

高维数据

唐洁, 邹云龙

2022 年 11 月 15 日

目录

1	空间模型	1
1.1	模型介绍	1
1.2	新想法	1
2	主成分分析	2
2.1	原理	2
2.2	应用	3
3	PCAEL	4
3.1	主要结果	4
3.2	模拟	5

1 空间模型

1.1 模型介绍

含空间自相关误差的空间自回归模型 (SARARmodel):

$$Y_n = \rho_1 W_n Y_n + X_n \beta + u_{(n)}, u_{(n)} = \rho_2 M_n u_{(n)} + \epsilon_{(n)}, \quad (1)$$

其中, n 是空间单元数量, $\rho_j, j = 1, 2$ 是空间自回归系数且 $|\rho_j| < 1, j = 1, 2$, $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ 是 $n \times p$ 维解释变量的样本资料矩阵, β 是 $p \times 1$ 维 X_n 的回归系数向量, $Y_n = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ 是 $n \times 1$ 维响应变量, W_n 是解释变量 Y_n 的空间邻接权重矩阵, M_n 是扰动项 $u_{(n)}$ 的空间邻接权重矩阵, $\epsilon_{(n)}$ 是 $n \times 1$ 维空间误差向量, 且满足

$$E\epsilon_{(n)} = 0, \text{Var}(\epsilon_{(n)}) = \sigma^2 I_n.$$

本汇报将呈现 $p \rightarrow \infty$ 的情形. 符号说明, $\mathbf{1}_k$ 表示数字 1 组成的 k 维列向量.

由 Qin, 得到关于 $\theta = (\beta', \rho_1, \rho_2, \sigma^2)' \in R^{p+3}$ 的经验 (对数) 似然比统计量:

$$\ell_n(\theta) = -2 \log L_n(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \log \{1 + \lambda'(\theta) \omega_i(\theta)\},$$

$$L_n(\theta) = \sup \left\{ \prod_{i=1}^n (np_i) : p_1 \geq 0, \dots, p_n \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i \omega_i(\theta) = 0 \right\},$$

其中

$$\omega_i(\theta) = \begin{pmatrix} b_i \epsilon_i \\ \tilde{g}_{ii}(\epsilon_i^2 - \sigma^2) + 2\epsilon_i \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{g}_{ij} \epsilon_j + s_i \epsilon_i \\ \tilde{h}_{ii}(\epsilon_i^2 - \sigma^2) + 2\epsilon_i \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{h}_{ij} \epsilon_j \\ \epsilon_i^2 - \sigma^2 \end{pmatrix}_{(p+3) \times 1}.$$

情形 1 当 p 固定时, 模型 (1) 下, 当 $\theta = \theta_0, n \rightarrow \infty$, 有

$$el = \ell_n(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi_{p+3}^2.$$

情形 2 当 $p \rightarrow \infty$ 时, 模型 (1) 下, 当 $\theta = \theta_0, p = cn^{index}, n \rightarrow \infty$, 有

$$hel = \ell_n^h(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi_1^2,$$

其中 $\ell_n^h(\theta) = -2 \log L_n^h(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \log \{1 + \lambda'(\theta) \omega_i^h(\theta)\}$, 且 $\omega_i^h(\theta) = \omega'_i(\theta) \mathbf{1}_{p+3}, i = 1, 2, \dots, n$.

1.2 新想法

秦老师提出, 既然 $\sum_{i=1}^n \omega_i(\theta)$ 可以由 $p+3$ 维通过 $\sum_{i=1}^n \omega'_i(\theta) \mathbf{1}_{p+3}$ 的方式将为 1 维, 那可不可以是 2 维, 3 维, $\dots, s (s \leq p+3)$ 维, 而且咄地降为 1 维也没有什么依据. 不如理解是为对得分函数做一个选择, 高维做选择, 自然就是主成分分析 (PCA) 了. 话不多说, 开干.

2 主成分分析

2.1 原理

a. 目标

我们假设将 p 维降为 s 维, 已知 $y \in R^p$, y (已标准化) 的协方差为 Σ . 进行主成分分析就是要找出 Z_p , 按照方差贡献度从多到少排序, 按照累计贡献率选出前 s 个.

$$y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix}, \text{Cov}(y) = \Sigma \implies Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{pmatrix}, \text{Cov}(Z) = \tilde{\Sigma}.$$

b. 计算

首先由待定系数法可知, 求 Z 即求 A .

$$\begin{aligned} Z_1 &= a'_1 y = a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \cdots + a_{1p}Y_p \\ Z_2 &= a'_2 y = a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots + a_{2p}Y_p \\ &\vdots \\ Z_p &= a'_p y = a_{p1}Y_1 + a_{p2}Y_2 + \cdots + a_{pp}Y_p \end{aligned} \implies \begin{aligned} Z &= Ay, \quad A' = (a_1, a_2, \cdots, a_p) \\ \tilde{\Sigma} &= \left(\text{cov}(Z_i, Z_j) \right)_{p \times p} = \left(a'_i \Sigma a_j \right)_{p \times p} \end{aligned}$$

其次对目标函数求解, 可得

$$\begin{aligned} Z_1 &= a'_1 y \quad a'_1 a_1 = 1 \quad \max a'_1 \Sigma a_1 & \max a'_1 \Sigma a_1 = \lambda_1 \quad a_1 = e_1 \\ Z_2 &= a'_2 y \quad a'_2 a_2 = 1 \quad \max a'_2 \Sigma a_2 & \max a'_2 \Sigma a_2 = \lambda_2 \quad a_2 = e_2 \\ &\vdots & \vdots \\ Z_p &= a'_p y \quad a'_p a_p = 1 \quad \min a'_p \Sigma a_p & \min a'_p \Sigma a_p = \lambda_p \quad a_p = e_p \end{aligned} \implies$$

其中, λ_i 是 Σ 的特征值且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$, e_i 是对应特征值 λ_i 所对应的特征向量.

最后, 设 $V = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$, $E'_p = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$, diag 表示由特征值组成的对角矩阵, 由上述我们可得:

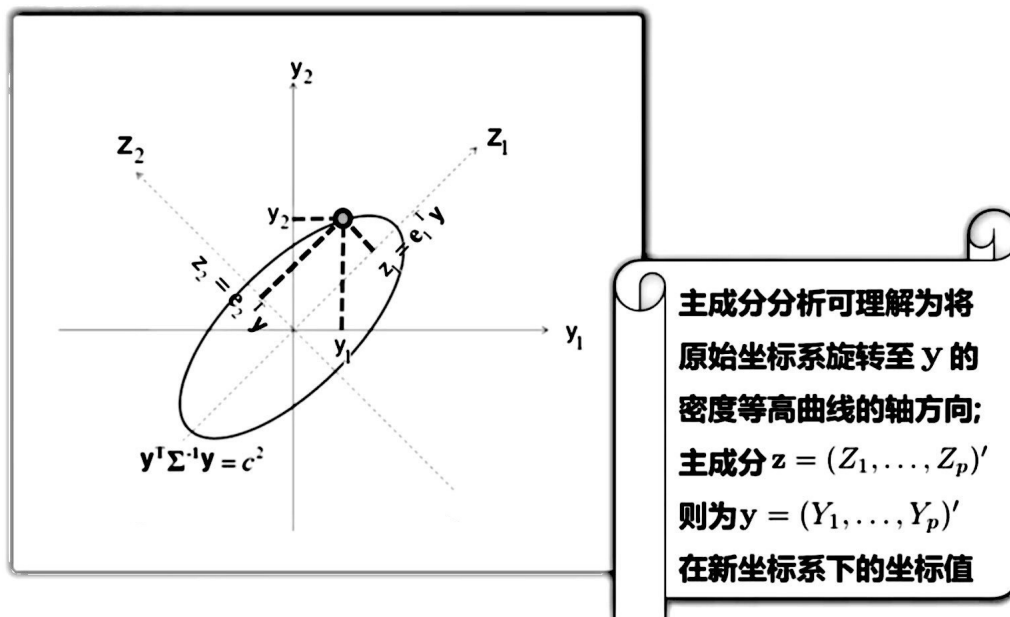
$$A = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_p \end{pmatrix} = E_p$$

$$Z = Ay = E_p y$$

$$\tilde{\Sigma} = \left(a'_i \Sigma a_j \right)_{p \times p} = \left(e'_i \Sigma e_j \right)_{p \times p} = \left(\lambda_i I_{\{i=j\}} \right)_{p \times p} = V$$

c. 举例

例 如果 $y \sim N_2(0, \Sigma)$



d. 总结

按照 $Z = E_p y$ 的变换, 信息并没有损失, $\sum_{j=1}^p \text{Var}(Z_j) = \sum_{j=1}^p \lambda_j = \text{tr}(\Sigma) = \sum_{j=1}^p \text{Var}(Y_j)$.

第 i 个主成分的信息含量:

$$Z_i = e_i' y, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

第 i 个主成分的方差贡献度:

$$\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

第 i 个主成分的方差贡献度:

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

前 s 个主成分的方差累积贡献度率:

$$\frac{\sum_{i=1}^s \lambda_i}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}, \quad s \leq p.$$

假设我们从 p 维降到 s 维, 令 $E_s' = (e_1, e_2, \dots, e_s)$, 则做 $Z = E_s y$ 的变换, 此时 $Z \in R^s$. s 的选择可以根据方差累积贡献率进行判断.

2.2 应用

将上述结论应用到空间模型的得分函数选择上, 令 $y = \sum_{i=1}^n \omega_i(\theta)$, 则我们得出根据主成分分析得到得分函数选择结果为:

$$\omega_i^{PCA}(\theta) = E_s \omega_i(\theta), i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 E_s 是 Σ_{p+3} 前 s 个最大特征值所对应的特征向量组成的行特征向量矩阵.

3 PCAEL

3.1 主要结果

情形 3 当 $p \rightarrow \infty$ 时, 模型 (1) 下, 当 $\theta = \theta_0$, $n \rightarrow \infty$, 有

$$pcael = \ell_n^{PCAs}(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi_s^2,$$

其中 $\ell_n^{PCAs}(\theta) = -2 \log L_n^{PCAs}(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \log\{1 + \lambda'(\theta) \omega_i^{PCAs}(\theta)\}$ 且 $\omega_i^{PCAs}(\theta) = E_s \omega_i(\theta)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$E_s = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_s \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Sigma}_s = Cov \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i^{PCA}(\theta) \right\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

如此可将 $\omega_i(\theta)$ 从 $p+3$ 维降为 s 维, 其中 (λ_i, e_i) , $i = 1, 2, \dots, s$ 表示 Σ_{p+3} 的第 i 个特征值 λ_i 所对应的特征向量 e_i ,

$$\Sigma_{p+3} = \Sigma'_{p+3} = Cov \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i(\theta) \right\} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{41} & \Sigma_{42} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{pmatrix},$$

其中,

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \sigma^2 \{B_n(\rho_2) X_n\}' B_n(\rho_2) X_n, \\ \Sigma_{12} &= \sigma^2 \{B_n(\rho_2) X_n\}' B_n(\rho_2) W_n A_n^{-1}(\rho_1) X_n \beta + \mu_3 \{B_n(\rho_2) X_n\}' Vec(diag \tilde{G}_n), \\ \Sigma_{13} &= \mu_3 \{B_n(\rho_2) X_n\}' Vec(diag \tilde{H}_n), \\ \Sigma_{14} &= \mu_3 \{B_n(\rho_2) X_n\}' \mathbf{1}_n, \\ \Sigma_{22} &= 2\sigma^4 tr(\tilde{G}_n^2) + \sigma^2 \{B_n(\rho_2) W_n A_n^{-1}(\rho_1) X_n \beta\}' B_n(\rho_2) W_n A_n^{-1}(\rho_1) X_n \beta \\ &\quad + (\mu_4 - 3\sigma^4) \|Vec(diag \tilde{G}_n)\|^2 + 2\mu_3 \{B_n(\rho_2) W_n A_n^{-1}(\rho_1) X_n \beta\}' Vec(diag \tilde{G}_n), \\ \Sigma_{23} &= 2\sigma^4 tr(\tilde{G}_n \tilde{H}_n) + (\mu_4 - 3\sigma^4) Vec'(diag \tilde{G}_n) Vec(diag \tilde{H}_n) \\ &\quad + \mu_3 \{B_n(\rho_2) W_n A_n^{-1}(\rho_1) X_n \beta\}' Vec(diag \tilde{H}_n), \\ \Sigma_{24} &= (\mu_4 - \sigma^4) tr(\tilde{G}_n) + \mu_3 \{B_n(\rho_2) W_n A_n^{-1}(\rho_1) X_n \beta\}' \mathbf{1}_n, \\ \Sigma_{33} &= 2\sigma^4 tr(\tilde{H}_n^2) (\mu_4 - 3\sigma^4) \|Vec(diag \tilde{H}_n)\|^2, \\ \Sigma_{34} &= (\mu_4 - \sigma^4) tr(\tilde{H}_n), \\ \Sigma_{44} &= n(\mu_4 - \sigma^4). \end{aligned}$$

3.2 模拟

取定 α , $0 < \alpha < 1$, 设 $z_\alpha(p+3)$ 满足 $P(\chi_{p+3}^2 > z_\alpha(p+3)) = \alpha$, $z_\alpha(1)$ 满足 $P(\chi_1^2 > z_\alpha(1)) = \alpha$ 以及 $z_\alpha(s)$ 满足 $P(\chi_s^2 > z_\alpha(s)) = \alpha$.

我们通过模拟比较 EL、HEL、和 PCAELs($s=1,2,3,4$) 优劣, 给定置信水平 $1 - \alpha = 0.95$, 分别给出 $\ell_n(\theta_0) \leq z_{0.05}(p+3)$ 、 $\ell_n^h(\theta_0) \leq z_{0.05}(1)$ 和 $\ell_n^{PCAs}(\theta_0) \leq z_{0.05}(s)$ 在 1000 次模拟中出现的比例, 其中 θ_0 是 θ 的真实值. 在模拟中, 使用如下模型:

$$Y_n = \rho_1 W_n Y_n + X_n \beta + u_{(n)}, u_{(n)} = \rho_2 M_n u_{(n)} + \epsilon_{(n)},$$

其中 (ρ_1, ρ_2) 取为 $(0.85, 0.15)$, $\{X_i\}$ 服从 $N(\mathbf{0}, \Sigma_P)$, $\Sigma_P = I_{\{i=j, 1 \leq i, j \leq p\}}$, $\beta = \mathbf{1}_{p+3}$, $p = [cn^{index}]$, $[\]$ 表示取整函数, $c = 4$, $index = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ 和 0.8 , $\epsilon'_i s$ 分别来自 $N(0, 1)$, $N(0, 0.75)$, $t(5)$ 和 $\chi_4^2 - 4$, 其对应的三阶矩分别为 $\mu_3=0, 0, 0$ 和 32 , 四阶矩分别为 $\mu_4=3, \frac{9}{4}, 25$ 和 384 . 之所以选取这几个分布, 是因为这四个分布代表了标准正态分布、对称薄尾分布、对称厚尾分布以及非对称分布. 空间权重矩阵 $W_n = (w_{ij})$, w_{ij} 表示空间单元 i 与空间单元 j 之间的距离, 同一空间单元的距离 w_{ii} 为 0 , W_n 主对角元素为 0 , 显然, W_n 为对称矩阵. 模拟中, w_{ij} 的度量采用皇后邻接 (文献 [3] 第 18 页), 即:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{空间单元 } i \text{ 和 } j \text{ 有公共边或公共点,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

考虑空间单元的 4 种理想情况: 规则正方形网格 $n = m \times m$, $m=10, 15, 20$ 和 25 分别表示 W_n 为 $grid_{100}$ 、 $grid_{256}$ 、 $grid_{400}$ 和 $grid_{625}$.

表 1: EL 、 HEL 和 PCAELs ($s = 1, 2, 3, 4$) 置信域中的覆盖率于 $\epsilon_i \sim N(0, 1)$

$W_n = M_n$	$index$	p	EL	HEL	PCAEL1	PCAEL2	PCAEL3	PCAEL4
$grid_{100}$	0.0	4		0.927	0.932	0.935	0.915	0.898
	0.1	6		0.948	0.934	0.915	0.921	0.894
	0.2	10		0.941	0.936	0.929	0.920	0.905
	0.3	16		0.936	0.951	0.945	0.932	0.922
	0.4	25		0.938	0.948	0.948	0.930	0.913
	0.5	40		0.943	0.942	0.930	0.922	0.907
	0.6	63		0.950	0.953	0.927	0.921	0.909
	0.7	100		0.947	0.943	0.939	0.932	0.924
	0.8	159		0.933	0.925	0.925	0.917	0.896
	0.9	252		0.954	0.955	0.939	0.935	0.915
$grid_{225}$	0.0	4		0.942	0.950	0.937	0.927	0.936
	0.1	7		0.953	0.952	0.938	0.937	0.943
	0.2	12		0.953	0.954	0.946	0.933	0.937
	0.3	20		0.947	0.959	0.953	0.938	0.933
	0.4	35		0.942	0.944	0.937	0.936	0.937
	0.5	60		0.957	0.954	0.946	0.939	0.935
	0.6	103		0.951	0.952	0.946	0.949	0.944
	0.7	177		0.947	0.940	0.934	0.931	0.933
	0.8	305		0.944	0.945	0.949	0.951	0.940
	0.9	524		0.935	0.940	0.930	0.933	0.932
$grid_{400}$	0.0	4		0.945	0.941	0.940	0.933	0.935
	0.1	7		0.953	0.941	0.939	0.939	0.938
	0.2	13		0.952	0.952	0.940	0.938	0.937
	0.3	24		0.950	0.945	0.945	0.953	0.943
	0.4	44		0.953	0.951	0.939	0.943	0.939
	0.5	80		0.944	0.948	0.943	0.950	0.943
	0.6	146		0.943	0.956	0.954	0.953	0.951
	0.7	265		0.949	0.947	0.946	0.949	0.955
	0.8	483		0.945	0.955	0.941	0.943	0.939
	0.9	879		0.956	0.955	0.948	0.944	0.949
$grid_{665}$	0.0	4		0.953	0.955	0.952	0.947	0.939
	0.1	8		0.950	0.950	0.941	0.932	0.932
	0.2	14		0.946	0.950	0.955	0.951	0.951
	0.3	28		0.944	0.944	0.956	0.955	0.954
	0.4	53		0.943	0.948	0.949	0.941	0.940
	0.5	100		0.955	0.947	0.939	0.952	0.948
	0.6	190		0.952	0.961	0.951	0.953	0.955
	0.7	362		0.940	0.948	0.938	0.948	0.942
	0.8	690		0.953	0.955	0.944	0.941	0.938
	0.9	1313		0.953	0.956	0.942	0.946	0.941

表 2: EL、HEL 和 PCAELs ($s = 1, 2, 3, 4$) 置信域中的覆盖率于 $\epsilon_i \sim N(0, 0.75)$

$W_n = M_n$	$index$	p	EL	HEL	PCAEL1	PCAEL2	PCAEL3	PCAEL4
$grid_{100}$	0.0	4		0.942	0.941	0.930	0.922	0.914
	0.1	6		0.943	0.935	0.928	0.916	0.903
	0.2	10		0.953	0.945	0.933	0.929	0.919
	0.3	16		0.939	0.933	0.913	0.907	0.890
	0.4	25		0.952	0.942	0.932	0.914	0.909
	0.5	40		0.940	0.942	0.940	0.919	0.910
	0.6	63		0.942	0.939	0.926	0.923	0.915
	0.7	100		0.941	0.944	0.927	0.921	0.908
	0.8	159		0.943	0.930	0.931	0.919	0.906
	0.9	252		0.933	0.940	0.935	0.924	0.911
$grid_{225}$	0.0	4		0.941	0.944	0.943	0.929	0.919
	0.1	7		0.948	0.947	0.945	0.922	0.921
	0.2	12		0.944	0.946	0.949	0.944	0.934
	0.3	20		0.957	0.947	0.947	0.946	0.938
	0.4	35		0.937	0.939	0.933	0.939	0.920
	0.5	60		0.948	0.946	0.947	0.948	0.934
	0.6	103		0.942	0.948	0.948	0.947	0.939
	0.7	177		0.939	0.948	0.943	0.939	0.929
	0.8	305		0.944	0.949	0.942	0.941	0.935
	0.9	524		0.952	0.952	0.945	0.940	0.936
$grid_{400}$	0.0	4		0.955	0.939	0.944	0.941	0.940
	0.1	7		0.944	0.940	0.947	0.948	0.940
	0.2	13		0.957	0.957	0.956	0.960	0.956
	0.3	24		0.970	0.962	0.959	0.957	0.944
	0.4	44		0.936	0.948	0.947	0.943	0.945
	0.5	80		0.963	0.954	0.949	0.945	0.941
	0.6	146		0.947	0.943	0.950	0.940	0.947
	0.7	265		0.956	0.951	0.954	0.940	0.942
	0.8	483		0.941	0.939	0.936	0.933	0.940
	0.9	879		0.950	0.947	0.936	0.935	0.934

表 3: EL、HEL 和 PCAELs ($s = 1, 2, 3, 4$) 置信域中的覆盖率于 $\epsilon_i \sim t(5)$

$W_n = M_n$	$index$	p	EL	HEL	PCAEL1	PCAEL2	PCAEL3	PCAEL4
$grid_{100}$	0.0	4		0.916	0.904	0.887	0.867	0.837
	0.1	6		0.920	0.918	0.877	0.867	0.843
	0.2	10		0.923	0.909	0.874	0.847	0.840
	0.3	16		0.925	0.918	0.887	0.858	0.823
	0.4	25		0.914	0.924	0.890	0.869	0.853
	0.5	40		0.935	0.936	0.878	0.858	0.851
	0.6	63		0.949	0.934	0.873	0.852	0.830
	0.7	100		0.935	0.942	0.890	0.873	0.845
	0.8	159		0.924	0.935	0.879	0.862	0.837
	0.9	252		0.928	0.944	0.888	0.879	0.842
$grid_{225}$	0.0	4		0.932	0.920	0.914	0.911	0.898
	0.1	7		0.950	0.942	0.922	0.929	0.909
	0.2	12		0.936	0.948	0.923	0.915	0.906
	0.3	20		0.948	0.936	0.912	0.903	0.893
	0.4	35		0.932	0.950	0.918	0.911	0.903
	0.5	60		0.936	0.934	0.918	0.918	0.912
	0.6	103		0.950	0.948	0.924	0.925	0.903
	0.7	177		0.938	0.952	0.924	0.920	0.909
	0.8	305		0.948	0.919	0.907	0.888	0.892
	0.9	524		0.938	0.948	0.917	0.911	0.899
$grid_{400}$	0.0	4		0.944	0.923	0.935	0.923	0.925
	0.1	7		0.930	0.936	0.924	0.921	0.909
	0.2	13		0.941	0.930	0.920	0.911	0.904
	0.3	24		0.925	0.923	0.908	0.902	0.902
	0.4	44		0.946	0.937	0.918	0.906	0.905
	0.5	80		0.942	0.947	0.915	0.927	0.916
	0.6	146		0.943	0.949	0.914	0.912	0.898
	0.7	265		0.937	0.928	0.916	0.924	0.913
	0.8	483		0.949	0.954	0.918	0.912	0.901
	0.9	879		0.939	0.941	0.930	0.921	0.923
$grid_{625}$	0.0	4		0.930	0.926	0.936	0.935	0.930
	0.1	8		0.942	0.945	0.924	0.936	0.935
	0.2	14		0.944	0.937	0.933	0.937	0.935
	0.3	28		0.927	0.933	0.919	0.925	0.917
	0.4	53		0.943	0.945	0.945	0.939	0.931
	0.5	100		0.951	0.947	0.934	0.938	0.925
	0.6	190		0.953	0.950	0.920	0.917	0.917
	0.7	362		0.929	0.935	0.926	0.926	0.922
	0.8	690		0.945	0.931	0.935	0.921	0.918
	0.9	1313		0.948	0.944	0.938	0.934	0.940

表 4: EL 、HEL 和 PCAELs ($s = 1, 2, 3, 4$) 置信域中的覆盖率于 $\epsilon_i \sim \chi^2(4) - 4$

$W_n = M_n$	$index$	p	EL	HEL	PCAEL1	PCAEL2	PCAEL3	PCAEL4
$grid_{100}$	0.0	4		0.895	0.865	0.885	0.865	0.815
	0.1	6		0.915	0.890	0.885	0.870	0.855
	0.2	10		0.920	0.895	0.865	0.875	0.835
	0.3	16		0.920	0.920	0.915	0.880	0.875
	0.4	25		0.925	0.930	0.910	0.875	0.825
	0.5	40		0.955	0.950	0.925	0.900	0.860
	0.6	63		0.905	0.925	0.870	0.835	0.805
	0.7	100		0.935	0.935	0.900	0.860	0.870
	0.8	159		0.950	0.950	0.915	0.885	0.870
	0.9	252		0.940	0.935	0.875	0.840	0.855
$grid_{225}$	0.0	4		0.935	0.945	0.930	0.925	0.880
	0.1	7		0.910	0.955	0.955	0.905	0.880
	0.2	12		0.925	0.945	0.915	0.875	0.860
	0.3	20		0.950	0.920	0.925	0.900	0.885
	0.4	35		0.940	0.940	0.930	0.925	0.925
	0.5	60		0.955	0.945	0.930	0.900	0.890
	0.6	103		0.905	0.920	0.900	0.885	0.880
	0.7	177		0.935	0.920	0.935	0.895	0.890
	0.8	305		0.955	0.955	0.925	0.900	0.905
	0.9	524		0.955	0.920	0.945	0.900	0.895