



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE NANCY

RAPPORT DE PROJET 2A

TANCRÈDE COHET ET PIERRE GAUTHIER

Mélange par un écoulement stationnaire de fluide à faible Reynolds

Laboratoire : Institut Élie Cartan

Tuteurs : Pierre Brancher et Jean-François Scheid

21 Mars 2018

Table des matières

1 Position du problème	3
1.0.1 Définition de l'advection chaotique	3
1.0.2 dispositif expérimental	5
1.0.3 hypothèses de modélisation	8
2 Modélisation du champ Magnétique de l'aimant	9
2.1 Mise en forme du problème	10
2.2 Méthode des éléments finis	12
2.2.1 Le maillage	12
2.2.2 Mise en équation	14
2.2.3 Passage à un élément de référence	16
2.2.4 Calcul du Gradient	18
2.2.5 Implémentation algorithmique	21
2.2.6 Résultats de la simulation	23
3 Équations de Navier Stokes	25
3.0.1 Équations de Stokes	26
3.0.2 Adimensionnement de l'équation de Stokes	27
3.0.3 Formulation variationnelle	28
3.0.4 Principe de superposition	29
3.0.5 Implémentation algorithmique	31
3.0.6 Calcul des matrices du système linéaire en trois dimensions .	32
3.0.7 Raccordement à la modélisation du champ magnétique . .	34
3.0.8 Résultats	39
3.0.9 Les sections de Poincaré	46
3.0.10 A la recherche d'un écoulement chaotique	47
A Calcul de la matrice de rigidité	52
B Codes Matlab	54
B.0.1 Modélisation du champ magnétique	54

Introduction :

La résolution d'équations à dérivées partielles sont la clé de voute de la modélisation de systèmes physiques et financiers avec des conditions aux limites des systèmes. Cette problématique est particulièrement vraie en mécanique des fluides avec l'utilisation prépondérante de l'équation de Navier Stokes. Il est donc primordial d'avoir des moyens de résolution/simulation numérique de ce genre d'équation, qui respecte les différentes contraintes que posent la théorie des équations à dérivées partielles (fonctions modélisées respectant les espaces de Sobolev). Une des méthodes numériques de résolution de Navier-Stokes est par exemple la méthode des éléments finis, sur maillage triangulaire.

Le but de ce projet est d'étudier des écoulement chaotiques à faible nombre de Reynolds, c'est à dire des écoulements dont les forces visqueuses sont prépondérantes, qui sont présents typiquement dans l'industrie métallurgique ou dans l'industrie hydro-électrique. Cette problématique de résolution d'équations numériques à dérivées partielles est au cœur des enjeux du projet.

L'approche numérique eulérienne d'un mélange par advection chaotique traite du problème stationnaire avec champ de vitesse sinusoïdale qui correspond à un système de tourbillons orthogonaux, dont le modèle académique analytique a été étudié dans le cadre de la thèse de Valérie Toussaint, que nous allons reprendre avec deux tourbillons d'axes parallèles et un tourbillon qui leur est perpendiculaire.

Cette étude se fait dans la continuité d'un travail effectué par Ismail Mebsout et Oumaima Hammami durant l'année scolaire 2016-2017 où le but sera d'étudier les écoulement en s'affranchissant de certaines simplifications. Dans la première partie de notre étude, nous allons présenter le problème, puis le mettre en équation et calculer la force magnétique composant le terme source de l'équation de Navier-Stokes, pour résoudre numériquement le problème et étudier les résultats.

Chapitre 1

Position du problème

Pour générer l'écoulement que nous souhaitons étudier nous allons utiliser les forces de Laplace. Le fluide (de l'eau) considéré non visqueux dans une cuve est ionisé et placé sous influence d'aimants ferromagnétiques. Chaque particule du fluide va se mouvoir sous l'influence du champ magnétique. Notre but est de configurer correctement les champs magnétiques pour obtenir un écoulement chaotique. On peut définir l'advection chaotique comme un écoulement dans un fluide dont la trajectoire des point passe par tous les point du domaine, ou de manière mathématique avec les écoulements de Liapounov. C'est à dire que théoriquement si on observe le passage d'une particule à travers une section du fluide au bout d'un temps infinis, les points d'impact de la particule recouvriront de manière continue toute la section.

1.0.1 Définition de l'advection chaotique

Pour la définiton d'un écoulement chaotique nous allons considérer la différence entre les approches eulériennes et lagrangienne d'un écoulement. Rappelons d'abord en se plaçant en eulérien , les variables indépendantes à considérer sont le temps t et la position \vec{x} d'une particule fluide à l'instant t .

L'étude de l'advection revient alors à étudier l'évolution au cours du temps du champ vectoriel passif diffusif $\vec{v}(\vec{x}, t)$ régie par l'équation de convection-diffusion :

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \vec{u} \times \vec{\nabla} \vec{v} = D \vec{\Delta} v$$

où D est la diffusivité moléculaire et \vec{u} est le champ de vitesse advectant, incompressible et connu.

Dans le cas où l'écoulement est laminaire, c'est à dire quand l'advection est prépondérante à la diffusion, l'écoulement étant complètement déterministe, le champ de vitesse \vec{u} est une fonction régulière des coordonnées spatiales, et éventuellement du temps.

En revanche, en se plaçant d'un point de vue lagrangien, les variables indépendantes sont alors le temps t et la position initiale \vec{x}_0 de la particule à l'instant t_0 . Un tel système est un système dynamique à 3 degrés de liberté (nécessaire à un écoulement chaotique, il n'y a pas d'advection chaotique en 2D pour des écoulement stationnaire ce qui sera notre cadre d'étude), non autonome(si le champ de vitesse \vec{v} dépend explicitement du temps, et généralement non linéaire à travers la dépendance spatiale du champ de vitesse, et pour lequel on différencie types de stabilité la où on ne le fait pas pour un systeme autonome).

Dans le cas où le champ de vitesse est bi-dimensionnel et stationnaire , toutes les trajectoires de particules fluides dérivent d'une fonction de courant régulière, on dit alors que le système est intégrable dans la terminologie des systèmes dynamiques. Dans les autres cas (notamment le notre) un tel système a de fortes chances d'être non intégrable, autrement dit de conduire à des trajectoires chaotiques.

Ainsi on peut se trouver dans la situation d'un écoulement régulier dans la représentation eulérienne conduisant à une réponse essentiellement erratique si l'on considère l'advection d'un traceur d'un point de vue lagrangien : cette situation est appelée advection chaotique, ou chaos lagrangien.

L'écoulement chaotique va ainsi notamment s'illustrer par une instabilité, notamment dans le cas de deux particules séparé par un écart δx , cet écart va croître exponentiellement selon la théorie des exposants de Lyapunov.

Le chaos lagrangien est particulièrement intéressant lors de mélange laminaire, car il est bien plus intéressant que l'écoulement turbulent, il permet d'effectuer des mé-

lages pour un moindre cout d'énergie. En théorie à partir d'un temps infini, chaque particule aura parcouru l'intégralité des points de l'espace de référence. On mettra en exergue cette assertion avec les sections de Poincaré, dont l'on explicitera les propriétés plus tard dans le rapport.

1.0.2 dispositif expérimental

Expérimentalement, il est possible de réaliser cet écoulement à l'aide du dispositif expérimental décrit dans la thèse de Valérie Toussaint qui repose sur un écoulement à trois tourbillons.

Pour cela, on utilise un système composé d'un parallélépipède, d'aimants permanents et d'électrodes pour générer un vecteur densité de courant. Le parallélépipède est un mélangeur dans lequel se trouve un liquide faiblement conducteur. Afin de générer un tourbillon, on place deux aimants l'un en face de l'autre sur une moitié du parallélépipède pour créer un champ \vec{B} vertical sur cette moitié. On place deux électrodes sur les deux autres faces opposées du parallélépipède pour créer un courant uniforme de densité \vec{j} .

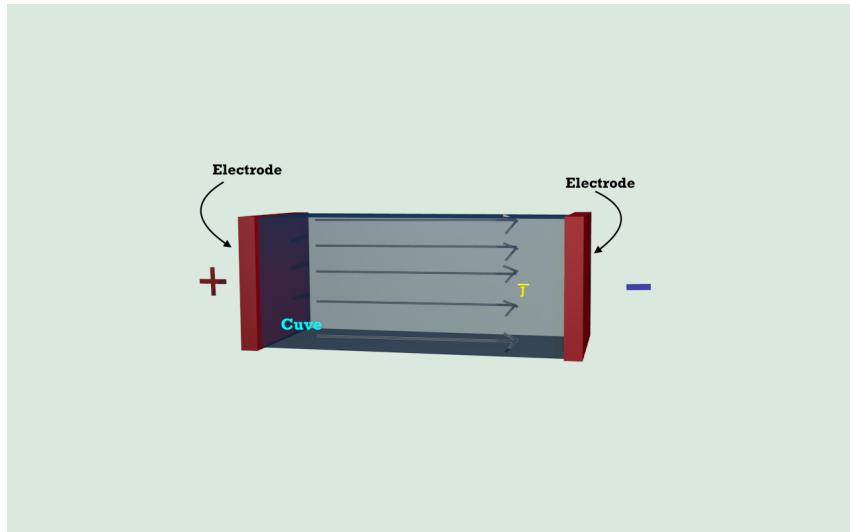


FIGURE 1.1 – liquide faiblement ionisé soumis à un champ électrique \vec{E} , Blender

On place un aimant de telle manière à générer un champ magnétique plus important sur une moitié du cube que l'autre.

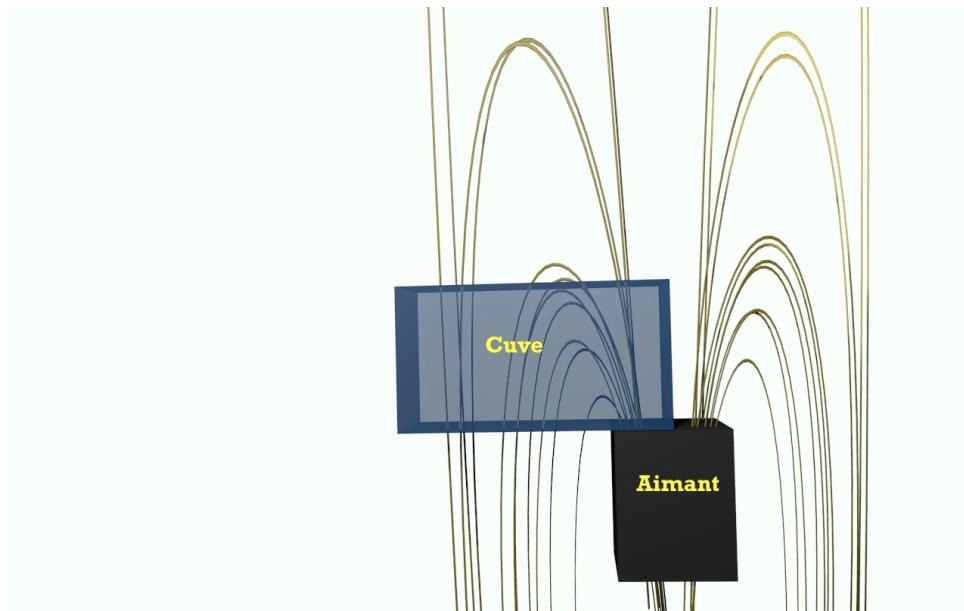


FIGURE 1.2 – lignes de champ magnétique, Blender

La force magnétique $\vec{f}_l = \vec{j}_0 \wedge \vec{B}$ permet ainsi de générer un tourbillon.

Afin de générer un tourbillon, on place deux aimants l'un en face de l'autre sur le deuxième tiers du parallélépipède pour créer un champ B vertical sur le tiers au milieu. On place aussi deux électrodes sur les faces opposées du parallélépipède pour créer un courant uniforme de densité \vec{j} . Une force de Laplace est générée sur une partie du fluide, due à la densité de courant en présence d'un champ magnétique \vec{B} , ce qui génère un tourbillon.

On ajoute ensuite un autre aimant centré sur la cuve qui va lui induire des forces de Laplace de part et d'autres du parallélépipède de telle manière à générer deux tourbillons symétriques.

Puis en sommant les configurations, on arrive à un dispositif expérimental à trois tourbillons.

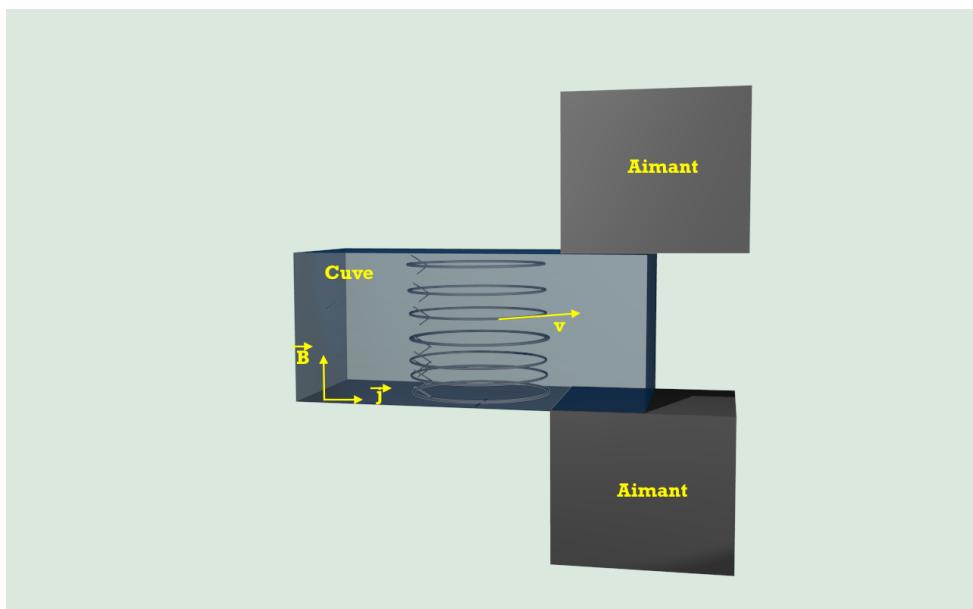


FIGURE 1.3 – liquide faiblement ionisé soumis à un champ électrique et un champ magnétique \vec{B} , Blender

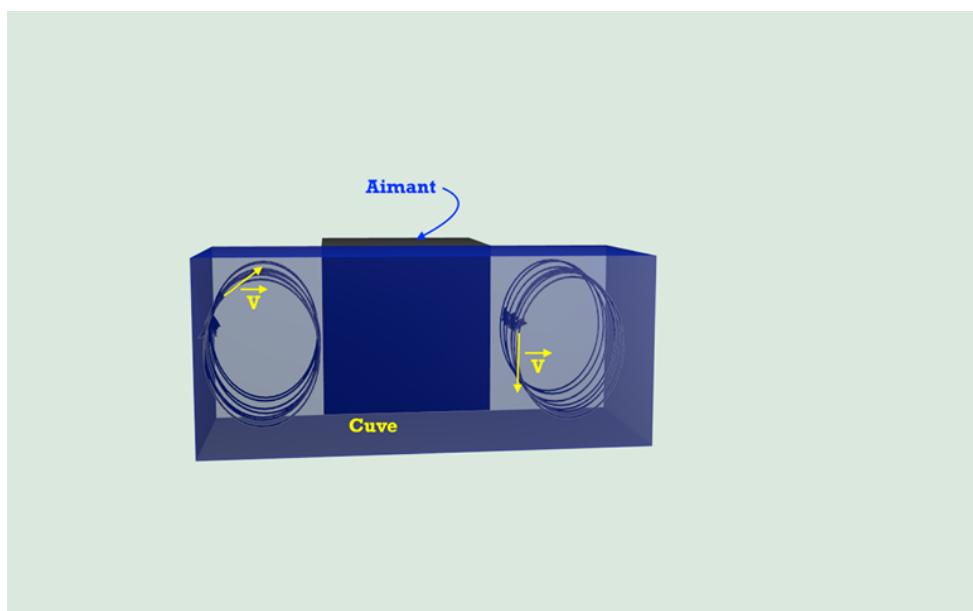


FIGURE 1.4 – configuration avec 2 tourbillons pour un aimant, Blender

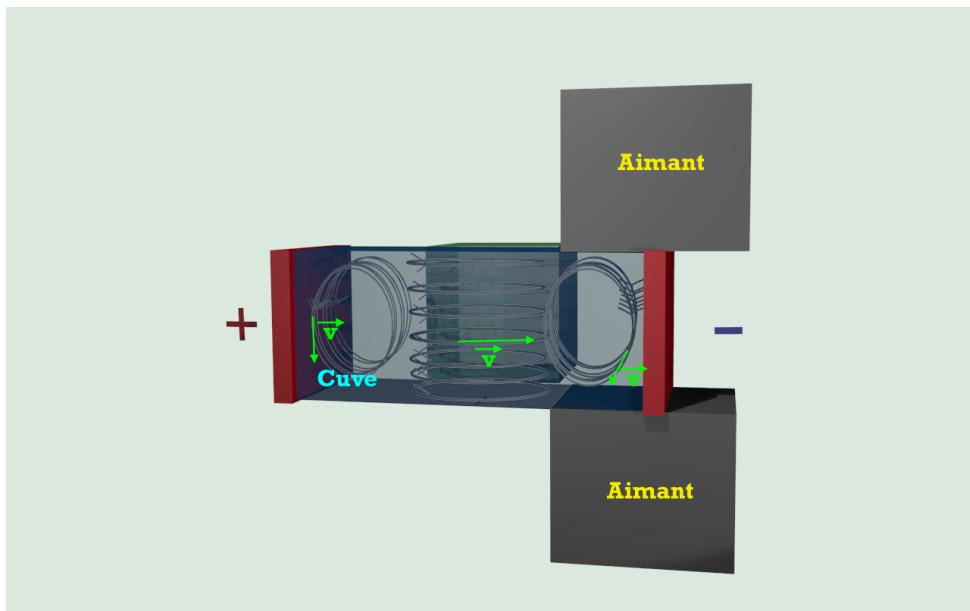


FIGURE 1.5 – dispositif expérimental, Blender

1.0.3 hypothèses de modélisation

Nous devons d'abord modéliser notre système , car dans les cas de système faisant intervenir des équations à dérivées partielles , la bonne définition du système est primordiale, avec notamment les conditions aux limites.

Notre système {fluide} sera modélisé par un fluide à faible nombre de Reynolds (visqueux) incompressible régi par les équations de Stokes que nous poserons dans le chapitre suivant. La densité de courant \vec{j}_0 est supposé uniforme sur le fluide.

Chapitre 2

Modélisation du champ Magnétique de l'aimant

Nous allons nous intéresser en premier lieu à modéliser le champ magnétique d'un aimant pour pouvoir obtenir à terme les forces de Laplace s'exerçant sur le fluide pour caractériser l'écoulement.

Nous cherchons ainsi à modéliser le champ d'induction magnétique $\vec{B}(x, y, z)$ induit par un aimant (Figure 1). L'objectif sera d'abord de déterminer le champ magnétique dans une configuration quelconque, pour ensuite exploiter ces résultats et les employer dans la résolution numérique de Navier Stokes.

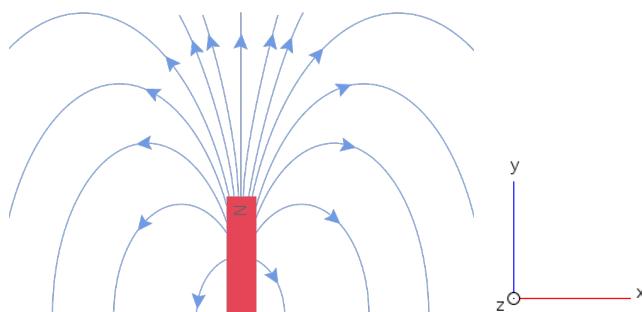


FIGURE 2.1 – champ magnétique d'un aimant coupe 2D

On suppose que l'aimant a une longueur suffisante selon \vec{z} pour être considéré comme infini selon l'axe \vec{z} . On en déduit donc par le principe de Curie que le

champ magnétique est invariant par translation selon \vec{z} . Ainsi

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y)$$

On modélise donc le champ magnétique en deux-dimensions dans cette partie, dans la suite nous considérerons que le champ d'induction aura la même valeur selon la troisième dimension.

2.1 Mise en forme du problème

Nous allons rechercher une solution du champ magnétique dans le domaine de résolution Ω (figure 2), $\Omega \subset R^2$.

On définit Ω_{int} le domaine de l'aimant, et Ω_e le domaine extérieur à l'aimant.

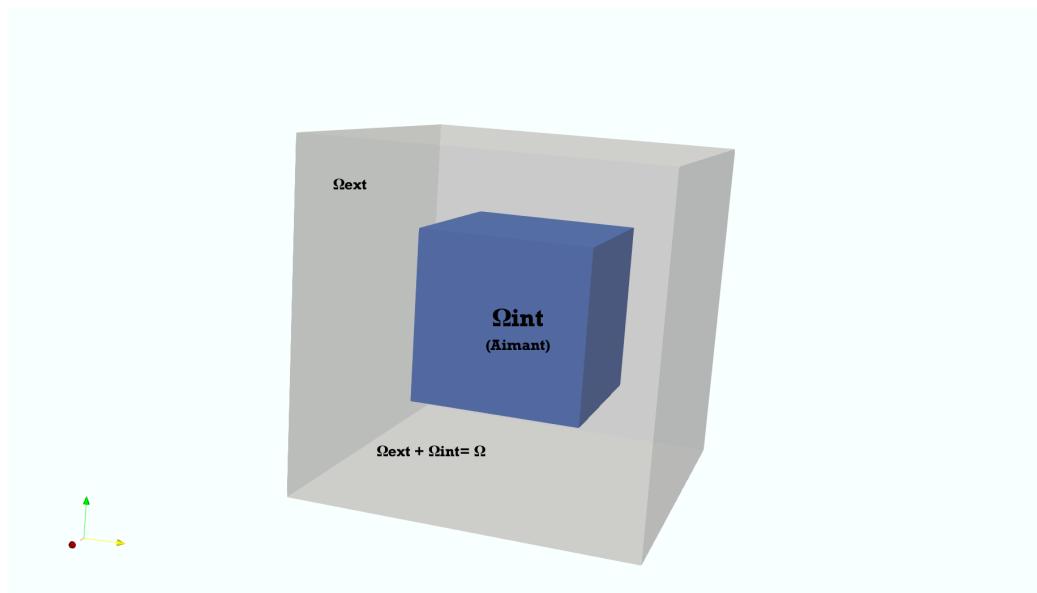


FIGURE 2.2 – domaines de résolution du problème, Blender

$$\Omega_e = \Omega_{int} - \Omega$$

On se place dans le régime stationnaire comme il n'y a pas de mouvements de l'aimant.

Le champ d'induction magnétique \vec{B} est la somme du champs magnétique \vec{H} .

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

L'aimantation \vec{M} est nulle en dehors de l'aimant.

$$\begin{cases} \vec{M} = \vec{0} \text{ dans } \Omega_e \\ \vec{M} = \vec{M}_0 = \text{constante dans } \Omega_{\text{int}} \end{cases}$$

Pour trouver le champ magnétique, on appliquer les équations fondamentales de la magnétostatique. L'équation de Maxwell nous donne

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{0} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Le domaine étant simplement connexe, \vec{H} dérive d'un potentiel u .

$$\begin{cases} \vec{H} = \vec{\text{grad}} u \\ \vec{B} = \mu_0 \times (\vec{\text{grad}} u + \vec{M}) \end{cases}$$

Au sens des distributions pour toute fonction φ dans $D(\Omega)$

$$\langle \text{div } \vec{B}, \varphi \rangle = \langle -\vec{B}, \vec{\text{grad}} \varphi \rangle$$

On suppose $\vec{B} \in L^3(\Omega)$

$$\langle \text{div } \vec{B}, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{\text{grad}} \varphi$$

$$\langle \text{div } \vec{B}, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \mu_0(\vec{\text{grad}} u + \vec{M}) \cdot \vec{\text{grad}} \varphi = 0$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} (\vec{\text{grad}} u + \vec{M}) \cdot \vec{\text{grad}} \varphi = 0$$

Et comme \vec{M} est nul en dehors du domaine Ω_{int} de l'aimant, on obtient (1)

On reconnaît un problème de Dirichlet homogène qui admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ d'après le théorème de Lax-Migram.

$$\forall \varphi \in \Omega, \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\vec{M}_0 \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi \quad (2.1)$$

Adimensionnons (1) :

$$\forall \varphi \in \Omega, \frac{1}{|\vec{M}_0|} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi$$

On prend pour la suite

$$U = \frac{u}{|\vec{M}_0|}$$

ce qui nous donne

$$\vec{H}^* = \frac{\vec{H}}{M_0}$$

On établit ainsi

$$\boxed{\forall \varphi \in \Omega, \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla \varphi = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi} \quad (2.2)$$

2.2 Méthode des éléments finis

2.2.1 Le maillage

On recherche une solution approchée de l'équation numériquement en passant de l'espace continu à un espace discret.

On utilise la méthode des éléments finis en recherchant une solution dans l'espace $V_h = \{u \mid u \in P^1(\Omega^2), u \in H_0^1(R^2)\}$.

On introduit une triangulation T_h en subdivisant $\bar{\Omega}$, de bord $\Gamma = \partial\Omega$. Cette

triangulation vérifie les propriétés suivantes :

- l'intersection de deux triangles K de T_h doit être réduite à un sommet commun,
 - à une arête commune et entière ou à l'ensemble vide
 - l'aire des triangles ne doit pas être nulle
 - tous les coins du bord Γ sont des sommets de triangles K de T_h
- Le maillage ainsi construit est tel que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$$

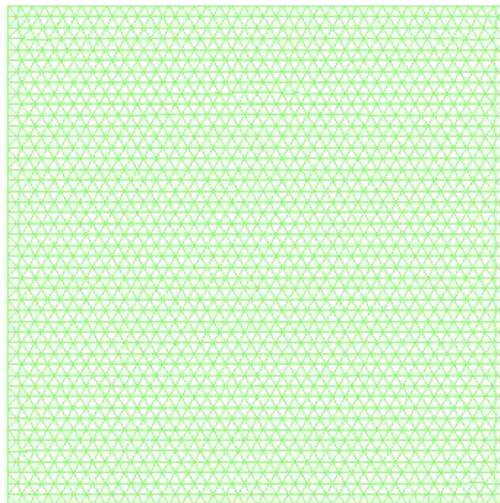


FIGURE 2.3 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D d'un carré 1×1.05 avec un pas constant $h = 0.1$

On note que le maillage est caractérisé par la longueur de la plus petite arrête h_{min} telle que

$$h_{min} = \min_{K \in T_h} h_K$$

h_{min} va notamment déterminer l'erreur entre la solution continue et la solution

discrète. On choisit une base de V_h , on prend la famille des fonctions de base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}$ telles qu'elles valent 1 en un sommet d'un triangle, et 0 pour tous les autres sommets. On note P_1, P_2, \dots, P_{N_h} les sommets des triangles du maillage. Les fonctions de base sont donc définies ainsi :

$$\forall i, j \in [1, N_h]^2 \quad \varphi_i \in L^2(\Omega), \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad \varphi_i = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Le support de φ_i est la réunion de tous les triangles ayant pour sommet P_i . On vérifie que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$ est une base de V_h . Ainsi toute fonction g dans V_h peut s'écrire comme une combinaison linéaire des φ_i

$$g = \sum_{i=1}^{N_h} g_i \varphi_i \quad \text{où } g_i = g(P_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_h$$

2.2.2 Mise en équation

Réécrivons (1.2) dans V_h :

$$\forall \varphi \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi = -\vec{M}_0 \cdot \int_{\Omega_{int}} \nabla \varphi$$

Nous pouvons écrire $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \varphi_i$ où $U_i = U(P_i)$, $i = 1, 2, \dots, N_h$ et choisir $\varphi = \varphi_i$ ainsi

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} u_i \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} A_{ij} u_i$$

avec A la matrice $N_h \times N_h$ de coefficients

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$$

et si on introduit le vecteur \vec{f} de composantes f_1, f_2, \dots, f_{N_h} définies par

$$f_j = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega} \nabla \varphi_j$$

Alors l'équation (2) revient de manière équivalente à résoudre le système linéaire

$$A \times U = F$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_h} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N_h} \end{pmatrix} \quad A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$$

On appelle A la matrice de rigidité.

2.2.3 Passage à un élément de référence

Pour les calculer numériquement les matrices on utilise un triangle de référence normalisé \hat{T} . On passe du triangle T à \hat{T} à l'aide de la transformation F . On a

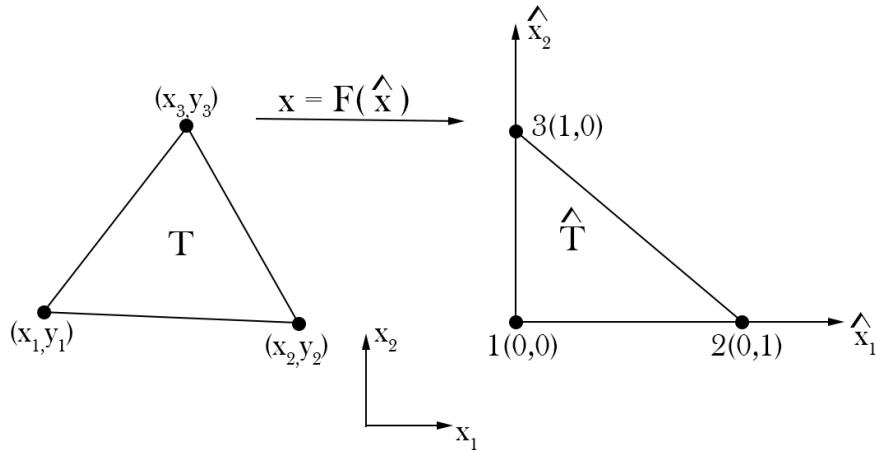


FIGURE 2.4 – passage à un maillage de référence

pour le calcul du gradient de φ_i

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi} = (J)^T \nabla_x \varphi$$

où J est la matrice Jacobienne de la transformation. Calculons la matrice Jacobienne qui va dépendre des coordonnées (x_i, y_i) des sommets pour chaque triangle.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\hat{x}) \\ F_2(\hat{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = J \times \hat{x} + C$$

On obtient ainsi à l'aide d'un changement de variable le calcul de la matrice de rigidité (voir annexe A) :

$$A_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i \cdot \nabla_x \varphi_j = \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j$$

Calculons à présent le terme source $f_j = -\vec{e}_y \cdot \int_{\Omega} \nabla \varphi_j$.

D'après Green-Ostrogradsky

$$\iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i = \int_{\partial\Omega_{\text{int}}} \varphi_i \cdot \vec{n} \, \partial s$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{\text{int}}} \varphi_i \cdot \vec{n} \, \partial s &= \sum_{e \in \partial\Omega_{\text{int}}} \int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s \\ &= \sum_{e \in \partial\text{supp}(\varphi_i)} \int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s \end{aligned}$$

où \vec{n}_e est le vecteur unitaire normal sortant à l'arête e .

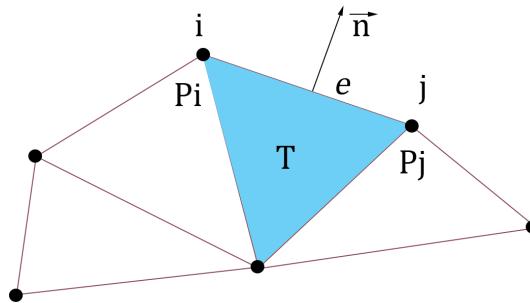


FIGURE 2.5 – arêtes

$$|e| \times \vec{n}_e = \begin{pmatrix} y_j - y_i \\ x_i - x_j \end{pmatrix}$$

avec le changement de variable $x = s \times \mathbf{P}_i + (1 - s) \times \mathbf{P}_j$, $s \in [0; 1]$

$$\int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, \partial s = |e| \left(\int_0^1 \varphi_i \, dx \right) \cdot \vec{n}_e$$

avec

$$\int_0^1 \varphi_i \, ds = \text{aire du triangle rectangle de coté } |e| \text{ et de hauteur } 1 = \frac{|e|}{2}$$

d'où

$$\int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, ds = |e| \left(\int_0^1 \varphi_i \, dx \right) \cdot \vec{n}_e = \frac{|e|}{2} \cdot \vec{n}_e = \frac{|e|^2}{2} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Au final

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i &= \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \int_e \varphi_i \cdot \vec{n}_e \, ds = \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \\ \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i &= \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Au final

$$f_j = -\vec{e}_y \cdot \sum_{e \in \partial \text{supp}(\varphi_i)} \frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Calcul du Gradient

Les calculs précédents nous permettent de trouver après résolution le potentiel u , ce que nous voulons obtenir à l'issue de notre étude est le champ d'induction magnétique \vec{B} que l'on trouve par $\vec{B} = \nabla u$.

On écrit la forme variationnelle dans V_h (ainsi \vec{B} suit une décomposition dans V_h , tel que $\vec{B} = \sum_i B_{xi} \varphi_i$) :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in V_h, \quad \int_{\Omega} B \cdot \varphi &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi \\ \sum_{i,j} \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} B_i \int_T \varphi_i \varphi_j &= \sum_i \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} u_i \int_T \nabla \varphi_i \varphi_j \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire l'équation ci dessus sous forme matricielle, en introduisant les matrices M et C, définies de la façon suivante :

$$M_{ij} = \int_T \varphi_i \cdot \varphi_j \text{ appellé la matrice de masse}$$

$$C_{ij} = \int_T \nabla \varphi_i \cdot \varphi_j$$

L'équation devient ainsi un problème linéaire sous forme matricielle

$$M \times B = C \times U$$

Soit

$$B = M^{-1} \times C \times U$$

Calculons ainsi les termes de la matrice C :

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \iint_{\Omega} \nabla \varphi_i \varphi_j dx = \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} \nabla_K \varphi_i \iint_K \varphi_j dx \\ &= \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} (J^{-1}_K)^T (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} |J_K| \hat{\varphi}_j d\hat{x} \\ &= \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} (J^{-1}_K)^T |J_K| (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_j d\hat{x} \end{aligned}$$

$$C_{ij} = \sum_{K \in \text{supp } \varphi_j} (J^{-1}_K)^T |J_K| (\nabla_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i) \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_j d\hat{x}$$

Nous allons calculer pour l'implémentation algorithmique des matrice élémentaires qui vont regrouper sur chaque triangle les contributions croisés des trois nœuds, soit neuf termes dans chaque matrice élémentaire.

Calculons une matrice élémentaire de C sur un triangle K du maillage qui aura donc pour composantes (si on se place selon la composante x du gradient)

$$|J_K| \times \begin{pmatrix} \nabla_{\hat{K}} \varphi_1|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_K \varphi_1|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_K \varphi_1|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \\ \nabla_K \varphi_2|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_K \varphi_2|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_K \varphi_2|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \\ \nabla_K \varphi_3|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 & \nabla_K \varphi_3|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 & \nabla_K \varphi_3|_x \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

Calculons les intégrales :

$$\begin{cases} \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_1 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 1/6 \\ \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_2 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 1/6 \\ \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}_3 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 1/6 \end{cases}$$

On a ainsi la matrice élémentaire du terme C sur un triangle K :

$$\frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} \nabla_K \varphi_{1|x} & \nabla_K \varphi_{1|x} & \nabla_K \varphi_{1|x} \\ \nabla_K \varphi_{2|x} & \nabla_K \varphi_{2|x} & \nabla_K \varphi_{2|x} \\ \nabla_K \varphi_{3|x} & \nabla_K \varphi_{3|x} & \nabla_K \varphi_{3|x} \end{pmatrix}$$

Calculons également directement les matrices élémentaires pour la matrice de masse M définis par :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \varphi_i \varphi_j$$

Sur un triangle K du maillage, on obtient de la même manière que précédemment

$$\begin{aligned} M_{ij}^k &= \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} |J_K| \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x} \\ &= 2 \times \text{aire}(K) \times \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x} \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer les intégrales

$$\int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) d\hat{x}$$

par symétrie

$$\forall i \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i^2 = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_2^2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{12}$$

$$\forall i \neq j \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{\varphi}_i \times \hat{\varphi}_j = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_2} \hat{x}_1 \hat{x}_2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{24}$$

On en déduit la matrice de masse élémentaire sur un triangle de maillage

$$M^k = \frac{\text{aire}(K)}{12} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2.5 Implémentation algorithmique

Pour la résolution du problème nous utiliserons matlab avec la bibliothèque Mesh2D par Darren Engwirda pour la création du maillage 2D. La résolution est effectué sur un maillage 5×5 avec en son centre un aimant de taille $1 \times 1\text{cm}$.

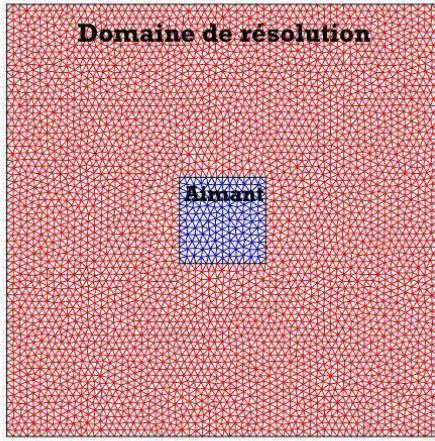


FIGURE 2.6 – maillage effectué sur matlab à l'aide de mesh2D dans la configuration décrite pour un pas $h = 0.1$

Pour le calcul nécessaire des différentes matrice afin de résoudre le problème linéaire $A \times U = F$, les algorithmes reposent sur la même méthodologie de calcul : Par exemple pour le calcul de la matrice A :

$$A_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla_x \varphi_i \cdot \nabla_x \varphi_j = \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j$$

Le principe consiste à ne pas recherche le support croisé des fonctions φ_i et φ_j (ce qui donnerait une complexité trop importante) mais à boucler sur les triangles et placer dans la matrice les contributions correspondantes à chacun de leurs noeuds avec leur indices. Notamment avec l'outil matriciel *sparse* de matlab qui permet d'exploiter en temps de calcul et d'espace mémoire le fait que la matrice de rigidité A est creuse, comme pour deux fonction φ_i et φ_j l'intersection de leurs support se réduit à deux triangle.

Ainsi pour le calcul de A chaque triangle engendre une matrice élémentaire 3×3 (car 3 noeuds pour chaque triangle donc 9 termes croisés) symétrique vu le calcul du terme A_{ij} dont on place les termes dans la matrice A à chaque itération sur les triangles.

Le principe est le même pour le terme source, pour chaque triangle appartenant au bord de l'aimant avec comme noeuds sur le bord les noeuds p_i et p_j on place deux fois le même terme $\frac{|e|}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \vec{n}_e$ (que l'on a calculé p.21) aux indices p_i et p_j dans la matrice du terme source.

Et de même également pour le calcul des matrices M et C pour le gradient, dont nous avons explicité les matrices élémentaires.

Voici une présentation succincte de l'algorithme de résolution, les fonctions utilisées sont détaillé dans l'annexe B.

Pour la génération du maillage, on utilise la fonction meshfaces fournis par la bibliothèque Mesh2D par Darren Engwirda

```
[v,t,fnum] = meshfaces(node,edge,face,hdata); %construction du maillage

v : vecteur colonne regroupant les coordonnées des nœuds
t : table de connectivité des triangle
fnum : numéros de face des triangles du maillages (1 ou 2),
si sur le domaine des l'aimant ou de la cuve
```

Calcul de la matrice de rigidité A et de la matrice de masse M :

```
[M, nn, ibint, ic2] = matrixP1final(v,t,fnum,node1,edge1,node2,edge2);
[A]= matrixP1vect(v,t);
```

On enlève les noeuds sur le bord du domaine de résolution comme la condition aux limite impose que $\Delta u = 0$ sur le bord, que nous considerons équivalente à $u = 0$

```
A1 = A1(ic2,ic2); %ic2 sont les noeuds intérieurs du maillage
sol = A1\B; %résolution linéaire
```

Calcul du gradient de u :

```
B = gradient(u,v,t);  
quiver(X,Y,B_X,B_Y); %affichage du résultat final
```

2.2.6 Résultats de la simulation

Voici les résultats de la simulation pour un maillage de pas 0.2 et de taille 5×5 pour un aimant de taille 1×1 . On voit que les vecteurs suivent les dessins

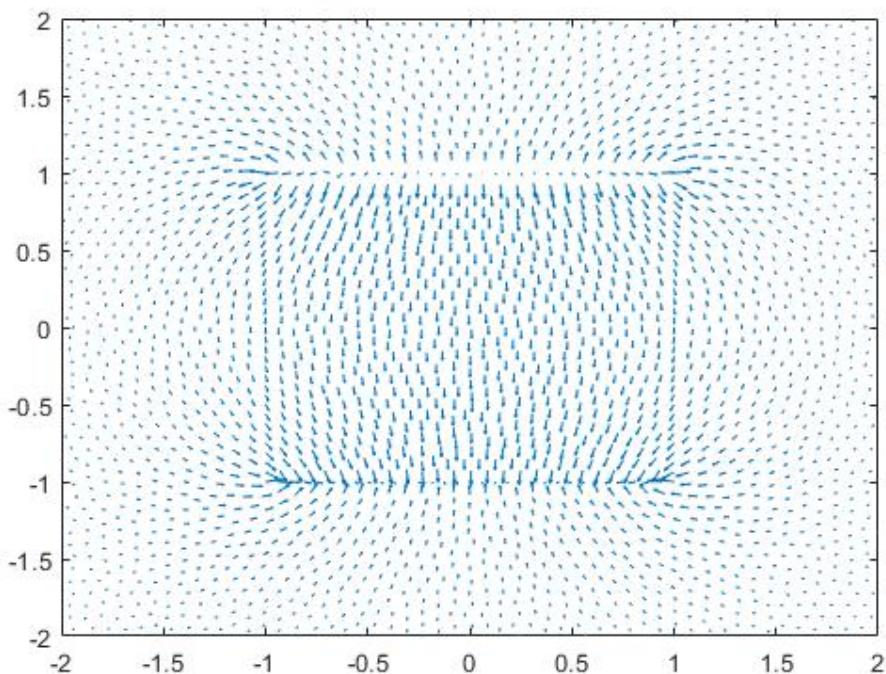


FIGURE 2.7 – affichage *quiver* du champ magnétique, fenêtre centrée sur $[-2, 2]$

des lignes de champ que l'on peut attendre d'un aimant. On peut s'inquiéter de la discontinuité des valeurs au bord de l'aimant mais ce la est en accord avec la formulation du champ d'induction comme la somme d'un champ d'excitation et d'une aimantation, nulle en dehors de l'aimant $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, d'où cette discontinuité que l'on observe.

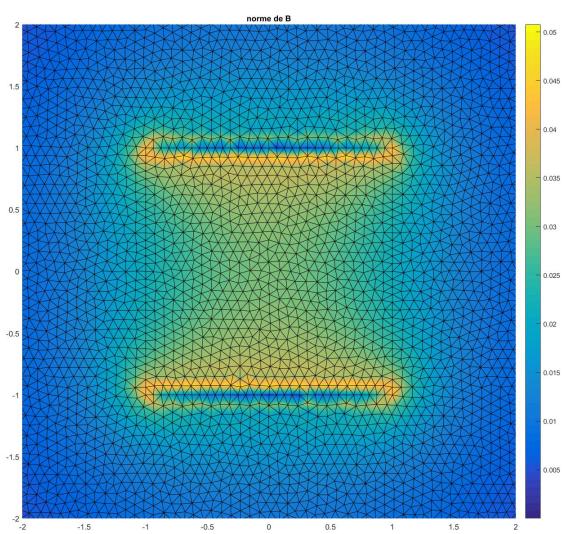


FIGURE 2.8 – norme du champ \vec{B} , fenêtre centrée sur $[-2, 2]$

Chapitre 3

Équations de Navier Stokes

Nous allons à présent nous intéresser à la modélisation de l'écoulement, qui suit les équations de Navier-Stokes d'après les hypothèses que nous avons émis précédemment. Nous supposons que nous avons à notre disposition deux aimants, qui sont perpendiculaires sur les côtés de la cuve, l'un produit un champ B_1 , l'autre produit un champ B_2 . Le premier aimant va produire un tourbillon dans le fluide, le deuxième va produire deux tourbillons parallèles, qui sont orthogonaux au premier tourbillon . Tout cela dans le but d'obtenir un écoulement tourbillonnaire.



FIGURE 3.1 – les trois tourbillons que nous souhaitons obtenir avec notre dispositif expérimental

3.0.1 Équations de Stokes

Le liquide est un conducteur placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant supposé uniforme \vec{j}_0 . Afin de pouvoir trouver l'équation de la trajectoire d'un point donné, on cherche tout d'abord à trouver la vitesse dans l'écoulement du fluide contenu dans un domaine Ω .

A partir des équations de Navier-Stokes incompressibles, on détermine simultanément la vitesse V et la pression P .

On émet les hypothèses suivantes :

Dans un premier temps, nous pouvons négliger les forces d'inertie du fluide comme on a un faible nombre de Reynolds. Le fluide visqueux est en mouvement le long d'une paroi solide fixe d'où une vitesse nulle sur le bord car $\vec{V}_{\partial\Omega} = \vec{V}_{\text{paroi}} = \vec{0}$

Finalement, on se place en régime stationnaire.

$$\begin{cases} \vec{0} = -\vec{\nabla}P + \mu\vec{\Delta}V + \vec{f} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{V} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La force \vec{f} correspond à la force de Laplace induite par le champ magnétique.
La densité volumique de cette force est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \vec{j}_0 \wedge \vec{B} = j_0 \times M_0 \times \vec{j} \wedge \vec{B}^* \\ \vec{B}^* &= \frac{\vec{B}}{M_0}, \text{ et } j_0 = \frac{\Delta E}{L}\sigma \end{aligned}$$

avec σ : la conductivité du fluide
 L : la longueur de base de la cuve
 ΔE : la différence de potentiel

Ainsi on peut calculer la force magnétique pour un champ magnétique \vec{B}_1

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \begin{pmatrix} B_{1,x} \\ B_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{f} &= j_0 \vec{e}_x \wedge \begin{pmatrix} B_{1,x} \\ B_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix} = j_0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{1,y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.0.2 Adimensionnement de l'équation de Stokes

Afin de résoudre un seul système indépendamment des constantes, on adimensionne l'équation de Stokes. Le régime stationnaire sera pris en compte après adimensionnement.

Posons :

$$\vec{V}'(x, t) = \frac{\vec{V}(x, t)}{V_0} ; \vec{x}' = \frac{\vec{x}}{L_0} ; \vec{f}'(\vec{x}') = \frac{\vec{f}(\vec{x})}{j_0 M_0} ; P' = \frac{P}{P_0} ; t' = \frac{t}{\frac{L_0^2}{\mu}}$$

En injectant dans l'équation de Stokes d'évolution :

$$\left\{ \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{V} + \vec{f} \right.$$

il en résulte :

$$\left\{ \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} = -\frac{L_0 P_0}{\rho \mu V_0} \vec{\nabla} P' + \vec{\Delta} \vec{V}' + \frac{L_0^2 j_0 M_0}{\mu V_0} \vec{f}' \right.$$

On adimensionne par rapport à V_0 et P_0 de sorte que $\frac{L_0 P_0}{\rho \mu V_0} = 1$ et $\frac{L_0^2 j_0 M_0}{\mu V_0} = 1$, le régime stationnaire étant établi :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P' + \vec{\Delta} \vec{V}' + \vec{f}' \text{ dans } \Omega$$

3.0.3 Formulation variationnelle

Afin d'obtenir la formulation variationnelle de l'équation de Stokes, on passe dans l'espace des distribution de sorte que pour toute fonctions test φ on a

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} P' \times \vec{\varphi} = \int_{\Omega} -\mu \vec{\Delta} \vec{V}' \times \vec{\varphi} + \int_{\Omega} \vec{f}' \times \vec{\varphi}$$

En appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} P' \cdot \vec{\varphi} + \int_{\Omega} \vec{\nabla} V' \cdot \vec{\nabla} \varphi = \int_{\Omega} \vec{f}' \cdot \vec{\varphi}$$

Comme précédemment nous nous plaçons dans l'espace V_h d'approximation polynomiale. Nous pouvons ainsi décomposer les champs de pression P' , la vitesse V' et la force \vec{f}' dans la base des (φ_i) :

$$\begin{cases} V' = \sum_{i=1}^{N_h} V_i \varphi_i \quad \text{où } V_i = V(P_i), \ i = 1, 2, \dots, N_h \\ P' = \sum_{i=1}^{N_h} P_i \varphi_i \quad \text{où } P_i = P(P_i), \ i = 1, 2, \dots, N_h \\ f' = \sum_{i=1}^{N_h} f_i \varphi_i \quad \text{où } f_i = f(P_i), \ i = 1, 2, \dots, N_h \end{cases}$$

On prend $\varphi = \varphi_i$ un vecteur de la base

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla V_h \cdot \nabla \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} V_i \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} A_{ij} V_i \\ \int_{\Omega} \nabla P_h \cdot \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} P_i \nabla \varphi_i \cdot \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} C_{ij} u_i \\ \int_{\Omega} f \cdot \varphi = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} \int_{\Omega} f_i \varphi_i \cdot \varphi_j = \sum_{i,j \in [1, N_h]^2} M_{ij} f_i \end{cases}$$

On peut donc écrire la formulation variationnelle sous la forme d'un problème linéaire :

$$\begin{cases} -A \times V + C \times P = M \times f \text{ sur } \Omega \\ C \times V = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

3.0.4 Principe de superposition

La linéarité de l'équation nous permet d'appliquer le principe de superposition est donc de décomposer la résolution du problème en deux résolutions : une pour chaque terme source et ensuite de les sommer. Pratiquement nous allons résoudre le problème en deux temps : d'un côté pour l'aimant centré qui donne deux tourbillons et d'autres part pour l'aimant décentré qui donne un tourbillon pour ensuite sommer les champs de vitesse après transposition du champ pour l'aimant décentré pour se retrouver dans la configuration où les tourbillons sont perpendiculaires.

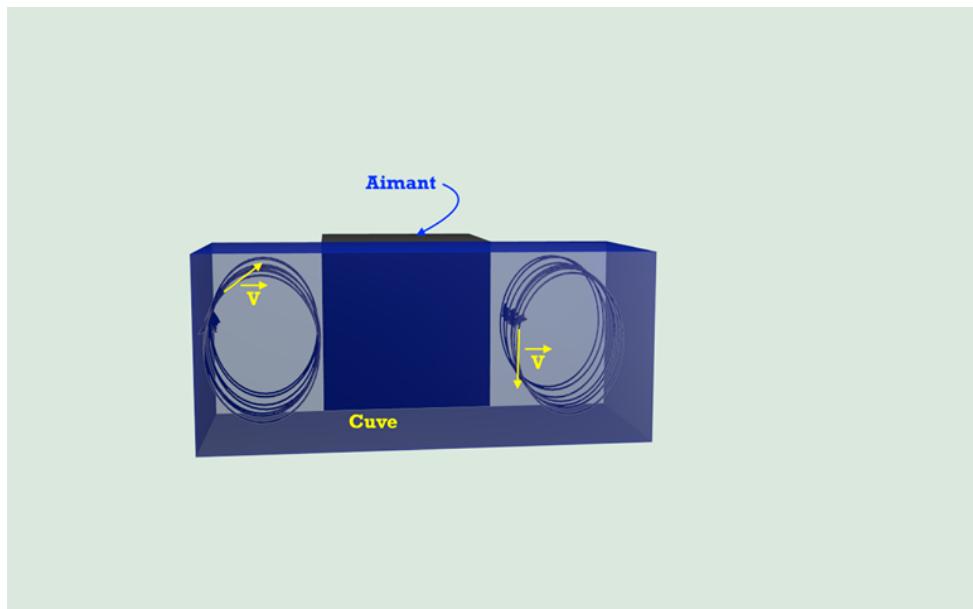


FIGURE 3.2 – résolution pour un aimant décentré

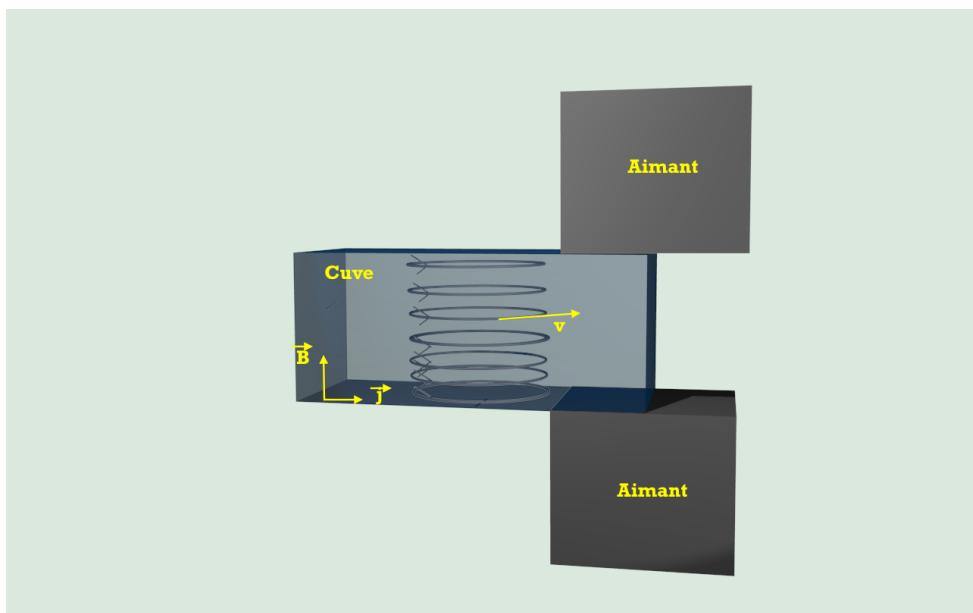


FIGURE 3.3 – résolution pour un aimant centré après transposition du champ de vitesse pour que les tourbillons soient perpendiculaires

3.0.5 Implémentation algorithmique

Nous allons à présent mettre en place les calculs précédents de manière numérique sur Matlab en maillant le domaine de résolution qui est ici la cuve qui accueille le fluide .

On pose L_x, L_y, L_z les dimensions de la cuve selon x, y, et z.

Le domaine $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ est ainsi discréteisé par un maillage uniforme défini par les points :

$$\begin{cases} x_{ij} = \left(\frac{i \times L_x}{N+1}, \frac{j \times L_x}{N+1} \right), i, j = 0, 1, \dots, N+1 \\ y_{ij} = \left(\frac{i \times L_y}{N+1}, \frac{j \times L_y}{N+1} \right), i, j = 0, 1, \dots, N+1 \\ z_{ij} = \left(\frac{i \times L_z}{N+1}, \frac{j \times L_z}{N+1} \right), i, j = 0, 1, \dots, N+1 \end{cases}$$

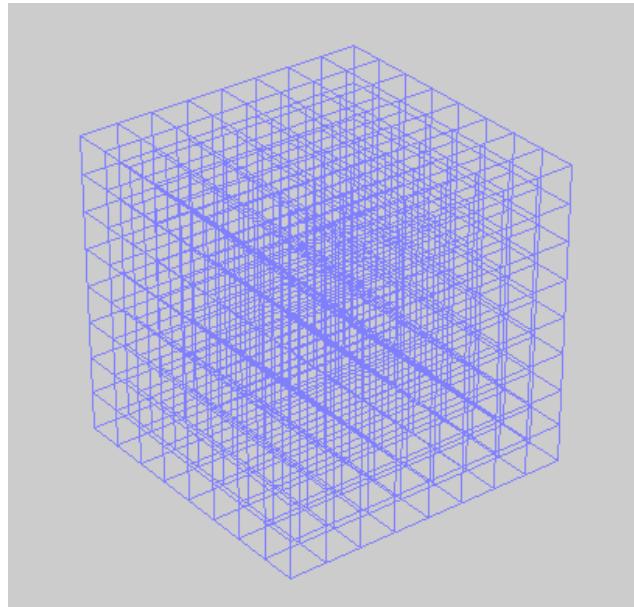


FIGURE 3.4 – maillage du domaine de résolution de coté 1 en prenant 11 points dans les directions x, y, et z à l'aide de la fonction matlab *ndgrid*

3.0.6 Calcul des matrices du système linéaire en trois dimensions

Cette partie va reposer sur le même principe que les calculs en deux dimensions et s'appuie sur le cours "Analyse numérique des équations de Navier-Stokes" de J.-F Scheid.

En effet comme précédemment, nous allons nous appuyer sur des matrices élémentaires comprenant les contributions des différents noeuds sur chaque élément en nous ramenant à un élément de référence.

Nous cherchons à calculer les matrices de rigidité A et de masse M. Les éléments de la matrice élémentaire pour la matrice de rigidité sur un élément K sont les

$$W_{i,j}^{k,l} = \int_K \frac{\partial l^{(i)}}{\partial x_k} \times \frac{\partial l^{(j)}}{\partial x_l} dx$$

où les $l^{(i)}$ sont les fonctions de base de l'espace d'interpolation V_h comme précédemment dans ma partie 2D.

Et pour la matrice de masse la matrice élémentaire sur un élément K est

$$M_{i,j} = \int_K l^{(i)} \times l^{(j)} dx_K$$

Pour déterminer ces intégrales, on se ramène à l'élément de référence \hat{K} avec la transformation affine $F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K$.

De la même manière que les travaux précédents pour les transformations entre les éléments de référence, on arrive à :

$$\hat{\nabla} \hat{v}(\hat{x}) = [DF_K(\hat{x})]^T \times \nabla v(x)$$

avec $[DF_K(\hat{x})]$ la matrice jacobienne de F_K dont on note les éléments J_i, j , et ainsi on a $\nabla v(x) = [B_K^{-1}]^T \hat{\nabla} \hat{v}(\hat{x})$.

On obtient l'expression des éléments de la matrice élémentaire en fonction des

valeurs sur l'éléments de référence \hat{K} .

$$W^{k,l} = \frac{1}{|\det B_K|} \sum_{m,n=1}^N J_{km} J_{ln} \hat{W}^{m,n}$$

En regardant la construction des éléments avec les tables de connectivité on voit que les matrices élémentaire de référence sont de taille 9×9 que l'on sait calculer explicitement. Dans notre algorithme on calcule la matrice de rigidité à l'aide du script *matrix3D* qui réunit dans une matrice 27×27 les termes croisé des matrices élémentaires ce qui permet de calculer directement en une affectation la matrice de rigidité en utilisant ses propriétés de symétries par blocs.

Pour la matrice élémentaire de masse nous pouvons développer des calculs similaire à ceux menés dans le cas 2D pour trouver une matrice élémentaire $M_{i,j} = |\det J| \times \Phi_i \Phi_j$ où $|\det J|$ est le déterminant du Jacobien et $\Phi_i \Phi_j$ une matrice déterminé qui reste la même à chaque itération.

On utilise ainsi dans les script de calculs une méthodologie similaire consistant à stoker les indices des valeurs comprises dans les matrices élémentaire et à construire la matrice complète à la fin des itérations sur les éléments en assignant les valeurs dans la matrices aux indices justement indiqués par les noeuds que l'on a gardé en mémoire en une seule affectation.

```

point=t(k,:);
indice=point';
detB=((v(t(k,2),1)-v(t(k,1),1)).*...
(v(t(k,4),2)-v(t(k,1),2)).*(v(t(k,5),3)-v(t(k,1),3)));
DxDxval=detB.*((1./((v(t(k,2),1)-v(t(k,1),1)).^2).*DxDx;
DyDzval=detB.*((1./((v(t(k,4),2)-v(t(k,1),2)).*...
(v(t(k,5),3)-v(t(k,1),3))).*DyDz;
DxWval=detB.*((1./((v(t(k,2),1)-v(t(k,1),1))).*DxW;
DyWval=detB.*((1./((v(t(k,4),2)-v(t(k,1),2))).*DyW;
DzWval=detB.*((1./((v(t(k,5),3)-v(t(k,1),3))).*DzW;

```

```

AddMatElem(A, indice, indice, 2*nu*DxDxval+nu*DyDyval+nu*DzDzval);
AddMatElem(A, indice+nv2, indice+nv2, nu*DxDxval+2*nu*DyDyval+nu*DzDzval);
AddMatElem(A, indice+2*nv2, indice+2*nv2, nu*DxDxval+nu*DyDyval+2*nu*DzDzval);

```

3.0.7 Raccordement à la modélisation du champ magnétique

Pour résoudre le système linéaire qui découle des équation de Navier-Stokes, nous devons reprendre notre travail précédent pour former le second terme f , matrice colonne regroupant les valeurs scalaires de la force magnétique aux différents point du maillage.

Nous devons donc faire le liens entre le maillage de résolution en trois dimension pour la résolutions des équations régissant l'écoulement et le maillage en deux dimensions sur lequel on calcule le champ magnétique.

Comme nous l'avons énoncé, nous supposons que le champ magnétique est invariant selon le troisième dimensions, il est donc inutile de le recalculer pour chaque 'couche' du maillage 3D, d'autant plus que le maillage 3D est uniforme. La méthodologie que nous allons donc appliquer consiste à calculer une unique fois le champ magnétique sur une seule couche de maillage (la couche $z = 0$ en partie dans l'algorithme) et reprendre les valeurs du champ sur les autres couches.

Ce que nous faisons en pratique est de générer un grand maillage de résolutions 2D pour calculer le champ magnétique, ce qui permet d'atténuer les effets de bord subit par le champ magnétique.

Nous utilisons ensuite la fonction Matlab *delaunay* qui permet à partir du maillage rectangulaire, de définir un maillage triangulaire (comme nous avons travaillé auparavant sur un maillage de type triangulaire quelconque auparavant pour le calcul du champ magnétique). Nous identifions ensuite sur ce maillage de résolution 2D un domaine correspondant à la cuve est un domaine correspondant à l'aimant, en fonction de la configuration choisie. Le maillage sur le domaine assigné à la cuve doit bien sur correspondre à une couche du maillage de résolution 3D utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

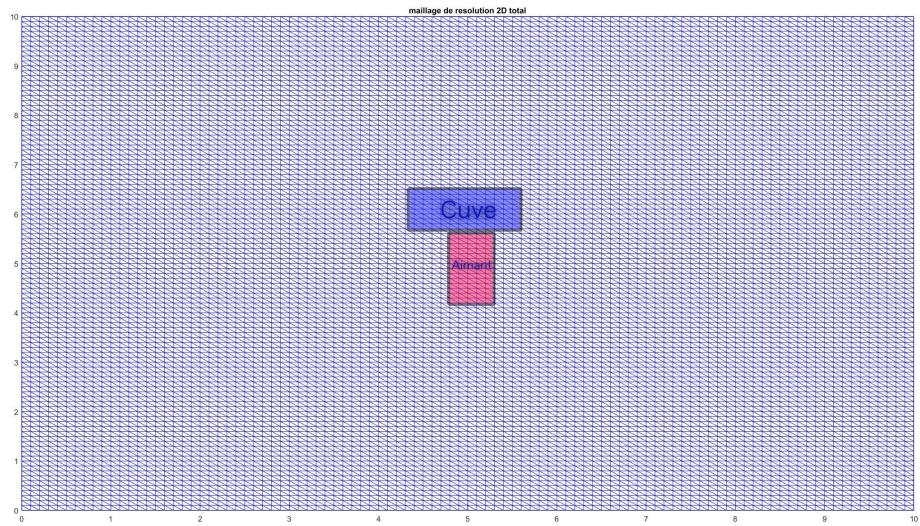


FIGURE 3.5 – configuration dans le cas de la résolution pour la configuration avec l’aimant centré

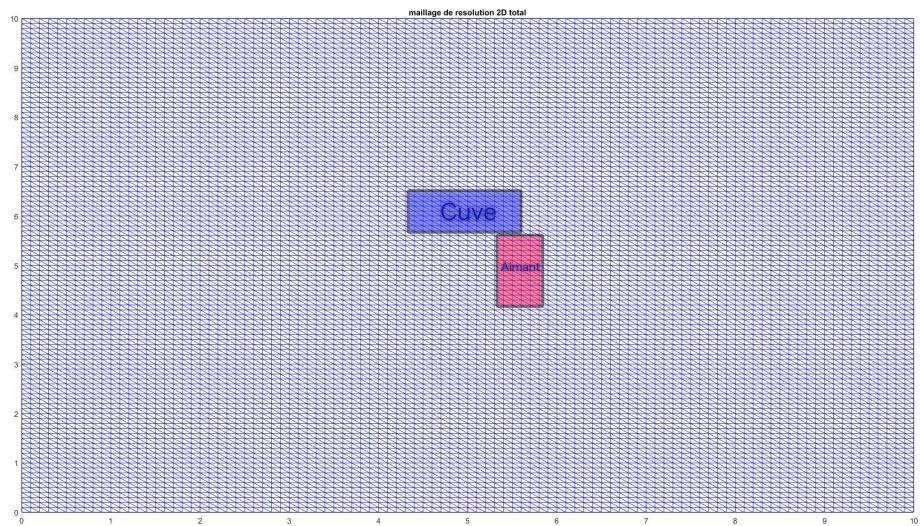


FIGURE 3.6 – configuration dans le cas de la résolution pour la configuration avec l’aimant décentré

Algorithmiquement, pour assigner les différents domaines du maillage de résolution 2D généré, nous utilisons le vecteur label *fnum* qui prend sur chaque triangle la valeur 1, 2, ou 3 en fonction du domaine qui lui a été assigné.

Maintenant notre objectif est de pouvoir adapter les données extraites à l'algorithme de Stokes 3D. Le premier obstacle est de réindexer le numéro des triangles pour qu'il y ait une bonne consistance des données lorsque l'algorithme va les utiliser : il faut renommer les triangles dans l'ordre.

Un autre point important est le degré d'interpolation des espaces polynomiaux sur lesquels nous travaillons. En effet nous avons résolu les équations du champ magnétique avec des éléments finis de degrés d'interpolation polynomiales 1 (éléments P1), alors que la résolution des équations de Navier-Stokes nécessite des éléments finis P2. Il faut donc doubler le nombre de points d'interpolations du champ magnétique avant d'injecter le second membre *f* dans l'algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes. Les données prennent alors une nouvelle structure suite à ce dédoublement des points, les matrices ne suivent plus le sens de parcours des données fixé avec la fonction de génération de maillage *ngrid* (qui est une généralisation sur la troisième dimension de *meshgrid*). Ce doublement de point du maillage avec la génération des tables nouvelles tables de descriptions du maillage *t* et *v* sont faite par la fonction *mesh3D* fournis par M. Scheid que nous utilisons comme une boîte noire.

On le voit tout de suite avec un affichage avec un affiche *triplot* après avoir appliqué *delaunay* sur les données de la couche 2D du maillage 3D dont on a doublé les points.

```

z = 0;      % niveau z = 0
indz = find(v(:,3) == z); % récupération des indices des nœuds pour le niveau 0
xz = v(indz,1); yz = v(indz,2); vz = [xz, yz];
tz = delaunay(xz, yz);           % triangulation de Delaunay
triplot(tz, xz, yz);    % affichage

```

Si on compare à une structure de données classiques générée avec *meshgrid* ou *linspace* :

```
t_total_2D = delaunay(v_total_2D(:,1),v_total_2D(:,2));
```

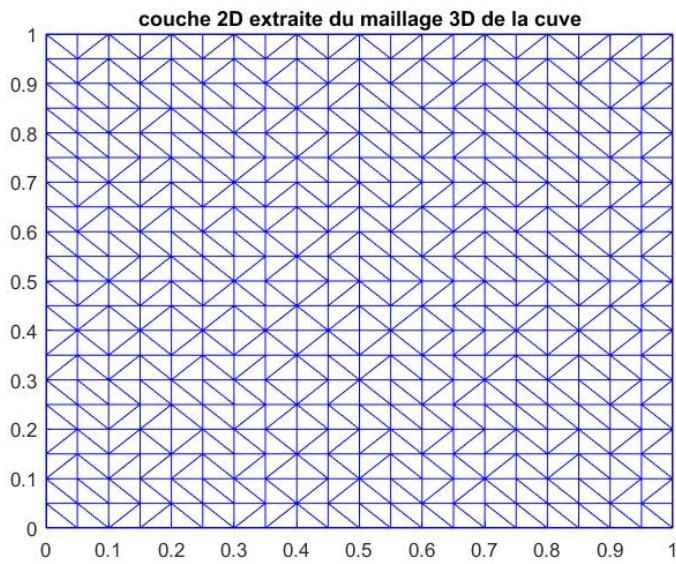


FIGURE 3.7 – affichage avec *triplot* du maillage extrait

```
triplot(t_total_2D ,X_total_2D,Y_total_2D);  
xlim([4.5 5.5]);  
ylim([4.5 5.5]);
```

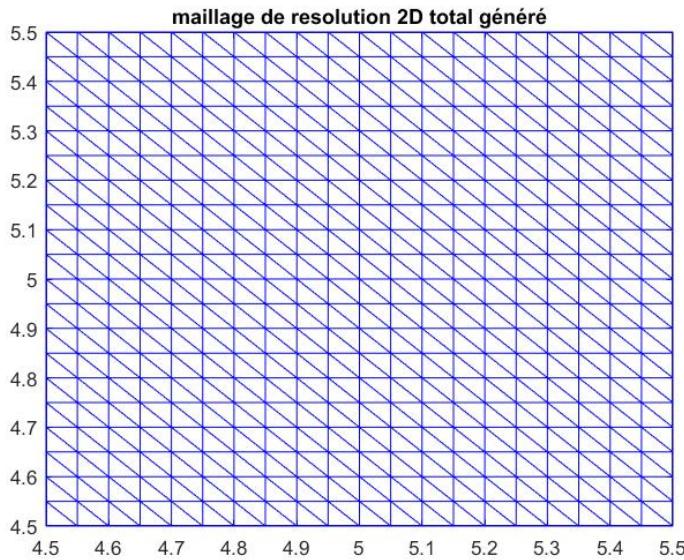


FIGURE 3.8 – affichage avec *triplot* du maillage extrait

Pour comprendre la structure des données il faut alors se rapporter aux tables de connectivité pour le type de maillage 3D généré. On comprend alors que cette structure des données ératique est du à l’arrangement de la tables de coordonnées v . Cela ne pose pas de problème dans la mesure où nous prenons garde à garder la même structure de données tout de long de notre algorithme de résolution est donc d’arranger selon la même structure le second membre f . Et de même pour pouvoir visualiser graphiquement nos résultat nous devons passer de cette structure particulière des données à une structure compatible à l’affichage avec la fonction matlab *quiver3*.

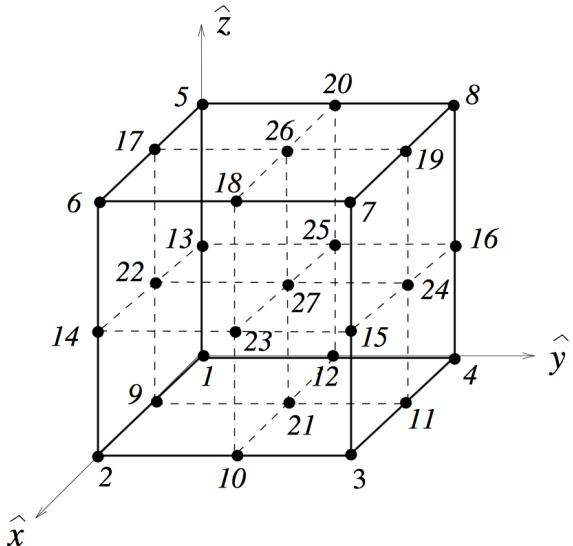


FIGURE 3.9 – table de connectivité, issu du cours *Analyse numérique des équations de Navier-Stokes*, J.-F. Scheid

3.0.8 Résultats

Nous allons étudier graphiquement les différents résultats que nous obtenus et évaluer leur justesse en les interprétants physiquement par rapport à ce que nous attenderions avec les paramètres donnés.

Tout d'abord dans la configuration pour un aimant centré nous observons sur la coupe clairement deux tourbillons symétrique de part et d'autres de l'aimant, ce qui est logique comme la configuration est symétrique selon le même plan de symétrie, ce qui valide le bon placement des données dans la résolution du problème.

Dans un premier temps, on discerne bien pour la première figure les deux tourbillons selon y , avec une forte vorticité au centre, car il s'agit du courant induit par les 2 tourbillons adjacents. On utilise l'outil *StreamTracer* de Paraview pour traver la trajectoire de particules à partir du champ de vitesse que nous avons obtenus en sortie.

A présent que nous avons observé de beaux tourbillons près de l'aimant, nous

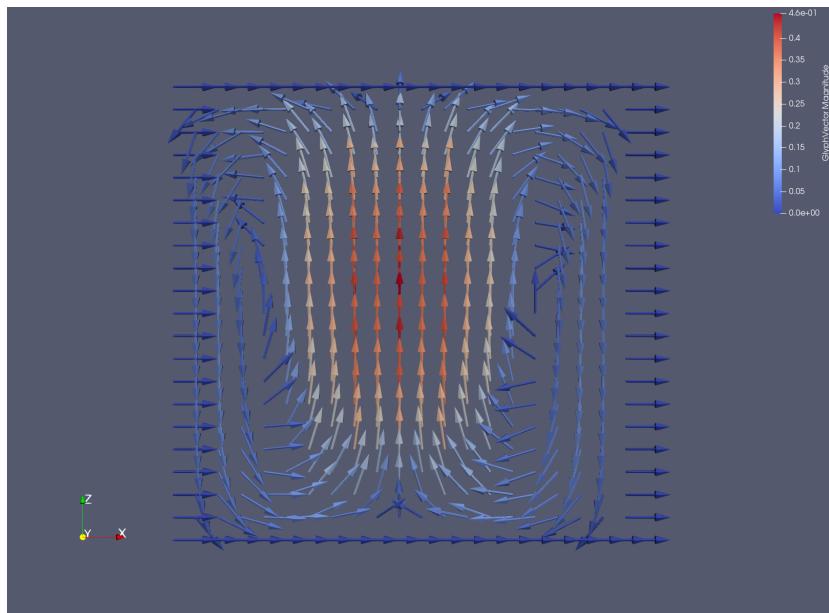


FIGURE 3.10 – coupe du champ de vitesse selon le plan XZ, pour Y petit (on est proche de l'aimant), Paraview

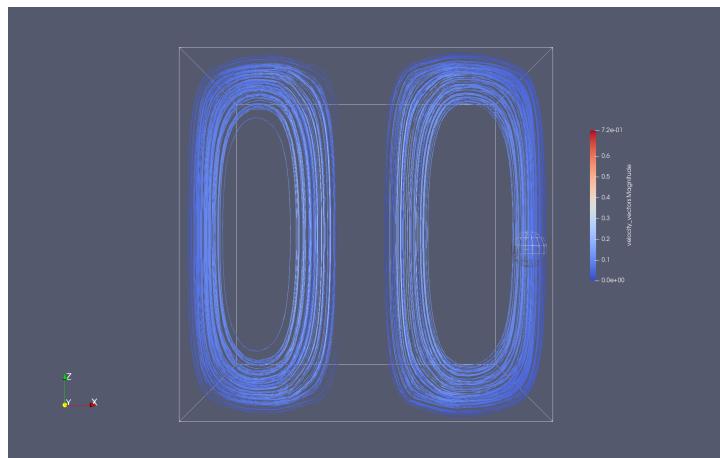


FIGURE 3.11 – 2 flux de particules dans cuve pour l'aimant centré pour des sphères de rayon 0.05 contenant 100 particules et pour un *max StreamLine FLux* de 3, Paraview

pouvons nous intéresser à ce qui se passe sur les tourbillons au fur et à mesure que l'on s'en éloigne, et voir ainsi les conséquences de l'hypothèse d'un champ

magnétique uniforme.

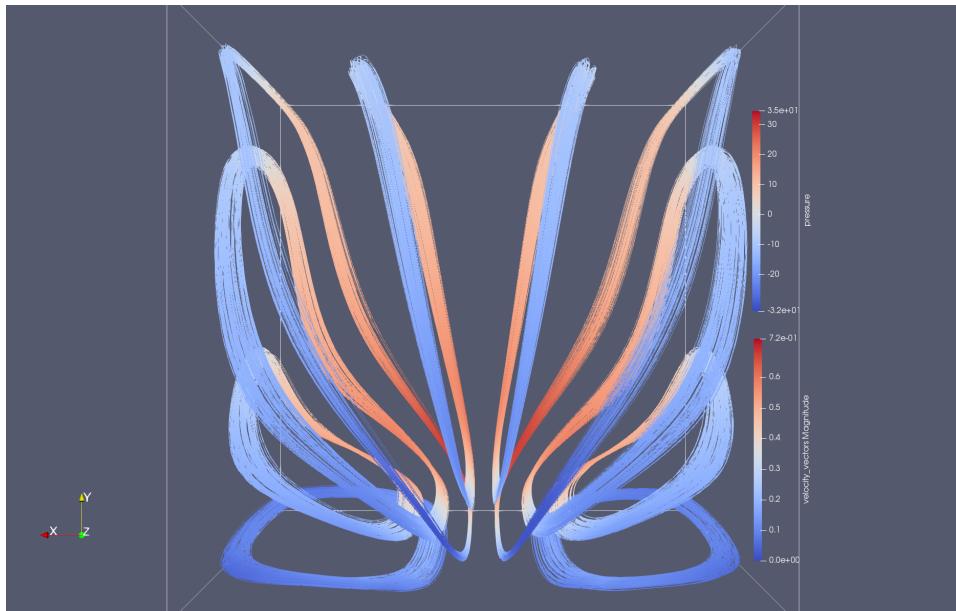


FIGURE 3.12 – différents flux dans le plan XY pour des sphères de rayon 0.02 contenant 100 particules et pour un max *StreamLine FLux* de 3, avec un aimant centré, Paraview

Nous pouvons comparer à la coupe sur le plan XY du champ magnétique pour cette configuration.

Nous apercevons sur la figure 3.13 que la déformation du tourbillon suit les lignes de champ magnétique, avec un module de vitesse constant sur les lignes de champ, ce qui est logique comme la force magnétique est constante sur les lignes de champ.

Ensuite de même pour l'aimant décentré (avant la transposition du champ de vitesse) on observe sur le plan de coupe près de l'aimant décentré un tourbillon centré selon z dans la cuve, et les observations des flux de particules montrent que le tourbillon suit la forme des lignes de champs.

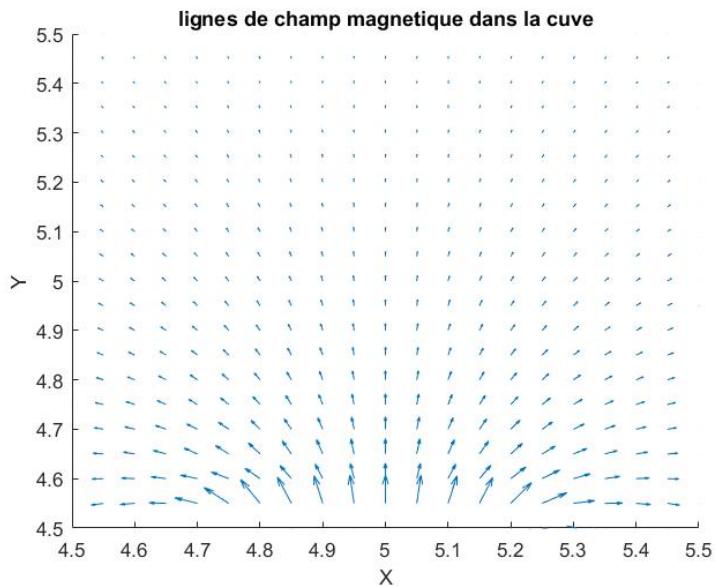


FIGURE 3.13 – champ magnétique selon XY avec un aimant centré

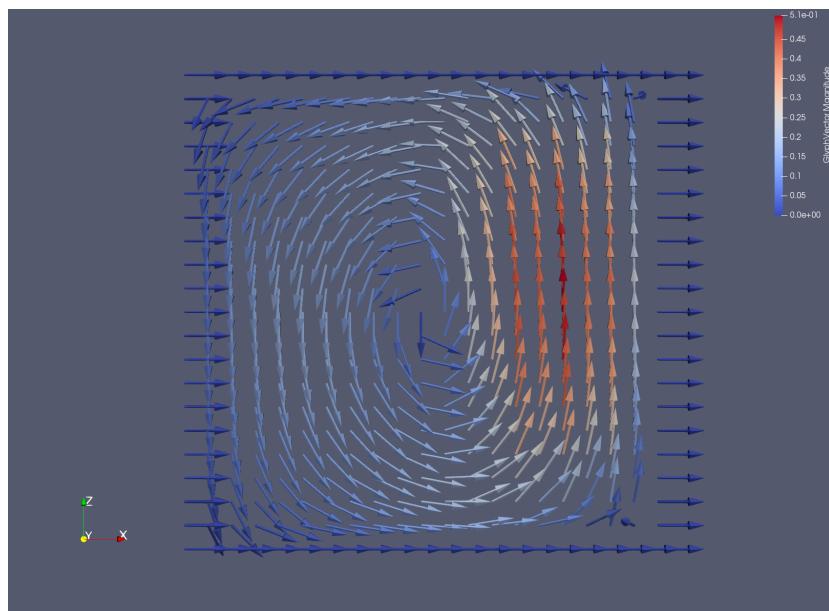


FIGURE 3.14 – coupe du champ de vitesse selon le plan XZ, pour Y petit (on est proche de l'aimant)

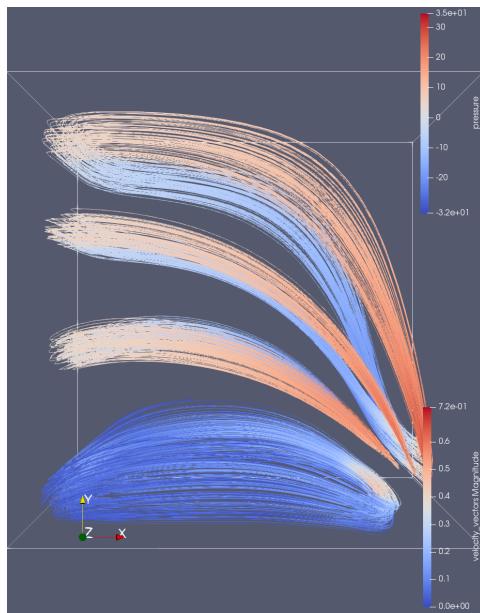


FIGURE 3.15 – différents flux pour un aimant centré utilisation de *StreamTracer* pour des sphères de rayon 0.05 contenant 100 particules et pour un max *StreamLine FLux* de 3

Enfin pour le champ de vitesse qui est la sommes des deux précédents nous observons les champ de vitesses sur les coupes 2D selon YZ, et XZ proches des aimants. On voit que proche des aimants les tourbillons sont peut perturbés (Ici le rapport nentre les forces magnétiques pour les deux forces est 1).

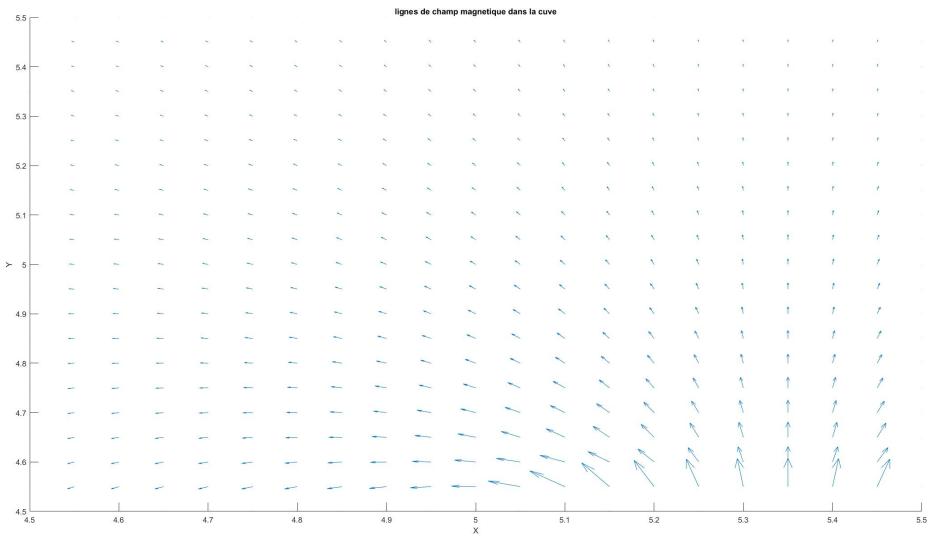


FIGURE 3.16 – champ magnétique selon XY avec un aimant centré

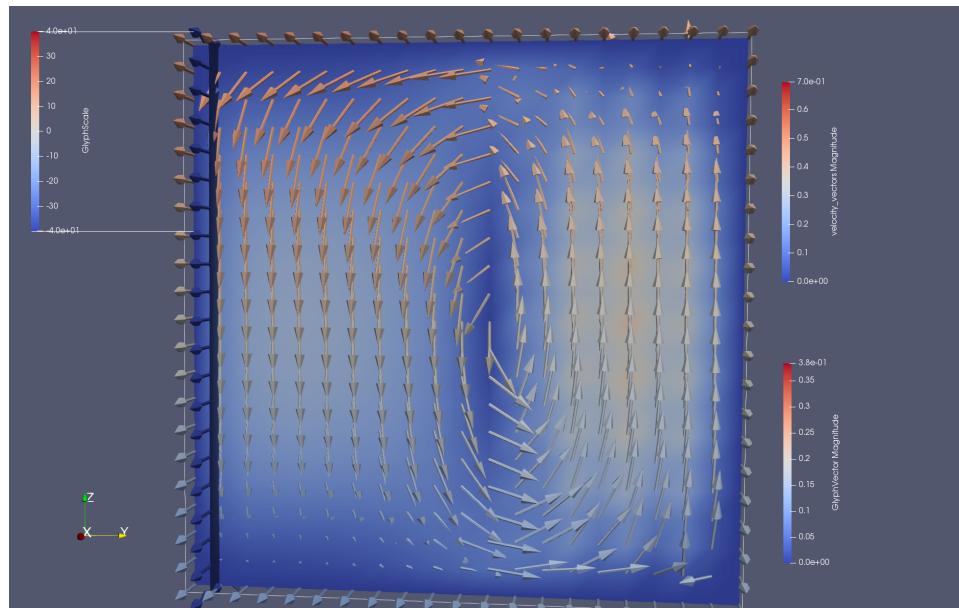


FIGURE 3.17 – coupe selon YZ, proche de l'aimant pour le champ de vitesse complet

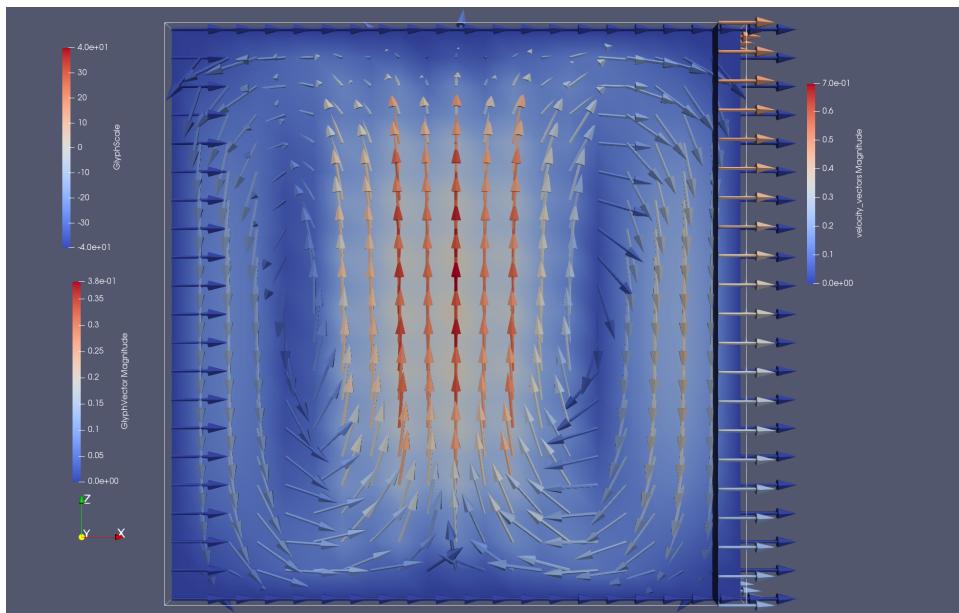


FIGURE 3.18 – coupe selon XZ, proche de l'aimant pour le champ de vitesse complet

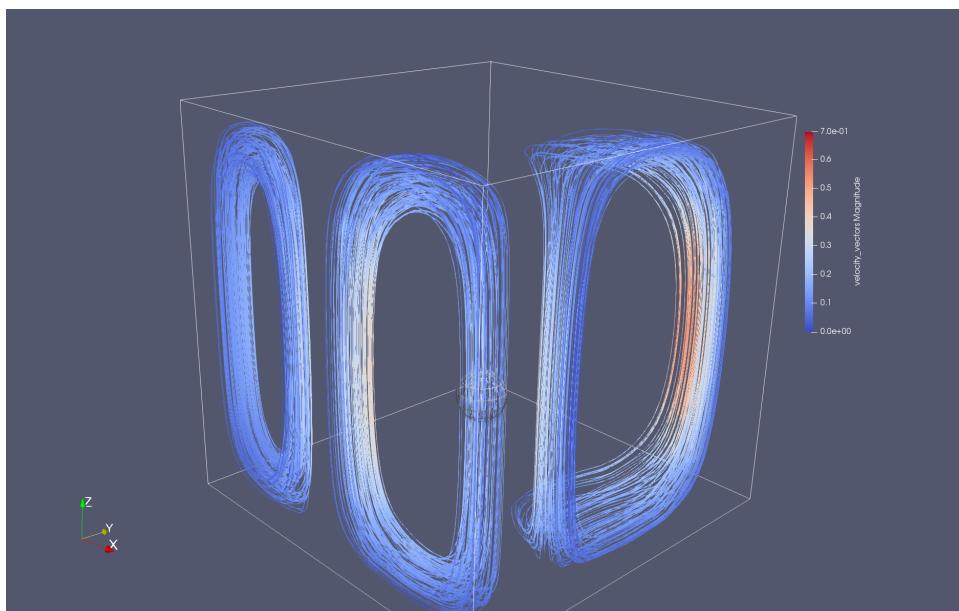


FIGURE 3.19 – trois flux de particules près des aimants pour le champ de vitesse total

3.0.9 Les sections de Poincaré

Pour caractériser les propriétés chaotiques des trajectoires associées à ce champ de vitesse, nous allons utiliser l'outil classique de la théorie des systèmes dynamiques qu'est la section de Poincaré, dont l'un des atouts est qu'elle permet de diminuer la complexité des problèmes par une réduction du nombre de dimensions.

En mathématiques, particulièrement en système dynamique, une application de Poincaré est une application liée à une orbite périodique dans l'espace des états d'un système dynamique et un certain sous-espace de dimension moindre, appelé la section de Poincaré, transverse au flot système.

Plus précisément, on considère une orbite suffisamment proche d'une orbite périodique, avec une condition initiale sur la section de Poincaré, et on observe le point auquel cette orbite revient à la section pour la première fois, d'où son autre nom, application de récurrence.

En fait, les intersections successives avec S notées P_n d'une trajectoire donnée peuvent être vues comme les itérées d'une condition initiale P_0 par une application de S dans S :

$$f : P_n \in S \rightarrow P_{n+1} = f(P_n) \in S$$

Dans notre cas, les sections introduites sont des hyperplans, qui coupent l'espace selon les coupes de courant qui nous intéresse, pour déterminer si advection chaotique il y a.

En effet , l'équation d'évolution de la particule fluide est :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{U}(\vec{x}),$$

où $\vec{x}(t)$ est la position de la particule fluide à l'instant t, et \vec{U} est le champ de la vitesse, qui est stationnaire (ne dépend pas du temps) , donc l'espace des phases correspond à l'espace physique.

On a deux cas :

-Sur la surface Σ apparaît une courbe régulière, qui correspond à un tore de fluide

, ou quelques points , qui correspondent à des orbites théorique. Étant donné qu'il y a reboulement des particules sur une même trajectoire, on qualifie la zone de semi-régulière, et n'est donc pas efficace pour le mélange.

-En revanche, si l'ensemble des des intersections entre les trajectoires et l'hyperplan Σ est disséminé sur une partie de la section Σ , on en conclut que la trajectoire a un comportement erratique, caractérisant une région chaotique, qui est du coup une région de bon mélange.

3.0.10 A la recherche d'un écoulement chaotique

En nous inspirant des travaux de Valérie Toussaint et du Travail accomplis l'annnée dernière sur le projet, nous allons reprendre le même principe et poser un rapport entre les deux force magnétique \vec{f}_1 qui donne un tourbillon et \vec{f}_2 qui donne deux tourbillons. Le but est 'd'équilibrer' les deux force pour avoir un mouvement d'advection chaotique à travers le paramètre dz contrôle R tel que :

$$R = \frac{||\vec{f}_1||}{||\vec{f}_2||}$$

Nous allons donc exécuter au final le script *Resolution finale* suivant pour résoudre notre problème en faisant varier R de telle manière à ensuite observer sur Paraview des sections de Poincaré permettant d'identifier des advections chaotiques.

```
%   résolution dans la configuration aimant centre
[X2,Y2,Z2,Uxgd_centre,Uygd_centre,Uzgd_centre,Pgd_centre] = stokes_3D(true,R);

%   résolution dans la configuration aimant de cote
[X2,Y2,Z2,Uxgd_cote,Uygd_cote,Uzgd_cote,Pgd_cote] = stokes_3D(false,R);

%   transposition du champ pour l'aimant décentré
[Uxgd_cote_transp,Uygd_cote_transp,Uzgd_cote_transp] = transposition_champ(Uxgd_cote)
```

```

% prise en compte du rapport R, comme les équation sont linéaire cela revient à app
% coefficient sur la vitesse.

R_i = norm(Uxgd_centre(:)) / norm(Uxgd_cote_transp(:));
Uxgd_cote_transp = (R / R_i) .* Uxgd_cote_transp;
Uxgd_total = Uxgd_centre + Uxgd_cote_transp;
Uygd_total = Uygd_centre + Uygd_cote_transp;
Uzgd_total = Uzgd_centre + Uzgd_cote_transp;
Pgd_total = Pgд_centre + Pgд_cote;

% sauvegarde au format .vtk pour Paraview
filename2_vtk='champ_de_vitesse_total_pour_R.vtk';
fprintf(' - au format VTK (''VTK STRUCTURED_GRID'') : %s\n',filename2_vtk);
writevtk3D(X2,Y2,Z2,Uxgd_total,Uygd_total,Uzgd_total,Pgd_total,filename2_vtk);

```

Les sections de Poincaré que nous présentons se basent sur un maillage de la cuve en 21 points selon les trois directions de l'espace, et dans Paraview la simulation de la trajectoire de 100 000 particules (ce qui est le maximum compte-tenus de la RAM de la machine sur laquelle nous travaillons, nous pouvions éventuellement aller au-dessus mais le logiciel présentait alors des problèmes de stabilité), placée initialement dans une sphère centré sur la cuve de rayon 0.6 (qui occupe donc toute la cuve qui est un cube de côté 1). Nous utilisons la méthode d'interpolation définies par défaut : Runge Kutta 4-5 dans les deux directions d'intégration et avec un *Maximum StreamLine Length* de 3.

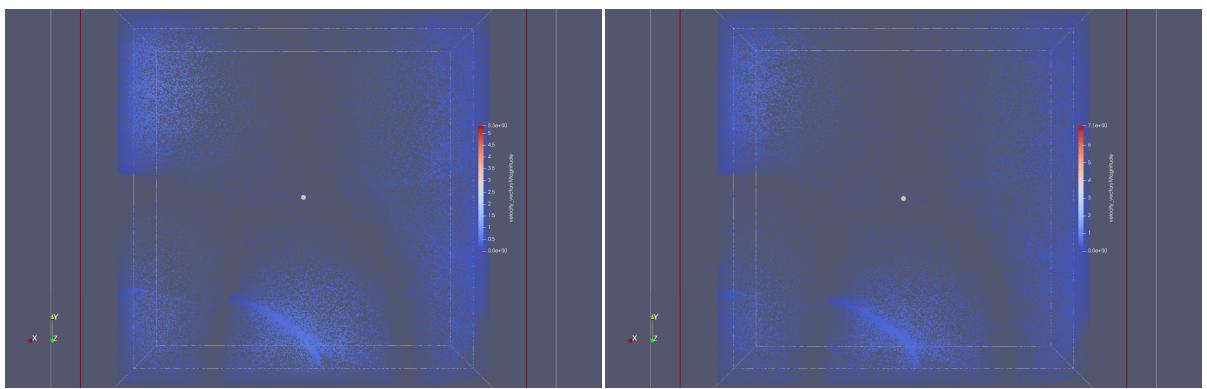


FIGURE 3.20 – R = 15

FIGURE 3.21 – R = 20

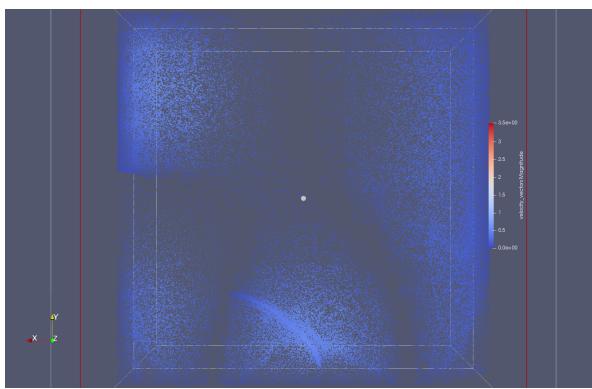


FIGURE 3.22 – $R = 10$

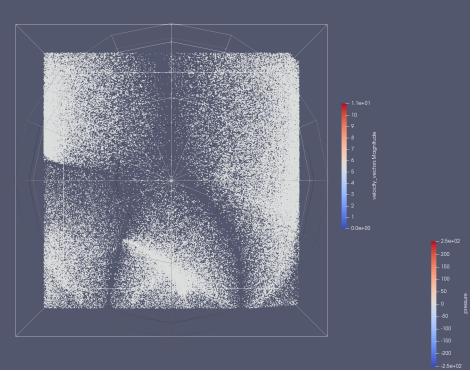


FIGURE 3.23 – $R = 8$

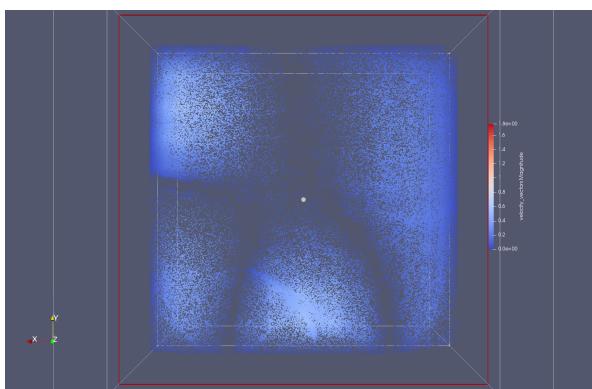


FIGURE 3.24 – $R = 5$

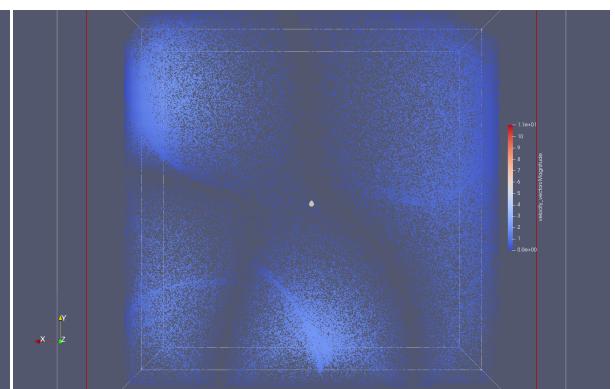


FIGURE 3.25 – $R = 2$

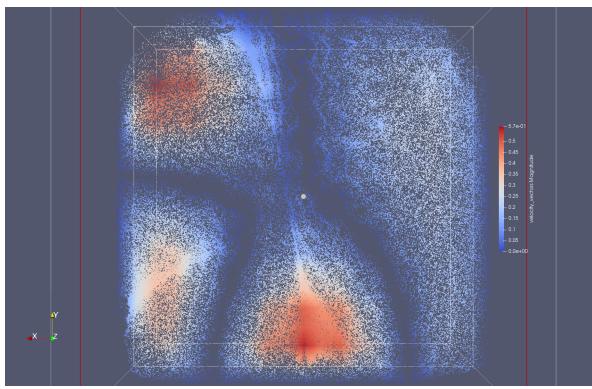


FIGURE 3.26 – $R = 0.1$

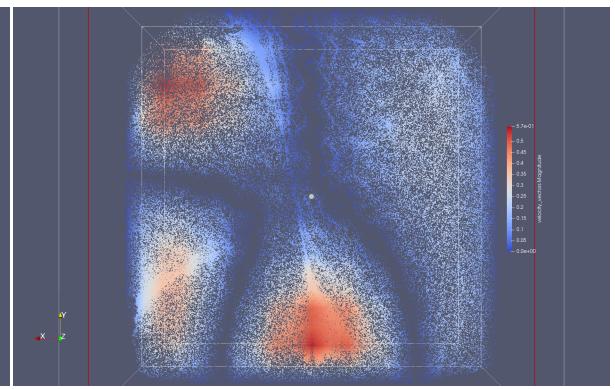


FIGURE 3.27 – $R = 0.5$

On voit en comparant aux sections de Poincaré réalisées l'année dernière que les zones sombres correspondants à des points dispersé, c'est à dire des zones

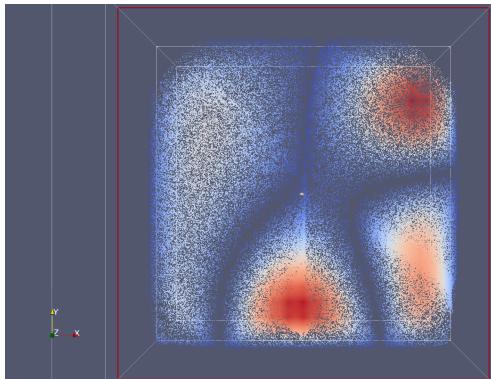


FIGURE 3.28 – $R = 0.01$

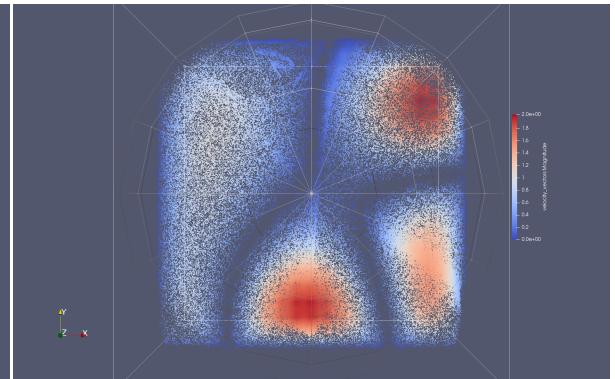


FIGURE 3.29 – $R = 0.05$

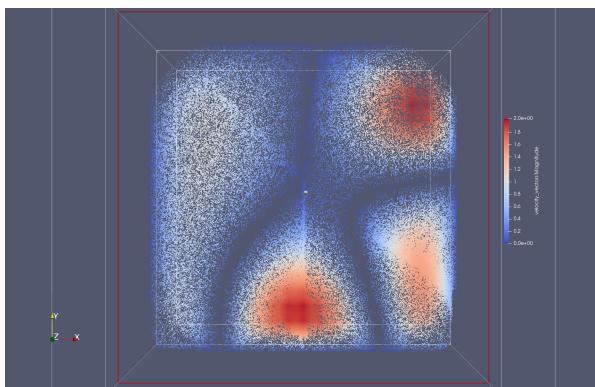


FIGURE 3.30 – $R = 0.005$

chaotiques, ont tendance à être courbées alors qu'elles avaient tendance à être droites dans l'hypothèse du champ magnétique uniforme sur une partie de la cuve et nul ailleurs. Nous n'observons pas cette "plage du chaos" correspondant à un élargissement de ces zones sombre en fonction de la valeur du coefficient R . Malheureusement, malgré notre tâtonnement sur la valeur de R nous ne sommes pas arrivé à cerner la plage de valeurs pour laquelle l'écoulement est chaotique, malgrés également que nous ayant divisé par deux le pas de maillage. Cela nécessite sans aucun doute des simulations plus poussées mais nous avons malheureusement tardé à avoir ces résultats ce qui ne nous a pas permis d'avoir le temps de lancer une série de simulations plus complètes déjà que les simulations actuelles entre la résolution du système linéaire et l'interpolation sous Paraview peuvent prendre un temps non négligeable. Ce que nous aurions pu faire est de prendre un paramètre

Maximum StreamLine Length beaucoup plus important comme l'année dernière. De manière générales les simulations réalisé l'année dernière en terme de pas de pas de maillage, de nombre de point, et de *Maximum StreamLine Length* sont beaucoup plus poussées que celle que nous avons réalisés. Nous avons tenté des simulations sous Paraview avec le même paramétrage que l'année dernière mais nous nous confrontons à un problème de stabilité du logiciel. Nous réesayerons néanmoins d'ici la soutenance d'arriver à faire tourner une simulation plus fine qui pourrait être intéressante.

Conclusion :

L'objectif de ce projet a été, en partant de la thèse de Valérie Toussaint, de pousser l'étude des écoulement chaotiques avec un dispositif expérimental à 3 tourbillons.

La valeur ajouté que nous devions apporter est une simulation se rapprochant plus du réel en ne supposant pas le champ magnétique uniforme sur une moitié de la cuve. Nous avons pu voir des modification intéressante sur les tourbillons en supprimant cette hypothèse.

Cependant en utilisant les sections de Poincaré de manière empirique nous n'avons pas identifié "la plage du chaos" qui permet en modulant selon un rapport R les forces des deux aimant d'arriver à un écoulement chaotique sur une portion majoritaire du fluide.

Un autre objectif de ce projet était la caractérisation mathématique de l'advection chaotique en calculant les exposant de Lyapunov et en étudiant l'évolution de la distance entre deux particule se trouvant à une distance δx l'une de l'autre à l'instant initial. Le but de cette étude mathématique aurait été la recherche plus précise du rapport R optimal pour générer le choaos face à l'approche des section de Poincaré qui est empirique.

Annexe A

Calcul de la matrice de rigidité

La matrice Jacobienne de la transformation est définie par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(\varphi(F(\hat{x}))) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x})$$

Donc

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = J^T \times \nabla_x \varphi$$

Calculons $\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}$ sur le triangle de référence \hat{T} :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1 = -\hat{x}_1 + 1 - \hat{x}_2 \\ \hat{\varphi}_2 = \hat{x}_1 \\ \hat{\varphi}_3 = \hat{x}_2 \end{cases}$$

En effet $\hat{\varphi}_1$ vaut 1 sur le sommet 1 et 0 sur les autres sommets (Figure 3). Ainsi

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$|J| = (x_2 - x_1) \times (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \times (y_2 - y_1) = 2 \times \text{Aire}(T)$$

où $|J|$ est le déterminant de la matrice J et ainsi

$$\nabla_x \varphi = (J^{-1})^T \times \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}$$

avec

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix}$$

d'où

$$(J^{-1})^T = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix}$$

$$* = \frac{1}{2 \times \text{aire}(T)} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix}$$

Et le calcul du terme A_{ij} de la matrice de rigidité, on obtient ainsi avec le changement de variable vers le triangle de référence.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \iint_{(i,j) \in T} \nabla_x \varphi_i \cdot \nabla_x \varphi_j \\ &= \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \iint_{(i,j) \in T} (J^{-1})^T |J| (J^{-1})^T |J| \times \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \times \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j \\ &= \sum_{T \in \text{Supp}(\varphi_i) \times \text{Supp}(\varphi_j)} \frac{\text{aire}(T)^2}{4} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^2 \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\varphi}_j \end{aligned}$$

Annexe B

Codes Matlab

B.0.1 Modélisation du champ magnétique

Bibliographie

"Introduction à l'analyse numérique"(1998), de Jacque Rappaz et Marco Picasso, publié par les Presses polytechniques et universitaires romandes.

"Méthode des éléments finis : élasticité plane" par Yves Daubard, Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique , <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>, 24 mars 2006 – 29 mars 2011

"Analyse numérique des équations de Navier-Stokes",de Jean-François Scheid, Cours de Master 2 Mathématiques (Recherche) - Université de Lorraine, Nancy.

"Projet de deuxième Année : Génération de maillages 2D avec Matlab" de Jean-Philippe LEBOUCHER Benjamin PACCOU avec comme chef de Projet Jonas KOKO, Institut Supérieur d' Informatique, de Modélisation et de leurs Applications

Bibliographie