Universität Duisburg-Essen | **WS 2013/14**
Ingenieurwissenschaften / Informatik | **22. Oktober 2013**
Dozentin: Prof. Barbara König | **Übungsblatt 1**
Übungsleitung: H. Kerstan, S. Küpper | **Abgabe: 28. Oktober 2013**

Übung zur Vorlesung BeKo 2013/14

Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik

Sie können für die 4 Aufgaben auf diesem Übungszettel insgesamt bis zu **20** Punkte erhalten. Genauere Angaben zur Abgabe der Übungszettel finden Sie auf der letzten Seite nach den Aufgaben.

Aufgabe 1 *Wiederholung: Chomsky-Hierarchie* (7 Punkte)

Gegeben seien folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

- $L_1 = \{a^n b^m a^m b^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_3 = \{a^n b^n a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(*Hinweis:* $\mathbb{N}_{\geq 1}$ bezeichnet die natürlichen Zahlen ohne Null.)

(a) Beschreiben Sie die Grammatik-Klassen der Chomsky-Hierarchie und ordnen Sie diese entsprechend der Teilmengen-Relation der entsprechenden Sprachklassen. (2 Punkte)

(b) Ordnen Sie die Sprachen L_1, L_2 und L_3 in die Chomsky-Hierarchie ein. Geben Sie dazu jeweils die kleinste Klasse (also die mit dem größten Index) an, in der die Sprache liegt und begründen Sie außerdem kurz, warum die Sprache in dieser und nicht in der nächst größeren Klasse liegt (eine informelle Begründung ist hier ausreichend). (3 Punkte)

(c) Geben Sie für die Sprache L_1 eine Grammatik an, die beweist, warum L_1 von dem von Ihnen angegebenen Chomsky-Typ ist. (2 Punkte)

Aufgabe 2 *Wiederholung: Chomsky-Grammatiken* (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben sind die beiden Grammatiken $G_1 = (\{S, A, B\}, \Sigma, P_1, S)$ und $G_2 = (\{S, A, B\}, \Sigma, P_2, S)$ über dem Alphabet Σ, welche die Sprachen $L(G_1) = L_1$ und $L(G_2) = L_2$ generieren. Die Produktionsmengen sind dabei wie folgt definiert:

P_1:	P_2:
$S \to aA$	$S \to aAb$
$A \to aB \mid aA$	$A \to aBb$
$B \to Bb \mid b$	$B \to Sb \mid b$

(a) Geben Sie die Sprache L_1 in mengentheoretischer Schreibweise an. (1 Punkt)

(b) Geben Sie die Sprache L_2 in mengentheoretischer Schreibweise an. (1 Punkt)

(c) Gibt es ein Wort, das in L_1 und in L_2 liegt? Wenn ja, geben Sie ein solches Wort an. (1 Punkt)

(d) Geben Sie eine Grammatik für $L_1 \cup L_2$ an. (1 Punkt)

Aufgabe 3 *Einführung Turingmaschine* (3 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung bereits eine informelle Beschreibung einer Turingmaschine gesehen, die zu einer Binärzahl 1 addiert. Die Zahl wird dabei binär kodiert auf dem Band angegeben, wobei das MSB[1] links steht. Vor dem Ausführen einer Turingmaschine steht der Kopf auf dem MSB und bei Beendigung der Turingmaschine soll der Kopf ebenfalls auf dem MSB stehen (falls das Band nicht geleert wurde).

(a) Geben Sie eine (informelle) Beschreibung einer Turingmaschine an, die eine gegebene Binärzahl mit zwei multipliziert. Versuchen Sie dabei, den gesamten Vorgang in möglichst einfache, und gleichförmige Teil-Aufgaben zu zerlegen (z.B. „gehe nach rechts bis die Zahl zuende ist“, „gehe nach links bis zur zur ersten 1“ oder „ersetzte die 0 durch eine 1“ usw.). (2 Punkte)

(b) Erklären Sie kurz, wie eine Turingmaschine aussehen könnte, eine gegebene Binärzahl mit vier multipliziert. (1 Punkt)

Aufgabe 4 *Mengen, Funktionen und Relationen* (6 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir kurz einige mathematische Grundlagen wiederholen, die Ihnen bereits aus anderen Vorlesungen bekannt sein sollten. Um mengentheoretische Paradoxa zu vermeiden, vereinbaren wir folgende Notation:

$$\{x \in X \mid x \text{ hat bestimmte Eigenschaften}\}$$

wobei stets X eine bereits bekannte Menge sein muss. Beispielsweise ist die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mod 2 = 0\}.$$

Selbstverständlich können Sie endliche Mengen auch vollständig angeben, so ist beispielsweise sowohl $\{1, 2, 3\}$ als auch $\{x, z\}$ eine Menge.

(a) Geben Sie die folgenden Mengen in der oben definierten Schreibweise an. Sie dürfen dabei nur die Existenz der natürlichen Zahlen, welche wir mit $\mathbb{N}$ abkürzen und die Existenz der Menge der ganzen Zahlen, welche wir mit $\mathbb{Z}$ notieren, voraussetzen:

1) Die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch vier teilbar sind und zusätzlich folgende Eigenschaft erfüllen: Wenn eine Zahl der Menge durch 100 teilbar ist dann ist sie auch durch 400 teilbar.[2] (1 Punkt)

[1] MSB=**M**ost **S**ignificant **B**it, also das höchstwertige Bit

[2] Diese Menge hat eine besondere Bedeutung - wissen Sie welche?

2) Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen. (*Hinweis:* Jede solche Zahl lässt sich als Bruch darstellen, den man als geordnetes Paar zweier Zahlen auffassen kann.) (1 Punkt)

(b) Geben Sie die folgenden endlichen Mengen vollständig an: $\{1,2,3\} \cup \{x,z\}$, $\{1,2,3\} \cap \{x,z\}$, $\{1,2,3\} \setminus \{x,z\}$, $\{1,2,3\} \setminus \{2\}$, $\{1,2,3\} \times \{x,z\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$ (1 Punkt)

(c) Eine (binäre) Relation auf dem kartesischen Produkt zweier Mengen X, Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$.

1) Erläutern Sie, wie jede Funktion $f\colon X \to Y$ als Relation $R_f \subseteq X \times Y$ aufgefasst werden kann. Geben Sie R_f formal an: $R_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid ...\}$. (1 Punkt)

2) Warum gibt es nicht zu jeder Relation $R \subseteq X \times Y$ eine Funktion $f_R\colon X \to Y$? (*Hinweis:* Sie können dazu eine frei gewählte Relation als Gegenbeispiel verwenden.) (1 Punkt)

3) Erläutern Sie wie dennoch jede Relation $R \subseteq X \times Y$ als Funktion $g_R\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ aufgefasst werden kann. (1 Punkt)

Hinweise zur Abgabe

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Montag, den 28. Oktober 2013 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Ihr Name, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppennummer und das Fach (BeKo 2013/14) müssen deutlich sichtbar auf die Hausaufgabe geschrieben sein. Sie können Ihre Aufgaben an folgenden Stellen abgeben:

Campus Duisburg:
Der mit *Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik* beschriftete Briefkasten neben Raum LF259.

Moodle:
Sie können ihre Hausaufgaben auch gerne per MOODLE[3] abgeben. Achten Sie aber darauf, dass Sie ihre Hausaufgaben als eine einzelne pdf-Datei hochladen. Wenn ein Betreuer Ihre Abgabe nicht öffnen kann (Formate wie docx o.ä.), bringt das nur unnötige Verzögerungen mit sich.

---

[3] http://moodle2.uni-due.de/course/view.php?id=1338