Universität Duisburg-Essen | **WS 2013/14**
Ingenieurwissenschaften / Informatik | **25. November 2013**
Dozentin: Prof. Barbara König | **Übungsblatt 6**
Übungsleitung: H. Kerstan, S. Küpper | **Abgabe: 02. Dezember 2013**

Übung zur Vorlesung BeKo 2013/14

Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik

Sie können für die 3 Aufgaben auf diesem Übungszettel insgesamt bis zu **20** Punkte erhalten. Genauere Angaben zur Abgabe der Übungszettel finden Sie auf der letzten Seite nach den Aufgaben.

Aufgabe 20 *Totale Funktionen* (7 Punkte)

Sie kennen aus der Vorlesung die *totalen* Funktionen. Das sind die Funktionen $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die jeder natürlichen Zahl (inklusive 0) genau eine natürliche Zahl (inklusive 0) zuordnen.
Außerdem haben Sie verschiedene Sprachen (wie GOTO oder LOOP) kennen gelernt, die jeweils genau einer Klasse (Turing-berechenbar, primitiv rekursiv ...) von berechenbaren Funktionen entsprechen. Die Frage ist nun, ob es eine solche Sprache auch für die berechenbaren totalen Funktionen gibt. Diese Sprache soll dabei folgende Eigenschaften erfüllen:

- Die Sprache (also die Menge der gültigen Programme) ist rekursiv aufzählbar.
- Jede totale Funktion lässt sich durch (mindestens) ein Programm aus der Sprache beschreiben.
- Jede durch die Sprache beschriebene Funktion ist total (d.h. die Programme terminieren immer).

Zeigen Sie nun, dass es eine solche Sprache *nicht* geben kann. (7 Punkte)

(*Hinweis:* Versuchen Sie den entsprechenden Diagonalisierungs-Beweis für LOOP-Programme aus der Vorlesung zu adaptieren.)

Aufgabe 21 *primitiv-rekursive Funktionen* (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Geben Sie dabei jeweils die verwendeten Regeln und Funktionen zur Bildung der Funktionen an. Sie dürfen in jeder Teilaufgabe die Funktionen aller vorherigen Teilaufgaben - auch die aus Aufgabe 18 auf Übungsblatt 5 - benutzen, auch wenn Sie eine Teilaufgabe nicht bearbeitet haben.

(a) $\mathrm{leq}\colon \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & x \leq y \\ 0 & x > y \end{cases}$ (2 Punkte)

(b) $\mathrm{geq}\colon \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & x \geq y \\ 0 & x < y \end{cases}$ (1 Punkt)

(c) $\mathrm{eq}\colon \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$ (1 Punkt)

Aufgabe 22 *μ-rekursive Funktionen* (9 Punkte)

Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgabe dürfen Sie davon ausgehen, dass Addition, modifizierte Subtraktion und Muliplikation primitiv-rekursiv sind. Diese Operatoren dürfen also bei der Beschreibung von μ-rekursiven Funktionen ohne weiteres verwendet werden. Auch die Funktionen aus den Aufgaben 18 und 21 dürfen Sie bei Bedarf verwenden.

(a) Betrachten Sie die Funktion $f_1\colon \mathbb{N}_0^2 \rightharpoonup \mathbb{N}_0, f_1(x,y) = y-x$. Geben Sie ohne Verwendung des μ-Operators an, welche Funktion μf_1 ist. Geben Sie hierzu Definitions- und Wertebereich, sowie Zuordnungsvorschrift vollständig an. Es kann hilfreich sein, hierzu zunächst $\mu f_1(0)$, $\mu f_1(1)$ und $\mu f_1(2)$ zu berechnen. (2 Punkte)

(b) Geben Sie nun eine möglichst einfache Darstellungen der folgenden Funktionen an, die den μ-Operator enthalten. Beschreiben Sie zusätzlich kurz, warum Ihre Antwort die gesuchte Funktion berechnet.

1) $f_2\colon \mathbb{N}_0^2 \rightharpoonup \mathbb{N}_0, f_2(x,y) = \begin{cases} \lceil \sqrt[x]{y} \rceil, & x > 0 \\ 0, & x = y = 0 \\ 1, & x = 0, y = 1 \end{cases}$ (3 Punkte)

2) $f_3\colon \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, f_1(x,y) = \min(x,y)$ (4 Punkte)

Hinweise zur Abgabe

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Montag, den 02. Dezember 2013 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Eine Bearbeitung der Übungsaufgaben *zu zweit* ist möglich. In diesem Fall geben Sie bitte *nur eine Abgabe (auch bei Moodle!)* ab und schreiben Sie den *Namen* und die *Matrikelnummern beider Personen* auf Ihre Abgabe bzw. in das PDF-Dokument. Ihr Name, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppennummer und das Fach (BeKo 2013/14) müssen deutlich sichtbar auf die Hausaufgabe geschrieben sein. Sie können Ihre Aufgaben an folgenden Stellen abgeben:

Campus Duisburg:
Der mit *Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik* beschriftete Briefkasten neben Raum LF259.

Moodle:
Sie können ihre Hausaufgaben auch gerne per MOODLE[1] abgeben. Achten Sie aber darauf, dass Sie ihre Hausaufgaben als eine einzelne pdf-Datei hochladen. Wenn ein Betreuer Ihre Abgabe nicht öffnen kann (Formate wie docx o.ä.), bringt das nur unnötige Verzögerungen mit sich.

---

[1] http://moodle2.uni-due.de/course/view.php?id=1338