Universität Duisburg-Essen **WS 2013/14**
Ingenieurwissenschaften / Informatik **4. November 2013**
Dozentin: Prof. Barbara König **Übungsblatt 3**
Übungsleitung: H. Kerstan, S. Küpper **Abgabe: 11. November 2013**

Übung zur Vorlesung BeKo 2013/14

Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik

Sie können für die 3 Aufgaben auf diesem Übungszettel insgesamt bis zu **20** Punkte erhalten. Genauere Angaben zur Abgabe der Übungszettel finden Sie auf der letzten Seite nach den Aufgaben.

Aufgabe 9 *Überabzahlbarkeit und Diagonalisierung* (10 Punkte)

Gegeben ist die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}$, und es sei für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Menge I_r wie folgt definiert: $I_r := \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x < r\}$. Zur Lösung der folgenden Aufgaben dürfen Sie folgenden Satz benutzen: Wenn es für zwei Mengen A und B eine bijektive Funktion $h : A \to B$ gibt, dann sind A und B gleich mächtig.

(a) Beweisen Sie mit dem Diagonalisierungsverfahren aus der Vorlesung, dass I_1 überabzählbar unendlich viele reelle Zahlen enthält. (3 Punkte)
(*Hinweis:* Adaptieren Sie den Diagonalisierungsbeweis der Vorlesung auf die *Dezimaldarstellung* der reellen Zahl.)

(b) Geben Sie für jedes $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eine bijektive Funktion $\varphi_r \colon I_r \to I_1$ an und beweisen Sie die Bijektivität der Funktion durch Angabe einer passenden Umkehrfunktion $\varphi_r^{-1} \colon I_1 \to I_r$. (1 Punkt)

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: "Für jede reelle Zahl $r \neq 0$ gibt es eine bijektive Funktion $f_r \colon I_r \to \mathbb{R}$." (*Hinweis:* Betrachten Sie auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ die Tangens-Funktion.) (3 Punkte)

(d) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: "Für (mindestens) eine natürliche Zahl n gibt es eine bijektive Funktion $g_n \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$." (3 Punkte)

Aufgabe 10 *Bandbeschränkt vs. Zeitbeschränkt* (6 Punkte)

Eine Turingmaschine nennt man durch die Funktion $b \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ *bandbeschränkt*, wenn die Turingmaschine für jede Eingabe der Länge n maximal $b(n)$ Stellen des Bandes besucht. Eine Stelle des Bandes gilt dabei als besucht, wenn sich der Schreib-Lesekopf der Turingmaschine zu irgendeinem Zeitpunkt auf dieser Stelle befindet.
Neben dieser Bandbeschränkung gibt es für Turingmaschinen auch noch das Konzept der Zeitbeschränkung. Ein Schritt einer Turingmaschine ist dabei eine Auswertung der Übergangsfunktion. Die Laufzeit einer Turingmaschine auf einer Eingabe ist die Anzahl der Schritte bis zum Erreichen eines Endzustandes. Wird nie ein Endzustand erreicht, ist die Laufzeit unendlich.

Im Folgenden sei n stets die Länge der Eingabe. Nehmen Sie zu den folgenden Aussagen Stellung und erläutern Sie ihre Antworten bitte plausibel (Begründungen wie: „Weil das eben so ist“ oder eine reine Umstellung der Fragestellung werden *nicht* anerkannt).

(a) Wenn eine Turingmaschine nicht mehr als $b(n)$ Stellen des Bandes besucht, dann ist ihre Laufzeit durch $b(n)$ Schritte beschränkt. (1 Punkt)

(b) Wenn die Laufzeit einer Turingmaschine durch $t(n)$ Schritte nach oben beschränkt ist, dann besucht sie nicht mehr als $t(n) + 1$ Stellen des Bandes. (1 Punkt)

(c) Wenn eine Turingmaschine unendlich viele Schritte macht, erreicht sie mindestens eine Konfiguration mehrfach. (1 Punkt)

(d) Wenn eine bandbeschränkte Turingmaschine unendlich viele Schritte macht, erreicht sie mindestens eine Konfiguration mehrfach. (1 Punkt)

(e) Wenn eine deterministische Turingmaschine eine Konfiguration vor Erreichen eines Endzustands mehrfach erreicht, dann macht sie unendlich viele Schritte. (2 Punkte)

Aufgabe 11 *Zweiband-Turingmaschine* (4 Punkte)

Geben Sie eine Zweiband-Turingmaschine für folgende Aufgabe an:

- Ein Band ist das Eingabe-Band, auf dem zu Beginn ein Wort aus der Sprache $\{a, b\}^*$ steht.
- Das andere Band ist das Ausgabe-Band. Es ist zu Beginn leer.
- Der Kopf auf dem Eingabe-Band steht zu Beginn auf der ersten Stelle der Eingabe.
- Die Turingmaschine soll die Eingabe in umgekehrter Reihenfolge auf das Ausgabe-Band schreiben, und das Eingabe-Band löschen.
- Der Kopf auf dem Ausgabe-Band soll am Ende auf dem ersten Zeichen der Ausgabe stehen.

Beispiel: Wenn auf dem Eingabe-Band zu Beginn das Wort aab steht, dann soll am Ende auf dem Ausgabe-Band baa stehen und das Eingabe-Band soll leer sein.
Bitte denken Sie daran, Ihre Turingmaschine gut zu kommentieren. (4 Punkte)

(*Hinweis:* Die Ausgabe kann an beliebiger Stelle des Ausgabe-Bandes stehen.)

Hinweise zur Abgabe

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Montag, den 11. November 2013 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Eine Bearbeitung der Übungsaufgaben *zu zweit* ist möglich. In diesem Fall geben Sie bitte *nur eine Abgabe (auch bei Moodle!)* ab und schreiben Sie den *Namen* und die *Matrikelnummern beider Personen* auf Ihre Abgabe bzw. in das PDF-Dokument. Ihr Name, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppennummer und das Fach (BeKo 2013/14) müssen deutlich sichtbar auf die Hausaufgabe geschrieben sein. Sie können Ihre Aufgaben an folgenden Stellen abgeben:

Campus Duisburg:	**Moodle:**
Der mit *Berechenbarkeit und Komplexität / Theoretische Informatik* beschriftete Briefkasten neben Raum LF259.	Sie können ihre Hausaufgaben auch gerne per MOODLE[1] abgeben. Achten Sie aber darauf, dass Sie ihre Hausaufgaben als eine einzelne pdf-Datei hochladen. Wenn ein Betreuer Ihre Abgabe nicht öffnen kann (Formate wie docx o.ä.), bringt das nur unnötige Verzögerungen mit sich.

[1] http://moodle2.uni-due.de/course/view.php?id=1338