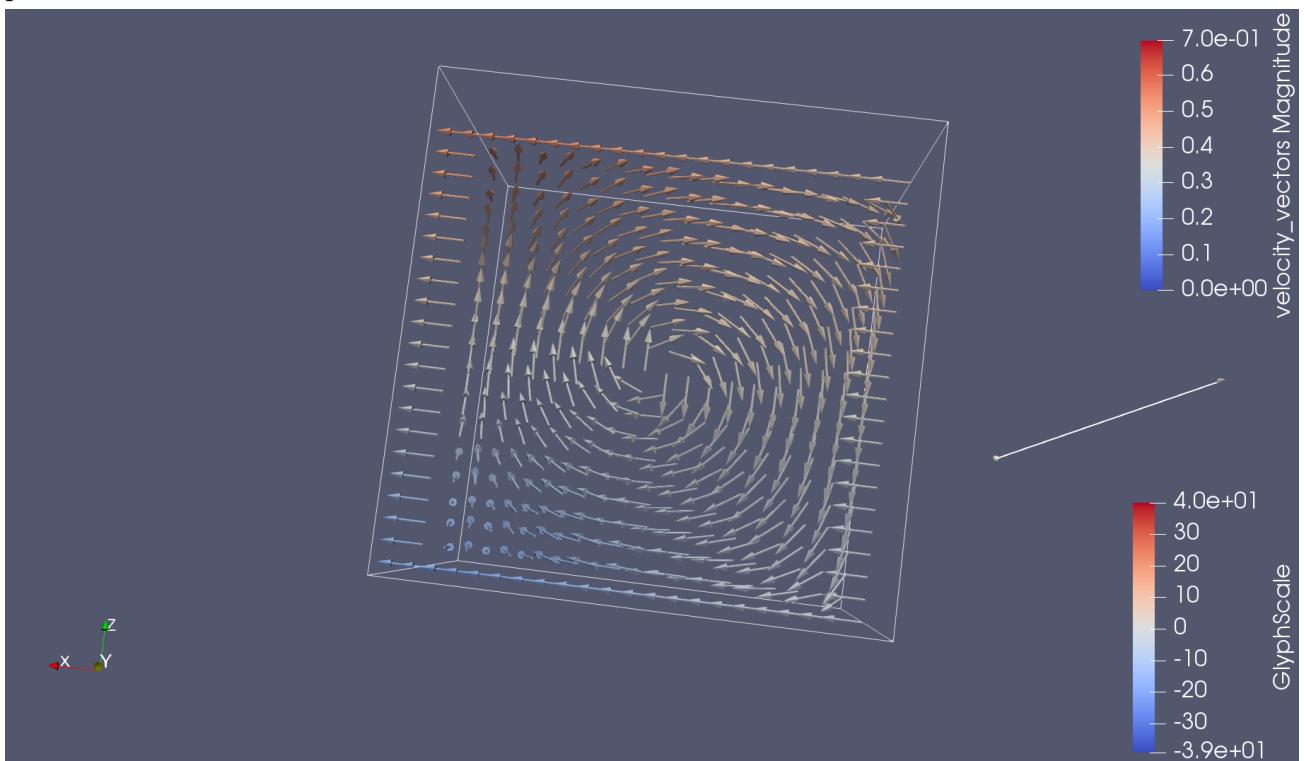


FIGURE 3.10 – champ de vitesse obtenue par l'algorithme Stokes3D selon Paraview pour un aimant décentré au niveau Y=0

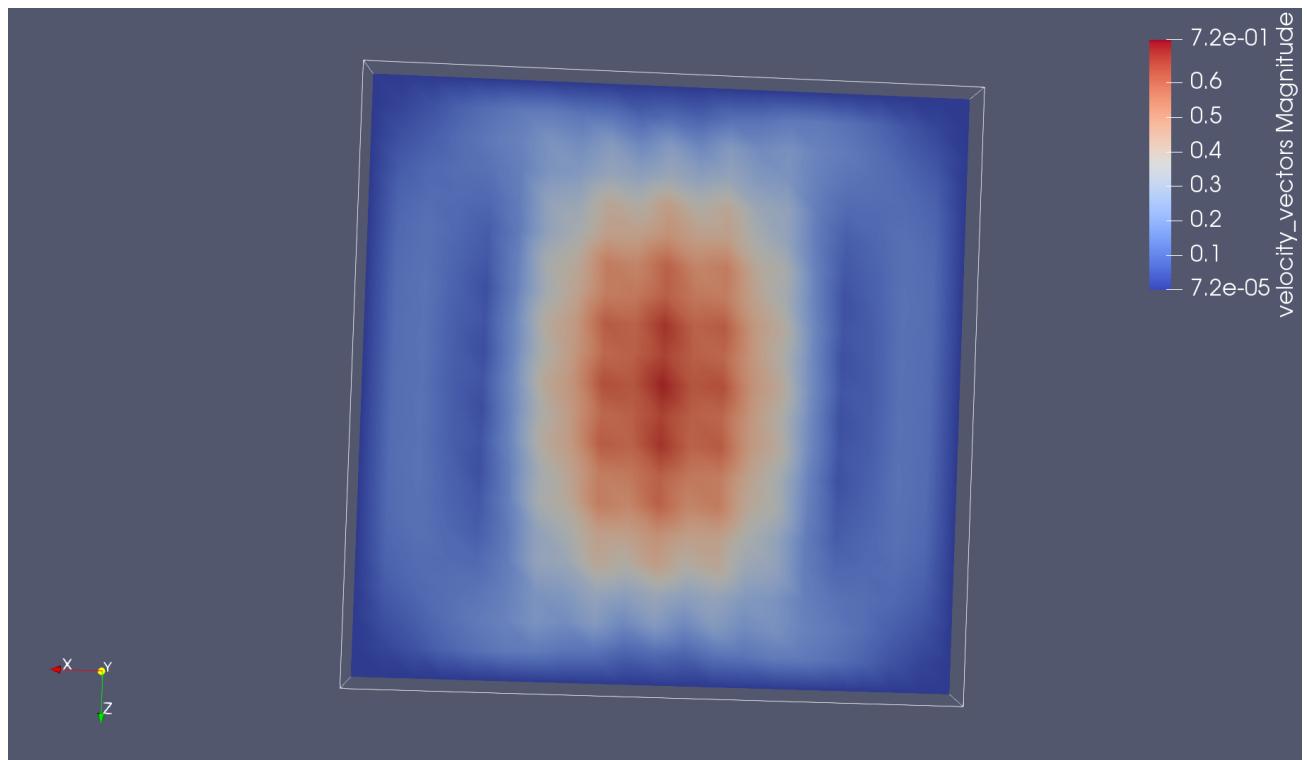


FIGURE 3.11 – champ de vitesse obtenue par l'algorithme Stokes3D selon Paraview pour un aimant centré au niveau Y=0

FIGURE 3.12 – champ de vitesse obtenue par l'algorithme Stokes3D selon Paraview pour un aimant décentré au niveau Y=0

## Annexe A

### Calcul de la matrice de rigidité

La matrice Jacobienne de la transformation est définie par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(\varphi(F(\hat{x}))) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x})$$

Donc

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = J^T \times \nabla_x \varphi$$

Calculons  $\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}$  sur le triangle de référence  $\hat{T}$  :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1 = -\hat{x}_1 + 1 - \hat{x}_2 \\ \hat{\varphi}_2 = \hat{x}_1 \\ \hat{\varphi}_3 = \hat{x}_2 \end{cases}$$

En effet  $\hat{\varphi}_1$  vaut 1 sur le sommet 1 et 0 sur les autres sommets (Figure 3). Ainsi

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$|J| = (x_2 - x_1) \times (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \times (y_2 - y_1) = 2 \times \text{Aire}(T)$$

où  $|J|$  est le déterminant de la matrice  $J$  et ainsi

$$\nabla_x \varphi = (J^{-1})^T \times \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}$$

avec

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix}$$

d'où

$$(J^{-1})^T = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix}$$

$$* = \frac{1}{2 \times \text{aire}(T)} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix}$$

Et le calcul du terme  $A_{ij}$  de la matrice de rigidité, on obtient ainsi avec le changement de variable vers le triangle de référence.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \iint_{(i,j) \in T} \nabla_x \varphi_i \cdot \nabla_x \varphi_j \\ &= \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \iint_{(i,j) \in T} (J^{-1})^T |J| (J^{-1})^T |J| \times \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \times \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j \\ &= \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j \end{aligned}$$

## **Annexe B**

### **Codes Matlab**

#### **B.0.1 Modélisation du champ magnétique**

## Bibliographie

"Introduction à l'analyse numérique"(1998), de Jacque Rappaz et Marco Picasso, publié par les Presses polytechniques et universitaires romandes.

"Méthode des éléments finis : élasticité plane" par Yves Daubard, Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique , <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>, 24 mars 2006 – 29 mars 2011

"Analyse numérique des équations de Navier-Stokes",de Jean-François Scheid, Cours de Master 2 Mathématiques (Recherche) - Université de Lorraine, Nancy.

"Projet de deuxième Année : Génération de maillages 2D avec Matlab" de Jean-Philippe LEBOUCHER Benjamin PACCOU avec comme chef de Projet Jonas KOKO, Institut Supérieur d' Informatique, de Modélisation et de leurs Applications