中 国 科 学 技 术 大 学

2024—2025学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计 得分 ________

所在院系 ______ 姓名 ________ 学号 ________

考试时间: 2025 年 1 月 10 日下午 14:30–16:30; 可使用简单计算器

装 ………… 订 ………… 线

一、 (30分, 每小题3分) **填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.**

(1) 设 A, B 为两事件且 $\mathrm{P}(A) = 0.7, \mathrm{P}(B) = 0.8$, 则 $\mathrm{P}(AB)$ 的取值范围为______.

(2) 店中有若干箱灯管, 每箱中有 10 只, 其中恰含有 1 只次品的概率为 0.1, 不含次品的概率为 0.9. 一位顾客从其所购的一箱中任取 3 只查看, 有次品则退货, 否则买下整箱. 若他买了一箱, 则该箱中确无次品的概率为______.

(3) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从参数为 λ 的指数分布. 若令 $Z = |X - Y|$, 则下列随机变量中与 Z 同分布的是 ( )

(A) X (B) $2X$ (C) $X + Y$ (D) $\frac{X+Y}{2}$

(4) 设随机变量 X 取正整数值且 $\mathrm{P}(X \geq n) = 1/4^{n-1}, n \geq 1$, 则 $\mathrm{E}X =$______.

(5) 设随机向量 (X, Y) 服从二元正态分布 $N(0, 0, 1, 4; -\frac{1}{2})$, 若使随机变量 $Z = aX + (1-a)Y$ 的方差最小, 则常数 $a =$ ( )

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) 1

(6) 设一组样本大小为 n 的简单随机样本来自参数为 2 的 Piosson 总体, 其样本均值为 $\overline{X}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(\sqrt{n}\,\overline{X} \leq 2(\sqrt{n} + 1)) =$______.

(7) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ 为来自同一正态总体的一组简单随机样本, 且记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 及 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. 若统计量 $c(X_{n+1} - \overline{X})/S$ 服从 t 分布, 则常数 $c =$______.

(8) 设统计量 $\hat{\theta}$ 为总体参数 θ 的一个点估计, 下列说法一般不成立的是 ( )

(A) 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计, 则 $\hat{\theta}^2$ 为 θ^2 的矩估计

(B) 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{\theta}^2$ 为 θ^2 的最大似然估计

(C) 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计, 则 $\hat{\theta}^2$ 为 θ^2 的无偏估计

(D) 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计, 则 $\hat{\theta}^2$ 为 θ^2 的相合估计

(9) 从正态总体 $N(\mu, 6^2)$ 中随机抽取容量为 n 的一组简单样本, 若为保证 μ 的 95% 的置信区间的长度不大于 2, 则 n 至少等于______.

(10) 对一正态总体 $N(\mu, 1)$ 考虑假设检验问题 $H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$, 且使用检验统计量 $T = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)$, 其中 μ_0 为一给定常数, 而 n 和 $\overline{X}$ 分别表示样本容量和样本均值. 当通过一组样本计算得到 T 的观测值为 1 时, 则对应的 p 值为 ( )

(A) 0.1587 (B) 0.3174 (C) 0.6826 (D) 0.8413

二、 (16分) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=2(1-x)I_{(0,1)}(x)$, 且在 $X=x$ 的条件下随机变量 Y 服从区间 $(x,1)$ 上的均匀分布.

(1) 求随机向量 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$.

(2) 求随机变量 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$.

(3) 对任意 $0<x<1$, 求条件期望 $\mathrm{E}[XY|X=x]$.

(4) 求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

三、 (18分) 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的Poisson分布(假设该班车容量不限), 每位乘客在中途下车的概率为 p $(0<p<1)$, 且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示中途下车的人数, 求

(1) 在已知中途有 m 个人下车的条件下, 求发车时乘客人数的分布律.

(2) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 求中途下车人数的均值.

(3) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

四、 (20分) 一家企业在不同的两个城市 A 和 B 采用不同的销售策略, 在两个城市分别随机选取 11 家销售门店, 得到一个季度的销量(万元)如下表(假设销量服从正态分布).

城市 A	69.3	38.0	131.4	123.1	127.3	57.7	95.7	89.4	93.8	102.0	73.3
城市 B	72.5	33.5	132.1	129.8	121.2	54.0	104.6	92.6	119.4	84.7	85.1

(1) 求两城市销售门店季度销量均值和标准差的最大似然估计(精确到小数点后两位).

(2) 两城市销售门店季度销量的标准差是否有差异?(检验水平 0.05)

(3) 求两城市销售门店季度平均销量差异 $\mu_B-\mu_A$ 的 95% 置信区间.

五、 (16分)为了解男性和女性对三种类型的啤酒: 淡啤酒、普通啤酒和黑啤酒的偏好有没有差异, 分别调查了 180 位男士和 120 位女士的喜好, 得如下数据

	淡啤酒	普通啤酒	黑啤酒	人数
男性	49	31	100	180
女性	51	20	49	120

(1) 请问男性和女性对这三种类型的啤酒的偏好有显著差异吗?($\alpha=0.05$)

(2) 该实验在设计和实施过程中有哪些假设条件?

附录 标准正态分布函数: $\Phi(1)=0.8413,\ \Phi(1.414)=0.9213,\ \Phi(1.645)=0.95,\ \Phi(1.96)=0.975$

上分位数: $t_{20}(0.05)=1.7247$, $t_{20}(0.025)=2.086$, $F_{10,10}(0.05)=2.98$, $F_{10,10}(0.025)=3.72$,

$\chi^2_2(0.05)=5.991,\ \chi^2_2(0.95)=0.103$

(完)

参考答案

一、 每小题 3 分.

1. $[0.5, 0.7]$ 2. $\frac{90}{97}$(或0.93) 3. A 4. $\frac{4}{3}$ 5. C 6. $\Phi(\sqrt{2})$ 或 0.9213 7. $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$
8. C 9. 139 10. B

二、 每小题 4 分. 注: 密度函数的取值范围遗漏或者不正确, 每处扣 1 分, 共 2 处.

(1) 由于当 $0<x<1$ 时, 随机变量 Y 的条件密度函数为 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{1-x}, x<y<1$, 从而 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=2, \quad 0<x<y<1.$$

(2) 由 (1) 可知, 随机变量 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_0^y 2\,\mathrm{d}x=2y, \quad 0<y<1.$$

(3) 由题目条件可知当 $0<x<1$ 时,

$$\mathrm{E}[XY|X=x]=x\mathrm{E}[Y|X=x]=\frac{1}{2}x(x+1).$$

(4) 易算得 $\mathrm{E}X=\int_0^1 2x(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}, \mathrm{E}[X^2]=\int_0^1 2x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$, 故由 (3) 可知

$$\mathrm{E}[XY]=\frac{1}{2}(\mathrm{E}[X^2]+\mathrm{E}X)=\frac{1}{4}.$$

再由 (2) 可知 $\mathrm{E}Y=\frac{2}{3}$, 故所求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$.

三、 每小题 6 分. 注意(1)(3)中的变量取值范围, 若遗漏或者不正确, 每处扣 1 分.

(1) 首先, 由课本例 2.15 可知, 随机变量 Y 服从参数为 λp 的 Poisson 分布. 对任意 $n=m, m+1, \ldots$, 故我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=n|Y=m)&=\frac{\mathrm{P}(Y=m|X=n)\mathrm{P}(X=n)}{\mathrm{P}(Y=m)}\\&=\frac{\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}\cdot e^{-\lambda}\lambda^n/n!}{e^{-\lambda p}(\lambda p)^m/m!}=e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-m}}{(n-m)!},\end{aligned}$$

即在条件 $Y=m$ 下, $X-m$ 服从参数为 $\lambda(1-p)$ 的 Poisson 分布.

(2) 由题目条件可知, $Y|X=n$ 服从二项分布 $B(n,p)$, 故所求为 $\mathrm{E}[Y|X=n]=np$.

(3) 对任意非负整数 $n\geq m$,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=n,Y=m)&=\mathrm{P}(Y=m|X=n)\mathrm{P}(X=n)\\&=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}\cdot e^{-\lambda}\lambda^n/n!\\&=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}.\end{aligned}$$

四、 $7+7+6=20$ 分.

(1) 由于正态总体均值和方差的最大似然估计为样本均值和样本二阶中心矩, 经计算可得所求

$$\overline{x}_A = 91.00, \quad \sqrt{m_A^2} = 28.34; \quad \overline{x}_B = 93.59, \quad \sqrt{m_B^2} = 30.33.$$

(2) 考虑假设检验问题: $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$. 通过样本计算可得 $S_A^2 = 883.58, S_B^2 = 1011.89$, 而

$$\frac{1}{3.72} = \frac{1}{F_{10,10}(0.025)} < \frac{S_A^2}{S_B^2} = 0.873 < F_{10,10}(0.025) = 3.72,$$

故我们不能拒绝 H_0, 即可认为两城市销售门店季度销量的标准差没有差异.

(3) 由于 $\mu_B - \mu_A$ 的置信区间为

$$\overline{x}_B - \overline{x}_A \pm \sqrt{\frac{11+11}{11 \times 11}} s_T t_{20}(0.025),$$

及混合标准差 $s_T = \sqrt{(883.58 + 1011.89)/2} = 30.785$, 代入其它数值可得所求置信区间为 $[-24.79, 29.97]$.

五、 $10+6=16$ 分.

(1) 拟合优度检验. 原假设 H_0 : 男性和女性对啤酒类型无偏好. 仿照课本, 通过计算理论值可得下表.

	淡啤酒	普通啤酒	黑啤酒	人数
男性	49(60)	31(30.6)	100(89.4)	180
女性	51(40)	20(20.4)	49(59.6)	120
	100	51	149	

从而, 可得检验统计量

$$Z = \frac{(49-60)^2}{60} + \frac{(31-30.6)^2}{30.6} + \frac{(100-89.4)^2}{89.4} + \frac{(51-40)^2}{40} + \frac{(20-20.4)^2}{20.4} + \frac{(49-59.6)^2}{59.6} = 8.197 > \chi_2^2(0.05) = 5.991.$$

故我们应拒绝 H_0, 即可认为男性和女性对啤酒类型有偏好.

(2) 该实验为齐一性检验实验, 因此在实验前确定要调查的男性和女性人数(各组人数需要足够多), 实验时需要分别在男性和女性人群中独立地进行简单随机抽样. 如果理解该问题为对啤酒的偏好与性别无关, 则使用独立性检验, 此时在实验前确定要调查的总人数(人数需要足够多), 实验中需要进行简单随机抽样. 答清楚一个即可.