AEL apply to SARAR model

Tang Jie

2021 年 11 月 12 日

摘要

这是一篇关于调整经验似然应用于 SARAR 模型的论文进度报告。

第一次汇报，单参数情形下，小样本情形下 AEL 明显好于 EL。

第二次汇报，多参数情形下，小样本情形下 AEL 明显好于 EL。

第三次汇报，寻找新算法使得 λ 满足 AEL 约束条件。

第四次汇报，新算法下，不仅 λ 满足 AEL 约束条件，还证明了多参数情形下，AEL 效果好于 EL，尤其在小样本情形下。并应用到 SARAR 模型中。

同时提到了接下来的任务，~~一是复刻 Chen431 页图 1~~，二是复刻 Chen435 页表 2 的数据，~~三是实现 Chen433 页算法~~，~~四是理论证明~~。

第五次汇报，复刻 Chen431 页图 1；阅读文献并整理部分证明。

目录

1 第一次汇报 **1**

1.1 单参数情形下：AEL 比 EL 好 1

1.1.1 标准正态样本-单参数-小样本 1

1.1.2 标准正态样本-单参数-大样本 1

2 第二次汇报 **2**

2.1 多参数情形下：AEL 比 EL 好 2

3 第三次汇报 **3**

3.1 发现问题 3

3.2 解决问题 3

3.2.1 Chen 算法 3

4 第四次汇报 **4**

4.1 多参数情形下：AEL 比 EL 好 4

4.1.1 线性模型 4

4.1.2 SARAR 模型 5

5 第五次汇报 **7**

6 题外话 **8**

1 第一次汇报

1.1 单参数情形下：AEL 比 EL 好

对 n 个来自标准正态分布的同一个样本，分别进行 EL 与 AEL 数值模拟，并进行重复 nsim 次。

1.1.1 标准正态样本-单参数-小样本

表 1: Coverage probabilities of population mean

	Normal data							
	n=10				n=20			
NV	0.80	0.90	0.95	0.99	0.80	0.90	0.95	0.99
EL	?				0.7768	0.8790	0.9282	0.9816
AEL	0.8	0.896	0.939	0.999	0.8140	0.9076	0.9452	0.9906

NV = nominal value；EL = empirical likelihood；AEL = Adjusted EL.

小样本情形下，当 n=10 时，EL 出现无法计算的情况。与此相比，AEL 一定有解，并且仍有不错的结果。当 n=20 时，分别在名义水平 0.8、0.9、0.95、0.99 情形下，明显可看出 AEL 比 EL 效果更好。

1.1.2 标准正态样本-单参数-大样本

表 2: Coverage probabilities of population mean

	Normal data							
	n=100				n=500			
NV	0.80	0.90	0.95	0.99	0.80	0.90	0.95	0.99
EL	0.7926	0.892	0.9494	0.9904	0.8024	0.9026	0.9508	0.9884
AEL	0.8042	0.9012	0.9556	0.9918	0.8064	0.9044	0.9520	0.9890

NV = nominal value；EL = empirical likelihood；AEL = Adjusted EL.

大样本情形下，AEL 与 EL 趋于一致，AEL 仍比 EL 的覆盖率高一些。

结论：单参数情形下，无论大样本还是小样本，AEL 都比 EL 好。

2 第二次汇报

2.1 多参数情形下：AEL 比 EL 好

重新计算，结果见第四次汇报。

3 第三次汇报

3.1 发现问题

牛顿迭代法求解 $G(\lambda) = 0$ 的程序，在经验似然下，λ 计算上满足 $G(\lambda)$=0 的约束条件, 而在调整经验似然下, 求解出的 λ 都没有满足 $G(\lambda)$=0 的约束条件。于是寻找新的算法，能在调整经验方法下，求得满足所有约束下的 λ 的值。

3.2 解决问题

踏上寻“根”之路。

此根须同时满足 (A1) $G(\lambda) = 0$；(A2)$1 + \lambda^{'}\mathrm{g}_i > 0, i = 1, 2, ..., n, n+1$。

3.2.1 Chen 算法

Chen 在 433 页给了他的算法，那就试试看吧。

$$
\begin{aligned}
&a_n = \max(1, \log(n)/2) \\
&\mathrm{g}_{n+1} = -a_n \bar{\mathrm{g}}_n \\
&R(\lambda) = \sum_{i=1}^{n+1} \log(1 + \lambda^{'}\mathrm{g}_i)
\end{aligned} \tag{1}
$$

开始 Chen 的程序之前，先分别计算 $R(\lambda)$ 的一阶偏导数 $\dot{R}$ 和二阶偏导数 $\ddot{R}$。

$$
\begin{aligned}
\dot{R} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\mathrm{g}_i}{1 + \lambda^{'}\mathrm{g}_i} \\
\ddot{R} &= \sum_{i=1}^{n+1} -\frac{\mathrm{g}_i\mathrm{g}_i^{'}}{(1 + \lambda^{'}\mathrm{g}_i)^2}
\end{aligned} \tag{2}
$$

最后经过部分调整，Chen 算法落地成功。

Chen 算法不论在经验似然还是调整经验似然下，求解的 λ 都满足约束要求，λ 百分之百满足 $|G(\lambda)| \leq 10^{-6}$。

4 第四次汇报

4.1 多参数情形下：AEL 比 EL 好

来自多参数模型的 n 个样本，名义水平为 0.95，分别计算 EL 与 AEL 方法下的覆盖率，并进行重复 2000 次。

4.1.1 线性模型

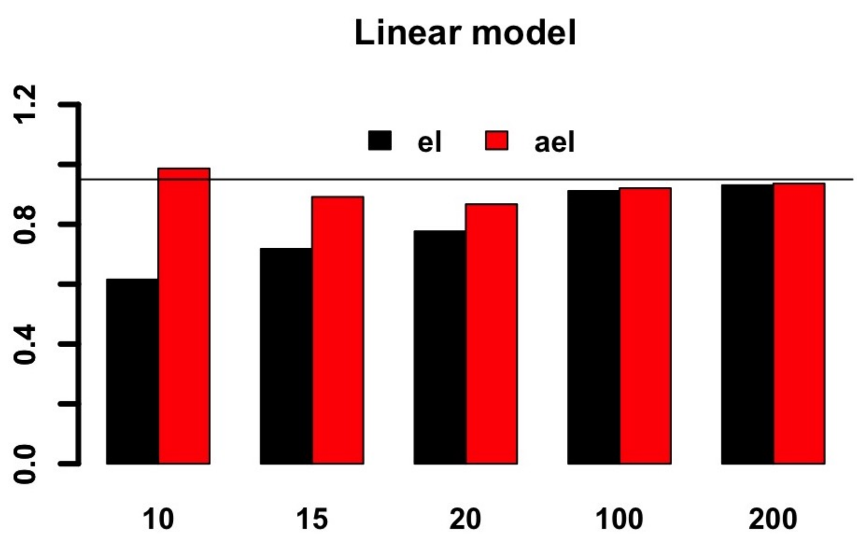

图 1: 线性模型 EL 与 AEL 对比图

由图可见，小样本（n=10、15、20）的表现在 AEL 方法下显著提高，在大样本（n=100、200）下，EL 与 AEL 趋于相近。

结论：线性模型下，无论大样本还是小样本，AEL 都比 EL 好。

4.1.2 SARAR 模型

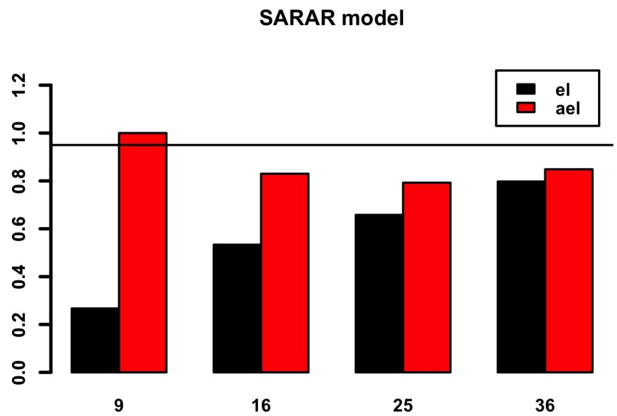

图 2: Wn 分别取 $grid_9$、$grid_{16}$、$grid_{25}$、$grid_{36}$

模拟 2000 次, 置信水平为 0.95, β=3.5, (ρ_1,ρ_2)=(-0.85，-0.15)，Xn 由标准正态数据的平方生成时，并分别在样本为 9、16、25、36 个的情形下计算覆盖率。由图可知，小样本情形下，AEL 明显比 EL 效果更好。

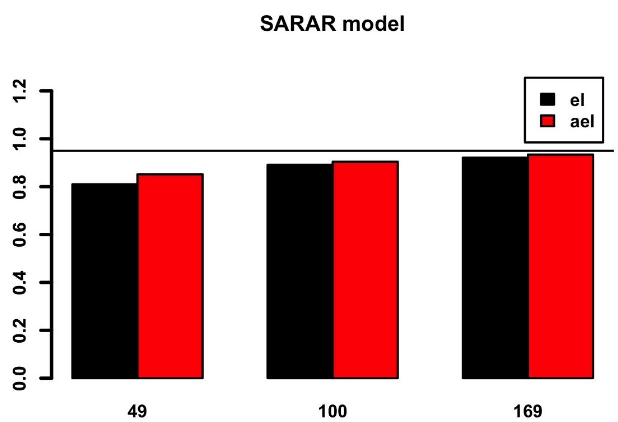

图 3: Wn 分别取 $grid_{49}$、$grid_{100}$、$grid_{169}$

参数同上，分别在样本为 49、100、169 个的情形下计算覆盖率。图 6 可看出，大样本情形下，AEL 与 EL 很接近，但 AEL 仍比 EL 略好一些。

结论：SARAR 模型下，无论大样本还是小样本，AEL 都比 EL 好。

表 3: Coverage probabilities of the EL and AEL confidence regions with ϵ_i ~N(0, 1)

(ρ_1,ρ_2)	Wn=Mn	EL	AEL	(ρ_1,ρ_2)	Wn=Mn	EL	AEL
(-0.85，-0.15)	$grid_9$	0.2670	1	(-0.85，0.15)	$grid_9$	0.2800	1
	$grid_{16}$	0.5335	0.8300		$grid_{16}$	0.5160	0.8385
	$grid_{25}$	0.6580	0.7925		$grid_{25}$	0.6910	0.7925
	$grid_{36}$	0.7975	0.8485		$grid_{36}$	0.7515	0.8105
	$grid_{49}$	0.8100	0.8515		$grid_{49}$	0.8400	0.8655
	$grid_{100}$	0.8915	0.9040		$grid_{100}$	0.899	0.9110
	$grid_{169}$	0.9210	0.9340		$grid_{169}$	0.925	0.9325
(0.85，-0.15)	$grid_9$	0.2470	1	(0.85，0.15)	$grid_9$	0.2440	1
	$grid_{16}$	0.5310	0.813		$grid_{16}$	0.4795	0.8120
	$grid_{25}$	0.6805	0.7895		$grid_{25}$	0.6810	0.7815
	$grid_{36}$	0.7710	0.8310		$grid_{36}$	0.7430	0.8075
	$grid_{49}$	0.8305	0.8530		$grid_{49}$	0.8130	0.8505
	$grid_{100}$	0.9070	0.9170		$grid_{100}$	0.9070	0.9205
	$grid_{169}$	0.9240	0.9310		$grid_{169}$	0.9270	0.9325

5 第五次汇报

来自独立的标准二维正态分布 50 个观测值,截面似然于真值 (μ,σ^2)=(0,1),可以画出 $g_i, i=1,2,...,n,n+1$ 值。

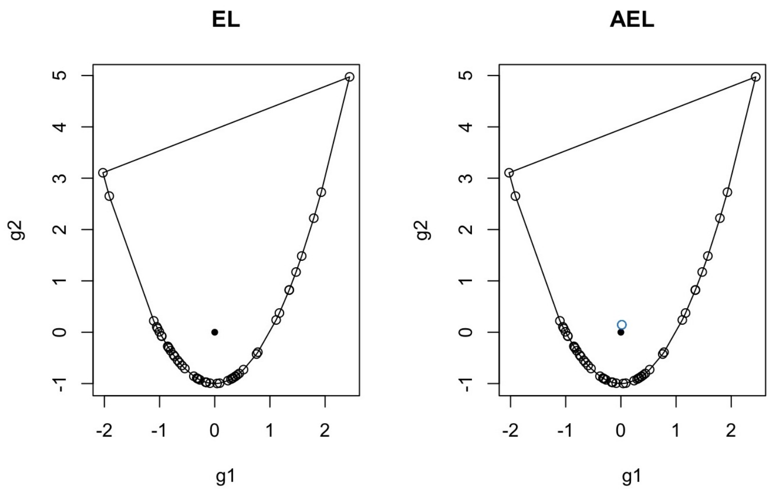

图 4: 真值：凸包（左）和调整凸包（右），黑点是 (0，0).

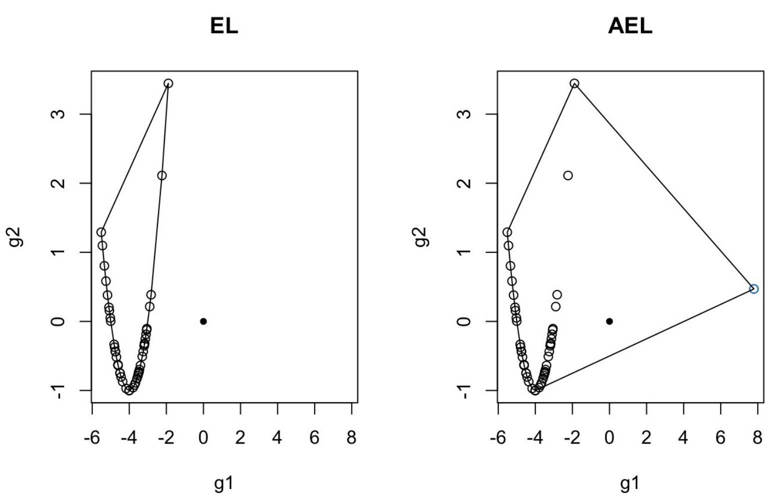

图 5: 非真值：凸包（左）和调整凸包（右），黑点是 (0，0).

截面似然于非真值 $(\mu,\ \sigma^2)$=(4,1)。

6 题外话

非常感谢老师的耐心指导！向老师致敬！

我真的差不多就要放弃问问题了，觉得自己好像没有必要追问，而且怕耽误后面同学问问题的时间。不过老师真的太强了，这种犄角旮旯的问题也能解决！老师的储备真的吓人。谢谢老师没有打击我，我问问题，舌头都捋不直，哎 ~ 师兄还说我在说啥，但是老师依旧认真在听我讲述，太感动了。

2021.11.11