

**Übung zur Vorlesung BeKo 2013/14**  
**Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik**

Sie können für die 4 Aufgaben auf diesem Übungszettel insgesamt bis zu **20** Punkte erhalten. Genauere Angaben zur Abgabe der Übungszettel finden Sie auf der letzten Seite nach den Aufgaben.

**Aufgabe 16**    *WHILE-Programm* (4 Punkte)

Geben Sie ein **WHILE**-Programm an, das den größten gemeinsamen Teiler ( $\text{ggT}(a, b)$ ) zweier natürlicher Zahlen  $a, b$  berechnet. (4 Punkte)

Benutzen Sie dazu den Euklidischen Algorithmus:

- 1: Falls  $a = b$  gilt, bricht die Berechnung ab und es wird  $\text{ggT}(a, b) = a$  ausgegeben. Sonst weiter bei 2.
- 2: Falls  $a > b$  gilt, setze  $a := a - b$  und gehe wieder zu 1, sonst zu 3.
- 3: Falls  $a < b$  gilt, setze  $b := b - a$  und gehe zu 1.

TIPP: Definieren Sie sich ein Makro **IF**  $x = 0$  **THEN** A **ELSE** B **END**

**Aufgabe 17**    *LOOP-Programme* (5 Punkte)

- (a) Beschreiben Sie in eigenen Worten, warum **LOOP**-Programme immer terminieren. (1 Punkt)
- (b) Erläutern Sie vor diesem Hintergrund, warum **LOOP**-Programme nicht *Turing-mächtig* sind. (1 Punkt)
- (c) Zeigen Sie, dass

$$f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, f(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } n = 0 \\ \lceil \log_2(n) \rceil & , \text{ sonst} \end{cases}$$

(der Logarithmus von  $n$  zur Basis 2 aufgerundet auf die nächste ganze Zahl) **LOOP**-berechenbar ist, indem Sie ein **LOOP**-Programm für  $f$  angeben. (3 Punkte)

(*Hinweis:* Sie dürfen  $a+b$ ,  $a-b$ ,  $a*b$ ,  $a = b$  (in **IF**-Anweisungen), **IF** ... **THEN** ... **END** als Makros benutzen.)

### Aufgabe 18    *primitiv-rekursive Funktionen* (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Geben Sie dabei jeweils die verwendeten Regeln und Funktionen zur Bildung der Funktionen an. Sie dürfen in jeder Teilaufgabe die Funktionen aller vorherigen Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie eine Teilaufgabe nicht bearbeitet haben.

(a)  $f_1: \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0, f_1(x, y) = y - x$  (modifizierte Subtraktion!) (2 Punkte)

(b)  $\chi_{\{0\}}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, x \mapsto \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$  (1 Punkt)

(c)  $f_2: \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0, f_2(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ y^x & \text{sonst} \end{cases}$  (2 Punkte)

### Aufgabe 19    *SKIP-Programme* (6 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung LOOP- WHILE- und GOTO-Programme kennengelernt. Natürlich gibt es noch andere Programmiersprachen. Hier sollen nun die SKIP-Programme vorgestellt und anschließend gezeigt werden, dass sie die gleiche Mächtigkeit haben wie GOTO-Programme.

#### SKIP – Programm:

- *Eingabe:* Die Sprache SKIP kennt folgende fünf Befehle:
  - **SKIP( $k$ )** Überspringt die nächsten  $k \in \mathbb{N}_0$  Programmzeilen
  - **IF  $x_i = c$  THEN SKIP( $k$ )** mit  $c, k \in \mathbb{N}_0$ , überspringt die nächsten  $k$  Zeilen, wenn  $x_i = c$  erfüllt ist
  - **GOTOSTART** Springt in die erste Programmzeile
  - $x_i := x_j + c$ ; mit  $c \in \mathbb{N}_0$
  - $x_i := x_j - c$ ; mit  $c \in \mathbb{N}_0$

Die Eingaben für ein Programm werden in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  übergeben. Jede nicht zugewiesene Variable hat am Anfang des Programmaufrufs den Wert 0.

- *Ausgabe:* Ein SKIP-Programm ist beendet, wenn man am Ende des Programmcodes angekommen ist (**<eof>**) oder wenn man durch eine **SKIP( $k$ )**-Anweisung über die letzte Zeile des Programms hinauspringt. Das Ergebnis der Berechnung steht in  $x_0$ .

- (a) Zeigen Sie, dass man jedes GOTO-Programm durch ein geeignetes SKIP-Programm simulieren kann. (3 Punkte)

(*Hinweis:* Benutzen Sie dazu eine ähnliche Vorgehensweise, wie bei der Simulation von GOTO- mit WHILE-Programmen)

- (b) Zeigen Sie, dass man jedes SKIP-Programm durch ein geeignetes GOTO-Programm simulieren kann. (3 Punkte)

---

## Hinweise zur Abgabe

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Montag, den 25. November 2013 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Eine Bearbeitung der Übungsaufgaben *zu zweit* ist möglich. In diesem Fall geben Sie bitte *nur eine Abgabe (auch bei Moodle!)* ab und schreiben Sie den *Namen* und die *Matrikelnummern beider Personen* auf Ihre Abgabe bzw. in das PDF-Dokument. Ihr Name, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppennummer und das Fach (BeKo 2013/14) müssen deutlich sichtbar auf die Hausaufgabe geschrieben sein. Sie können Ihre Aufgaben an folgenden Stellen abgeben:

### Campus Duisburg:

Der mit *Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik* beschriftete Briefkasten neben Raum LF259.

### Moodle:

Sie können ihre Hausaufgaben auch gerne per MOODLE<sup>1</sup> abgeben. Achten Sie aber darauf, dass Sie ihre Hausaufgaben als eine einzelne pdf-Datei hochladen. Wenn ein Betreuer Ihre Abgabe nicht öffnen kann (Formate wie docx o.ä.), bringt das nur unnötige Verzögerungen mit sich.

---

<sup>1</sup><http://moodle2.uni-due.de/course/view.php?id=1338>