

# 含空间自相关误差的空间自回归模型的调整经验似然推断

唐洁<sup>1</sup>, 秦永松<sup>1,2\*</sup>

(1. 广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林 541004; 2. 广西多源信息挖掘与安全重点实验室, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 本文研究含空间自相关误差的空间自回归模型的调整经验似然推断问题。利用调整经验似然方法, 构造出含空间自相关误差的空间自回归模型的调整经验似然统计量, 证明调整经验似然统计量的极限分布为卡方分布, 并模拟比较调整经验似然与一般经验似然方法的优劣, 模拟结果表明, 调整经验似然比一般经验似然置信域的覆盖精度更高, 计算速度更快。在样本容量较大时, 无论误差项是否服从正态分布, 一般经验似然方法和调整经验似然方法均可, 在样本容量较小时, 推荐使用调整经验似然方法。

**关键词:** SARAR 模型; 调整经验似然; 覆盖率

**中图分类号:** O212.7

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1001-6600 (2023) xx-xxxx-xx

众所周知, 各省之间的经济不是完全独立的, 经济数据涉及到一定的空间位置关系, 正如地理学第一定律<sup>[1]</sup>所述, 所有事物都与其他事物相关联, 但较近的事物比较远的事物更关联, 空间计量经济学正是对截面数据与面板数据中空间相互性和空间异质性的定量研究, 空间计量经济学广泛应用于经济学、环境科学、犯罪学、地理学和传染病学等多个研究领域。本文将研究含空间自相关误差的空间自回归模型<sup>[2]</sup> (Spatial Autoregressive Model with Spatial Autoregressive Disturbances, 简记为 SARAR model):

$$Y_n = \rho_1 W_n Y_n + X_n \beta + u_{(n)}, u_{(n)} = \rho_2 M_n u_{(n)} + \varepsilon_{(n)}, \quad (1)$$

其中,  $n$  是空间样本数量;  $\rho_j, j=1,2$  是空间自回归系数且  $|\rho_j| < 1, j=1,2$ ;  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  是  $n \times k$  数据矩阵, 包括  $k$  列解释变量;  $\beta$  是相应回归系数向量;  $Y_n = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$  是  $n \times 1$  维被解释变量;  $W_n$  和  $M_n$  是已知的  $n \times n$  空间权重矩阵(非随机);  $\varepsilon_{(n)}$  是空间误差模型  $n \times 1$  的误差向量, 并满足  $E\varepsilon_{(n)} = 0, \text{Var}(\varepsilon_{(n)}) = \sigma^2 I_n$ 。

SARAR 模型对存在空间自相关性的数据有较好的解释作用, 无论是滞后项存在自相关性还是扰动项存在自相关性, 自相关性由  $\rho_j$  刻画,  $\rho_1$  度量空间滞后项  $W_n Y_n$  对被解释变量  $Y_n$  的影响, 也就是  $Y_n$  之间的空间自相关性, 即相邻空间之间可能存在扩散、溢出等效应,  $\rho_2$  度量空间误差滞后项  $M_n u_{(n)}$  对扰动项  $u_{(n)}$  的影响, 也就是不包含在  $X_n$  中且对  $Y_n$  有影响的遗漏变量的空间自相关性。SARAR 模型是更一般的空间计量模型, 它将空间误差模型(SEM)与空间自回归模型(SAR)结合起来, 分别对应于  $\rho_1 = 0$  与  $\rho_2 = 0$  的情形, 当  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  时, 模型(1)为一般线性回归模型。

Cliff 和 Ord<sup>[3]</sup>首次考虑到空间效应, 提出空间自回归模型, 此后, 学者们纷纷加入对该模型的研究, 如 Anselin<sup>[4]</sup>从计量经济学角度处理空间效应, 将空间效应视为计量经济学模型中一般问题的特例, 并系统整理当时研究空间模型的方法, Cressie<sup>[2]</sup>对可能的空间数据类型进行划分, Kelejian 和 Prucha<sup>[5]</sup>提出使用广义空间两段最小二乘法估计 SARAR 模型的参数, Kelejian 和 Prucha<sup>[6]</sup>提出使用广义矩估计方法

收稿日期: 2023-06-01 修回日期: 2023-07-29

基金项目: 广西多源信息挖掘与安全重点实验室系统性研究课题基金项目(22-A-01-01); 国家自然科学基金(12061017); 广西研究生教育创新计划项目(YJSCXP202104)

通信作者: 秦永松(1964—), 男, 湖北鄂州人, 广西师范大学教授, 博导。E-mail: ysqin@gxnu.edu.cn.

研究 SAR 模型, Lee<sup>[7]</sup>证明了 SAR 模型的拟极大似然估计的渐近性质。随着空间计量经济学的发展, 拟合空间数据模型日趋复杂, 空间模型由固定系数向变系数发展, 由静态向动态延伸。陶长琪和徐茉<sup>[8]</sup>研究固定效应时异系数广义空间自回归模型的拟极大似然估计和贝叶斯估计, 陈青青等<sup>[9]</sup>提出基于广义矩估计的可行广义最小二乘法研究面板数据空间误差分量模型, 陶长琪和周璇<sup>[10]</sup>研究了含空间自回归误差项的空间动态面板数据模型的拟极大似然估计, Anselin<sup>[11]</sup>对空间计量经济学领域在 2010 年之前的 30 年中的发展作了详细的阐述。

目前, 对空间计量模型的估计, 使用比较多的方法是极大似然法(如文献[2, 3, 12])、拟极大似然法(如文献[7, 8, 10, 13-14])、两阶段最小二乘法(如文献[5, 12, 15])、或广义矩估计(如文献[6, 9, 16-18]), 然而, 当渐近分布的渐近协方差未知时, 使用这些参数方法构造模型参数的置信域是不容易的, 更重要的是, 估计的渐近协方差可能会影响基于正态近似的模型参数置信域的精度。由 Owen<sup>[19][20]</sup>提出的经验似然(EL)方法所构造的置信区间除了有域保持性, 变换不变性及置信域的形状由数据自行决定等优点外, 还有 Bartlett 纠偏性及无需构造枢轴统计量等优点克服了参数方法的缺点, 因此, 非参数方法备受学者们青睐, Qin 和 Lawless<sup>[21]</sup>在 Owen 基础上给出了一般情况下的经验似然估计方法, 张军舰<sup>[22]</sup>介绍了非参数似然方法的发展过程。

起初, 经验似然方法都应用在非空间模型上, 比如 Owen<sup>[23]</sup>提出使用经验似然方法研究线性模型, Kolaczyk<sup>[24]</sup>使用经验似然方法研究广义线性模型, Qin<sup>[25]</sup>使用经验似然方法研究部分线性模型。经验似然应用于空间模型最大的问题在于估计方程是关于误差的线性-二次型形式。针对该问题, Jin 和 Lee<sup>[26]</sup>以及 Qin<sup>[27]</sup>分别独立发现, 根据估计方程的特性引入鞅差序列, 将误差的线性-二次型转化为鞅差序列的线性形式可以解决该问题。由此, 经验似然方法应用于空间模型的研究发展了起来, 如 Jin 和 Lee<sup>[26]</sup>利用广义经验似然方法研究 SARAR 模型的估计和检验, 证明其广义经验似然估计与广义矩估计方法具有相同的渐近分布; Qin<sup>[27]</sup>利用经验似然方法构造 SARAR 模型的经验似然比统计量, 证明其经验似然比统计量是渐近卡方分布; Li 等<sup>[28]</sup>研究了误差带空间效应的非参数回归截面数据模型的经验似然推断; Rong 等<sup>[29]</sup>研究了含空间自归误差的空间自回归面板数据模型的经验似然推断; 曾庆樊等<sup>[30]</sup>研究了时变系数空间面板数据模型的经验似然推断; 陶阳和何帮强<sup>[31]</sup>研究了带固定效应的空间自回归面板数据模型的经验似然推断; 李龙飞<sup>[32]</sup>对 SAR 模型进行了综述, 讨论了极大似然方法、矩估计法以及广义经验似然方法三种估计方法的优劣; 秦永松和雷庆祝<sup>[33]</sup>对 2022 年之前关于空间计量经济模型的经验似然研究进展做了全面的总结。

经验似然比统计量存在的前提条件是  $\mathbf{0}$  必须在估计函数集合的凸包内部, 此时经验似然比才存在, Tsao<sup>[34]</sup>在小样本下证明了有较高的概率使得  $\mathbf{0}$  不在估计函数集的凸包内部, Owen<sup>[35]</sup>将凸包问题作为经验似然未来之一的挑战问题提出, 此后, 有许多学者对此问题进行讨论, 提出各种方法, 这其中比较典型的是 Bartolucci<sup>[36]</sup>提出的惩罚经验似然方法, Chen 等<sup>[37]</sup>提出的调整经验似然(AEL)方法, Emerson 和 Owen<sup>[38]</sup>提出的平衡添加经验似然方法。惩罚经验似然方法需要 Bootstrap 方法, 计算复杂, 实际应用中有难度; 平衡添加经验似然方法是在调整经验似然方法基础上做了一点推广, 本质上还是调整经验似然思想。在本文中, 我们研究实际中应用最简单且使用最广的 AEL 方法, 讨论 SARAR 模型的调整经验似然比统计量的构造及其相应的性质, 并与未调整经验似然进行模拟比较, 以及使用 AEL 估计方法做实证分析。

论文余下部分结果如下: 第 1 部分给出主要方法和结果; 第 2 部分呈现数值模拟结果; 第 3 部分给出实证分析; 第 4 部分呈现证明细节。

## 1 主要方法和结果

记  $A_n(\rho_1) = I_n - \rho_1 W_n$ ,  $B_n(\rho_2) = I_n - \rho_2 M_n$  并且假设  $A_n(\rho_1)$  和  $B_n(\rho_2)$  是非奇异矩阵, 于是可得:

$$Y_n = A_n^{-1}(\rho_1) X_n \beta + A_n^{-1}(\rho_1) B_n^{-1}(\rho_2) \varepsilon_{(n)}.$$

假设  $\varepsilon_{(n)}$  是正态分布的,  $Y_n$  的拟似然函数为:

$$F = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{B}_n(\rho_2)| |\mathbf{A}_n(\rho_1)| (\sigma^{2n})^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} \right\},$$

其中  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} = \mathbf{B}_n(\rho_2) \{ \mathbf{A}_n(\rho_1) \mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} \}$ 。进而,  $\mathbf{Y}_n$  的拟对数似然函数为:

$$L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma^2 + \log |\mathbf{A}_n(\rho_1)| + \log |\mathbf{B}_n(\rho_2)| - \frac{1}{2\sigma^2} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}.$$

记  $\mathbf{G}_n = \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{B}_n^{-1}(\rho_2)$ ,  $\mathbf{H}_n = \mathbf{M}_n \mathbf{B}_n^{-1}(\rho_2)$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_n + \mathbf{G}_n^\top)$  及  $\tilde{\mathbf{H}}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{H}_n + \mathbf{H}_n^\top)$ 。对对数似然函数求偏导可得:

$$\begin{aligned} \partial L / \partial \boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}_n^\top \mathbf{B}_n^\top(\rho_2) \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}, \\ \partial L / \partial \rho_1 &= \frac{1}{\sigma^2} \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} \}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} + \frac{1}{\sigma^2} \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \tilde{\mathbf{G}}_n \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} - \sigma^2 \text{tr}(\tilde{\mathbf{G}}_n) \}, \\ \partial L / \partial \rho_2 &= \frac{1}{\sigma^2} \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \tilde{\mathbf{H}}_n \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} - \sigma^2 \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}_n) \}, \\ \partial L / \partial \sigma^2 &= \frac{1}{2\sigma^4} \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} - n\sigma^2 \}. \end{aligned}$$

令上述偏导数等于 0, 可得如下估计方程:

$$\mathbf{X}_n^\top \mathbf{B}_n^\top(\rho_2) \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} \}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} + \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \tilde{\mathbf{G}}_n \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} - \sigma^2 \text{tr}(\tilde{\mathbf{G}}_n) \} = 0, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \tilde{\mathbf{H}}_n \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} - \sigma^2 \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}_n) = 0, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} - n\sigma^2 = 0. \quad (5)$$

记  $\tilde{g}_{ij}$ ,  $\tilde{h}_{ij}$ ,  $\mathbf{b}_i$  和  $s_i$  分别表示矩阵  $\tilde{\mathbf{G}}_n$  第  $i$  行第  $j$  列的元素, 矩阵  $\tilde{\mathbf{H}}_n$  第  $i$  行第  $j$  列的元素, 矩阵  $\mathbf{X}_n^\top \mathbf{B}_n^\top(\rho_2)$  第  $i$  列向量和向量  $\mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta}$  的第  $i$  个元素。  $\mathbf{e}_i$  表示  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}$  的第  $i$  个元素, 并且规定当求和的上标小于 1 时, 我们令该和为 0。为了处理式(3)-(4)中的二次型形式, 需要引入文献[39]中介绍的鞅差序列。定义  $\sigma$ -域:  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ 。令

$$\tilde{Y}_{in} = \tilde{g}_{ii}(e_i^2 - \sigma^2) + 2e_i \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{g}_{ij} e_j, \quad \tilde{Z}_{in} = \tilde{h}_{ii}(e_i^2 - \sigma^2) + 2e_i \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{h}_{ij} e_j, \quad (6)$$

则  $\mathcal{F}_{i-1} \subseteq \mathcal{F}_i$ ,  $\tilde{Y}_{in}$  是  $\mathcal{F}_i$ -可测的, 并且  $E(\tilde{Y}_{in} | \mathcal{F}_{i-1}) = 0$ 。因此,  $\{\tilde{Y}_{in}, \mathcal{F}_i, 1 \leq i \leq n\}$  和  $\{\tilde{Z}_{in}, \mathcal{F}_i, 1 \leq i \leq n\}$  构成两个鞅差序列, 且

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \tilde{\mathbf{G}}_n \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} - \sigma^2 \text{tr}(\tilde{\mathbf{G}}_n) = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_{in}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^\top \tilde{\mathbf{H}}_n \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} - \sigma^2 \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}_n) = \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_{in}. \quad (7)$$

根据式(2)-(7), 可知得分函数为:

$$\boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_i \mathbf{e}_i \\ \tilde{\mathbf{g}}_{ii}(e_i^2 - \sigma^2) + 2e_i \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\mathbf{g}}_{ij} \mathbf{e}_j + s_i \mathbf{e}_i \\ \tilde{\mathbf{h}}_{ii}(e_i^2 - \sigma^2) + 2e_i \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\mathbf{h}}_{ij} \mathbf{e}_j \\ e_i^2 - \sigma^2 \end{pmatrix}_{(k+3) \times 1}.$$

由 Owen<sup>[20]</sup>, 得到关于参数  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \rho_1, \rho_2, \sigma^2)^\top \in \mathbb{R}^{k+3}$  的经验似然比统计量:

$$L_n(\boldsymbol{\theta}) = \sup_{p_i, 1 \leq i \leq n} \prod_{i=1}^n (np_i),$$

且  $\{p_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$  满足:

$$p_i \geq 0, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i \boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}.$$

由拉格朗日乘子可得:

$$p_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \boldsymbol{\tau}^\top(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{\theta})}, 1 \leq i \leq n,$$

及

$$\ell_n(\boldsymbol{\theta}) \triangleq -2 \log L_n(\boldsymbol{\theta}) = 2 \sum_{i=1}^n \log \{1 + \boldsymbol{\tau}^\top(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{\theta})\},$$

其中  $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{k+3}$  为以下方程的解:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{\theta})}{1 + \boldsymbol{\tau}^\top(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{\theta})} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

由 Chen 等<sup>[37]</sup>, 得到关于参数  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \rho_1, \rho_2, \sigma^2)^\top \in \mathbb{R}^{k+3}$  的调整经验似然比统计量:

$$L_n^*(\boldsymbol{\theta}) = \sup_{p_i, 1 \leq i \leq n+1} \prod_{i=1}^{n+1} \{(n+1)p_i\}, \quad (9)$$

且  $\{p_i \geq 0, 1 \leq i \leq n+1\}$  满足:

$$p_i \geq 0, 1 \leq i \leq n+1, \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1, \sum_{i=1}^{n+1} p_i \boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0},$$

其中  $\boldsymbol{\omega}_{n+1}(\boldsymbol{\theta}) = -a_n \bar{\boldsymbol{\omega}}_n$ ,  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_n \triangleq \bar{\boldsymbol{\omega}}_n(\boldsymbol{\theta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{\theta})$ ,  $a_n > 0$ ,  $a_n$  称为调整参数。调整参数的取值范围

将在定理 1 中给出。调整经验似然方法就是在普通经验似然估计函数集合  $\{\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\theta}), \dots, \boldsymbol{\omega}_n(\boldsymbol{\theta})\}$  中

增加一个元素  $\omega_{n+1}(\theta)$ ，得到调整经验似然估计函数集合  $\{\omega_1(\theta), \omega_2(\theta), \dots, \omega_{n+1}(\theta)\}$ 。由拉格朗日乘子可得：

$$p_i^* = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \lambda^\top(\theta) \omega_i(\theta)}, 1 \leq i \leq n+1,$$

及

$$\ell_n^*(\theta) \triangleq -2 \log L_n^*(\theta) = 2 \sum_{i=1}^{n+1} \log \{1 + \lambda^\top(\theta) \omega_i(\theta)\}, \quad (10)$$

其中  $\lambda(\theta) \in \mathbb{R}^{k+3}$  为以下方程的解：

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\omega_i(\theta)}{1 + \lambda^\top(\theta) \omega_i(\theta)} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

显然，如果  $\bar{\omega}_n = \mathbf{0}$ ，那么  $\ell_n^*(\theta) = \ell_n(\theta) = 0$ ；如果给定  $\theta$  值使得  $\bar{\omega}_n \approx \mathbf{0}$ ，那么  $\ell_n^*(\theta) \approx \ell_n(\theta)$ 。如果  $\theta \in \Theta$ ， $\mathbf{0}$  可能不在未调整经验似然估计函数集  $\{\omega_1(\theta), \omega_2(\theta), \dots, \omega_n(\theta)\}$  的凸包内部时，未调整经验似然方程(8)的解可能不存在，则  $\ell_n(\theta)$  不一定有数值解，而  $\mathbf{0}$  一定在调整后的估计函数集  $\{\omega_1(\theta), \omega_2(\theta), \dots, \omega_{n+1}(\theta)\}$  的凸包内部，因此，调整经验似然方程(11)的解一定存在， $\ell_n^*(\theta)$  的数值解一定存在。

在本文中，记  $\mu_j = E(e_1^j)$ ,  $j = 3, 4$ 。用  $\text{Vec}(\text{diag} \mathbf{A})$  表示由矩阵  $\mathbf{A}$  的对角线上的元素构成的列向量。用  $\|\mathbf{a}\|$  表示向量  $\mathbf{a}$  的第二范数，用  $\mathbf{1}_n$  表示由 1 作为元素组成的  $n$  维列向量。为了获得调整经验似然比统计量  $\ell_n^*(\theta)$  的渐近分布，需要如下假设条件：

A1.  $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$  是均值为 0，方差有限的独立同分布随机变量序列，且存在  $\eta_1 > 0$ ，使  $E|e_1|^{4+\eta_1} < \infty$ 。

A2.  $\mathbf{W}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1), \mathbf{B}_n^{-1}(\rho_2)$  及  $\{\mathbf{x}_i\}$  满足如下条件：

- (i) 矩阵  $\mathbf{W}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1)$  和  $\mathbf{B}_n^{-1}(\rho_2)$  的行元素的绝对值之和与列元素的绝对值之和均一致有界；
- (ii)  $\{\mathbf{x}_i\}, i = 1, 2, \dots, n$  一致有界。

A3. 存在常数  $c_j > 0, j = 1, 2$ ，使得  $0 < c_1 \leq \lambda_{\min}(n^{-1} \Sigma_{k+3}) \leq \lambda_{\max}(n^{-1} \Sigma_{k+3}) \leq c_2 < \infty$ ，其中  $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$  和  $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$  分别表示矩阵  $\mathbf{A}$  的最小和最大的特征值，且

$$\Sigma_{k+3} = \Sigma_{k+3}^\top = \text{Cov} \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i(\theta) \right\} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{41} & \Sigma_{42} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中,

$$\Sigma_{11} = \sigma^2 \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{X}_n \}^\top \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{X}_n,$$

$$\Sigma_{12} = \sigma^2 \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{X}_n \}^\top \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} + \mu_3 \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{X}_n \}^\top \text{Vec}(\text{diag} \tilde{\mathbf{G}}_n),$$

$$\Sigma_{13} = \mu_3 \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{X}_n \}^\top \text{Vec}(\text{diag} \tilde{\mathbf{H}}_n), \quad \Sigma_{14} = \mu_3 \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{X}_n \}^\top \mathbf{1}_n,$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{22} = & 2\sigma^4 \text{tr}(\tilde{\mathbf{G}}_n^2) + \sigma^2 \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} \}^\top \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} \\ & + (\mu_4 - 3\sigma^4) \left\| \text{Vec}(\text{diag} \tilde{\mathbf{G}}_n) \right\|^2 + 2\mu_3 \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} \}^\top \text{Vec}(\text{diag} \tilde{\mathbf{G}}_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{23} = & 2\sigma^4 \text{tr}(\tilde{\mathbf{G}}_n \tilde{\mathbf{H}}_n) + (\mu_4 - 3\sigma^4) \text{Vec}^\top(\text{diag} \tilde{\mathbf{G}}_n) \text{Vec}(\text{diag} \tilde{\mathbf{H}}_n) \\ & + \mu_3 \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} \}^\top \text{Vec}(\text{diag} \tilde{\mathbf{H}}_n), \end{aligned}$$

$$\Sigma_{24} = (\mu_4 - \sigma^4) \text{tr}(\tilde{\mathbf{G}}_n) + \mu_3 \{ \mathbf{B}_n(\rho_2) \mathbf{W}_n \mathbf{A}_n^{-1}(\rho_1) \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} \}^\top \mathbf{1}_n,$$

$$\Sigma_{33} = 2\sigma^4 \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}_n^2) + (\mu_4 - 3\sigma^4) \left\| \text{Vec}(\text{diag} \tilde{\mathbf{H}}_n) \right\|^2,$$

$$\Sigma_{34} = (\mu_4 - \sigma^4) \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}_n), \quad \Sigma_{44} = n(\mu_4 - \sigma^4).$$

**注 1** (12) 的证明见文献[27]的引理 3。条件 A1 至 A3 是空间模型的常见假设, 如 A1 和 A2 在文献[7]假设 1、4、5 和 6 中使用, A3 在文献[5]和文献[39]证明定理 1 中用到。

**定理 1** 在假设条件(A1)-(A3)及模型(1)下, 当  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, n \rightarrow \infty$ , 且  $a_n = o_p(n^{2/3})$  时, 有

$$\ell_n^*(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \chi_{k+3}^2,$$

其中,  $\chi_{k+3}^2$  表示自由度为  $k+3$  的卡方分布。

取定  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ , 设  $z_\alpha(k+3)$  满足  $P(\chi_{k+3}^2 > z_\alpha(k+3)) = \alpha$ , 由定理 1 可确定基于调整经验似然方法下  $\boldsymbol{\theta}_0$  的置信水平为  $1-\alpha$  的渐近置信域为:

$$\{ \boldsymbol{\theta} : \ell_n^*(\boldsymbol{\theta}) \leq z_\alpha(k+3) \},$$

考虑检验问题:  $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$ , 由定理 1 知, 显著水平为  $\alpha$  的渐近否定域为:

$$W \triangleq \{ \boldsymbol{\theta} : \ell_n^*(\boldsymbol{\theta}) > z_\alpha(k+3) \}.$$

**定理 2** 条件同定理 1, 当  $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0, n \rightarrow \infty$ , 有

$$n^{-1/3} \ell_n^*(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{p} \infty, \quad n^{-1/3} \ell_n(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{p} \infty,$$

其中,  $\bar{\omega}_n(\boldsymbol{\theta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i(\boldsymbol{\theta})$ 。

由定理 2 可知, 定理 1 确定的检验规则在  $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$  时的渐近功效为:

$$P(W | H_1) = P_{H_1}(n^{-1/3} \ell_n^*(\boldsymbol{\theta}) > n^{-1/3} z_\alpha(k+3)) \rightarrow 1。$$

## 2 数值模拟

我们通过模拟比较 EL 和 AEL 优劣, 给定置信水平  $1 - \alpha = 0.95$ , 分别给出  $\ell_n(\boldsymbol{\theta}_0) \leq z_{0.05}(k+3)$  和  $\ell_n^*(\boldsymbol{\theta}_0) \leq z_{0.05}(k+3)$  在 5000 次模拟中出现的比例, 其中  $\boldsymbol{\theta}_0$  是  $\boldsymbol{\theta}$  的真实值。在模拟中, 使用如下模型:  $\mathbf{Y}_n = \rho_1 \mathbf{W}_n \mathbf{Y}_n + \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_{(n)}$ ,  $\mathbf{u}_{(n)} = \rho_2 \mathbf{M}_n \mathbf{u}_{(n)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}$ , 其中  $\boldsymbol{\beta} = 3.5$ ,  $x_i = i / (n+1)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\mathbf{X}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ ,  $(\rho_1, \rho_2)$  分别取为  $(-0.85, -0.15)$ ,  $(-0.85, 0.15)$ ,  $(0.85, -0.15)$  和  $(0.85, 0.15)$ ,  $\varepsilon_i$ 's 分别来自  $N(0, 1)$ ,  $N(0, 0.75)$ ,  $t(5)$  和  $\chi_4^2 - 4$ ,  $a_n = \max\{1, \log(n)/2\}$ 。

表 1 当  $e_i \sim N(0, 1)$  时 EL 和 AEL 置信域的覆盖率

Tab.1 Coverage probabilities of the EL and AEL confidence regions with  $e_i \sim N(0, 1)$

$(\rho_1, \rho_2)$	$\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_n$	EL	AEL	$(\rho_1, \rho_2)$	$\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_n$	EL	AEL
$(-0.85, -0.15)$	$grid_9$	0.199	1.000	$(-0.85, 0.15)$	$grid_9$	0.199	1.000
	$grid_{16}$	0.515	0.780		$grid_{16}$	0.521	0.794
	$grid_{25}$	0.689	0.773		$grid_{25}$	0.683	0.775
	$grid_{36}$	0.777	0.827		$grid_{36}$	0.776	0.824
	$grid_{49}$	0.833	0.864		$grid_{49}$	0.825	0.867
	$grid_{100}$	0.905	0.918		$grid_{100}$	0.901	0.915
	$grid_{169}$	0.925	0.932		$grid_{169}$	0.930	0.936
	$grid_{256}$	0.933	0.937		$grid_{256}$	0.935	0.941
	$grid_{400}$	0.938	0.942		$grid_{400}$	0.938	0.940
	$\mathbf{W}_{49}$	0.829	0.863		$\mathbf{W}_{49}$	0.832	0.869
$(0.85, -0.15)$	$\mathbf{I}_5 \otimes \mathbf{W}_{49}$	0.930	0.935	$(0.85, 0.15)$	$\mathbf{I}_5 \otimes \mathbf{W}_{49}$	0.934	0.939
	$grid_9$	0.185	1.000		$grid_9$	0.176	1.000
	$grid_{16}$	0.484	0.758		$grid_{16}$	0.469	0.754
	$grid_{25}$	0.668	0.754		$grid_{25}$	0.644	0.736
	$grid_{36}$	0.771	0.823		$grid_{36}$	0.753	0.805
	$grid_{49}$	0.812	0.851		$grid_{49}$	0.812	0.845
	$grid_{100}$	0.900	0.905		$grid_{100}$	0.896	0.912
	$grid_{169}$	0.920	0.930		$grid_{169}$	0.918	0.925
	$grid_{256}$	0.930	0.935		$grid_{256}$	0.933	0.937
	$grid_{400}$	0.937	0.940		$grid_{400}$	0.940	0.943
	$\mathbf{W}_{49}$	0.832	0.861		$\mathbf{W}_{49}$	0.818	0.852
	$\mathbf{I}_5 \otimes \mathbf{W}_{49}$	0.930	0.935		$\mathbf{I}_5 \otimes \mathbf{W}_{49}$	0.931	0.936

空间权重矩阵  $\mathbf{W}_n = (w_{ij})$ ,  $w_{ij}$  表示空间单元  $i$  与空间单元  $j$  之间的距离, 同一空间单元的距离  $w_{ij}$  为 0,  $\mathbf{W}_n$  主对角元素为 0, 显然,  $\mathbf{W}_n$  为对称矩阵。常用的距离函数为“邻接”(contiguity), 即空间单元  $i$  与  $j$  有共同的边界, 则  $w_{ij} = 1$ , 反之, 则  $w_{ij} = 0$ 。比照象棋中不同棋子的行走路线(文献[4]第 18 页), 邻接关系可以分为: 两个空间单元有公共边、有公共点无公共边、有公共边或公共点, 该三种情况依次称为车邻接(rook contiguity)、象邻接(bishop contiguity)、皇后邻接(queen contiguity)。模拟中,  $w_{ij}$  的度量采用皇后邻接, 并对  $\mathbf{W}_n$  将进行标准化, 即  $w_{ij}$  由  $w_{ij} / \sum_{j=1}^n w_{ij}$  替换, 同时取  $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_n$ 。

表 2 当  $e_i \sim N(0, 0.75)$  时 EL 和 AEL 置信域的覆盖率

Tab.2 Coverage probabilities of the EL and AEL confidence regions with $e_i \sim N(0, 0.75)$							
$(\rho_1, \rho_2)$	$\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_n$	EL	AEL	$(\rho_1, \rho_2)$	$\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_n$	EL	AEL
(-0.85, -0.15)	$grid_9$	0.203	1.000	(-0.85, 0.15)	$grid_9$	0.189	1.000
	$grid_{16}$	0.532	0.793		$grid_{16}$	0.492	0.777
	$grid_{25}$	0.68	0.772		$grid_{25}$	0.675	0.767
	$grid_{36}$	0.782	0.833		$grid_{36}$	0.772	0.827
	$grid_{49}$	0.836	0.865		$grid_{49}$	0.830	0.867
	$grid_{100}$	0.899	0.912		$grid_{100}$	0.904	0.920
	$grid_{169}$	0.925	0.933		$grid_{169}$	0.921	0.929
	$grid_{256}$	0.936	0.941		$grid_{256}$	0.935	0.940
	$grid_{400}$	0.943	0.945		$grid_{400}$	0.945	0.948
	$\mathbf{W}_{49}$	0.827	0.860		$\mathbf{W}_{49}$	0.834	0.866
(0.85, -0.15)	$I_5 \otimes \mathbf{W}_{49}$	0.930	0.937	(0.85, 0.15)	$I_5 \otimes \mathbf{W}_{49}$	0.929	0.934
	$grid_9$	0.198	1.000		$grid_9$	0.178	1.000
	$grid_{16}$	0.483	0.776		$grid_{16}$	0.467	0.755
	$grid_{25}$	0.659	0.751		$grid_{25}$	0.649	0.748
	$grid_{36}$	0.771	0.825		$grid_{36}$	0.753	0.806
	$grid_{49}$	0.817	0.853		$grid_{49}$	0.814	0.849
	$grid_{100}$	0.898	0.909		$grid_{100}$	0.884	0.899
	$grid_{169}$	0.924	0.932		$grid_{169}$	0.927	0.933
	$grid_{256}$	0.927	0.934		$grid_{256}$	0.929	0.933
	$grid_{400}$	0.944	0.947		$grid_{400}$	0.935	0.939
	$\mathbf{W}_{49}$	0.830	0.861		$\mathbf{W}_{49}$	0.834	0.863
	$I_5 \otimes \mathbf{W}_{49}$	0.935	0.941		$I_5 \otimes \mathbf{W}_{49}$	0.927	0.932

表 3 当  $e_i \sim t(5)$  时 EL 和 AEL 置信域的覆盖率

Tab.3 Coverage probabilities of the EL and AEL confidence regions with $e_i \sim t(5)$							
$(\rho_1, \rho_2)$	$\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_n$	EL	AEL	$(\rho_1, \rho_2)$	$\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_n$	EL	AEL
(-0.85, -0.15)	$grid_9$	0.151	1.000	(-0.85, 0.15)	$grid_9$	0.152	1.000
	$grid_{16}$	0.416	0.685		$grid_{16}$	0.406	0.673
	$grid_{25}$	0.563	0.661		$grid_{25}$	0.572	0.672
	$grid_{36}$	0.685	0.735		$grid_{36}$	0.670	0.73
	$grid_{49}$	0.741	0.778		$grid_{49}$	0.740	0.778



	$grid_{100}$	0.835	0.854		$grid_{100}$	0.831	0.848
	$grid_{169}$	0.875	0.887		$grid_{169}$	0.878	0.886
	$grid_{256}$	0.903	0.909		$grid_{256}$	0.903	0.910
	$grid_{400}$	0.911	0.914		$grid_{400}$	0.913	0.917
	$W_{49}$	0.743	0.783		$W_{49}$	0.733	0.776
	$I_5 \otimes W_{49}$	0.891	0.900		$I_5 \otimes W_{49}$	0.901	0.907
(0.85, -0.15)	$grid_9$	0.139	1.000	(0.85, 0.15)	$grid_9$	0.130	1.000
	$grid_{16}$	0.366	0.641		$grid_{16}$	0.360	0.634
	$grid_{25}$	0.548	0.644		$grid_{25}$	0.534	0.632
	$grid_{36}$	0.647	0.703		$grid_{36}$	0.627	0.687
	$grid_{49}$	0.718	0.757		$grid_{49}$	0.721	0.758
	$grid_{100}$	0.825	0.843		$grid_{100}$	0.826	0.845
	$grid_{169}$	0.862	0.873		$grid_{169}$	0.880	0.888
	$grid_{256}$	0.892	0.899		$grid_{256}$	0.893	0.903
	$grid_{400}$	0.911	0.915		$grid_{400}$	0.910	0.914
	$W_{49}$	0.731	0.775		$W_{49}$	0.721	0.759
	$I_5 \otimes W_{49}$	0.888	0.894		$I_5 \otimes W_{49}$	0.893	0.900

表 4 当  $e_i \sim \chi_4^2 - 4$  时 EL 和 AEL 置信域的覆盖率

Tab.4 Coverage probabilities of the EL and AEL confidence regions with  $e_i \sim \chi_4^2 - 4$

$(\rho_1, \rho_2)$	$W_n = M_n$	EL	AEL	$(\rho_1, \rho_2)$	$W_n = M_n$	EL	AEL
(-0.85, -0.15)	$grid_9$	0.187	1.000	(-0.85, 0.15)	$grid_9$	0.177	1.000
	$grid_{16}$	0.429	0.724		$grid_{16}$	0.422	0.710
	$grid_{25}$	0.589	0.693		$grid_{25}$	0.571	0.669
	$grid_{36}$	0.688	0.742		$grid_{36}$	0.679	0.735
	$grid_{49}$	0.729	0.770		$grid_{49}$	0.731	0.774
	$grid_{100}$	0.853	0.869		$grid_{100}$	0.841	0.855
	$grid_{169}$	0.887	0.895		$grid_{169}$	0.889	0.897
	$grid_{256}$	0.910	0.915		$grid_{256}$	0.908	0.914
	$grid_{400}$	0.927	0.931		$grid_{400}$	0.914	0.917
	$W_{49}$	0.727	0.770		$W_{49}$	0.744	0.780
	$I_5 \otimes W_{49}$	0.903	0.909		$I_5 \otimes W_{49}$	0.899	0.904
(0.85, -0.15)	$grid_9$	0.162	1.000	(0.85, 0.15)	$grid_9$	0.154	1.000
	$grid_{16}$	0.403	0.676		$grid_{16}$	0.366	0.657
	$grid_{25}$	0.559	0.647		$grid_{25}$	0.551	0.649
	$grid_{36}$	0.664	0.723		$grid_{36}$	0.649	0.709
	$grid_{49}$	0.743	0.782		$grid_{49}$	0.712	0.756
	$grid_{100}$	0.825	0.842		$grid_{100}$	0.832	0.848
	$grid_{169}$	0.875	0.885		$grid_{169}$	0.874	0.884
	$grid_{256}$	0.905	0.911		$grid_{256}$	0.902	0.909
	$grid_{400}$	0.921	0.925		$grid_{400}$	0.916	0.920
	$W_{49}$	0.723	0.764		$W_{49}$	0.736	0.774
	$I_5 \otimes W_{49}$	0.896	0.903		$I_5 \otimes W_{49}$	0.903	0.906

模拟中，我们考虑三种情形。首先考虑空间单元的 9 种理想情况：规则正方形网格  $n = m \times m$ ，

$m = 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 16, 20$ , 分别表示  $W_n$  为  $grid_9$ ,  $grid_{16}$ ,  $grid_{25}$ ,  $grid_{36}$ ,  $grid_{49}$ ,  $grid_{100}$ ,  $grid_{169}$ ,  $grid_{256}$  和  $grid_{400}$ 。其次, 考虑一个实例, 美国俄亥俄州哥伦布 49 个相邻规划街区的权重矩阵, 记为  $W_{49}$ , 该矩阵出现在文献[4]第 188 页。最后, 考虑  $W_n = I_5 \otimes W_{49}$ , 其中  $\otimes$  是 kronecker 乘积, 这相当于将五个独立的地区合并在一起, 每个地区都有类似的相邻结构。

覆盖率方面, 由表 1-表 4 可知, 当误差项  $e_i$  服从正态分布时, EL 和 AEL 方法在置信域中表现良好, 随着空间样本单元数量增大, 二者的覆盖率接近名义水平 0.95; 当误差项  $e_i$  服从厚尾对称  $t$  分布或非对称卡方分布时也有不错的表现。同时可看出, 空间样本单元数量较大时, AEL 所得的置信域的覆盖率为 EL 所得的置信域的覆盖率很接近; 空间样本单元数量较少时, AEL 所得的置信域的覆盖率要远远优于 EL 所得的置信域的覆盖率。总之, 无论误差项服从什么分布, 无论是大样本还是小样本, AEL 置信域要宽于 EL 的置信域(文献[37]第 435 页), AEL 所得的置信域的覆盖率要优于 EL。

表 5 当  $e_i \sim N(0, 1)$  时 EL 和 AEL 覆盖率代码运行所用时长

Tab.5 The code runtime of coverage probabilities between the EL and AEL under  $e_i \sim N(0, 1)$

$\rho_1 = 0.85, \rho_2 = 0.15$	模拟 100 次用时 (s)		模拟 1000 次用时 (s)		模拟 5000 次用时 (min)	
	EL	AEL	EL	AEL	EL	AEL
$grid_9$	3.034911	1.501408	30.98868	14.89316	2.604628	1.264644
$grid_{16}$	2.157349	1.701035	22.03516	16.80333	1.842554	1.439872
$grid_{25}$	1.939484	1.699198	19.49585	17.88881	1.761386	1.617301
$grid_{36}$	1.920298	2.158245	19.43822	18.54867	1.715465	1.664107
$grid_{49}$	2.03265	1.975585	19.32017	19.46934	1.629343	1.589021
$grid_{100}$	2.406406	2.364031	20.84890	20.38607	1.742501	1.743671
$grid_{169}$	2.192560	2.246201	20.11281	20.63526	1.800101	1.740035
$grid_{256}$	2.408131	2.271219	22.96711	22.07802	1.953248	1.965933
$grid_{400}$	2.569816	2.574532	27.46002	27.25366	2.322573	2.249785
总时间	20.6616	18.49145	202.6669	177.9563	17.3718	15.27437

计算效率方面, 表 5 给出两种经验似然方法的运行总时间, 可以看出模拟 100 次时, AEL 比 EL 快 2 秒左右, 模拟 1000 次时, AEL 比 EL 快 25 秒左右, 模拟 5000 次时, AEL 比 EL 快 120 秒左右。小样本情形, 两者运行时间的差异较大, 可能的原因是, 在求解未调整经验似然方程的解时, 如果初始点远离真实解, 其收敛性不能保证, 直到迭代次数(设置迭代 300 次)用完被迫退出循环, 而调整经验似然方程的解很快收敛, 迭代次数还没用完就已退出循环。该模拟在运行环境为: 处理器为 1.4GHz, Intel Core i5, 内存 8 GB 上运行得出。我们推荐使用修正的 Newton-Raphson 算法<sup>[37]</sup>求方程的解, 该算法的收敛性证明见文献[40]。

表 6 模拟中不同假设下的 SARAR 模型

Tab.6 SARAR models under different assumptions in simulation

Model	$\beta$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\sigma^2$
H0	3.5	0.85	0.15	1
C1	3.5	0.85	0.15	1.001
C2	3.5	0.85	0.15	1.1
C3	3.5	0.85	0.15	2
C4	3.5	0.85	0.15	3

检验功效方面, 考虑假设检验问题, 原假设  $H_0: \theta = \theta_0$  对备择假设  $H_1: \theta \neq \theta_0$ , 其中备择假设检验  $H_1$  考虑表 6 中四种模型设定。C1-C4 分别代表了非真值参数与真值参数从近到远的距离, 即:

$\|\theta - \theta_0\| < n^{-1}$ 、 $n^{-1} < \|\theta - \theta_0\| < n^{-1/3}$ 、 $n^{-1/12} < \|\theta - \theta_0\| < n^{1/9}$  和  $\|\theta - \theta_0\| > n^{1/9}$ 。由表 7 可见四种对

表 7 当  $e_i \sim N(0, \sigma^2)$  时 EL 和 AEL 拒绝域的比例

Tab.7 Proportions of the EL and AEL rejection regions with  $e_i \sim N(0, \sigma^2)$

	EL					AEL				
	H0	C1	C2	C3	C4	H0	C1	C2	C3	C4
$grid_9$	0.831	0.831	0.850	0.963	0.993	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$grid_{16}$	0.531	0.531	0.573	0.913	0.991	0.248	0.248	0.303	0.767	0.956
$grid_{25}$	0.342	0.343	0.397	0.884	0.994	0.245	0.246	0.308	0.838	0.991
$grid_{36}$	0.253	0.253	0.313	0.898	0.997	0.205	0.205	0.259	0.869	0.996
$grid_{49}$	0.189	0.189	0.238	0.932	0.999	0.158	0.159	0.203	0.917	0.999
$grid_{100}$	0.109	0.109	0.168	0.993	1.000	0.096	0.097	0.151	0.992	1.000
$grid_{169}$	0.076	0.077	0.137	1.000	1.000	0.068	0.068	0.130	1.000	1.000
$grid_{400}$	0.062	0.062	0.186	1.000	1.000	0.060	0.060	0.178	1.000	1.000

立假设被拒绝的比例情况, 随着参数与真值参数的距离逐渐变大, EL 和 AEL 被拒绝的比例都逐渐增大; 当参数与真值参数距离很大时, EL 和 AEL 被拒绝的比例都很接近 1, 甚至等于 1。将 EL 与 AEL 的两两对比。原假设  $H_0$  下, AEL 被拒绝比例比 EL 更接近  $\alpha$  为 0.05 的名义水平, AEL 被拒绝比例优于

EL; 当样本较大且  $\|\theta - \theta_0\| < n^{-1/3}$  时, 两种方法被拒绝的比例相近, 但 AEL 被拒绝比例更优于 EL 被拒

绝比例; 当样本较大且  $\|\theta - \theta_0\| > n^{-1/3}$  时, 两种方法下被拒绝的比例都趋近于 1; 当样本数量很少时,

比如 9 个样本, EL 在原假设下被拒绝比例很高, AEL 在对立假设下被接受比例很高。总之, AEL 犯第一类错误的比例优于 EL, AEL 犯第二错误的比例略劣于 EL。

总结, 调整经验似然比一般经验似然置信域的覆盖精度更高, 计算速度更快, 检验功效略小。大样本时, 无论误差项是否服从正态分布, 推荐 EL 和 AEL 方法(文献[27]); 小样本时, 模拟结果推荐 AEL 方法。

### 3 实证分析

我们使用经验似然方法研究 R 软件 data 包提供的实际数据集 Columbus, 该数据集包含 1988 年哥伦布市 49 个社区 22 个变量, 本文主要涉及 1 个因变量和 2 个自变量, 其中, 因变量为犯罪率(crime), 自变量为房价(hoval)与家庭收入(inc)。

我们研究房价与家庭收入对犯罪率的作用。首先, 用 R 软件 plot 函数绘制的哥伦布市简易地图如图 1a 所示, 其对应的空间矩阵连接图如图 1b 所示。其次, 我们用颜色的深浅程度表示事件的等级, 颜色越深代表数值越高, 颜色越浅代表数值越低, 由图 2a 可看出各个社区的犯罪率并非随机分布, 部分区域呈现聚集, 故应进行空间计量分析, 由图 2b 和图 2c 进一步可看出房价和家庭收入与犯罪率存在负相关性, 房价和家庭收入越低的地方, 犯罪率越高。本文作图方法参考了文献[41]。最后, 我们使用空间模型拟合上述数据:

$$crime = \beta_0 + \beta_1 hoval + \beta_2 inc + \rho_1 W_{49} crime + (I_{49} - \rho_2 W_{49})^{-1} \varepsilon,$$

其中， $\varepsilon = (I_{49} - \rho_2 W_{49}) \{ (I_{49} - \rho_1 W_{49}) crime - \beta_0 - \beta_1 hoval - \beta_2 inc \}$ ， $W_{49}$  取值同模拟部分。

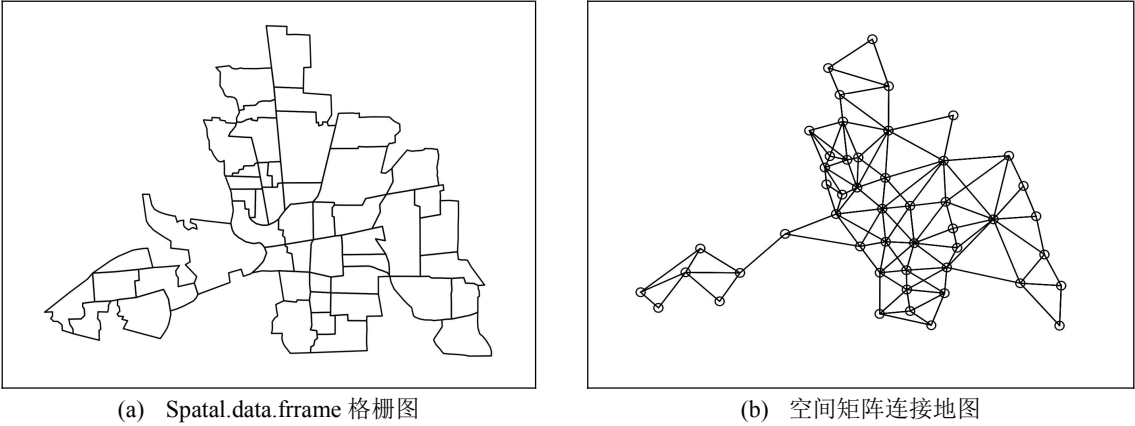


图 1 不同程序下绘制的哥伦布市地图

Fig.1 Map of Columbus drawn under different programs

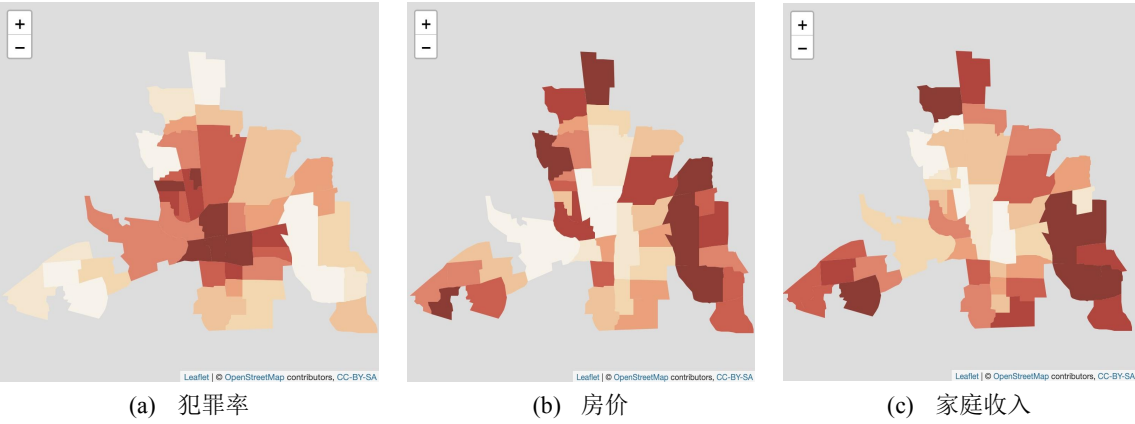


图 2 哥伦布市变量空间分布图

Fig.2 Spatial distribution map of variables in Columbus

我们分别使用未调整和调整经验似然方法估计模型的参数，其结果如表 8 所示。

表 8 1988 年哥伦布市数据估计结果

Method	Estimation						MAE ( $10^{-14}$ )
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_1$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\sigma^2$	
EL	39.96702360	-0.26297967	-0.92262488	0.5311139	-0.05470374	97.54201716	2.37820
AEL	39.96702302	-0.26297986	-0.92262486	0.5311132	-0.05470434	97.54209475	2.22492

表 8 可见，在实际数据中，EL 与 AEL 参数估计的结果接近，其中， $\beta_1 = -0.2629$  可解释为房价每增加 1 个单位，犯罪率减少 0.2629； $\beta_2 = -0.9226$  可解释为收入每增加 1 个单位，犯罪率减少 0.9226； $\rho_1 = 0.5311$  可解释为空间滞后项  $W_{49}crime$  对  $crime$  有影响，不同地区之间的犯罪率存在空间相关性； $\rho_2 = -0.0547$  可解释为不包含在  $hoval$  和  $inc$  中但对  $crime$  有影响的遗漏变量存在空间相关性，或者

不可观测的随机冲击存在空间自相关性。两种推断方法得到的 49 个社区的犯罪率估计值与真值的距离采用平均绝对误差（MAE）度量，由表 8 可知，调整经验似然比普通经验似然方法得到的误差更小。

空间模型充分利用了空间距离的信息，由经验似然推断得到的估计值也符合常规的理解，无须提前假定分布类型，我们推荐使用经验似然方法研究空间计量经济模型，实证研究结果也推荐调整经验似然方法。与本论文相关的代码可见 <https://github.com/Tang-Jay/AEL>。

## 4 证明

**引理 1** 在假设条件(A1)-(A3)满足，则  $\theta \neq \theta_0, n \rightarrow \infty$  时，有

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} \|\omega_i(\theta)\| &= o_p(n^{1/2}) \text{ a.s.}, \\ \Sigma_{k+3}^{-1/2} \sum_{i=1}^n \omega_i(\theta) &\xrightarrow{d} N(0, \mathbf{I}_{k+3}), \\ n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i(\theta) \omega_i^\top(\theta) &= n^{-1} \Sigma_{k+3} + o_p(1), \\ \sum_{i=1}^n \|\omega_i(\theta)\|^3 &= O_p(n), \end{aligned}$$

其中  $\Sigma_{k+3}$  已在式(12)中给出。

**证明** 见文献[27]的引理 3。

**定理 1 的证明：** 令记  $\lambda = \lambda(\theta)$ ,  $\lambda$  是满足方程(11)的解，设  $a_n = o_p(n)$ ，令  $\omega^* = \max_{1 \leq i \leq n} \|\omega_i(\theta)\|$ ，由引理 1 可知，

$$\bar{\omega}_n = O_p(n^{-1/2}), \quad \omega^* = o_p(n^{1/2}).$$

令  $\omega_i = \omega_i(\theta)$ ,  $\rho = \|\lambda\|$ ,  $\hat{\lambda} = \lambda / \rho$ , 有  $\|\hat{\lambda}\| = 1, \lambda = \rho \hat{\lambda}$ 。于是，由式(11)可得：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\hat{\lambda}^\top}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\omega_i}{1 + \hat{\lambda}^\top \omega_i} = \frac{\hat{\lambda}^\top}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \left( \omega_i - \frac{\omega_i \hat{\lambda}^\top \omega_i}{1 + \hat{\lambda}^\top \omega_i} \right) \\ &= \frac{\hat{\lambda}^\top}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i - \frac{\rho}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(\hat{\lambda}^\top \omega_i)^2}{1 + \rho \hat{\lambda}^\top \omega_i} \\ &= \frac{\hat{\lambda}^\top}{n} (\sum_{i=1}^n \omega_i + \omega_{n+1}) - \frac{\rho}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\lambda}^\top \omega_i)^2}{1 + \rho \hat{\lambda}^\top \omega_i} + \frac{(\hat{\lambda}^\top \omega_{n+1})^2}{1 + \rho \hat{\lambda}^\top \omega_{n+1}} \right) \\ &= \hat{\lambda}^\top \bar{\omega}_n (1 - a_n / n) - \frac{\rho}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\lambda}^\top \omega_i)^2}{1 + \rho \hat{\lambda}^\top \omega_i} + \frac{(\hat{\lambda}^\top \omega_{n+1})^2}{1 + \rho \hat{\lambda}^\top \omega_{n+1}} \right) \\ &\leq \hat{\lambda}^\top \bar{\omega}_n (1 - a_n / n) - \frac{\rho}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\lambda}^\top \omega_i)^2}{1 + \rho \hat{\lambda}^\top \omega_i} \\ &\leq \hat{\lambda}^\top \bar{\omega}_n (1 - a_n / n) - \frac{\rho}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\lambda}^\top \omega_i)^2}{1 + \rho \omega^*} \\ &= \hat{\lambda}^\top \bar{\omega}_n - \frac{\rho}{n(1 + \rho \omega^*)} \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}^\top \omega_i)^2 + O_p(n^{-3/2} a_n) \\ &= \hat{\lambda}^\top \bar{\omega}_n - \frac{\rho}{n(1 + \rho \omega^*)} \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}^\top \omega_i)^2 + o_p(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

从而,

$$\frac{\rho}{n(1+\rho\omega^*)} \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}^\top \omega_i)^2 = \hat{\lambda}^\top \bar{\omega}_n + o_p(n^{-1/2}).$$

令  $V_0 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i(\theta) \omega_i^\top(\theta)$ , 结合条件 A3 可知,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}^\top \omega_i)^2 &= \hat{\lambda}^\top \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i \omega_i^\top \cdot \hat{\lambda} = \hat{\lambda}^\top V_0 \hat{\lambda} \geq \lambda_{\min}(V_0), \\ \left| \hat{\lambda}^\top \bar{\omega}_n \right| &\leq \left| \hat{\lambda}^\top \Sigma_{k+3}^{1/2} \Sigma_{k+3}^{-1/2} \bar{\omega}_n \right| \leq \left\| \Sigma_{k+3}^{1/2} \hat{\lambda} \right\| \cdot \left\| \Sigma_{k+3}^{-1/2} \bar{\omega}_n \right\| \leq \lambda_{\max}(\Sigma_{k+3}^{1/2}) \left\| \hat{\lambda} \right\| \cdot \left\| \Sigma_{k+3}^{-1/2} \bar{\omega}_n \right\|, \end{aligned}$$

即,

$$\frac{\rho}{1+\rho\omega^*} \lambda_{\min}(V_0) \leq \lambda_{\max}(\Sigma_{k+3}^{1/2}) \left\| \hat{\lambda} \right\| \cdot \left\| \Sigma_{k+3}^{-1/2} \bar{\omega}_n \right\| + o_p(n^{-1/2}).$$

由引理 1 可知  $\left\| \Sigma_{k+3}^{-1/2} \bar{\omega}_n \right\| = O_p(n^{-1})$ , 结合条件 A3 得,

$$\frac{\rho}{1+\rho\omega^*} = O_p(n^{-1/2}),$$

再由引理 1 可知,

$$\rho = O_p(n^{-1/2}),$$

即,

$$\lambda = O_p(n^{-1/2}). \quad (13)$$

令  $\gamma_i = \lambda^\top \omega_i$ , 由柯西-施瓦茨不等式可知,  $\max_{1 \leq i \leq n} |\gamma_i| \leq \left\| \lambda \right\| \cdot \omega^*$ ,  $|\gamma_{n+1}| = \left| a_n \lambda^\top \bar{\omega}_n \right| \leq a_n \left\| \lambda \right\| \cdot \left\| \bar{\omega}_n \right\|$ , 由式(13)及引理 1 可得,

$$\max_{1 \leq i \leq (n+1)} |\gamma_i| = o_p(1). \quad (14)$$

由式(11)可得,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\omega_i}{1 + \lambda^\top \omega_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\omega_i \lambda^\top \omega_i}{1 + \lambda^\top \omega_i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i - \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i \omega_i^\top \right\} \lambda + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\omega_i (\lambda^\top \omega_i)^2}{1 + \lambda^\top \omega_i} \\ &= \bar{\omega}_n + \frac{1}{n} \omega_{n+1} - V_0 \lambda - \frac{1}{n} \omega_{n+1} \gamma_{n+1} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \gamma_i^2}{1 + \lambda^\top \omega_i} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\omega_{n+1} \gamma_{n+1}^2}{1 + \lambda^\top \omega_{n+1}}. \end{aligned}$$

结合引理 1 和条件 A3, 上式可得,

$$\lambda = V_0^{-1} \bar{\omega}_n + o_p(n^{-1/2}), \quad (15)$$

其中,  $\left\| n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i \gamma_i^2 \right\| \leq n^{-1} \sum_{i=1}^n \left\| \omega_i \right\|^3 \left\| \lambda \right\|^2 = O_p(n^{-1}) = o_p(n^{-1/2})$ . 由式(14)可泰勒展开

$\log(1 + \gamma_i) = \gamma_i - \gamma_i^2 / 2 + \nu_i$ , 其中, 存在  $B > 0$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$P(|\nu_i| \leq B |\gamma_i|^3, 1 \leq i \leq n+1) \rightarrow 1.$$

因此, 由式(10)、式(15)和泰勒展开, 可得

$$\begin{aligned} \ell_n^*(\theta_0) &= 2 \sum_{j=1}^{n+1} \log(1 + \gamma_j) = 2 \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j - \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \gamma_j - \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 + 2\gamma_{n+1} - \gamma_{n+1}^2 + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j \\ &= 2n\lambda^\top \bar{\omega}_n - n\lambda^\top V_0 \lambda + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j + o_p(1) \\ &= 2n(V_0^{-1} \bar{\omega}_n)^\top \bar{\omega}_n + 2n \cdot o_p(n^{-1/2}) \bar{\omega}_n - n \bar{\omega}_n^\top V_0^{-1} \bar{\omega}_n \\ &\quad - 2n \cdot o_p(n^{-1/2}) \bar{\omega}_n - n \cdot o_p(n^{-1/2}) V_0 o_p(n^{-1/2}) + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j + o_p(1) \\ &= n \bar{\omega}_n^\top V_0^{-1} \bar{\omega}_n + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j + o_p(1) \\ &= \{n \Sigma_{k+3}^{-1/2} \bar{\omega}_n\}^\top \{n \Sigma_{k+3}^{-1/2} V_0 \Sigma_{k+3}^{-1/2}\}^{-1} \{n \Sigma_{k+3}^{-1/2} \bar{\omega}_n\} + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j + o_p(1). \end{aligned}$$

结合引理 1 和条件 A3, 可知,

$$\{n \Sigma_{k+3}^{-1/2} \bar{\omega}_n\}^\top \{n \Sigma_{k+3}^{-1/2} V_0 \Sigma_{k+3}^{-1/2}\}^{-1} \{n \Sigma_{k+3}^{-1/2} \bar{\omega}_n\} \xrightarrow{d} \chi_{k+3}^2,$$

且

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j \right| \leq \left| \sum_{j=1}^n \nu_j \right| + |\nu_{n+1}| \leq B \|\lambda\|^3 \sum_{j=1}^n \|\omega_j\|^3 + B \|\lambda\|^3 \|\omega_{n+1}\|^3 = o_p(1).$$

定理 1 证毕。

**定理 2 的证明:** 令  $\bar{\omega}_n = \bar{\omega}_n(\theta)$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时, 由大数定律可知,  $\|\bar{\omega}_n^\top \bar{\omega}_n\| \xrightarrow{p} \delta^2 > 0$ , 由引理 1

可知  $\omega^* = \max_{1 \leq i \leq n} \|\omega_i(\theta)\| = o_p(n^{1/2})$ 。令  $\tilde{\lambda} = n^{-2/3} \bar{\omega}_n M$ ,  $M$  为正数,  $\tilde{\gamma}_i = \tilde{\lambda}^\top \omega_i(\theta)$ , 有

$\max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{\gamma}_i| \leq \|\tilde{\lambda}\| \cdot \omega^* = o_p(1)$ ,  $|\tilde{\gamma}_{n+1}| = |\tilde{\lambda}^\top \omega_{n+1}(\theta)| = o_p(1)$ , 得

$$\max_{1 \leq i \leq n+1} |\tilde{\gamma}_i| = o_p(1). \quad (16)$$

由式(16)可泰勒展开  $\log(1 + \tilde{\gamma}_i) = \tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_i^2 / 2 + \tilde{\nu}_i$ , 其中, 存在  $B > 0$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$P(|\tilde{\nu}_i| \leq B |\tilde{\gamma}_i|^3, 1 \leq i \leq n+1) \rightarrow 1.$$

因此, 由式(16)和泰勒展开式得:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} \log(1 + \tilde{\gamma}_j) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\gamma}_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\gamma}_j^2 + \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\nu}_j \\
&= \sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j^2 + \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\nu}_j + \tilde{\gamma}_{n+1} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{n+1}^2 \\
&= n^{1/3} \delta^2 M - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j^2 + \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\nu}_j + o_p(1).
\end{aligned}$$

由于,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j^2 \right| &\leq \left| n \tilde{\lambda}^\top V_0 \tilde{\lambda} \right| \leq \left| n \tilde{\lambda}^\top \lambda_{\max}(V_0) \tilde{\lambda} \right| = O_p(n^{-4/3}) = o_p(1), \\
\left| \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\nu}_j \right| &\leq B \|\tilde{\lambda}\|^3 \sum_{j=1}^n \|\omega_j(\theta)\|^3 + B \|\tilde{\lambda}\|^3 \|\omega_{n+1}(\theta)\|^3 = O_p(n^{-5/2}) + O_p(n^{-2}) = o_p(1),
\end{aligned}$$

其中, 当  $\theta \neq \theta_0$  时,  $\sum_{j=1}^n \|\omega_j(\theta)\|^3 = O_p(n)$  的证明与文献[27]中式(4.5)的证明类似。由式(9)和最大化问题的对偶性, 可得:

$$\begin{aligned}
W^*(\theta) &\triangleq \log L_n^*(\theta) = \sup_{p_i, 1 \leq i \leq n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \log(n+1) p_i \right\} \\
&= - \sup_{\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \log(1 + \lambda^\top \omega_i) \right\} \\
&\leq - \sum_{i=1}^{n+1} \log(1 + \tilde{\lambda}^\top \omega_i) = -n^{1/3} \delta^2 M + o_p(1).
\end{aligned}$$

因为  $M$  是个任意大的数, 于是,  $-2n^{-1/3} W^*(\theta) \rightarrow \infty$ , 即  $n^{-1/3} \ell_n^*(\theta) \xrightarrow{p} \infty$ 。类似可证,

$$n^{-1/3} \ell_n(\theta) \xrightarrow{p} \infty。$$

定理 2 证毕。

## 参 考 文 献:

- [1] TOBLER R. A Computer movie simulating urban growth in the Detroit Region[J]. Economic Geography, 1970, 46(2): 234-240.
- [2] CRESSIE N. Statistics for spatial data[M]. New York: Wiley, 1993.
- [3] CLIFF A D, ORD J K. Spatial autocorrelation[M]. London: Pion Ltd, 1973.
- [4] ANSELIN L. Spatial econometrics: methods and models[M]. Berlin: Springer, 1988.
- [5] KELEJIAN H H, PRUCHA L R. A generalized spatial two-stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with autoregressive disturbances[J]. The Journal of Real Estate Finance and Economics, 1998, 17(1): 99-121.
- [6] KELEJIAN H H, PRUCHA L R. A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model[J]. International Economic Review, 1999, 40(2): 509-533.
- [7] LEE L F. Asymptotic distributions of quasi-maximum likelihood estimators for spatial auto-regressive models[J]. Econometrica, 2004, 72(6): 1899-1925.
- [8] 陶长琪, 徐荣. 固定效应时异系数广义空间自回归模型的估计与模拟[J]. 数理统计与管理, 2023, 42(1): 65-82.
- [9] 陈青青, 龙志和, 林光平, 等. 面板数据空间误差分量模型的 GMM 估计及其应用[J]. 数理统计与管理, 2013, 32(1):



- [10] 陶长琪, 周璇. 含空间自回归误差项的空间动态面板模型的有效估计[J]. 数量经济技术经济研究, 2016, 33(4): 126-144.
- [11] ANSELIN L. Thirty years of spatial econometrics[J]. Papers in Regional Science, 2010, 89(1): 3-25.
- [12] ARBIA G. Spatial econometrics: statistical foundations and applications to regional convergence[M]. Berlin: Springer, 2006.
- [13] LEE L F, YU J. Estimation of spatial autoregressive panel data models with fixed effects[J]. Journal of Econometrics, 2010, 154(2): 165-185.
- [14] LEE L F. Best spatial two-stage least squares estimators for a spatial autoregressive model with autoregressive disturbances[J]. Econometric Reviews, 2003, 22(4): 307-335.
- [15] QU X, LEE L F, YU J H, et al. QML estimation of spatial dynamic panel data models with endogenous time varying spatial weights matrices[J]. J. Econometrics, 2017, 197(2), 173-201.
- [16] LIU X, LEE L F, BOLLINGER C R, et al. An efficient GMM estimator of spatial autoregressive models[J]. Journal of Econometrics, 2010, 159(2): 303-319.
- [17] LEE L F, YU J H. Efficient GMM estimation of spatial dynamic panel data models with fixed effects[J]. J. Econometrics, 2014, 180(2), 174-197.
- [18] MA Y Y, GUO S J, WANG H S, et al. Sparse spatio-temporal autoregressions by profiling and bagging[J]. Journal of Econometrics, 2021. DOI: 10.1016/j.jeconom.2020.10.010.
- [19] OWEN A B. Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single function[J]. Biometrika, 1988, 75(2): 237-249.
- [20] OWEN A B. Empirical likelihood ratio confidence regions[J]. Ann. Statist, 1990, 18(1): 90-120.
- [21] QIN J, LAWLESS J. Empirical likelihood and general estimating equations[J]. Ann. Statist, 1994, 22(1): 300-325.
- [22] 张军舰. 非参数似然方法及其应用研究进展[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2022, 40(5): 150-159.
- [23] OWEN A B. Empirical likelihood for linear models[J]. Ann. Statist., 1991, 19(4): 1725-1747.
- [24] KOLACZYK E D. Empirical likelihood for generalized linear models[J]. Statistica Sinica., 1994, 4: 199-218.
- [25] QIN Y S. Empirical likelihood ratio confidence regions in a partly linear model[J]. Chinese J. Applied Proba. Statist., 1999(15): 363-369.
- [26] JIN F, LEE L F. GEL estimation and tests of spatial autoregressive models[J]. Journal of Econometrics, 2019, 208(2): 585-612.
- [27] QIN Y S. Empirical likelihood for spatial autoregressive models with spatial autoregressive disturbances[J]. Sankhyā A: The Indian Journal of Statistics, 2021, 83(1): 1-25.
- [28] LI Y H, QIN Y S, LI Y, et al. Empirical likelihood for nonparametric regression models with spatial autoregressive errors[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2021, 50: 447-478.
- [29] RONG J R, LIU Y, QIN Y S, et al. Empirical likelihood for spatial dynamic panel data models with spatial lags and spatial errors[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, Accepted for publication, 2021. DOI: 10.1080/03610926.2022.2032172.
- [30] 曾庆樊, 秦永松, 黎玉芳, 等. 时变系数空间面板数据模型的经验似然推断[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2022, 40: 30-42.
- [31] 陶阳, 何帮强. 空间自回归固定效应面板数据模型的经验似然[J]. 安徽工程大学学报, 2022, 37(6): 75-84.
- [32] 李龙飞. 空间计量经济学中的空间自回归模型[J]. 计量经济学报, 2021, 1(1): 36-65.
- [33] 雷庆祝, 秦永松. 空间计量经济模型的经验似然研究进展[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2022, 5: 152-163.
- [34] TSAO M. Bounds on coverage probabilities of the empirical likelihood ratio confidence regions[J]. Ann. Statist, 2004, 32(3): 1215-1221.
- [35] OWEN A B. Empirical Likelihood[M]. New York: Chapman and Hall, 2001.
- [36] BARTOLUCCI F. A penalized version of the empirical likelihood ration for the population mean[J]. Statist.Probab.Lett, 2007, 77(1): 104-110.
- [37] CHEN J, VARIYATH A M, ANRAHAM B, et al. Adjusted empirical likelihood and its properties[J]. Journal of Computational and Craphical Statistics, 2008, 17(2): 426-443.
- [38] EMERSON S C, OWEN A B. Calibration of the empirical likelihood method for a vector mean[J]. Electronic Journal of Statistics, 2009, 3: 1161-1192.
- [39] KELEJIAN H H, PRUCHA I R. On the asymptotic distribution of the moran I test statistic with applications[J]. Journal of Econometrics, 2001, 104(2): 219-257.
- [40] CHEN J, SITTER R R, WU C, et al. Using empirical likelihood methods to obtain range restricted weights in regression estimators for surveys[J]. Biometrika, 2002, 89(1): 230-237.
- [41] 龚德鑫, 刘涛, 朱志华, 等. 空间自回归分析及其在 R 软件中的实现[J]. 华南预防医学, 2020, 46(4): 450-453.

# Adjusted Empirical Likelihood for Spatial Autoregressive Models with Spatial Autoregressive Disturbances

TANG Jie<sup>1</sup>, QIN Yongsong<sup>1, 2\*</sup>

(1. College of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guangxi Guilin 541004, China;

2. Guangxi Key Lab of Multi-source Information Mining & Security, Guangxi Guilin 541004, China )

**Abstract:** The adjusted empirical likelihood ratio statistics are constructed for the parameters in spatial autoregressive models with spatial autoregressive disturbances. It is shown that the limiting distributions of the adjusted empirical likelihood ratio statistics are chi-squared distributions, which are used to construct confidence regions for the parameters in the models. Our simulation indicates that the adjusted empirical likelihood in the models is much faster to compute than the profile empirical likelihood. The confidence region in the models constructed via the adjusted empirical likelihood are found to have coverage probabilities closer to the nominal levels. The adjusted empirical likelihood is also shown to be effective in solving practical problems associated with the profile empirical likelihood in the models. When the sample size is large, whether the error term obeys the normal distribution or not, the general empirical likelihood method and the adjusted empirical likelihood method can be used. When the sample size is small, the adjusted empirical likelihood method is recommended.

**Keywords:** Spatial ARAR model; Adjusted Empirical Likelihood; Confidence region