

中国股市权证定价的带均值回归跳跃扩散模型

马宇超<sup>1</sup>, 陈敏<sup>1</sup>, 蔡宗武<sup>2,3</sup>, 张敏<sup>1</sup>

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100190; 2. 厦门大学 王亚南经济研究院, 厦门 361003;  
3. 美国北卡罗来纳大学 夏洛特分校统计系, 夏洛特)

**摘 要** 针对中国股价运动规律, 提出一个带均值回归项的跳跃扩散模型, 并以上证指数数据为例, 给出模型的参数估计方法. 结果表明该定价模型在单边市的情形下, 能够比传统 B-S 公式更好的体现中国股市动态资产价格的运动过程. 此外, 还给出了基于带均值回归项的跳跃扩散模型的各种类型权证 (美式、欧式和百慕大式) 的模拟定价方法, 并给出此模拟定价方法的实证结果. 结果表明, 该模型的对中国股市的拟合程度明显好于经典 Black-Scholes 期权定价公式.

**关键词** 权证定价; 带均值回归跳跃扩散模型

Mean-reverting jump-diffusion model of China stock warrants

MA Yu-chao<sup>1</sup>, CHEN Min<sup>1</sup>, CAI Zong-wu<sup>2,3</sup>, ZHANG Min<sup>1</sup>

(1. Academy of Mathematics and Systems Science, CAS, Beijing 100190, China;  
2. The Wang YaNan Institute for Studies in Econometrics, Xiamen University, Xiamen 361003, China;  
3. Department of Statistics, University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, USA)

**Abstract** This paper presents a mean-reverting jump-diffusion model, with respect to recently China stock market movements. We also provide the statistical method of calibrating parameters, and give a calculate example of Shanghai stock index. The result shows that this model can take bulls, bears and shock into account, giving a very good fit of China stock dynamic assets movements. In addition, this paper also discusses pricing warrants (including European-Style, American-Style, and Bermuda-Style) under the proposed mean-regression jump-diffusion model.

**Keywords** warrants pricing; mean-reverting jump-diffusion model

1 引言

在期权定价的发展过程中, Black-Scholes 模型是一个里程碑. 但是, 经典 Black-Scholes 模型要求股票价格和收益率满足常数均值和布朗运动的假定条件. 其中布朗运动的假定条件保证了股票价格处处连续. 但是, 常数均值和股价处处连续这两个假定条件在中国市场并不完全满足, 由此可能造成定价偏差, 这是不应直接将 Black-Scholes 公式用于中国证券市场股票权证定价的问题所在.

首先, 由于中国证券交易所没有做市商制度, 而是实行集合竞价定出开盘价, 从而开盘价往往和前一天收盘价有一定差距 (跳空或者低开), 即中国市场股价往往会每天有一个跳跃, 于是跳跃扩散模型就显得非常重要了.

第二, 从 2006 年以来, 中国市场开始进入单边牛市阶段, 从而单纯的均值模型不能够刻画中国股市的这一特征. 在单边牛市阶段, 如果忽视中国股市的成长性, 单纯的用均值来估计资产的收益率, 得到的权证价值往往会低于市场交易价格. 本文采用均值回归模型, 在单边市阶段, 均值可以随时间调整, 可以模拟股价单边上升 (下降) 过程, 从而能够较好地给出股票权证定的合理价格.

收稿日期: 2007-12-07  
资助项目: 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2007CB814902); 国家自然科学基金 (70221001, 70331001, 10628104)  
作者简介: 马宇超 (1983-) 男, 博士研究生, 研究方向: 金融工程, E-mail: mayuchao@amss.ac.cn.

Merton<sup>[1]</sup> 最早将跳跃引入期权定价模型, 假设跳跃服从泊松过程. Amin 在 1993 年提给出了离散情形下, 如何基于跳跃扩散模型进行期权定价<sup>[2]</sup>. Scott 给出了在随机利率和随机波动率情况下, 基于跳跃扩散模型的期权定价<sup>[3]</sup>. Kou 提出了一种新的跳跃扩散模型, 该模型的跳跃规模的对数服从双指数分布, 该模型能很好的解释期权的波动率微笑, 同时, 由于参数简单, 也可以得到期权定价的封闭解. 但是该模型的均值部分仍为常数<sup>[4]</sup>.

Cai<sup>[5]</sup> 研究如何为利率互换衍生品进行模拟定价, 提出带均值回归的跳跃扩散模型, 并得到了比较好的结果, 但是利率衍生品和权益类衍生品仍有区别, 进一步的研究证实, 跳跃扩散模型的前提假设条件也适用于中国股市 (第二节). 利率的均值通常为固定值, 而权益类的资产价格收益率均值往往随着经济环境而变化. 本文在此基础上, 对均值回归部分采用了时变均值回归 (Time-varying mean reverting) 的设定, 在模拟部分采用了分层法 (Stratification method 或者 State-space partitioning) 进行模拟. 如此, 通过统计模型估计标的资产的相关参数, 使用模拟方法定价, 可以充分发挥出统计估计和模拟定价的优势.

本文的内容安排如下: 在第二节给 Kou<sup>[4]</sup> 的双指数跳跃扩散模型和本文构造的带均值回归项的跳跃扩散模型的构建过程; 第三节给出模型的参数估计和模拟结果; 第四节给出基于跳跃扩散模型的权证定价公式和实证结果, 阐明了跳跃扩散均值回归模型定价结果好于传统 BS 模型; 第五节根据前面的结果进行归纳总结, 形成本文的结论.

## 2 带均值回复项的跳跃扩散模型在中国股市的应用

### 2.1 经典 Black-Scholes 模型和跳跃扩散模型无法描述当前中国股市行为

目前, 国内学术界对权证定价的研究和实务中的对权证估值主要基于经典 Black-Scholes 模型和跳跃扩散模型:

Black-Scholes 在 1973 年提出的权证定价模型中, 股票价格服从以下随机微分方程<sup>[6]</sup>:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB_t \quad (1)$$

其中,  $S(t)$  为股票在  $t$  时刻的价格,  $B_t$  是标准布朗运动.

Kou 提出的跳跃扩散的权证定价模型中, 股票价格服从以下随机微分方程<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dB_t + dJ_t \\ dJ_t = d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (v_i - 1)\right) \end{cases} \quad (2)$$

其中  $S(t)$  为股票在  $t$  时刻的价格;  $S(t-)$  为路径左连续点价格 (即为跳跃前价格);  $\mu$  为均值;  $B_t$  是标准布朗运动;  $J_t$  是纯跳跃过程. 其中,  $N(t)$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程,  $\{\log(V)_i\}$  是独立同分布的非负随机变量序列, 并且对称双指数分布. Kou<sup>[4]</sup> 解释了跳跃扩散模型在权证定价方面具有更大的优势, 由此定义的跳跃扩散模型可以解释资产收益率及其衍生资产价格的一些特征, 如“波动率微笑”等 (参见文献 [7-8]).

然而, 中国股市进入了牛市后, 用以上的定价模型作为权证定价模型在描述中国股票市场行为具有很大的缺陷. 我们采用 2005 年 10 月 17 日至 2007 年 9 月 17 日共 468 个交易日上证指数的日收盘数据, 从表 1 可以看出: 在较长的一段时期内, 股票指数在均值附件波动的均值现象并不显著, 而是呈现上涨的趋势. 其中, 包括 2 月 27 日, 5 月 30 日, 6 月 20 日和 9 月 11 日的巨幅震荡.

给出基于 Black-Scholes<sup>[6]</sup> 和 Kou<sup>[4]</sup> 模型的参数估计, 利用所估计的参数进行数值模拟, 其模拟的股价走势图见图 2-3. 其中 Black-Scholes 参数估计基于 GARCH 模型 (参见文献 [7]).

由图 2-3 明显看出: 实际市场走势 (上证指数) 和基于模型模拟的市场走势有很大不同, 可以推断其统计结构与模型有着根本的差别. 由此, 基于经典 Black-Scholes 模型和跳跃扩散模型的欧式权证定价公式和蒙特卡罗模拟的美式权证 (百慕大权证) 的定价方法, 都不适用于目前的中国股票市场. 这也可以部分解释, 目前权证市场, 几乎所有的权证交易价格都远远高于基于 Black-Scholes 公式得出无套利价格. 我们认为: 除了 T+0 交易和流动性过剩等原因外, 经典 Black-Scholes 模型不能描述中国股市走势也是一个重要原因.

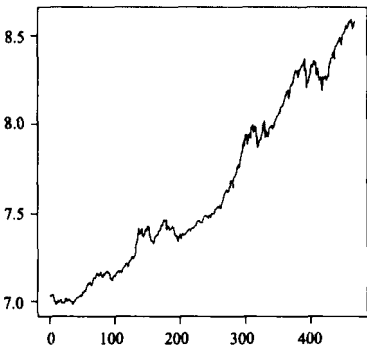


图 1 上证指数走势时间序列图

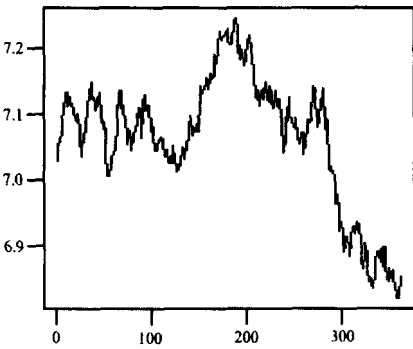


图 2 Black-Scholes 模型模拟图

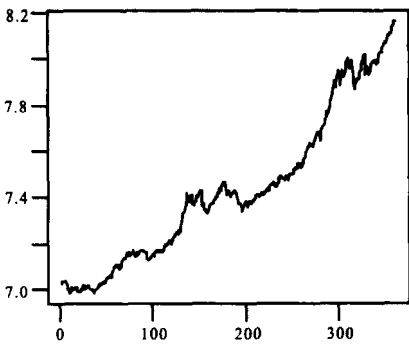


图 3 跳跃扩散模型模拟图

2.2 带均值回归的跳跃扩散模型

由上述模型分析, 我们认为:

1) 在用随机微分方程描述股价运动的框架下, 跳跃过程的设定是合理的, 跳跃扩散模型比 Black-Scholes 能够更好的适应中国市场. 从市场微观结构方面分析, 有以下原因: 第一, 由于中国的股票交易所并未采取做市商制度, 因此在这些交易所交易的股票价格更容易出现跳跃. 当出现闭市后利好 (利空) 消息冲击时, 第二天通过集合竞价定出的开盘价就会跳空 (低开), 这种价格上不连续点的出现, 可以通过跳跃过程来较好地解释. 同时跳跃有可能是正的也有可能是负的 (可以理解为利好消息或者利空消息). 第二, 根据众多对市场微观结构的研究<sup>[9]</sup>, 股市闭市期间的波动明显大于交易期间的波动, 可以理解为跳跃. 第三, 需要注意的是: 时间序列的计量时间点并非连续. 由于在周末或者节假日股市闭市, 故如图所示, 时间点的间隔并不是等间距的. 而将此价格的不连续性理解为跳跃则是合理的.

2) 漂移过程不能简单地设定为常数. 从长期来看, 股票价格通常会有在均值附近波动的特征. 但是, 如果考虑的很多权证的存续期仅为一年, 很多最近到期的权证在整个存续期内无法体现均值回复的特征. 如雅戈权证, 长电权证, 中化权证 (2007 年底到期). 但根据最近中国的股市的走势来分析, 短期看来, 仅仅设定均值为常数是不合理的. 从长期来说, 股价涨得过高, 超出理价格出现泡沫, 泡沫就会破裂, 股价会回落; 若是股价跌得过低, 远远低于公司本身的成长价值, 也就是股利折现价值, 该股票会被投资者买进, 从而拉升股价. 但是, 我们认为, 简单的常数不足以描述股价的均值回归过程. 在 2006 年以来的中国牛市行情中, 可以明显地观察到股价的上升趋势. 此时, 从整个中国经济大环境来看, 就面临着一个资产重估的过程, 所以长期均值也在逐渐上升, 而且其变化不可忽略. 所以, 我们假设  $\mu(X_t) = A(\mu - X_t)$ , 从长期来看,  $\mu$  是表示回归的长期均值,  $A$  是表示回归均值的速度. 从短期来看, 倘若中国经济处于上升期, 资产重估的预期使得市盈率大幅提高, 则可以认为均值也是一个上升过程, 可以把  $X_t$  理解为在  $t$  时刻, 对将来期望收益率均值的估计.  $\mu$  为不显著为 0 的常数, 是对  $X_t$  的调整, 此时  $A$  为对期望均值调整的速度.

综合上述分析, 我们提出一个带均值回归的跳跃扩散模型来模拟市场走势. 依照动态资产定价建模的常用方法, 我们针对股价的对数价格建模. 假定  $S_t$  是股票在  $t$  时刻的价格,  $X_t = \log(S_t)$  为该资产的对数价格, 假定  $X_t$  满足如下的随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma dB_t + dJ_t \\ X_0 = x_0 \\ \mu(X_t) = A(\bar{x} - X_t) \\ dJ_t = d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} V_i\right) \end{cases} \tag{3}$$

其中  $\mu(x) = A(\bar{x} - x)$ ,  $\bar{x}$  是表示回归的均值, 也即长期均值,  $A$  是表示回归均值的速度,  $B_t$  是标准布朗运动,  $J_t$  是纯跳跃过程.

关于纯跳跃过程  $J_t$ , 我们采用和 Kou 类似但有所不同的定义, 即:

$$dJ_t = d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} V_i\right) \tag{4}$$

其中,  $N(t)$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程,  $\{V_i\}$  是独立同分布的非负随机变量序列, 并且服从均值为 0, 方差为  $\sigma_J$  的正态分布<sup>1</sup>. 自然地, 我们需要定义纯跳跃  $J_t$  和布朗运动  $B_t$ 、资产价格  $X_t$  相互独立.

3 模型中波动参数的设定及其统计估计

在 Kou<sup>[4]</sup> 的模型中, 为了定价起见, 选择:

$$\sigma(X_t) = \sigma$$

(5)

我们将结合上证指数的实际数据和公式 (5) 来说明选择  $\sigma(X_t) = \sigma$  是合理的. 以下方法的思想来源于 Stanton<sup>[10]</sup> 和 Cai 和 Hong<sup>[11]</sup>. 其中 Cai 和 Hong 的文章阐述, 使用在连续时间金融中使用非参数估计的方法, 如何检验波动率为常数, 即  $H_0 : \sigma(X_t) = \sigma$ . 近似的来看, 当差分值落在  $3\sigma$  范围之内, 可以近似的认为波动率为常数.

对于任意小的  $\delta t$ , 随机微分方程 (3) 可以由以下的差分方程来近似:

$$\begin{aligned} X_{t+\delta t} - X_t &\approx \mu(X_t)\delta t + \sigma(X_t)(B_{t+\delta t} - B_t) + (J_{t+\delta t} - J_t) \\ &\approx \sigma(X_t)(B_{t+\delta t} - B_t) + (J_{t+\delta t} - J_t) \end{aligned}$$

(6)

由于  $\mu(X_t)\delta t$  是  $o(t)$  阶, 于是可以忽略. 为了近似考虑  $\sigma(X_t)$  的大小, 我们给出  $X_{t+1} - X_t$  对  $X_t$  的散点图, 由图 4 所示: 绝大多数  $X_{t+1} - X_t$  都落在 0 的  $3\sigma$  范围之内, 数据中  $\{X_n\}$  的标准差约为 0.158167, 而  $3\sigma$  约为 0.45, 已经超出图中纵轴上下界. 由此说明对于给定的  $X_t$ ,  $X_{t+1} - X_t$  都几乎相等, 而某些落在  $3\sigma$  之外的点, 可以由跳跃部分  $(J_{t+1} - J_t)$  来解释. 所以, 综上所述, 可以认为, 取  $\sigma(X_t) = \sigma$  是合理的.

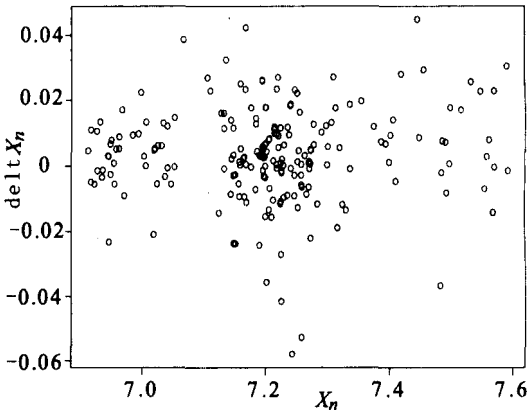


图 4 上证指数  $\Delta X_n$  对  $X_n$  图

4 模型参数的统计估计

4.1 模型参数的估计方法

假定我们观测到的价格数据是等间隔的 (由于截取日数据, 并且考虑价格跳跃因素, 故等间隔的假定是合理的), 于是得到观测时间序列  $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{N+1}}\}$ . 为了简化符号, 记  $X_i = X_{t_i} (1 \leq i \leq N + 1)$ , 等距离间隔记为  $\Delta = t_{n+1} - t_n$ , 则  $\{X_i\}_{i=1}^{N+1}$  满足 AR(1) 模型:

$$\begin{cases} X_{n+1} = a + bX_n + \varepsilon_{n+1} \\ a = \bar{x}(1 - e^{-A\Delta}) \\ b = e^{-A\Delta} \end{cases}$$

(7)

则由上文的 Ito 引理,  $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{N+1}$  为独立同分布随机变量序列, 分布如下:

$$\varepsilon_n \sim \sigma e^{-A\Delta} \int_0^\Delta e^{As} dB_s + e^{-A\Delta} \int_0^\Delta e^{As} dJ_s$$

(8)

针对模型 (8), 为了克服 “维数祸根”<sup>[12]</sup>, 给出以下的两步极大似然估计法.

- 1) 用最小二乘法估计  $A$  和  $\bar{x}$ , 从而得到残差序列  $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{N+1}$ .
- 2) 由公式 (8) 可以推导出  $\varepsilon_i$  的密度函数, 对残差序列  $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{N+1}$  进行极大似然估计, 从而得到参数  $A, \lambda, \sigma, \sigma_J$ .

1. 此处也可假定为服从 Kou<sup>[4]</sup> 和 Tsay 中提出的双指数分布, 同属指数分布族. 之所以假定为正态分布, 是考虑到第 4 部分模拟的需要: 因为正态分布的随机数产生已经比较完善, 而如何产生服从双指数分布的随机数目前尚没有完善的软件和函数. 另外, 双指数分布的密度函数也可以写成  $f_X(x) = \eta^{-1} e^{-|x-\kappa|/\eta}$ , 和正态分布的密度函数  $f_X(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$  相比, 可以明显看出, 在其后的处理上没有任何实质的区别.

根据公式 (8), 以下给出  $\varepsilon_i$  的密度函数

$$f_{\varepsilon_i}(x) = \frac{e^{-\lambda\Delta}}{\sqrt{(2A)^{-1}\sigma^2(1-e^{-2A\Delta})}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{(2A)^{-1}\sigma^2(1-e^{-2A\Delta})}}\right) +$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\Delta}\lambda^k}{k!} \int_0^{\Delta} \cdots \int_0^{\Delta} \frac{1}{\sqrt{(2A)^{-1}\sigma^2(1-e^{-2A\Delta}) + \sum_{l=1}^k \sigma_J^2 e^{-2A(\Delta-s_l)}}} \times$$
$$\phi\left(\frac{x}{\sqrt{(2A)^{-1}\sigma^2(1-e^{-2A\Delta}) + \sum_{l=1}^k \sigma_J^2 e^{-2A(\Delta-s_l)}}}\right) ds_1 \cdots ds_k \tag{9}$$

其中  $\phi(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2}$ , 为标准正态分布的分布函数.  
根据以上的两步骤估计方法, 采用极大似然法即可得到参数估计.

4.2 参数估计方法数值模拟比较

为了说明本文提出的参数极大似然估计方法是有效的, 我们采用数值模拟方法来说明. 生成模型为

$$\begin{cases} X_{n+1} = a + bX_n + \varepsilon_{n+1}, \\ a = \bar{x}(1 - e^{-A\Delta}), \\ b = e^{-A\Delta}, \\ \varepsilon_{n+1} = \sigma e_{n+1} + \sum_{n=1}^{N(n)} V(t). \end{cases}$$

得到的模拟结果如下: 模拟 100000 次, 得到结果如表 1.

表 1 参数估计的数值模拟结果					
	$\bar{x}$	$A$	$\sigma_J$	$\lambda$	$\sigma$
设定值	5	-0.1	0.02	0.03	0.015
估计值	4.93276	-0.12473	0.13274	0.00411	0.01418
均方误差	0.009956	0.013625	0.25621	0.13141	0.05497

可见, 极大似然结果较好的给出了模型参数的估计. 尤其在估计趋势方面, 非常好地确认了模型的主要统计结构.

4.3 实证结果及模拟

对 2005 年 10 月 17 日至 2007 年 9 月 17 日共 468 个交易日上证指数的日收盘数据, 按照模型 (7)-(9), 基于以上提出的两步估计方法的估计步骤, 我们得到模型的参数估计, 结果如表 2.

表 2 上证指数参数估计				
参数	估计值	标准差	t 值	Pr >  t
a	-0.009318	0.012675	-0.735	0.462
b	1.001652	0.001655	605.115	<2e-16

得到:  $\bar{x} = 5.640436, A = -0.001650637$ .  
以  $\bar{x} = 5.640436, A = -0.001650637$  为初始值, 用极大似然估计得到:  
 $\lambda = 0.330711881, \sigma = 0.2406208, \sigma_J = 0.008647140, A = 0.00034$ .

根据以上参数进行离散化模拟 (同样模拟 468 个交易日), 结果表明, 带均值回归的跳跃扩散模型的对近期中国股市的描述效果要远远好于经典模型 (图 5).

5 基于带均值回复的跳跃扩散模型的权证定价

5.1 模拟定价的理论推导

目前, 权证定价主要有以下两种方法: 1) 基于鞅和随机分析的工具, 以求出模型的解析解或近似数值解法. 2) 基于对参数进行统计估计后的蒙特卡罗模拟法. 前者的优点在于得到封闭解后, 应用较为直接, 然而对于不同模型的适应性较差. 相比之下, 蒙特卡罗模拟法可以为各种类型的权证进行定价, 但是要求模型能够比较好的模拟实际市场走势, 对模型建立和参数估计的精确度要求比较高. 基于以上的比较, 本文着重着眼于如何使用蒙特卡罗模拟方法为基于跳跃扩散模型的权证定价. 根据 Glasserman<sup>[13]</sup>, 为了使用模拟方法

对美式期权定价, 可以使用分层法 (Stratification method 或者 State-space partitioning). 该部分的思想来源于 Barraquand 和 Martineau<sup>[14]</sup>.

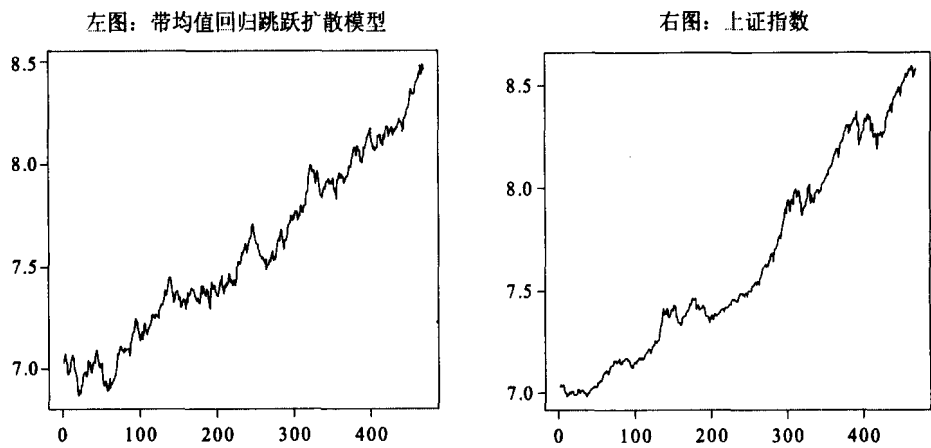


图 5 上证指数和带均值回归跳跃扩散模型模拟比较

美式期权定价的模拟方法, 通常都是将美式期权转变为具有有限行权机会的百慕大式期权. 假定该模拟的百慕大式期权仅仅可以在  $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$  时间点行使, 在  $t_i$  时间点, 资产的价格为  $X_{t_i}$  (为简化起见, 我们令  $X_{t_i} = X_i$ ). 则如果  $\{X_i\}$  是一个 Markov 链,  $\{X_i, 0 \leq i \leq m\}$  也是 Markov 链,  $X_0$  表示资产的初始价格. 此外, 令  $h_i$  表示期权在  $t_i$  时刻行权的收益函数. 令  $V_i(x)$  表示在  $t_i$  时刻, 期权仍然没有执行时, 给定  $X_i = x$  时, 期权的价值. 则我们最关心的期权价值是  $V_0(X_0)$ , 也就是期权的定价.

于是, 可以得到以下的动态规划方程:

$$\begin{cases} V_m(x) = h_m(x) \\ V_{i-1}(x) = \max\{h_{i-1}(x), E[D_{i-1,i}(X_i)V_i(X_i)|X_{i-1} = x]\} \end{cases} \tag{10}$$

其中  $D_{i-1,i}(X_i)$  是从  $t_{i-1}$  到  $t_i$  时刻的折现因子, 设  $r(u)$  为利率水平,  $D_{i-1,i}(X_i)$  可以写成:

$$D_{i-1,i}(X_i) = \exp\left(-\int_{t_{i-1}}^{t_i} r(u)du\right)$$

为了在动态规划方程中使用模拟方法, 本文采用 Barraquand 和 Martineau<sup>[14]</sup> 提出的分层法, 把状态空间离散化 (Discretize stat space). 根据每个行权日期  $t_i$ , 将状态空间  $t_i$  分割为  $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{ib_i}$ , 一共  $b_i$  个子集. 在最初时刻 0, 取:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ A_{01} &= \{X_0\} \end{aligned} \tag{11}$$

定义转移概率矩阵:

$$\begin{cases} p_{j,k}^i = P(X_{i+1} \in A_{i+1,k} | X_i \in A_{ij}) \\ j = 1, 2, \cdots, b_i \\ k = 1, 2, \cdots, b_{i+1} \\ i = 1, 2, \cdots, m-1 \end{cases} \tag{12}$$

同时, 可以定义:

$$\begin{cases} h_{ij} = E[h_i(X_i) | X_i \in A_{ij}] \\ j = 1, 2, \cdots, b_i \\ i = 1, 2, \cdots, m \end{cases} \tag{13}$$

于是, 得到递推公式:

$$V_{ij} = \max\left\{h_{ij}, \sum_{k=1}^{b_{i+1}} p_{j,k}^i V_{i+1,k}\right\} \tag{14}$$

取  $V_{mj} = h_{mj}$  作为初始值, 使用递推公式得到  $V_{01}$  作为  $V_0(X_0)$  的模拟估计值, 即权证的无套利价格.

同时, 由于该模拟方法的思想是基于对每个交易日可以行权的百慕大期权的模拟, 故该模拟方法也适用于百慕大式期权的定价. 欧式权证可以视为百慕大权证的特殊情况, 同样可以用该模拟方法定价. 该方法的适用性较为广泛.

5.2 跳跃扩散模型模拟定价的实证结果

本文对中化权证 (580011), 伊利权证 (580009), 马钢权证 (580010) 进行模拟定价.

实证数据的选择基于以下考虑: 1) 仅选择认购权证模拟定价, 因为认沽权证已经进入非理性炒作, 无论何种模型均无法解释动辄 200% 的收益率溢价. 2008 年之后, 沪深两地的交易所也对认沽权证的炒作进行了严查. 2) 选择权证和对应正股交易量都较大的权证, 由此, 可以使得流动性风险对价格的影响降至最小, 更容易比较模型定价的优劣.

我们用文本模拟到期日的交易结果, 并给出 B-S 公式得到的权证定价, 和相应时间段后的真实权证价格作为比较 (表 3).

表 3			
	中化权证 580011	伊利权证 580009	马钢权证 580010
$\bar{x}$	1.287924	3.336297	2.305771
$\lambda$	0.3634	0.2567	2.4324
$\sigma$	0.5956	0.4598	0.6326
$\sigma_J$	0.5789	0.6342	0.5143
$A$	0.006421574	0.01244715	0.009697873
$r = 7.01\% ^2$			
权证到期日	2007-12-17	2007-11-14	2008-11-28
行权价	6.52	7.97	3.33
3 月 30 日权证收盘价 $P_{close}$	8.105	17.618	3.628
模拟定价结果 $C_{J-D}$ (定价误差 $\beta$ ) <sup>3</sup>	<b>7.68(0.2321)</b>	<b>17.68(0.254537)</b>	<b>3.82(0.046616)</b>
B-S 公式价格 $C_{B-S}$	6.36	17.87	3.74
相对于 B-S 定价公式的套利空间 $\alpha$	<b>16.29%</b>	<b>1.08%</b>	<b>-2.21%</b>
5 月 29 日权证收盘价 $P_{close}$	11.988	27.441	5.679
模拟定价结果 $C_{J-D}$ (定价误差 $\beta$ )	<b>10.877(1.342821)</b>	<b>27.25(0.657476)</b>	<b>5.89(0.071544)</b>
B-S 公式价格 $C_{B-S}$	14.46	29.54	6.89
相对于 B-S 定价公式的套利空间 $\alpha$	<b>11.35%</b>	<b>6.95%</b>	<b>17.61%</b>
6 月 29 日权证收盘价 $P_{close}$	11.232	23.007	4.853
模拟定价结果 $C_{J-D}$ (定价误差 $\beta$ )	<b>10.66(0.424822)</b>	<b>23.34(0.548938)</b>	<b>4.68(0.047369)</b>
B-S 公式价格 $C_{B-S}$	7.85	23.39	3.94
相对于 B-S 定价公式的套利空间 $\alpha$	<b>25.02%</b>	<b>0.22%</b>	<b>15.25%</b>
B-S 波动率	0.6504	0.5505	0.6366

注: 1) 数据来源于 wind, 收盘价已复权; 2) 马钢权证为百慕大式权证.

以上总共 9 个模拟结果中, 仅马钢股份 3 月 30 日权证模拟值效果略差于 B-S 公式结果, 但与实际值也相差不大.

1) 为了更好的计量跳跃扩散权证模拟定价比 B-S 公式的定价优势, 我们定义

$$\alpha = \frac{|C_{B-S} - P_{close}| - |C_{J-D} - P_{close}|}{P_{close}},$$

则  $\alpha$  衡量了利用跳跃扩散权证模拟定价, 较之 B-S 公式定价的套利空间.

以上结果中, 权证模拟定价结果均比 B-S 公式有 9% 左右套利空间, 考虑到 6‰ 的权证手续费, 跳跃扩散权证模拟定价可以更好的指导权证交易行为.

2) 以上 9 个权证模拟定价结果的误差方差均为 0.03 左右. 以上的定价结果是每个定价过程模拟 10000 次, 更换随机数种子 100 次, 得到模拟定价序列  $\{C_{J-D,i}\}_{i=1}^{100}$ , 上表中列出的  $C_{J-D} = \sum_{i=1}^{100} C_{J-D,i}/100$ . 9 个序

2. 无风险利率 (考虑通货膨胀率)=2.61%+4.4%, 其中 2.61% 为一年期记帐式国债票面利率, 4.4% 为 2007 年 6 月份 CPI 指数同比增长率.

3.  $\{C_{J-D,i}\}_{i=1}^n$  为更换随机数种子后的模拟定价序列, 定价结果  $C_{J-D} = \sum_{i=1}^n C_{J-D,i}/n$ , 定价误差  $\beta$  定义为  $\sum_{i=1}^n (C_{J-D,i} - P_{close})^2/n$ .

列  $\{C_{J-D,i}\}_{i=1}^{100}$  的误差方差都在 0.03 左右, 表明模拟结果比较稳健. 由于是模拟定价, 在计算能力允许的情况下, 增大模拟次数, 可以充分减小误差方差 (参见 [13]: Chapter 4, Variance reduction techniques).

以上结果充分说明: 基于带均值回归跳跃扩散模型的权证定价更能拟合中国股市的走势, 得到更贴近市场的结果.

## 6 结论

本文的分析和实证结果表明, 带均值回归的跳跃扩散模型能够较好的拟合了中国股市的实际走势, 由此产生的定价方法也提供了一个完整的建模 - 估计 - 定价的解决方案. 在研究过程中, 我们还得到以下具有启发性的结论:

1) 本文首次用带均值回复的跳跃扩散模型模拟股票的价格走势, 发现该模型能够很好地体现目前阶段中国股市动态资产价格的运动过程.

2) 结合模拟研究结果, 我们发现, B-S 公式定价在牛市中易低估认购权证价格, 在熊市中易高估认购权证价格. 而带均值回归的跳跃扩散模型定价权证则很好地解决了这个问题. 通过我们定义  $\alpha$ , 衡量了利用跳跃扩散权证模拟定价, 比之 B-S 公式定价的套利空间, 表明基于带均值回归跳跃扩散模型的权证定价更能拟合中国股市的走势, 能够更好地指导交易行为.

3) 本文的结果是基于一定时间段的基础上, 基于不同的时间段的估计可能得到不同的参数, 从而影响权证类产品定价的结果. 如果能考虑时间的长短因素, 该估计方法将更加具有操作性. 同时, 如何将时变因素纳入参数估计的框架范围, 将是我们继续研究的一个课题.

## 参考文献

- [1] Merton R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3: 125-144.
- [2] Amin K I. Jump diffusion option valuation in discrete time[J]. Journal of Finance, 1993, 48: 1833-1863.
- [3] Louis O S. Pricing stock options in a jump diffusion model with stochastic volatility and interest rates: Applications of fourier inversion methods[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(4): 413-426.
- [4] Kou. A jump diffusion model for option pricing[J]. Management Science, 2002, 48(8): 1086-1101.
- [5] Cai Z W. Financial Econometrics or Financial Time Series[M]. Working Book, Chapter 1: A motivation example, 2003.
- [6] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 637-654.
- [7] Tsay R S. Analysis of Financial Time Series[M]. 2002.
- [8] Duffie. Dynamic Asset Pricing Theory[M]. Princeton University Press, 1992.
- [9] Duan J C. The GARCH option pricing model[J]. Mathematical Finance, 1995, 5: 13-32.
- [10] Stanton R. A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk[J]. Journal of Finance, 1997, 52: 1973-2002.
- [11] Cai Z, Hong Y. Nonparametric methods in continuous-time finance: A selective review[J]. Recent Advances and Trends in Nonparametric Statistics, 2003: 283-302.
- [12] Fan J Q, Yao Q W. Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods[M]. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [13] Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering[M]. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [14] Barraquand J, Martineau D. Numerical valuation of high dimensional multivariate American securities[J]. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1995.