Universität Duisburg-Essen **WS 2013/14**
Ingenieurwissenschaften / Informatik **28. Oktober 2013**
Dozentin: Prof. Barbara König **Übungsblatt 2**
Übungsleitung: H. Kerstan, S. Küpper **Abgabe: 04. November 2013**

Übung zur Vorlesung BeKo 2013/14

Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik

Sie können für die 4 Aufgaben auf diesem Übungszettel insgesamt bis zu **20** Punkte erhalten. Genauere Angaben zur Abgabe der Übungszettel finden Sie auf der letzten Seite nach den Aufgaben.

Aufgabe 5 *Zählen von Turingmaschinen* (5 Punkte)

(a) Wieviele Übergangsfunktionen für *deterministische* Turingmaschinen über dem Bandalphabet $\{a, \square\}$ mit der Zustandsmenge $\{z_1, z_2, z_3\}$ gibt es? (1 Punkt)

(b) Wieviele Übergangsfunktionen für *nicht-deterministische* Turingmaschinen über dem Bandalphabet $\{x, y, \square\}$ mit der Zustandsmenge $\{z_a, z_b\}$ gibt es? (1 Punkt)

(c) Wieviele Übergangsfunktionen für *deterministische* Turingmaschinen über einem Bandalphabet $\Gamma = \{a_1, ..., a_m\}$ mit der Zustandsmenge $Z = \{z_1, ..., z_n\}$ gibt es? (1 Punkt)

(d) Wieviele Übergangsfunktionen für *nicht-deterministische* Turingmaschinen über dem Bandalphabet $\Gamma = \{a_1, ..., a_m\}$ mit der Zustandsmenge $Z = \{z_1, ..., z_n\}$ gibt es? (2 Punkte)

Um die volle Punktzahl zu bekommen, müssen Sie Ihre Antworten korrekt und ausführlich begründen.

Aufgabe 6 *Was macht diese Turingmaschine?* (6 Punkte)

Gleich zu Anfang dieser Vorlesung möchten wir Ihnen den Albtraum der Korrekteure vorstellen: Es ist sehr schwierig, zu einer gegebenen aber unkommentierten Turingmaschine, festzustellen, welchen Algorithmus diese ausführt. Diese Aufgabe soll Ihnen diese Schwierigkeit verdeutlichen, damit Sie in Zukunft nur noch gut kommentierte Turingmaschinen als Lösungen zu den Übungen abgeben.
Gegeben sei die Turingmaschine M mit

- Zustandsmenge $Z = \{z_0, z_s, z_a, z_b, z_d, z_r, z_E\}$
- Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$
- Bandalphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{\#\} \cup \{\square\}$
- Startzustand $z_0 \in Z$
- Leerzeichen $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$

- Endzustandsmenge $E = \{z_E\}$

und Überführungsfunktion $\delta\colon Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, N, R\}$:

$$
\begin{aligned}
\delta(z_0, a) &= (z_0, a, R) & \delta(z_s, a) &= (z_a, \#, R) \\
\delta(z_0, b) &= (z_0, b, R) & \delta(z_s, b) &= (z_b, \#, R) \\
\delta(z_0, \#) &= (z_0, \#, R) & \delta(z_s, \#) &= (z_s, \#, L) \\
\delta(z_0, \Box) &= (z_s, \#, L) & \delta(z_s, \Box) &= (z_d, \Box, R) \\
\\
\delta(z_a, a) &= (z_a, a, R) & \delta(z_b, a) &= (z_b, a, R) \\
\delta(z_a, b) &= (z_a, b, R) & \delta(z_b, b) &= (z_b, b, R) \\
\delta(z_a, \#) &= (z_a, \#, R) & \delta(z_b, \#) &= (z_b, \#, R) \\
\delta(z_a, \Box) &= (z_r, a, L) & \delta(z_b, \Box) &= (z_r, b, L) \\
\\
\delta(z_d, a) &= (z_E, a, N) & \delta(z_E, a) &= (z_E, a, N) \\
\delta(z_d, b) &= (z_E, b, N) & \delta(z_E, b) &= (z_E, b, N) \\
\delta(z_d, \#) &= (z_d, \Box, R) & \delta(z_E, \#) &= (z_E, \#, N) \\
\delta(z_d, \Box) &= (z_E, \Box, N) & \delta(z_E, \Box) &= (z_E, \Box, N) \\
\\
\delta(z_r, a) &= (z_r, a, L) \\
\delta(z_r, b) &= (z_r, b, L) \\
\delta(z_r, \#) &= (z_s, \#, L) \\
\delta(z_r, \Box) &= (z_r, \Box, R)
\end{aligned}
$$

(a) Simulieren Sie Turingmaschine auf den Eingaben *ab* und *aabb*. Geben Sie für die Eingabe “*ab*” *alle* Schritte an, die die Turingmaschine durchführt bis sie in einen Endzustand gelangt und auch den Bandinhalt nach der Terminierung. Für das Wort *aabb* genügt es, wenn Sie den Bandinhalt nach Terminierung angeben. (*Hinweis:* Im Internet gibt es verschiedene Turingmaschinen-Simulatoren. Es ist hilfreich, einen solchen hier zu verwenden.) (1 Punkt)

(b) Beschreiben Sie in eigenen Worten was diese Turingmaschine tut. (2 Punkte)

(c) Kommentieren/beschreiben Sie die Funktion/Aufgabe jedes Zustandes der Turingmaschine. Eine wörtliche Wiedergabe der Übergangsfunktion ist *keine* gültige Lösung. (3 Punkte)

Aufgabe 7 *Turingmaschine für eine reguläre Sprache* (5 Punkte)

Gegeben sei folgende, reguläre Sprache L: $(b^*)a(a^*)ab$.

(a) Geben Sie eine reguläre Grammatik für L an. (1 Punkt)

(b) Geben Sie eine δ-Funktion für eine Turingmaschine mit

- Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$
- Bandalphabet $\Gamma = \{a, b, 1, \Box\}$

- Zustandsmenge $Z = \{z_0, \ldots, z_E\}$
  (Es ist möglich, die Aufgabe mit 5 Zuständen zu lösen.)
- Startzustand z_0
- Leerzeichen $\square$
- Endzustandsmenge $E = \{z_E\}$

an, die immer Zustand z_E erreicht, die die Eingabe nur einmal liest und die eine einzelne 1 auf das ansonsten leere Band schreibt, wenn die Eingabe in L liegt, und das Band komplett löscht, wenn die Eingabe nicht in L liegt. Die Übergangsfunktion für Zustand z_E ist dabei schon wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned}
\delta(z_E, a) &= (z_E, a, N) \\
\delta(z_E, b) &= (z_E, b, N) \\
\delta(z_E, 1) &= (z_E, 1, N) \\
\delta(z_E, \square) &= (z_E, \square, N)
\end{aligned}$$

Bitte erklären Sie Ihre Lösung und die Bedeutung der einzelnen Zustände, um eine vernünftige Korrektur der Aufgabe zu ermöglichen (vgl Aufgabe 6). Abgaben ohne Kommentare erhalten *keine* Punkte. (4 Punkte)

Aufgabe 8 *Wiederholung: Funktionen Teil II* (4 Punkte)

Wir wollen in dieser Aufgabe ein paar weitere grundlegende Funktionsbegriffe wiederholen. Seien dazu X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Die Funktion f heißt

- *injektiv* genau dann wenn für alle $x, x' \in X$ aus $f(x) = f(x')$ stets $x = x'$ folgt,
- *surjektiv* genau dann wenn es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$,
- *bijektiv* genau dann wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Geben Sie *endliche* Mengen X, Y und eine Funktion $f\colon X \to Y$ an, so dass

(a) f weder injektiv noch surjektiv ist, (1 Punkt)

(b) f injektiv aber nicht surjektiv ist, (1 Punkt)

(c) f surjektiv aber nicht injektiv ist, (1 Punkt)

(d) f bijektiv ist. (1 Punkt)

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Funktion die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Hinweise zur Abgabe

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Montag, den 04. November 2013 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Eine Bearbeitung der Übungsaufgaben *zu zweit* ist möglich. In diesem Fall geben Sie bitte *nur eine Abgabe (auch bei Moodle!)* ab und schreiben Sie den *Namen* und die *Matrikelnummern beider Personen* auf Ihre

Abgabe bzw. in das PDF-Dokument. Ihr Name, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppennummer und das Fach (BeKo 2013/14) müssen deutlich sichtbar auf die Hausaufgabe geschrieben sein. Sie können Ihre Aufgaben an folgenden Stellen abgeben:

Campus Duisburg:
Der mit *Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik* beschriftete Briefkasten neben Raum LF259.

Moodle:
Sie können ihre Hausaufgaben auch gerne per MOODLE[1] abgeben. Achten Sie aber darauf, dass Sie ihre Hausaufgaben als eine einzelne pdf-Datei hochladen. Wenn ein Betreuer Ihre Abgabe nicht öffnen kann (Formate wie docx o.ä.), bringt das nur unnötige Verzögerungen mit sich.

---

[1] http://moodle2.uni-due.de/course/view.php?id=1338