École nationale supérieure des Mines de Nancy

Rapport de projet 2A

Tancrède Cohet et Pierre Gauthier

Mélange par un écoulement stationnaire de fluide à faible Reynolds

Laboratoire : Institut Élie Cartan

Tuteurs : Pierre Brancher et Jean-François Scheid

21 Mars 2018

Table des matières

Introduction :

La résolution d'équations à dérivées partielles sont la clé de voute de la modélisation de systèmes physiques et financiers avec des conditions aux limites des systèmes. Cette problématique est particulièrement vraie en mécanique des fluides avec l'utilisation prépondérante de l'équation de Navier Stokes. Il est donc primordial d'avoir des moyens de résolution/simulation numérique de ce genre d'équation, qui respecte les différentes contraintes que posent la théorie des équations à dérivées partielles (fonctions modélisées respectant les espaces de Sobolev). Une des méthodes numériques de résolution de Navier-Stokes est par exemple la méthode des éléments finis, sur maillage triangulaire.
Le but de ce projet est d'étudier des écoulement chaotiques à faible nombre de Reynolds, c'est à dire des écoulements dont les forces visqueuses sont prépondérantes, qui sont présents typiquement dans l'industrie métallurgique ou dans l'industrie hydro-électrique. Cette problématique de résolution d'équations numériques à dérivées partielles est au cœur des enjeux du projet.

L'approche numérique eulérienne d'un mélange par advection chaotique traite du problème stationnaire avec champ de vitesse sinusoïdale qui correspond à un système de tourbillons orthogonaux, dont le modèle académique analytique a été étudié dans le cadre de la thèse de Valérie Toussaint, que nous allons reprendre avec deux tourbillons d'axes parallèles et un tourbillon qui leur est perpendiculaire.

Cette étude se fait dans la continuité d'un travail effectué par Ismail Mebsout et Oumaima Hammami durant l'année scolaire 2016-2017 où le but sera d'étudier les écoulement en s'affranchissant de certaines simplifications. Dans la première partie de notre étude, nous allons présenter le problème, puis le mettre en équation et calculer la force magnétique composant le terme source de l'équation de Navier-Stokes, pour résoudre numériquement le problème et étudier les résultats.

Chapitre 1

Position du problème

Pour générer l'écoulement que nous souhaitons étudier nous allons utiliser les forces de Laplace. Le fluide (de l'eau) considéré non visqueux dans une cuve est ionisé et placé sous influence d'aimants ferromagnétiques. Chaque particule du fluide va se mouvoir sous l'influence du champ magnétique. Notre but est de configurer correctement les champs magnétiques pour obtenir un écoulement chaotique. On peut définir l'advection chaotique comme un écoulement dans un fluide dont la trajectoire des point passe par tous les point du domaine, ou de manière mathématique avec les écoulements de Liapounov. C'est à dire que théoriquement si on observe le passage d'une particule à travers une section du fluide au bout d'un temps infinis, les points d'impact de la particule recouvreront de manière continue toute la section.

1.0.1 dispositif expérimental

Expérimentalement, il est possible de réaliser cet écoulement à l'aide d'une distribution adéquate des forces. Pour cela, on utilise un système composé d'un parallélépipède, d'aimants permanents et d'électrodes pour génerer un vecteur densité de courant. Le parallélépipède est un mélangeur dans lequel se trouve un liquide faiblement conducteur. Afin de générer un tourbillon, on place deux aimants l'un en face de l'autre sur une moitié du parallélépipède pour créer un champ $\vec{B}$ vertical sur cette moitié. On place deux électrodes sur les deux autres faces opposées du parallélépipède pour créer un courant uniforme de densité $\vec{j}$.

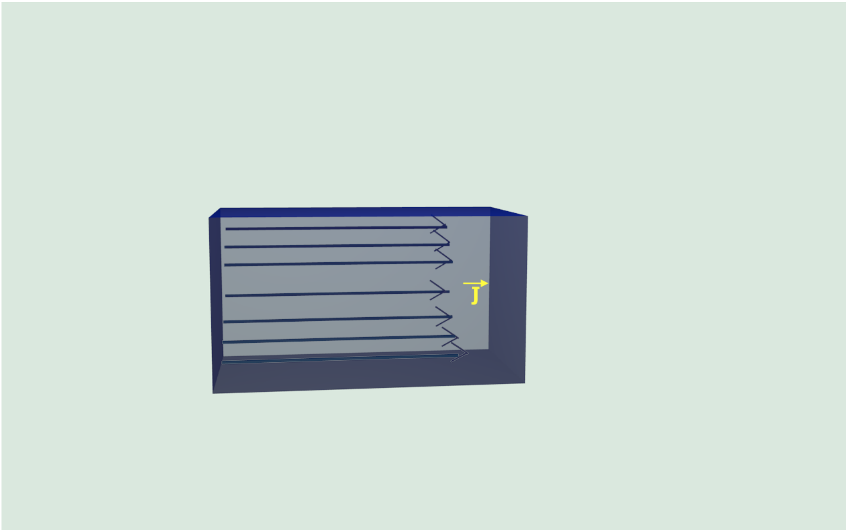

FIGURE 1.1 – liquide faiblement ionisé soumis à un champ électrique $\vec{E}$, Blender

On place un aimant de telle manière à générer un champ magnétique plus important sur une moitié du cube que l'autre.

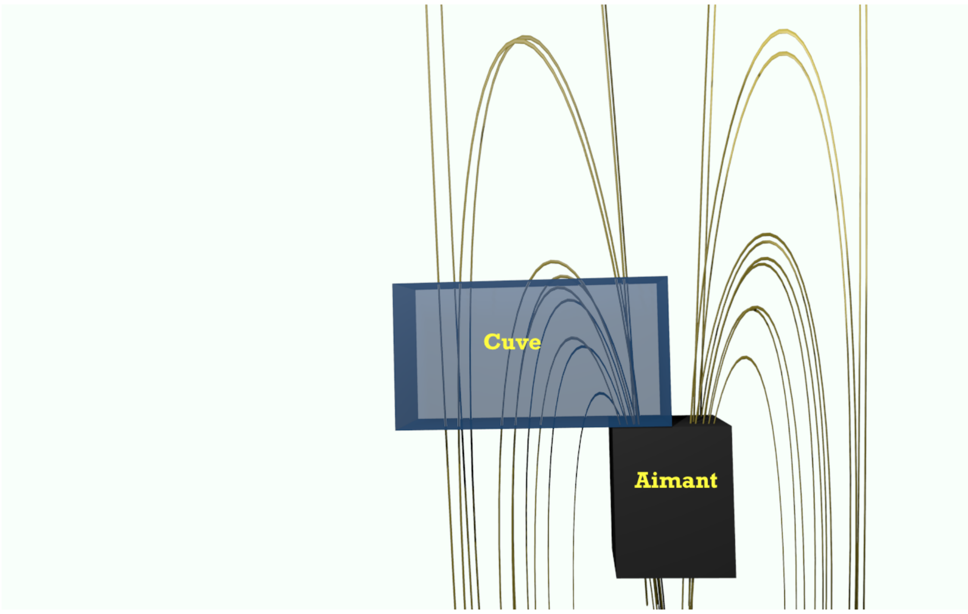

FIGURE 1.2 – lignes de champ magnétique, Blender

La force magnétique $\vec{f_l} = \vec{j_0} \wedge \vec{B}$ permet ainsi de générer un tourbillon.
Afin de générer deux tourbillons, on place deux aimants l'un en face de l'autre sur

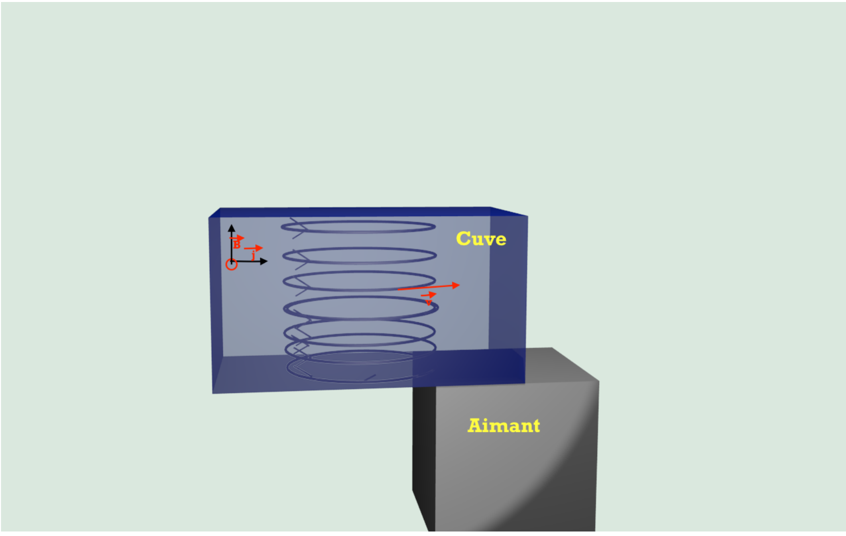

FIGURE 1.3 – liquide faiblement ionisé soumis à un champ électrique et un champ magnétique $\vec{B}$, Blender

le deuxième tiers du parallélépipède pour créer un champ B vertical sur le tiers au milieu. On place aussi deux électrodes sur les faces opposées du parallélépipède pour créer un courant uniforme de densité $\vec{j}$. Une force de Laplace est générée, due a' la difference de potentiel (P1 - P0) en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, deux tourbillons sont alors générés dans le parallélépipède

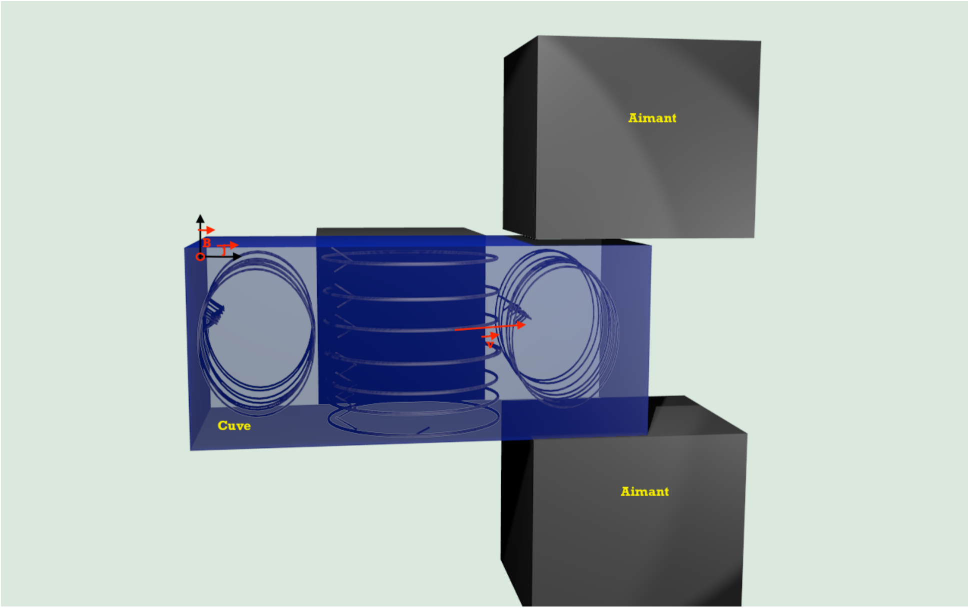

FIGURE 1.4 – configuration avec 2 tourbillons, Blender

1.0.2 hypothèses de modélisation

Nous devons d'abord modéliser notre système , car dans les cas de système faisant intervenir des équations à dérivées partielles , la bonne définition du système est primordiale, avec notamment les conditions aux limites.
Notre système {fluide} sera modélisé par un fluide à faible nombre de Reynolds (visqueux) incompressible régi par les équations de Stokes que nous poserons dans le chapitre suivant. La densité de courant $\vec{j_0}$ est supposé uniforme sur le fluide.

Chapitre 2

Équations de Navier Stokes

D'après ce qui précédé, le fluide considéré suit les équations de Navier-Stokes dont nous allons nous servir pour modéliser le mouvement. Nous supposons que nous avons à notre disposition deux aimants, qui sont perpendiculaires sur les côtés de la cuve, l'un produit un champ B_1, l'autre produit un champ B_2

le premier aimant va produire un tourbillon dans le fluide, le deuxième va produire deux tourbillons parallèles, qui sont orthogonaux au premier tourbillon .

2.0.1 Équations de Stokes

Le liquide est un conducteur placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant supposé uniforme $\vec{j_0}$. Afin de pouvoir trouver l'équation de la trajectoire d'un point donné, on cherche tout d'abord à trouver la vitesse dans l'écoulement du fluide contenu dans un domaine Ω.
A partir des équations de Navier-Stokes incompressibles, on détermine simultanément la vitesse V et la pression P.

On émet les hypothèses suivantes :
Dans un premier temps, nous pouvons négliger les forces d'inertie du fluide comme on a un faible nombre de Reynolds. Le fluide visqueux est en mouvement le long d'une paroi solide fixe d'où une vitesse nulle sur le bord car $\vec{V_{\partial\Omega}} = \vec{V_{\text{paroi}}} = \vec{0}$

Finalement, on se place en régime stationnaire.

$$\begin{cases} \vec{0} = -\vec{\bigtriangledown} P + \mu\vec{\Delta} V + \vec{f} \text{ dans } \Omega \\ \text{div}(\vec{V}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{V} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La force $\vec{f}$ correspond à la force de Laplace induite par le champ magnétique. La densité volumique de cette force est donnée par :

$$\vec{f} = \vec{j_0} \wedge \vec{B} = j_0 \times M_0 \times \vec{j} \wedge \vec{B^*}$$

$$\vec{B^*} = \frac{\vec{B}}{M_0}, \text{ et } j_0 = \frac{\Delta E}{L}\sigma$$

avec σ : la conductivité du fluide

L : la longueur de base de la cuve

ΔE : la différence de potentiel

Ainsi on peut calculer la force magnétique pour un champ magnétique $\vec{B_1}$

$$\vec{B_1} = \begin{pmatrix} B_{1,x} \\ B_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = j_0 \vec{e}_x \wedge \begin{pmatrix} B_{1,x} \\ B_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix} = j_0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{1,y} \end{pmatrix}$$

2.0.2 Adimensionnement de l'équation de Stokes

Afin de résoudre un seul système indépendamment des constantes, on adimensionne l'équation de Stokes. Le régime stationnaire sera pris en compte après adimensionnement.

Posons :

$$\vec{V'}(x,t) = \frac{\vec{V}(x,t)}{V_0} \; ; \vec{x'} = \frac{\vec{x}}{L_0} \; ; \vec{f'}(\vec{x'}) = \frac{\vec{f}(\vec{x})}{j_0 M_0} \; ; P' = \frac{P}{P_0} \; ; t' = \frac{t}{\frac{L_0^2}{\mu}}$$

En injectant dans l'équation de Stokes d'évolution :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\bigtriangledown} P + \mu \vec{\Delta} \vec{V} + \vec{f} \end{cases}$$

il en résulte :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V'}}{\partial t} = -\dfrac{L_0 P_0}{\rho \mu V_0} \vec{\bigtriangledown} P' + \vec{\Delta} \vec{V'} + \dfrac{L_0^2 j_0 M_0}{\mu V_0} \vec{f'} \end{cases}$$

On adimensionne par rapport à V_0 et P_0 de sorte que $\frac{L_0 P_0}{\rho \mu V_0} = 1$ et $\frac{L_0^2 j_0 M_0}{\mu V_0} = 1$, le régime stationnaire étant établi :

$$\vec{0} = -\vec{\bigtriangledown} P' + \vec{\Delta} V' + \vec{f'} \text{ dans } \Omega$$

2.0.3 Formulation variationnelle

Afin d'obtenir la formulation variationnelle de l'équation de Stokes, on passe dans l'espace des distribution de sorte que pour toute fonctions test φ on a

$$\int_\Omega \vec{\bigtriangledown} P' \times \vec{\varphi} = \int_\Omega -\mu \vec{\Delta} V' \times \vec{\varphi} + \int_\Omega \vec{f'} \times \vec{\varphi}$$

En appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad \int_\Omega \vec{\bigtriangledown} P' . \vec{\varphi} + \int_\Omega \bigtriangledown V' . \bigtriangledown \varphi = \int_\Omega \vec{f'} . \vec{\varphi}$$

Comme précédemment nous nous plaçons dans l'espace V_h d'approximation polynomiale de degrés 1. Nous pouvons ainsi décomposer les champs de pression P', la vitesse V' et la force $\vec{f'}$ dans la base des (φ_i) :

$$\begin{cases} V' = \sum_{i=1}^{N_h} V_i\varphi_i \quad \text{où } V_i = V(P_i),\ i = 1, 2, ..., N_h \\ P' = \sum_{i=1}^{N_h} P_i\varphi_i \quad \text{où } P_i = P(P_i),\ i = 1, 2, ..., N_h \\ f' = \sum_{i=1}^{N_h} f_i\varphi_i \quad \text{où } f_i = f(P_i),\ i = 1, 2, ..., N_h \end{cases}$$

On prend $\varphi = \varphi_i$ un vecteur de la base

$$\begin{cases} \int_\Omega \bigtriangledown V_h. \bigtriangledown \varphi \ = \sum_{i,j\in[1,N_h]^2} \int_\Omega V_i \bigtriangledown \varphi_i. \bigtriangledown \varphi_j = \sum_{i,j\in[1,N_h]^2} A_{ij}V_i \\ \int_\Omega \bigtriangledown P_h.\varphi \ = \sum_{i,j\in[1,N_h]^2} \int_\Omega P_i \bigtriangledown \varphi_i.\varphi_j = \sum_{i,j\in[1,N_h]^2} C_{ij}u_i \\ \int_\Omega f.\varphi \ = \sum_{i,j\in[1,N_h]^2} \int_\Omega f_i\varphi_i.\varphi_j = \sum_{i,j\in[1,N_h]^2} M_{ij}f_i \end{cases}$$

On peut donc écrire la formulation variationnelle sous la forme d'un problème linéaire :

$$\begin{cases} -A \times V + C \times P = M \times f \text{ sur } \Omega \\ C * V = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La linéarité de l'équation nous permet d'appliquer le principe de supperposition est donc de décomposer la résolution du problème en deux résolutions : une pour chaque terme source et ensuite de les sommer. Pour cela, nous allons chercher à calculer le terme source dans la suite, c'est à dire le champ magnétique.

Chapitre 3

Modélisation du champ Magnétique de l'aimant

Nous cherchons dans cette partie à déterminer une approximation numérique du champ magnétique $\vec{B}(x, y, z)$ induit par un aimant (Figure 1). L'objectif sera d'abord de déterminer le champ magnétique dans une configuration quelconque, pour ensuite exploiter ces résultats et les employer dans la résolution numérique de Navier Stokes. On suppose que l'aimant à une longueur suffisante selon $\vec{z}$ pour

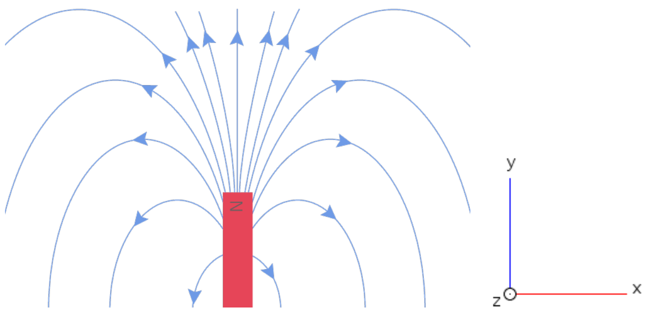

FIGURE 3.1 – champ magnétique d'un aimant coupe 2D

être considéré comme infini selon $\vec{z}$. On en déduit donc par le principe de Curie que le champ magnétique est invariant par translation selon $\vec{z}$. Ainsi

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y)$$

3.1 Mise en forme du problème

Nous allons rechercher une solution du champ magnétique dans le domaine de résolution Ω (figure 2), $\Omega \subset R^2$.
On définit Ω_{int} le domaine de l'aimant, et Ω_e le domaine extérieur à l'aimant.

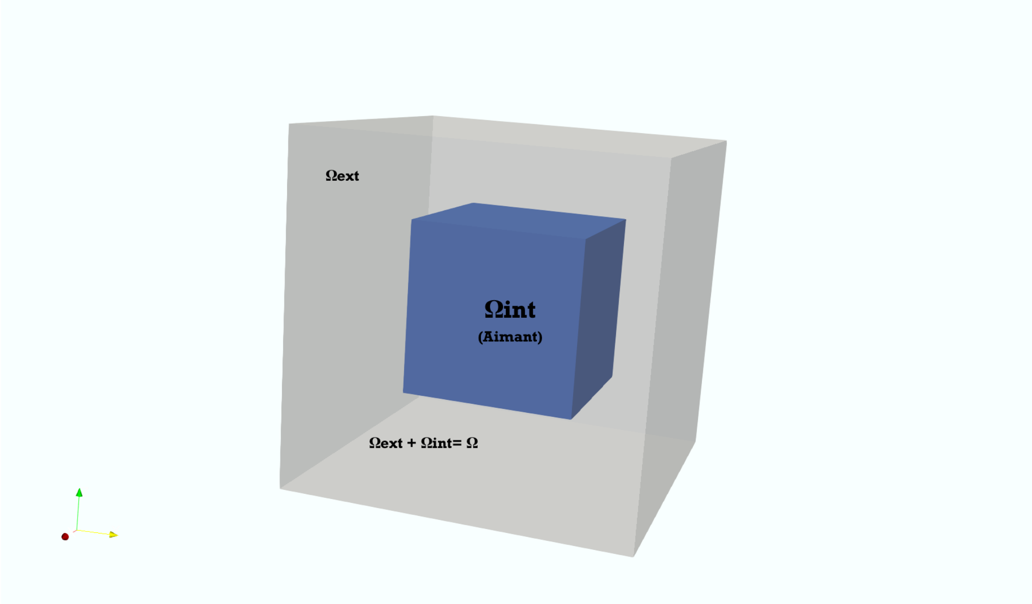

FIGURE 3.2 – domaines de résolution du problème

$$\Omega_e = \Omega_{int} - \Omega$$

On se place dans le régime stationnaire comme il n'y a pas de mouvements de l'aimant.
Le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ est la somme du champs magnétique $\vec{H}$.

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.
L'aimantation $\vec{M}$ est nulle en dehors de l'aimant.

$$\begin{cases} \vec{M} = \vec{0} \text{ dans } \Omega_e \\ \vec{M} = \vec{M_0} = \text{constante dans } \Omega_{\text{int}} \end{cases}$$

Pour trouver le champ magnétique, on appliquer les équations fondamentales de la magnétostatique. L'équation de Maxwell nous donne

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Le domaine étant simplement connexe, $\vec{H}$ dérive d'un potentiel u .

$$\begin{cases} \vec{H} = \operatorname{grad} \vec{u} \\ \vec{B} = \mu_0 \times (\,\vec{\operatorname{grad}}\, u + \vec{M}) \end{cases}$$

Au sens des distributions pour toute fonction φ dans $D(\Omega)$

$$< \operatorname{div} \vec{B}, \varphi > = < -\vec{B}, \vec{\operatorname{grad}}\, \varphi >$$

On suppose $\vec{B} \in L_1^3(\Omega)$

$$< \operatorname{div} \vec{B}, \varphi > = -\int_\Omega \vec{B}.\, \vec{\operatorname{grad}}\, \varphi$$

$$< \operatorname{div} \vec{B}, \varphi > = -\int_\Omega \mu_0(\,\vec{\operatorname{grad}}\, u + \vec{M}).\, \operatorname{grad} \varphi = 0$$

Ainsi

$$\int_\Omega (\,\vec{\operatorname{grad}}\, u + \vec{M}).\, \vec{\operatorname{grad}}\, \varphi = 0$$

Et comme $\vec{M}$ est nul en dehors du domaine Ω_{int} de l'aimant, on obtient (1)

On reconnait un problème de Dirichlet homogène qui admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ d'après le théorème de Lax-Migram.

$$\forall \varphi \ \in \Omega, \ \int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown \varphi = -\vec{M_0}. \int_{\Omega_{int}} \bigtriangledown \varphi \tag{3.1}$$

Adimensionnons (1) :

$$\forall \varphi \ \in \Omega, \ \frac{1}{|\vec{M_0}|} \int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown \varphi = -\vec{e_y}. \int_{\Omega_{int}} \bigtriangledown \varphi$$

On prend pour la suite

$$U = \frac{u}{|\vec{M_0}|}$$

ce qui nous donne

$$\vec{H}^* = \frac{\vec{H}}{M_0}$$

On établit ainsi

$$\boxed{\forall \varphi \ \in \Omega, \ \int_\Omega \bigtriangledown U. \bigtriangledown \varphi = -\vec{e_y}. \int_{\Omega_{int}} \bigtriangledown \varphi} \tag{3.2}$$

3.2 Méthode des éléments finis

3.2.1 Le maillage

On recherche une solution approchée de l'équation numériquement en passant de l'espace continu à un espace discret.

On utilise la méthode des éléments finis en recherchant une solution dans l'espace $V_h = \{u \mid u \in P^1(\Omega^2), u \in H_0^1(R^2)\}$.

On introduit une triangulation T_h en subdivisant $\overline{\Omega}$, de bord $\Gamma = \partial\Omega$.

Cette triangulation vérifie les propriétés suivantes :

- l'intersection de deux triangles de T_h doit être réduite à un sommet commun, à une arête commune et entière ou à l'ensemble vide
- l'aire des triangles ne doit pas être nulle
- tous les coins du bord Γ sont des sommets de triangles de T_h

Le maillage ainsi construit est tel que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$$

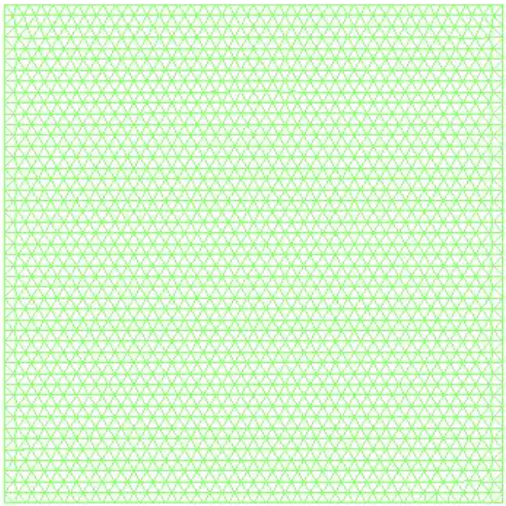

FIGURE 3.3 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D d'un carré 1×1.05 avec un pas constant h = 0.1

On note que le maillage est caractérisé par la longueur de la plus petite arrête h_{min} telle que

$$h_{min} = \min_{K \in T_h} h_K$$

h_{min} va notamment déterminer l'erreur entre la solution continue et la solution discrète. §

On choisit une base de V_h, on prend la famille des fonctions de base $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N_h}$ telles qu'elles valent 1 en un sommet d'un triangle, et 0 pour tous les autres sommets. On note $P_1, P_2, ..., P_{N_h}$ les sommets des triangles du maillage. Les fonctions de base sont donc définies ainsi :

$$\forall i, j \in [1, N_h]^2 \ \varphi_i \in L^2(\Omega),\ \varphi_i(P_j) \ = \ \delta_{ij} \ \ \varphi_i \ = \ 0 \ sur \ \Gamma$$

Le support de φ_i est la réunion de tous les triangles ayant pour sommet P_i.
On vérifie que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N_h})$ est une base de V_h. Ainsi toute fonction g dans V_h peut s'écrire comme une combinaisons linéaire des φ_i

$$g = \sum_{i=1}^{N_h} g_i \varphi_i \quad \text{où } g_i = g(P_i),\ i = 1, 2, ..., N_h$$

3.2.2 Mise en équation

Réécrivons (1.2) dans V_h :

$$\forall \varphi \in V_h,\ \int_\Omega \nabla u_h. \nabla \varphi = -\vec{M}_0. \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi$$

Nous pouvons écrire $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \varphi_i$ où $U_i = U(P_i),\ i = 1, 2, ..., N_h$
et choisir $\varphi \ = \ \varphi_i$ ainsi

$$\int_\Omega \nabla u_h. \nabla \varphi \ = \ \sum_{i,j \in [1,N_h]^2} \int_\Omega u_i \nabla \varphi_i. \nabla \varphi_j = \sum_{i,j \in [1,N_h]^2} A_{ij} u_i$$

avec A la matrice $N_h \times N_h$ de coefficients

$$A_{ij} = \int_\Omega \nabla \varphi_i. \nabla \varphi_j$$

et si on introduit le vecteur $\vec{f}$ de composantes $f_1,\ f_2, ..., f_{N_h}$ définies par

$$f_j = -\vec{e_y}. \int_\Omega \nabla \varphi_j$$

Alors l'équation (2) revient de manière équivalente à résoudre le système linéaire

$$A \times U = F$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_h} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N_h} \end{pmatrix} \quad A_{ij} = \int_\Omega \bigtriangledown \varphi_i . \bigtriangledown \varphi_j$$

On appelle A la matrice de rigidité.

3.2.3 Passage à un élément de référence

Pour les calculs on utilise un maillage référence normalisé $\hat{T}$. On passe du triangle $\hat{T}$ à T à l'aide de la transformation F. On a pour le calcul du gradient de

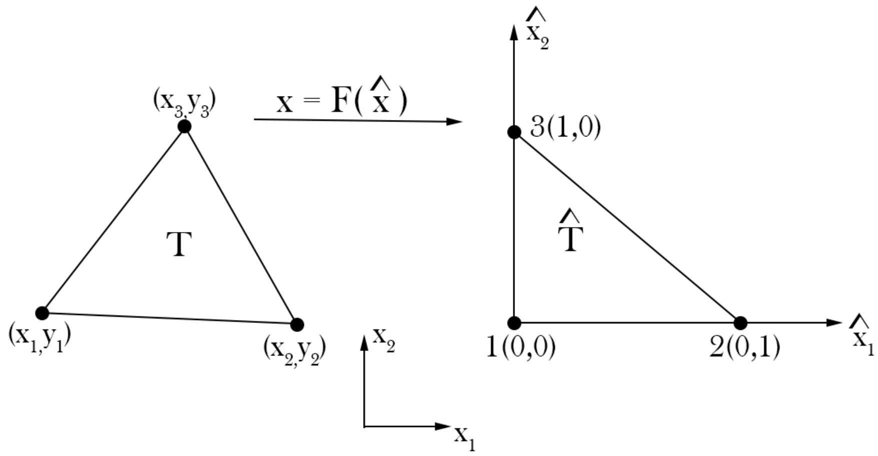

FIGURE 3.4 – passage à un maillage de référence

φ_i

$$\nabla_{\hat{x}}\hat{\varphi} = (J)^T \nabla_x \varphi$$

où J est la matrice Jacobienne de la transformation. Calculons la matrice Jacobienne qui va dépendre des coordonnées (x_i, y_i) des sommets pour chaque triangle.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\hat{x}) \\ F_2(\hat{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = J \times \hat{x} + C$$

On obtient ainsi à l'aide d'un changement de variable le calcul de la matrice de rigidité (voir annexe A) :

$$\boxed{A_{ij} = \iint_\Omega \nabla_x\varphi_i \nabla_x \varphi_j = \sum_{T\in \mathrm{Supp}(\varphi_i)\times \mathrm{Supp}(\varphi_j)} \frac{\mathrm{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}}\, \hat{\varphi}_i \nabla_{\hat{x}}\, \hat{\varphi}_j}$$

Calculons à présent le terme source $f_j = -\vec{e_y}. \int_\Omega \nabla \varphi_j$.

D'après Green-Ostrogradsky

$$\iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i = \int_{\partial\Omega_{\text{int}}} \varphi_i.\vec{\text{n}}\ \partial s$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_{\text{int}}} \varphi_i.\vec{\text{n}}\ \partial s &= \sum_{e\in\partial\Omega_{\text{int}}} \int_e \varphi_i.\vec{\text{n}}_e\ \partial s \\ &= \sum_{e\in\partial\text{supp}(\varphi_i)} \int_e \varphi_i.\vec{\text{n}}_e\ \partial s\end{aligned}$$

où $\vec{\text{n}}_e$ est le vecteur unitaire normal sortant à l'arête e.

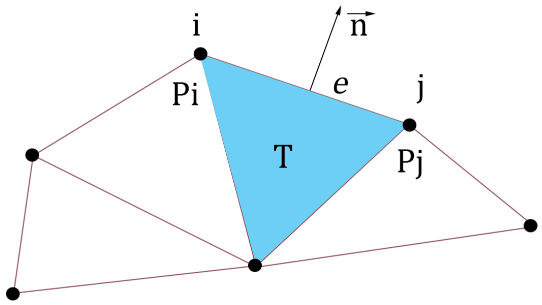

FIGURE 3.5 – arêtes

$$|e| \times \vec{\text{n}}_e = \begin{pmatrix} y_j - y_i \\ x_i - x_j \end{pmatrix}$$

avec le changement de variable $x = s \times \text{Pi} + (1-s) \times \text{Pj},\ \ s \in [0;1]$

$$\int_e \varphi_i.\vec{\text{n}}_e\ \partial s = |e|(\int_0^1 \varphi_i\ \partial x).\vec{\text{n}}_e$$

avec

$$\int_0^1 \varphi_i\ \partial s = \text{aire du triangle rectangle de coté } |\text{e}| \text{ et de hauteur } 1 = \frac{|e|}{2}$$

d'où

$$\int_e \varphi_i.\vec{\text{n}}_e\ \partial s = |e|(\int_0^1 \varphi_i\ \partial x).\vec{\text{n}}_e = \frac{|e|}{2}.\vec{\text{n}}_e = \frac{|e|^2}{2}\begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Au final

$$\iint_\Omega \nabla_x \varphi_i = \sum_{e \in \partial \mathrm{supp}(\varphi_i)} \int_e \varphi_i.\vec{\mathrm{n}}_e \, \partial s = \sum_{e \in \partial \mathrm{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iint_\Omega \nabla_x \varphi_i = \sum_{e \in \partial \mathrm{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Au final

$$\boxed{f_j = -\vec{e_y}. \sum_{e \in \partial \mathrm{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}}$$

3.2.4 Calcul du Gradient

Ce que nous voulons obtenir à l'issue de notre étude du potentiel u, c'est le champ magnétique $\vec{B}$, que l'on peut calculer en tout point du maillage par la même méthode numérique, que l'on a utilisé pour calculer le potentiel u.
On pose donc $\vec{B} = \nabla u$.

On écrit la forme variationnelle dans V_h (ainsi B suit une décomposition dans V_h, tel que $B = \sum_i B_{xi} \varphi_i$:

$$\forall \varphi \in V_h, \int_\Omega B.\varphi = \int_\Omega \nabla u.\varphi$$
$$\sum_{i,j} \sum_{T \in \mathrm{Supp}(\varphi_i) \times \mathrm{Supp}(\varphi_j)} B_i \int_T \varphi_i \varphi_j = \sum_i \sum_{T \in \mathrm{Supp}(\varphi_i) \times \mathrm{Supp}(\varphi_j)} u_i \int_T \nabla \varphi_i \varphi_j$$

On peut donc réécrire l'équation précédente comme un problème linéaire sous forme matricielle $M \times B = C \times U$

Nous pouvons écrire l'équation ci dessus sous forme matricielle, en introduisant M et C, définit de la façon suivante :

$$M_{ij} = \int_T \varphi_i.\varphi_j \text{ appellé la matrice de masse}$$

$$C_{ij} = \int_T \nabla \varphi_i.\varphi_j$$

Soit

$$\boxed{B = M^{-1} \times C \times U}$$

On va donc comme la matrice de rigidité, remplir les matrices M et C à l'aide de matrices élémentaires.
Calculons ainsi les termes de la matrice C :

$$\begin{aligned}
C_{ij} &= \iint_\Omega \nabla\varphi_i \varphi_j dx = \sum_{K \in supp\varphi_j} \nabla_K \varphi_i \iint_K \varphi_j dx \\
&= \sum_{K \in supp\varphi_j} (J^{-1}{}_K)^T (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} |J_K| \hat{\varphi}_j \hat{dx} \\
&= \sum_{K \in supp\varphi_j} (J^{-1}{}_K)^T |J_K| (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_j \hat{dx}
\end{aligned}$$

$$\boxed{C_{ij} = \sum_{K \in supp\varphi_j} (J^{-1}{}_K)^T |J_K| (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_j \hat{dx}}$$

Calculons une matrice élémentaire de C sur un triangle K du maillage qui aura donc pour composantes (si on se place selon la composante x du gradient)

$$|J_K| \times \begin{pmatrix} \nabla_{\hat{K}} \varphi_{1|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_K \varphi_{1|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_K \varphi_{1|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \\ \nabla_K \varphi_{2|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_K \varphi_{2|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_K \varphi_{2|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \\ \nabla_K \varphi_{3|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_K \varphi_{3|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_K \varphi_{3|x} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

Calculons les intégrales :

$$\begin{cases}
\iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 \hat{dx} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2) \hat{dx}_1 \hat{dx}_2 \quad = 1/6 \\
\iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 \hat{dx} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 \hat{dx}_1 \hat{dx}_2 = 1/6 \\
\iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \hat{dx} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 \hat{dx}_1 \hat{dx}_2 = 1/6
\end{cases}$$

On a ainsi a matrice élémentaire du terme C sur un triangle K :

$$\frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} \nabla_K \varphi_{1|x} & \nabla_K \varphi_{1|x} & \nabla_K \varphi_{1|x} \\ \nabla_K \varphi_{2|x} & \nabla_K \varphi_{2|x} & \nabla_K \varphi_{2|x} \\ \nabla_K \varphi_{3|x} & \nabla_K \varphi_{3|x} & \nabla_K \varphi_{3|x} \end{pmatrix}$$

Calcul de la matrice M

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \varphi_i \varphi_j$$

Sur un triangle K du maillage , on obtient de la même manière que précédemment

$$\begin{aligned} {M_{ij}}^{\mathrm{k}} &= \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} |J_K| \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x} \\ &= 2 \times \mathrm{aire}(K) \times \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x} \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer les intégrales

$$\int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x}$$

par symétrie

$$\forall i \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} {\hat{\varphi}_i}^2 = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_2^2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{12}$$

$$\forall i \neq j \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i \times \hat{\varphi}_j = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 \hat{x}_2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{24}$$

On en déduit la matrice de masse élémentaire sur un triangle de maillage

$$\boxed{M^{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{aire}(K)}{12} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

3.2.5 Implémentation algorithmique

Pour la résolution du problème nous utiliserons matlab avec la bibliothèque Mesh2D par Darren Engwirda pour la création du maillage 2D. La résolution est effectué sur un maillage 5×5 avec en son centre un aimant de taille 1×1cm.

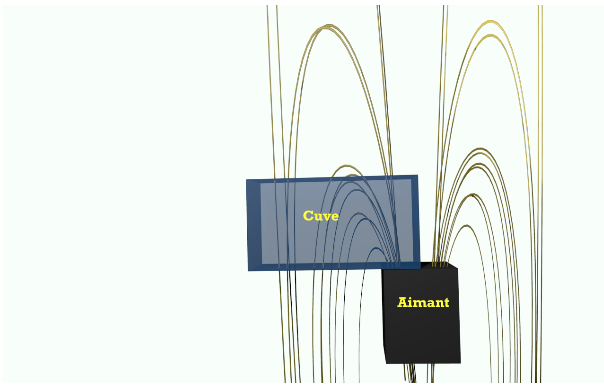

FIGURE 3.6 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D pour la résolution du problème

Pour le calcul nécessaire des différentes matrice afin de résoudre le problème linéaire $A \times U = F$, les algorithmes reposent sur la méthodologie suivante : Par exemple pour le calcul de la matrice A :

$$A_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i \, \nabla_x \, \varphi_j = \sum_{T \in \mathrm{Supp}(\varphi_i) \times \mathrm{Supp}(\varphi_j)} \frac{\mathrm{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \, \hat{\varphi}_i \, \nabla_{\hat{x}} \, \hat{\varphi}_j$$

Le principe consiste à ne pas recherche le support croisé des fonctions φ_i et φ_j (ce qui donnerait une complexité trop importante) mais à boucler sur les triangles et placer dans la matrice les contributions correspondantes à chacun de leurs nœuds avec leur indices. Notamment avec l'outil matriciel *sparce* de matlab qui permet d'exploiter en temps de calcul et d'espace mémoire le fait que la matrice de rigidité A est creuse, comme pour deux fonction φ_i et φ_j l'intersection de leurs support se réduit à deux triangle.

Ainsi pour le calcul de A chaque triangle engendre une matrice élémentaire 3×3 (car 3 nœuds pour chaque triangle donc 9 termes croisés) symétrique vu le calcul du terme A_{ij} dont on place les terme dans la matrice A à chaque itération sur les triangles.

Le principe est le même pour le terme source, pour chaque triangle appartenant au bord de l'aimant avec comme noeuds sur le bord les nœuds p_i et p_j on place deux fois le même terme $\frac{|e|}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^T.\vec{\mathrm{n}}_e$ (que l'on à calculé p.21) aux indices p_i et p_j dans la matrice du terme source.

Et de même également pour le calcul des matrices M et C pour le gradient, dont nous avons explicité les matrices élémentaires.

Chapitre 4

Application au problème de Navier-Stokes 3D

Après l'implantation d'une méthode pour calculer le champ magnétique en 2 dimensions , il nous est nécessaire de nous replacer dans le cas de Navier-Stokes en 3 dimensions.

En effet nous avons effectué l'étude précédente dans le cas d'un milieu neutre de longueur L , et de largeur H, avec les lignes de champ magnétique issue d'un aimant au milieu de l'espace. L'objectif est d'abord d'extraire de cet espace le champ magnétique qui se trouve dans la cuve apposée à l'aimant.
Avant toute chose, il est important de comprendre quelle configuration préalable de modélisation numérique , nous devons prendre pour notre cuve, car l'algorithme de calcul numérique de l'équation de Navier-Stokes 3D vers lequel nous allons devoir exporter les valeurs du champ magnétique prend les valeurs de forces magnétiques de Laplace uniquement sous un certain format. Nous devons donc préalablement présenter l'algorithme de calcul de l'équation de Navier-Stokes 3D sous lequel nous travaillons.

4.0.1 Implémentation algorithmique

Sous Matlab, nous avons utilisé un algorithme de résolution d'équations dérivées partielles avec la méthode 3D de différences finies : elle consiste à discrétiser le domaine en grille et approcher les opérateurs par des différences, ce qui nous permet d'obtenir une approximation de la vitesse et la pression en chaque nœud de la grille.

Le domaine $\Omega =]0; L_x[.]0; L_y[.]0; L_z[$ est discrétisé par un maillage uniforme défini par les points :

$$\begin{cases} x_{ij} = (\frac{i*L_x}{N+1}, \frac{j*L_x}{N+1}), i, j = 0, 1, ..., N+1 \\ y_{ij} = (\frac{i*L_y}{N+1}, \frac{j*L_y}{N+1}), i, j = 0, 1, ..., N+1 \\ z_{ij} = (\frac{i*L_z}{N+1}, \frac{j*L_z}{N+1}), i, j = 0, 1, ..., N+1 \end{cases}$$

On cherche les approximations :

$$u_{ij}^{(1)} \approx u_1(x_{ij}) \text{ et } u_{ij}^{(2)} \approx u_2(x_{ij})$$

avec $u^(1)$ et $u^(2)$ les deux composantes de la vitesse exacte V en 2D. Pour discrétiser le système d'équations 4.1, nous utilisons la méthode de différences finies centrée. On pose h= $\frac{1}{N+1}$:

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{ij}^{(k)} + \frac{1}{2h}(p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) = f_{ij}^{(k)} \\ \frac{1}{2h}(u_{i+1,j}^{(1)} - u_{i-1,j}^{(1)}) + \frac{1}{2h}(u_{i+1,j}^{(2)} - u_{i-1,j}^{(2)}) = 0 \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \text{ pour } i,j = 0,...N+1 \end{cases}$$

avec :

$$\Delta_h u_{ij} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j_1})$$

Nous disposons de $3N^2$ équations . Les maillages sur $\vec{V}$ et P sont choisis de sorte que le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues. Le maillage 3D utilisé par l'algorithme est un maillage droit , ce qui implique que les données que l'on va exporter sont calculées et configurées sur la même base de maillage

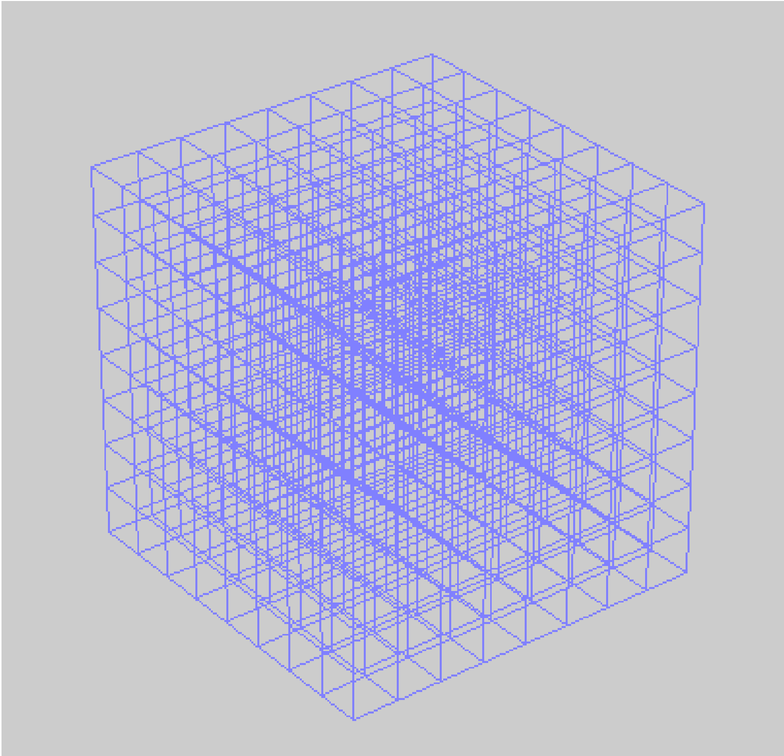

FIGURE 4.1 – domaines de résolution du problème

triangulaire en 2 dimensions de l'espace de calcul.

Nous devons adapter notre maillage précédent du calcul de la force de Laplace à l'aide des éléments finis aux besoins de l'algorithme précédent :

tout d'abord nous devons travailler sur un maillage triangulaire droit dont les dimensions coincident avec le maillage de la base de l'espace de travail précédent. Nous prenons une largeur L , un profondeur P, et une hauteur H pour la cuve avec un nombre de points Nx*Ny pour le maillage. Afin d'avoir un maillage qui colle à ces contraintes, nous allons utiliser la fonction delaunay de Matlab, qui prend en argument les coordonnées x et y des points de l'espace que nous allons mailler.
ci dessous le maillage de l'espace de travail initial sur laquelle nous allons calculer notre fonction champ magnétique :
Néanmoins nous devons auparavant nous replacer dans le contexte initial : le

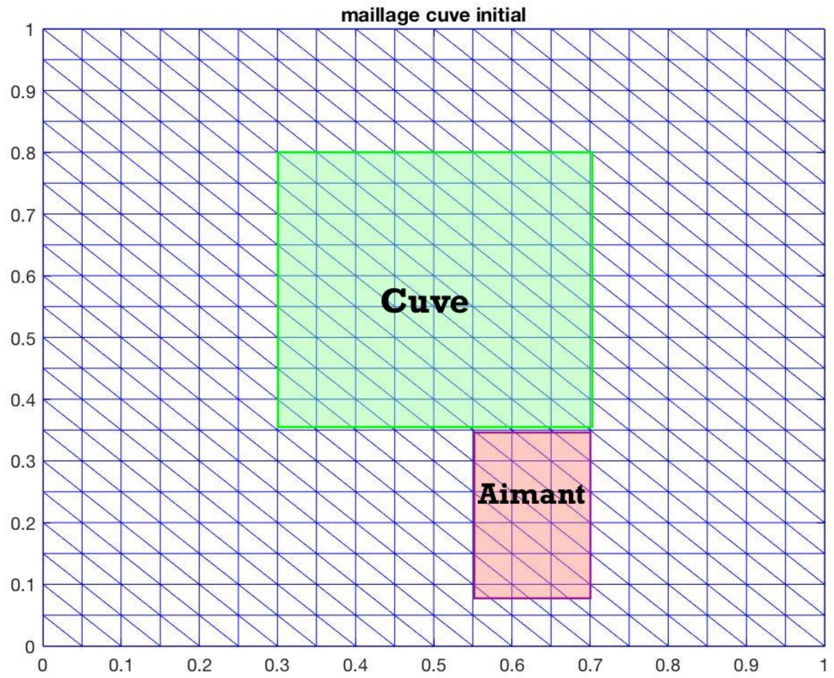

FIGURE 4.2 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D pour la résolution du problème

maillage précédent ne servirait qu'à calculer le champ magnétique sur tout l'espace avec l'aimant au milieu de l'espace et avec approximation de quasi nullité de la fonction aux bords de l'espace de travail.
Or ce qui nous intéresse est le calcul du champ magnétique uniquement dans la cuve, qui est accolée à l'aimant. Il y a donc un travail préalable de redécoupage de l'espace après calcul du champ magnétique en dimensionnant l'aimant selon des coordonnées particulières.

L'objectif est d'extraire les noeuds, triangles et valeurs de champ magnétique associés à cette espace. Il faut donc dans les programmes précédents inclure des commandes supplémentaires afin d'assigner à chaque objet précédent un nouvel attribut entre $\{0, 1, 2\}$ qui détermine si l'on est soit dans l'aimant , soit dans la cuve, soit dans l'espace environnant (notamment avec l'attribut fnum, utilisé dans le calcul du second membre des éléments finis).

Maintenant notre objectif est de pouvoir adapter les données extraites à l'algorithme de Stokes 3D. Le premier obstacle est de réindexer le numéro des triangles pour qu'il y ait une bonne consistance des données lorsque l'algorithme va les utiliser : il faut renuméroter les triangles dans l'ordre.

Un autre obstacle est la structure de calcul sur les cubes du champ de vitesse par l'algorithme qui se base sur l'équation de Navier Stokes :
l'algorithme de Navier Stokes calcule le champ de vitesse dans le maillage cubique de l'espace, avec par cellule de calcul de 8 cubes , une connectivité de 27 points répartis avec une indexation particulière qu'il faudra prendre en compte lors du transfert des résultats du champ magnétique vers cette algo. On notera la présence par arête de 3 points , et non pas 2 (un de plus au milieu) : en effet l'algorithme utilisé pour résoudre numérique de Navier Stokes est la méthode de différences finies centrée.
Cette algorithme prend en argument comme vu précedemment la matrice de rigidité A , et le second membre se rapportant à la force électromagnétique de Laplace. Lorsque l'on veut programmer le second membre dans l'algorithme à partir des coordonnées f(x,y) dans l'espace 3D pour le mettre au format vectoriel demander par l'algorithme, on remplit le second membre selon la table de connectivité ci dessous.

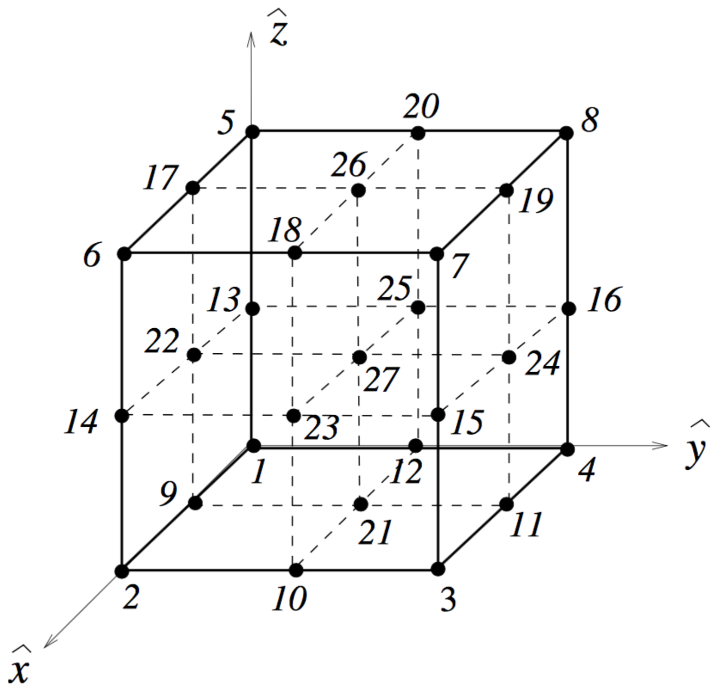

FIGURE 4.3 – table de connectivité pour le remplissage du second membre dans l'algorithme de résolution de l'équation de Navier Stokes

Prenons par exemple les 9 premiers termes de la fonction force de Laplace au niveau $z = 0$ à partir de l'origine de ce plan dans le maillage de la cuve. Schématiquement si l'on se limite à la portion $[0; 2/N_x].[0; 2/N_y]$, on remplit le vecteur $\vec{f_z}$

$$\vec{f}_z = \begin{pmatrix} f_z(0,0) & f_z(1/N_x,0) & f_z(2/N_x,0) \\ f_z(0,1/N_y) & f_z(1/N_x,1/N_y) & f_z(2/N_x,1/N_y) \\ f_z(0,2/N_y) & f_z(1/N_x,2/N_y) & f_z(2/N_x,2/N_y) \end{pmatrix} \overset{\text{selon table de connectivité}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} f_z(0,0) \\ f_z(2/N_x,0) \\ f_z(2/N_x,2/N_y) \\ f_z(0,2/N_y) \\ ... \\ f_z(1/N_x,0) \\ f_z(2/N_x,1/N_y) \\ f_z(1/N_x,2/N_y) \\ f_z(0,1/N_y) \\ ... \\ f_z(1/N_x,1/N_y) \end{pmatrix}$$

Annexe A

Calcul de la matrice de rigidité

La matrice Jacobienne de la transformation est définie par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(\varphi(F(\hat{x})) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)\frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x})$$

Donc

$$\bigtriangledown_{\hat{x}}\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = J^T \times \bigtriangledown_x \varphi$$

Calculons $\bigtriangledown_{\hat{x}}\hat{\varphi}$ sur le triangle de référence $\hat{T}$:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1 = -\hat{x}_1 + 1 - \hat{x}_2 \\ \hat{\varphi}_2 = \hat{x}_1 \\ \hat{\varphi}_3 = \hat{x}_2 \end{cases}$$

En effet $\hat{\varphi}_1$ vaut 1 sur le sommet 1 et 0 sur les autres sommets (Figure 3). Ainsi

$$\bigtriangledown_{\hat{x}}\hat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \bigtriangledown_{\hat{x}}\,\hat{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \bigtriangledown_{\hat{x}}\,\hat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\bigtriangledown_{\hat{x}}\hat{\varphi}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$\Big|J\Big| = (x_2 - x_1) \times (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \times (y_2 - y_1) = 2 \times \text{Aire}(T)$$

où $|J|$ est le déterminant de la matrice J et ainsi

$$\bigtriangledown_x \varphi = (J^{-1})^T \times \bigtriangledown_{\hat{x}} \hat{\varphi}$$

avec

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} (J^{-1})^T &= \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \\ * \\ &= \frac{1}{2 \times \text{aire}(T)} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et le calcul du terme A_{ij} de la matrice de rigidité, on obtient ainsi avec le changement de variable vers le triangle de référence.

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{ij} &= \sum_{T \in \mathrm{Supp}(\varphi_i) \times \mathrm{Supp}(\varphi_j)} \iint_{(i,j) \in T} \bigtriangledown_x \varphi_i \bigtriangledown_x \varphi_j \\ &= \sum_{T \in \mathrm{Supp}(\varphi_i) \times \mathrm{Supp}(\varphi_j)} \iint_{(i,j) \in T} (J^{-1})^T |J| (J^{-1})^T |J| \times \bigtriangledown_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \times \bigtriangledown_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j \\ &= \sum_{T \in \mathrm{Supp}(\varphi_i) \times \mathrm{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \bigtriangledown_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \bigtriangledown_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j \end{aligned}$$

Annexe B

Démonstration équation (1)

Pour trouver le champ magnétique, on appliquer les équations fondamentales de la magnétostatique. L'équation de Maxwell nous donne

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Le domaine étant simplement connexe, $\vec{H}$ dérive d'un potentiel u .

$$\begin{cases} \vec{H} = \operatorname{grad} \vec{u} \\ \vec{B} = \mu_0 \times (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u + \vec{M}) \end{cases}$$

Au sens des distributions pour toute fonction φ dans $D(\Omega)$

$$< \operatorname{div} \vec{B}, \varphi > = < -\vec{B}, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \varphi >$$

On suppose $\vec{B} \in L_1^3(\Omega)$

$$< \operatorname{div} \vec{B}, \varphi > = -\int_\Omega \vec{B}. \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \varphi$$

$$< \operatorname{div} \vec{B}, \varphi > = -\int_\Omega \mu_0 (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u + \vec{M}). \operatorname{grad} \varphi = 0$$

Ainsi

$$\int_\Omega (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u + \vec{M}). \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \varphi = 0$$

Et comme $\vec{M}$ est nul en dehors du domaine Ω_{int} de l'aimant, on obtient (1)

$$\forall\varphi \ \in \Omega,\ \int_{\Omega} \vec{\text{grad}}\, u.\, \vec{\text{grad}}\, \varphi = -\vec{M}_0. \int_{\Omega_{int}} \vec{\text{grad}}\, \varphi$$

Bibliographie

"Introduction à l'analyse numérique"(1998), de Jacque Rappaz et Marco Picasso, publié par les Presses polytechniques et universitaires romandes.

"Méthode des éléments finis : élasticité plane" par Yves Dabard, Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique , http ://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html, 24 mars 2006 – 29 mars 2011

"Analyse numérique des équations de Navier-Stokes",de Jean-François Scheid, Cours de Master 2 Mathématiques (Recherche) - Université de Lorraine, Nancy.

"Projet de deuxième Année : Génération de maillages 2D avec Matlab" de Jean-Philippe LEBOUCHER Benjamin PACCOU avec comme chef de Projet Jonas KOKO, Institut Supérieur d' Informatique, de Modélisation et de leurs Applications