Universität Duisburg-Essen **WS 2013/14**
Ingenieurwissenschaften / Informatik **20. Dezember 2013**
Dozentin: Prof. Barbara König **Übungsblatt 9**
Übungsleitung: H. Kerstan, S. Küpper **Abgabe: 13. Januar 2014**

Übung zur Vorlesung BeKo 2013/14

Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik

Sie können für die 4 Aufgaben auf diesem Übungszettel insgesamt bis zu **25** Punkte erhalten. Genauere Angaben zur Abgabe der Übungszettel finden Sie auf der letzten Seite nach den Aufgaben.

Aufgabe 30 *Satz von Rice / Unentscheidbarkeit* (5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass die folgende Sprache:

$$L_= := \{w\#w' \mid M_w \text{ berechnet die gleiche Funktion wie } M_{w'}\}$$

unentscheidbar ist. (5 Punkte) (*Hinweis:* Sie könnten zum Beispiel eine geeignete Reduktion angeben von der Sprache $L_0 := \{w \mid M_w \text{ berechnet die konstante Nullfunktion}\}$. Die konstante Nullfunktion ist eine Funktion $f \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.).

Aufgabe 31 *Postsches Korrespondenzproblem* (6 Punkte)

(a) Lösen Sie das folgende PCP (1 Punkt) :

$$\begin{array}{lllllllllllll} x_1 & = & a & & x_2 & = & bab & & x_3 & = & ab & & x_4 = a \\ y_1 & = & b & & y_2 & = & bb & & y_3 & = & a & & y_4 = aa \end{array}$$

(b) Wir können die Eingabe aus Teil (a) auch als Eingabe für das modifizierte Postsche Korrespondenzproblem (MPCP) betrachten (d.h. das erste Paar muss (x_1, y_1) sein). Begründen Sie, dass es für diese Eingabe keine Lösung des MPCP gibt. (1 Punkt)

(c) Aus der Vorlesung kennen Sie ein Semi-Entscheidungsverfahren für das PCP. Hierbei werden sukzessive alle Indexfolgen der Länge 1, dann alle Folgen der Länge 2 usw. betrachtet und jeweils getestet, ob eine solche Indexfolge eine Lösung des PCP ist. Wir modifizieren dieses Verfahren so, dass nur Indexfolgen bis zu einer Maximallänge $N \in \mathbb{N}$ getestet werden. Wird eine Lösung gefunden terminiert das Verfahren sofort und gibt die Lösung aus, ansonsten testet es weitere Indexfolgen bis alle Indexfolgen bis zur Maximallänge getestet wurden und gibt dann "weiß ich nicht" aus. Wir gehen davon aus, dass wir insgesamt K paarweise verschiedene Wortpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_K, y_K)$ als Eingabe erhalten.

1) Wie viele verschiedene Indexfolgen $i_1, ..., i_n$ der festen Länge $n \in \mathbb{N}$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

2) Zeigen Sie, dass unser modifiziertes Verfahren für $K \geq 2$ maximal $\frac{K-K^{N+1}}{1-K}$ Indexfolgen testen muss (zum Beispiel dann, wenn das PCP keine Lösung hat). Gehen Sie dazu wie folgt vor: Überlegen Sie sich zunächst, dass die maximale Anzahl an verschiedenen Indexfolgen bis zur Länge N von der Form $\sum_{n=1}^{N} \lambda(K,n)$ ist, wobei $\lambda(K,n)$ die von Ihnen in ($c1$) bestimmte Anzahl an Indexfolgen der festen Länge n ist. Beweisen Sie dann (z. B. durch vollständige Induktion über N oder Verwendung von bekannten Resultaten), dass diese Summe mit dem oben genannten Term übereinstimmt, d.h. dass folgende Gleichung für alle $K \in \mathbb{N}, K \geq 2$ und alle $N \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. (3 Punkte) :

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(K,n) = \frac{K - K^{N+1}}{1-K}$$

Aufgabe 32 *Reduktion $H \leq MPCP$* (9 Punkte)

Aus der Vorlesung kennen Sie die Reduktion $H \leq MPCP$. Wir wollen nun diese Konstruktion an einem Beispiel nachvollziehen. Sei dazu folgende deterministische Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ gegeben mit $Z = \{z_0, z_1, z_E\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{a, b, \Box\}, E = \{z_E\}$ und der Überführungsfunktion $\delta\colon Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, N, R\}$, wobei:

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, \Box) &= (z_0, \Box, R)\\
\delta(z_0, a) &= (z_0, a, R)\\
\delta(z_0, b) &= (z_1, b, N)\\
\\
\delta(z_1, \Box) &= (z_E, \Box, R)\\
\delta(z_1, a) &= (z_1, a, L)\\
\delta(z_1, b) &= (z_1, b, L)\\
\\
\delta(z_E, \Box) &= (z_E, \Box, N)\\
\delta(z_E, a) &= (z_E, a, N)\\
\delta(z_E, b) &= (z_E, b, N)
\end{aligned}$$

(a) Beschreiben Sie in Worten, was diese Turingmaschine tut. Bei welchen Eingaben terminiert sie, bei welchen nicht? (2 Punkte)

(b) Wenden Sie anschließend die aus der Vorlesung bekannte Reduktion[1] (Kopierregeln, Überführungsregeln, Löschregeln, Abschlussregeln usw.) an um ein MPCP zu erhalten. Als Eingabe benutzen Sie dazu das Wort b. (4 Punkte)

(c) Es ist leicht zu sehen, dass die Turingmaschine auf der Eingabe b hält. Geben Sie die (eindeutig bestimmte!) Konfigurationenfolge der Turingmaschine an, die bei Eingabe von b zum Endzustand führt. (1 Punkt)

(d) Nutzen Sie die Konfigurationenfolge um das vorher konstruierte MPCP zu lösen. Geben Sie dabei genau die angewendeten Regeln (Wortpaare) in der richtigen Reihenfolge an. (2 Punkte)

[1] vgl. auch U. Schöning, *Theoretische Informatik - kurzgefasst*, 4. Auflage, Heidelberg, Berlin, Spektrum Akademischer Verlag, 2001, S. 134

Aufgabe 33 *Es weihnachtet sehr!* (5 Punkte)

(*Hinweis:* Diese Aufgabe ist eine *Zusatzaufgabe*. Das bedeutet, dass die erreichbaren Punkte (5) dieser Aufgabe *nicht* zu der Summe *aller* erreichbaren Punkte addiert wird. Sie können aber durch die Bearbeitung dieser Aufgabe bis zu fünf Zusatzpunkte erlangen.)

Dem Weihnachtmann ist die Verteilung der Geschenke in diesem Jahr einfach zu viel Arbeit. Als moderner Weihnachtsmann schreibt er ein Projekt aus, das ihm diese Arbeit abnehmen soll. Auf diese Ausschreibung hin meldet sich ein dubioser Herr namens M. E. Phisto bei ihm und macht folgendes Angebot:

- Du kannst soviele Weihnachts-Wichtel haben wie du willst.
- Du bekommst eine Weihnachts-Wichtel-Mütze, also trägt zu jedem Zeitpunkt genau einer der Wichtel eine Mütze.
- Jeder Wichtel kann sehen, ob in einem Haus schon ein Geschenk ist.
- Alle Häuser auf der Welt stehen in einer einzigen, gedachten Linie, die sich in beiden Richtungen bis ins Unendliche erstecken kann. Es gibt also für jedes Haus ein rechtes und ein linkes Nachbarhaus.
- Die Gruppe der Wichtel steht immer gemeinsam vor genau einem Haus.
- Jeder Wichtel kann, wenn er die Mütze trägt, nur Aktionen der folgenden Art ausführen:

  1. Bring ein Geschenk in das Haus, wenn noch kein Geschenk im Haus ist.
  2. Hol das Geschenk aus dem Haus (Das kann nötig sein, da sich die Wünsche von Kindern oft sehr spontan ändern).
  3. Tu nichts mit Geschenken.

  Und danach kann er bestimmen, ob die Wichtel-Gruppe ein Haus weiter nach links geht, oder zum rechten Nachbarhaus, oder ob sie an dem Haus bleibt. Zum Schluss kann der Wichtel die Weihnachts-Wichtel-Mütze an einen anderen Wichtel weitergeben.
- Du kannst für jeden Wichtel festlegen, welche Aktion er ausführen soll (jeweils für den Fall, dass ein Geschenk im Haus ist und dass kein Geschenk da ist), wenn er die Weihnachts-Wichtel-Mütze bekommt. Wichtel ohne Mütze machen nichts.
- Ein Wichtel fährt deinen Schlitten. Wenn er die Mütze bekommt, fährt er alle Wichtel und die restlichen Geschenke zurück zu dir.
- Und damit du feststellen kannst, ob deine Wichtel immer zu dir zurück kommen, ist hier ein Computerprogramm, das deine Befehle an die Wichtel einliest, und dir dann sagt, ob die Wichtel wieder zu dir zurückkehren. Und dieses Programm funktioniert für jede Anzahl Häuser auf der Welt. Sogar bei unendlich vielen Häusern!

Nachdem er dieses Angebot gelesen hat, will der Weihnachtsmann eigentlich schon zugreifen, aber Knecht Ruprecht springt auf und ruft: „Dieser Mann will uns betrügen!! Er kann niemals alle Punkte des Vertrages erfüllen!“ „Das sollten Sie erstmal beweisen“ sagt M. E. Phisto da ganz gelassen.
Wie kann Knecht Ruprecht seine Aussage beweisen ? (5 Punkte)

Hinweise zur Abgabe

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Montag, den 13. Januar 2014 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Eine Bearbeitung der Übungsaufgaben *zu zweit* ist möglich. In diesem Fall geben Sie bitte *nur eine Abgabe (auch bei Moodle!)* ab und schreiben Sie den *Namen* und die *Matrikelnummern beider Personen* auf Ihre Abgabe bzw. in das PDF-Dokument. Ihr Name, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppennummer und das Fach (BeKo 2013/14) müssen deutlich sichtbar auf die Hausaufgabe geschrieben sein. Sie können Ihre Aufgaben an folgenden Stellen abgeben:

Campus Duisburg:
Der mit *Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik* beschriftete Briefkasten neben Raum LF259.

Moodle:
Sie können ihre Hausaufgaben auch gerne per MOODLE[2] abgeben. Achten Sie aber darauf, dass Sie ihre Hausaufgaben als eine einzelne pdf-Datei hochladen. Wenn ein Betreuer Ihre Abgabe nicht öffnen kann (Formate wie docx o.ä.), bringt das nur unnötige Verzögerungen mit sich.

[2]http://moodle2.uni-due.de/course/view.php?id=1338