Universität Duisburg-Essen | **WS 2013/14**
Ingenieurwissenschaften / Informatik | **17. Januar 2014**
Dozentin: Prof. Barbara König | **Übungsblatt 11**
Übungsleitung: H. Kerstan, S. Küpper | **Abgabe: 27. Januar 2014**

Übung zur Vorlesung BeKo 2013/14

Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik

Sie können für die 3 Aufgaben auf diesem Übungszettel insgesamt bis zu **20** Punkte erhalten. Genauere Angaben zur Abgabe der Übungszettel finden Sie auf der letzten Seite nach den Aufgaben.

Aufgabe 38 *Rechenschritte einer Turing-Maschine* (6 Punkte)

Gegeben sei folgende (deterministische) Turingmaschine

$$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_e\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \Box\}, \delta, z_0, \Box, z_e)$$

wobei δ wie folgt definiert ist (die Übergänge für z_e sind nicht mit angegeben):

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, 0) = (z_0, 0, R) & \delta(z_1, 0) = (z_1, 0, L) & \delta(z_2, 0) = (z_2, 1, R) \\ \delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R) & \delta(z_1, 1) = (z_2, 0, R) & \delta(z_2, 1) = (z_2, 1, R) \\ \delta(z_0, \Box) = (z_1, \Box, L) & \delta(z_1, \Box) = (z_e, \Box, R) & \delta(z_2, \Box) = (z_1, \Box, L) \end{array}$$

(a) Was macht diese Turingmaschine? (*Hinweis:* Zur Beantwortung dieser Frage ist es hilfreich die Eingabe als Binärcodierung einer natürlichen Zahl zu interpretieren.) (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die maximale Anzahl der Schritte, die die Turingmaschine bei Eingabe eines Wortes der Länge n ausführt, bis ein Endzustand erreicht wird. Sie müssen nicht die genaue Anzahl von Schritten angeben, sondern dürfen die O-Notation benutzen, um die Laufzeit möglichst genau abzuschätzen. Begründen Sie Ihre Antworten. (3 Punkte)

Aufgabe 39 *Polynomielle Laufzeiten* (8 Punkte)

Seien A und B Probleme und f eine Funktion, die eine Reduktion $A \leq B$ beschreibt. Es gilt also immer: $\chi_A(w) = \chi_B(f(w))$. Außerdem sei von f bekannt, dass es sich in polynomieller Laufzeit $p_f(|w|)$ berechnen lässt. Wenn es eine solche Reduktion mit polynomieller Laufzeit gibt, dann schreibt man auch $A \leq_p B$. Zeigen sie, dass folgende Aussagen wahr sind:

(a) Falls $A \leq_p B$ gilt, und es einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit $p_B(|w|)$ gibt, der B entscheidet, dann ist auch A in polynomieller Zeit entscheidbar. Geben Sie insbesondere die daraus resultierende obere Schranke für die Laufzeit von A an. (3 Punkte)

(b) Falls $A \leq_p B$ mit $p_f(|w|)$ als Laufzeit der Vorverarbeitung und $B \leq_p C$ mit $p_g(|w|)$ als Laufzeit der Vorverarbeitung gelten, dann ist auch $A \leq_p C$. Geben Sie insbesondere die daraus resultierende obere Schranke für die Laufzeit der Vorverarbeitung an. (3 Punkte)

(c) Wenn A und B sich in polynomieller Zeit entscheiden lassen und B weder die leere Sprache, noch die Sprache aller Wörter ist, dann gilt auch $A \leq_p B$. (2 Punkte)

Aufgabe 40 *Kurze Fragen I (Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit)* **(6 Punkte)**

Es seien Σ und Γ beliebige disjunkte Alphabete. Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten denn Antworten *ohne* Begründung ergeben auch *keine* Punkte.

(a) Kein semi-entscheidbares Problem ist entscheidbar. (1 Punkt)

(b) Die charakteristische Funktion der Sprache Σ^* über dem Alphabet Σ ist nicht berechenbar. (1 Punkt)

(c) Es ist entscheidbar, ob eine gegebene Turingmaschine die konstante Nullfunktion[1] berechnet. (1 Punkt)

(d) Die Identitätsfunktion[2] ist berechenbar. (1 Punkt)

(e) Für *alle entscheidbaren Sprachen* $X \subseteq \Sigma^*$ und $Y \subseteq \Gamma^*$ gilt $Y \leq X$. (1 Punkt)

(f) H_0, das Halteproblem auf dem leeren Band für *deterministische* Turingmaschinen, ist genau dann entscheidbar, wenn H_0', das Halteproblem auf dem leeren Band für *nichtdeterministische* Turingmaschinen entscheidbar ist. (1 Punkt)

(*Hinweis:* Eine nichtdeterministische Turingmaschine hält auf einer Eingabe, falls es für diese Eingabe einen Berechnungspfad gibt, in dem ein Endzustand erreicht wird.)

Hinweise zur Abgabe

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Montag, den 27. Januar 2014 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Eine Bearbeitung der Übungsaufgaben *zu zweit* ist möglich. In diesem Fall geben Sie bitte *nur eine Abgabe (auch bei Moodle!)* ab und schreiben Sie den *Namen* und die *Matrikelnummern beider Personen* auf Ihre Abgabe bzw. in das PDF-Dokument. Ihr Name, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppennummer und das Fach (BeKo 2013/14) müssen deutlich sichtbar auf die Hausaufgabe geschrieben sein. Sie können Ihre Aufgaben an folgenden Stellen abgeben:

[1] Die konstante Nullfunktion ist die Funktion $null\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto 0$.

[2] Die Identitätsfunktion ist eine Funktion $id\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $id(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Campus Duisburg:
Der mit *Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik* beschriftete Briefkasten neben Raum LF259.

Moodle:
Sie können ihre Hausaufgaben auch gerne per MOODLE[3] abgeben. Achten Sie aber darauf, dass Sie ihre Hausaufgaben als eine einzelne pdf-Datei hochladen. Wenn ein Betreuer Ihre Abgabe nicht öffnen kann (Formate wie docx o.ä.), bringt das nur unnötige Verzögerungen mit sich.

---

[3] http://moodle2.uni-due.de/course/view.php?id=1338