Universität Duisburg-Essen — **WS 2013/14**
Ingenieurwissenschaften / Informatik — **27. Januar 2014**
Dozentin: Prof. Barbara König — **Übungsblatt 12**
Übungsleitung: H. Kerstan, S. Küpper — **Abgabe: 3. Februar 2014**

Übung zur Vorlesung BeKo 2013/14

Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik

Sie können für die 3 Aufgaben auf diesem Übungszettel insgesamt bis zu **20** Punkte erhalten. Genauere Angaben zur Abgabe der Übungszettel finden Sie auf der letzten Seite nach den Aufgaben.

Aufgabe 41 *Weitere kurze Fragen* **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten, denn Antworten *ohne* Begründung ergeben auch *keine* Punkte.

(a) Das Halteproblem ist NP-vollständig. (1 Punkt)

(b) Von jedem Problem in NP ist bekannt, dass es auch NP-hart ist. (1 Punkt)

(c) Das Problem $\mathsf{FACTOR}(n, k)$, das entscheidet, ob eine natürliche Zahl n einen Teiler t hat, für den gilt: $2 \leq t \leq k$, ist in NP. (2 Punkte)

(d) Wenn das Problem $\mathsf{DNF{-}TAU}$ in polynomieller Zeit lösbar wäre, würde daraus $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ folgen. (4 Punkte)

> $\mathsf{DNF{-}TAU}$:
>
> - *Eingabe:* Eine aussagenlogische Formel F in DNF (disjunktiver Normalform) über n Variablen und m Monomen.
> - *Ausgabe:* Hat F für jede mögliche Belegung der n Variablen den den Wahrheitswert 1? (D.h. ist F gültig? Oder ist F die Tautologie?)

(*Hinweis:* Ein boolescher Ausdruck ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn er als Disjunktion von Konjunktionen dargestellt ist. Es gibt also einzelne Klauseln, in denen Literale mit $\wedge$ verknüpft sind (sog. Monome) und diese einzelnen Monome werden durch $\vee$ verbunden. Eine DNF ist also unter einer Belegung der Variablen *wahr*, wenn mindestens ein Monom *wahr* ist.
Wenn man eine KNF mit den Regeln von DeMorgan[1] negiert, erhält man eine DNF.)

[1] Wenn Sie mit den Regeln von DeMorgan nicht vertraut sind, dann können Sie sie z.B. unter http://de.wikipedia.org/wiki/De_Morgansche_Gesetze nachschlagen und werden feststellen: Die Anwendung der DeMorganschen Regeln auf eine KNF ist in polynomieller Zeit machbar.

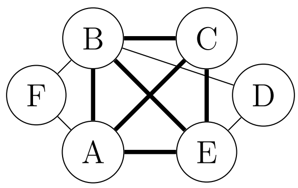
Aufgabe 42 $\textsf{CLIQUE} \leq_p \textsf{INDEPENDENT} - \textsf{SET}$ **(6 Punkte)**

Im Folgenden verwenden wir ungerichtete Graphen ohne Mehrfach-Kanten, welche wie folgt definiert sind:
Ein ungerichteter Graph G ist ein Paar (V, E) bestehend aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge E. Jede Kante aus E verbindet dabei genau zwei verschiedene Knoten aus V, d.h. jedes Element von E ist eine Menge, die genau zwei verschiedene Knoten enthält. Außerdem gibt es für je zwei Knoten maximal eine Kante, die sie verbindet.
Wir betrachten nun die Probleme CLIQUE und INDEPENDENT – SET:

CLIQUE:

- *Eingabe:* Ein Paar (G, k) bestehend aus einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E und einer natürlichen Zahl k.
- *Ausgabe:* Besitzt der Graph G einen vollständigen Teilgraphen der Größe k? Ein Teilgraph ist genau dann vollständig, wenn *jeder* Knoten mit *jedem* anderen verbunden ist.

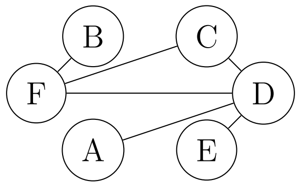
Beispielsweise enthält der folgende Graph G eine Clique der Größe 4, bestehend aus den Knoten A, B, C, E. Das heißt $(G, 4) \in$ CLIQUE. Es ist bekannt, dass CLIQUE NP-vollständig ist.



INDEPENDENT – SET:

- *Eingabe:* Ein Paar (G, k) bestehend aus einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E und einer natürlichen Zahl k.
- *Ausgabe:* Gibt es eine Menge M mit k Knoten, so dass keine zwei Knoten aus M durch eine Kante verbunden sind? (D.h., M ist eine sogenannte unabhängige Menge.)

Folgender Graph G' enthält eine unabhängige Menge der Größe 4, bestehend aus den Knoten A, B, C, E. Das heißt, es gilt $(G', 4) \in$ INDEPENDENT – SET.



(a) Zeigen Sie, dass CLIQUE auf INDEPENDENT – SET polynomiell reduzierbar ist, d.h., zeigen Sie $\textsf{CLIQUE} \leq_p \textsf{INDEPENDENT} - \textsf{SET}$. (5 Punkte)

(*Hinweis:* Sie müssen bei der Reduktion nur die Kantenmenge des Graphen verändern, das Hinzufügen oder Löschen von Knoten ist nicht notwendig.

Außerdem muss Ihre Reduktion den oben angegebenen Beispielgraph für CLIQUE nicht in den Beispielgraph für INDEPENDENT – SET überführen!)

(b) Argumentieren Sie, warum INDEPENDENT – SET NP-vollständig ist. (1 Punkt)

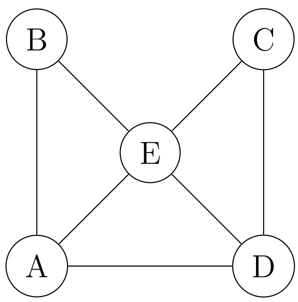
Aufgabe 43 VERTEX–COVER (6 Punkte)

Ein weiteres Problem der Graphentheorie ist das Problem der Knotenüberdeckung (VERTEX–COVER genannt), das wie folgt definiert ist:

VERTEX–COVER:

- *Eingabe:* Ein Paar (G, k) bestehend aus einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E und einer natürlichen Zahl k.
- *Ausgabe:* Gibt es eine Menge von k Knoten aus G, so dass jede Kante des Graphen mit mindestens einem Knoten der Menge verbunden ist?

Beispiel: Für den nachfolgenden Graphen ist unter anderem $\{A, D, E\}$ eine Knotenüberdeckung für $k = 3$. Der Graph hat keine Knotenüberdeckung, die aus nur zwei Knoten besteht.



(a) Zeigen Sie, dass sich INDEPENDENT – SET polynomiell auf VERTEX–COVER reduzieren lässt. (4 Punkte)

(b) Begründen Sie mit Hilfe von Aufgabe 42, warum VERTEX–COVER NP-vollständig ist. (2 Punkte)

(*Hinweis:* Schauen Sie sich für eine feste Knotenüberdeckung an, welche Eigenschaften alle Knoten dieser Überdeckung besitzen und welche Eigenschaften alle Knoten des Graphen besitzen, die nicht zu der Überdeckung gehören.)

Hinweise zur Abgabe

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Montag, den 3. Februar 2014 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Eine Bearbeitung der Übungsaufgaben *zu zweit* ist möglich. In diesem Fall geben Sie bitte *nur eine Abgabe (auch bei Moodle!)* ab und schreiben Sie den *Namen* und die *Matrikelnummern beider Personen* auf Ihre Abgabe bzw. in das PDF-Dokument. Ihr Name, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppennummer und das Fach (BeKo 2013/14) müssen deutlich sichtbar auf die Hausaufgabe geschrieben sein. Sie können Ihre Aufgaben an folgenden Stellen abgeben:

Campus Duisburg:
Der mit *Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik* beschriftete Briefkasten neben Raum LF259.

Moodle:
Sie können ihre Hausaufgaben auch gerne per MOODLE[2] abgeben. Achten Sie aber darauf, dass Sie ihre Hausaufgaben als eine einzelne pdf-Datei hochladen. Wenn ein Betreuer Ihre Abgabe nicht öffnen kann (Formate wie docx o.ä.), bringt das nur unnötige Verzögerungen mit sich.

---

[2] http://moodle2.uni-due.de/course/view.php?id=1338