

双足人形机器人论文调研与复现

汤凯

2021 年 9 月 8 日

目录

1 基于 ZMP 的双足（人形）机器人行走轨迹生成	2
1.1 基本的 ZMP 原理	2
1.2 支撑多边形 (support polygon) 与 VHP (Virtual Horizontal Plane) 的定义	2
2 基于 DCM 的双足（人形）机器人行走轨迹生成与控制	3
2.1 DCM 基本动力学方程的推导与几种特征点的定义	3
2.1.1 DCM (运动发散量) 的定义	3
2.1.2 eCMP 的定义	3
2.1.3 VRP 的定义	4
2.2 几种不同支撑类型下的 DCM、CoM 轨迹生成	5
2.2.1 单点支撑 SS (Single Support) 情形	5
2.2.2 连续双点支撑 DS (Double Support) 情形	7
2.2.3 连续足跟-足尖运动支撑切换 HT (Heel to Toe) 情形	8
2.3 DCM 运动轨迹跟随控制	10
2.4 DCM 运动控制鲁棒性分析	11
2.4.1 对 CoM 估计误差的鲁棒性分析	11
2.4.2 未知常外力扰动时的鲁棒性分析	12
2.4.3 未知力迟滞情况的鲁棒性分析	12
3 双足（人形）机器人接触动力学模型 (Contact Dynamics) 与相关约束	13
3.1 关于接触的基础理论与模型	13
3.1.1 接触模式 (Contact Modes)	13
3.1.2 接触稳定性 (Contact Stability)	14
4 双足（人形）机器人脚步规划 (Foot Step Planning)	14

A 人形机器人腿部运动学	14
A.1 腿部正运动学	14
A.2 腿部逆运动学	14

1 基于 ZMP 的双足（人形）机器人行走轨迹生成

1.1 基本的 ZMP 原理

ZMP(zero moment point) 基于倒立摆模型提出，原理是通过让机器人与外界的作用力所在作用线通过虚拟的 ZMP 点 \mathbf{x}_{ZMP} 与机器人质心 \mathbf{x}_G ，该作用力不对机器人产生力矩，同时该作用力与 $\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_{ZMP}$ 成正比 [1]，原理如图1.1所示，其动力学方程为式(1.1)。

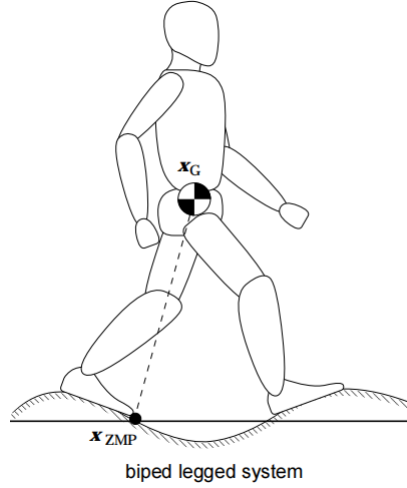


图 1.1: ZMP 原理示意图

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_G = -m\mathbf{g} + \mathbf{f} \\ \mathbf{f} = k(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_{ZMP}) \end{cases} \quad (1.1)$$

在 $\ddot{\mathbf{x}}_G$ 各个分量中限制分量 \ddot{z}_G （可通过控制方法使其收敛到 0）则其余分量可表示为式(1.2)，实际 ZMP 位置的控制则可通过设定一个参考的 ZMP 位置值代入该式进行控制。

$$\ddot{\mathbf{x}}_{G,xy} = \frac{\ddot{z}_G + g}{z_G - z_{ZMP}} (\mathbf{x}_{G,xy} - \mathbf{x}_{ZMP,xy}) \quad (1.2)$$

1.2 支撑多边形（support polygon）与 VHP（Virtual Horizontal Plane）的定义

支撑多边形可用于检测 ZMP 的合理位置区间，构建 VHP 通过 ZMP 点（即 $z_{VHP} = z_{ZMP}$ ），机器人与环境的接触点 $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_N$ 与 \mathbf{x}_G 的连线交 VHP 于点 $\mathbf{P}_1' \sim \mathbf{P}_N'$ 以这些点作凸包（convex hull）得到 VHP 面上撑多边形，如图1.2所示。

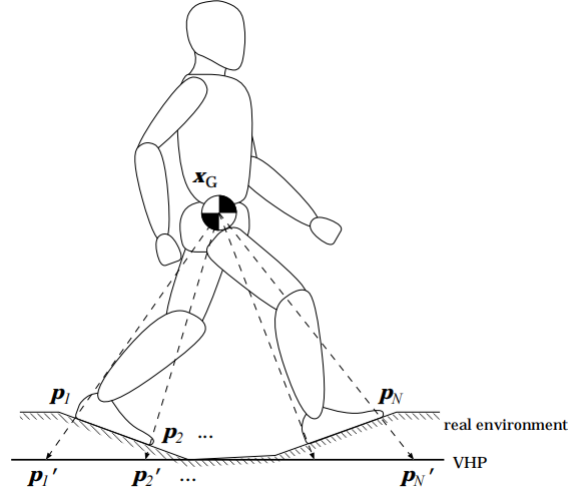


图 1.2: 支撑多边形与 VHP 示意图

2 基于 DCM 的双足（人形）机器人行走轨迹生成与控制

该章主要根据文献 [2] 的内容进行重新整理和复现，下面介绍相关内容。

2.1 DCM 基本动力学方程的推导与几种特征点的定义

2.1.1 DCM（运动发散量）的定义

DCM (Divergent Component of Motion), 将其定义为相对机器人质心的偏移点，其定义式如下：

$$\xi = x + b\dot{x} \quad (2.1)$$

式(2.1)变形后可得到质心的动力学方程：

$$\dot{x} = -\frac{1}{b}(x - \xi) \quad (2.2)$$

其中，当 $b > 0$ 时可得到稳定的一阶动力学方程。

将式(2.1)求一阶导并代入 $m\ddot{x} = F$ 可得 DCM 动力学方程：

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{b}x + \frac{1}{b}\xi + \frac{b}{m}F \quad (2.3)$$

2.1.2 eCMP 的定义

eCMP (Enhanced Centroidal Moment Pivot Point), 与式(1.1)中的外力定义形式类似，此处将接触作用外力与 eCMP 定义联系，其关系定义如下，其中 $s > 0$ 且为常数：

$$F_{ext} = s(x - r_{ecmp}) \quad (2.4)$$

再将上式加上重力所求得合力的代入式(2.3)可得下式(2.5a), 再选择常数 $s = \frac{m}{b^2}$ 可化简得下式(2.5b):

$$\dot{\xi} = \left(\frac{bs}{m} - \frac{1}{b} \right) \mathbf{x} + \frac{1}{b} \xi - \frac{bs}{m} \mathbf{r}_{ecmp} + b\mathbf{g} \quad (2.5a)$$

$$\dot{\xi} = \frac{1}{b} \xi - \frac{1}{b} \mathbf{r}_{ecmp} + b\mathbf{g} \quad (2.5b)$$

2.1.3 VRP 的定义

引入 VRP (Virtual Repellent Point) 来进一步化简上式(2.5b), 定义 VRP 如下:

$$\mathbf{r}_{vrp} = \mathbf{r}_{ecmp} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & b^2 g \end{bmatrix}^T = \mathbf{r}_{ecmp} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta z_{vrp} \end{bmatrix}^T \quad (2.6)$$

将其代入式(2.5b)可得最终形式的 DCM 动力学方程:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{b} (\xi - \mathbf{r}_{vrp}) = \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} (\xi - \mathbf{r}_{vrp}) \quad (2.7)$$

其中 $b = \sqrt{\frac{\Delta z_{vrp}}{g}}$ 将其代入式(2.4)则可得所有合外力:

$$\mathbf{F} = \frac{m}{b^2} (\mathbf{x} - \mathbf{r}_{vrp}) \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{F} = \frac{mg}{\Delta z_{vrp}} (\mathbf{x} - \mathbf{r}_{vrp}) \quad (2.8b)$$

最后的质心 CoM 动力学方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} (\mathbf{x} - \xi) \quad (2.9)$$

所有特征点的示意图如下所示:

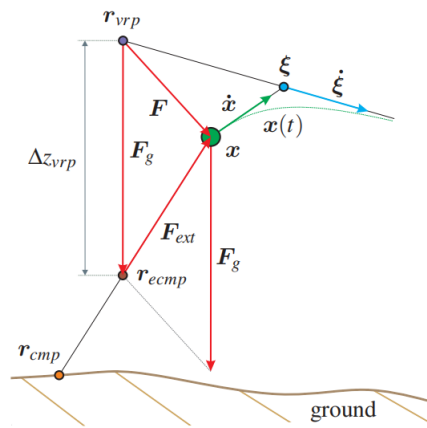


图 2.1: 所定义特征点的示意图

2.2 几种不同支撑类型下的 DCM、CoM 轨迹生成

2.2.1 单点支撑 SS (Single Support) 情形

假设机器人的足为单点或支撑点位于脚掌中心，机器人角动量变化为 0，且随着双脚切换时支点的移动是瞬时的（没有双脚同时受力情形），则此时令脚支撑点 $\mathbf{r}_{f,i}$ 、压力中心 \mathbf{r}_{cop} (Center of Pressure)、中心动量支点 \mathbf{r}_{cmp} (Centroidal Moment Pivot Point) 以及 \mathbf{r}_{ecmp} 重合，这几种点的作用示意图如下图2.2a所示，重合情况见下图2.2b，该方法使得 CoP 为常量，接触外力总通过质心。

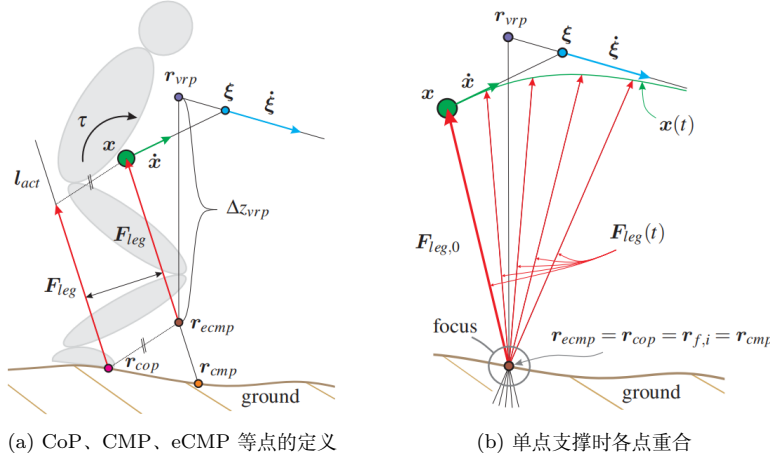


图 2.2: 各点定义及单点支撑的示意图

首先设定 N 个落脚点 $\mathbf{r}_{f,i}$ ，限定单点支撑时 VRP 的位置为该支撑点竖直偏移 Δz_{vrp} （因为此时 CoP 与 eCMP 重合）即 $z_{vrp,d,i} = z_{f,i} + \Delta z_{vrp}$ ，由此 VRP 的位置在第 i 个支撑点作用时为常量，求解方程2.7可得：

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{r}_{vrp} + e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}}t} (\boldsymbol{\xi}(0) - \mathbf{r}_{vrp}) \quad (2.10)$$

设定每一段的单个支撑点作用时间为 $t_{step,i}$ ，则上述 $t \in [0, t_{step,i}]$ 。设定最后机器人在第 N 个支撑点停下，下标 d 表示目标值 (desired)， eos 表示 end of support，此时 $\boldsymbol{\xi}_{d,eos,N-1} = \mathbf{r}_{vrp,d,N}$ ，可以通过向后迭代推算出每一段支撑运动的 DCM 起始值 $\boldsymbol{\xi}_{d,ini,N-1}$ 与终止值 $\boldsymbol{\xi}_{d,eos,N-1}$ ，根据式2.10建立迭代式如下：

$$\boldsymbol{\xi}_{d,eos,i-1} = \boldsymbol{\xi}_{d,ini,i} = \mathbf{r}_{vrp,d,i} + e^{-\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}}t_{step,i}} (\boldsymbol{\xi}_{d,eos,i} - \mathbf{r}_{vrp,d,i}) \quad (2.11)$$

再将迭代结果代入式2.10并求导可得到 DCM 在每段的动力学解，即得到 DCM 轨迹：

$$\boldsymbol{\xi}_{d,i}(t) = \mathbf{r}_{vrp,d,i} + e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}}(t-t_{step,i})} (\boldsymbol{\xi}_{d,eos,i} - \mathbf{r}_{vrp,d,i}) \quad (2.12a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{d,i}(t) = \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}}(t-t_{step,i})} (\boldsymbol{\xi}_{d,eos,i} - \mathbf{r}_{vrp,d,i}) \quad (2.12b)$$

文献 [2] 中的示意图如下图2.3所示，规定好开始时 CoM 的位置 \mathbf{x}_0 以及 VRP 偏移 eCMP 的高度 Δz_{vrp} 便可完成规划，可取 Δz_{vrp} 为机器人单（双）腿直立站立静止时 CoM 与 eCMP 或支撑点的相对高度，

使以上模型成立，到终点时 CoM 速度为零，DCM、CoM 与 VRP 重合（DCM 先与 VRP 重合然后 COM 跟随一段时间才与 DCM 重合）。由于初始的 DCM 位置由脚步点规划后的反向迭代结果确定，因此初始点 x_0 的选择决定了初始 CoM 速度 \dot{x}_0 。

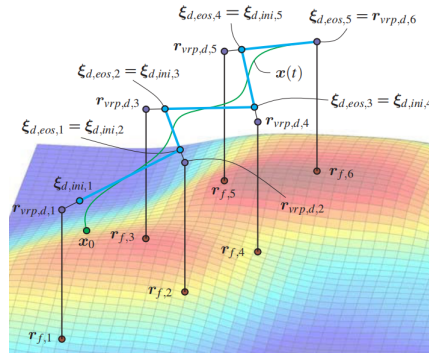


图 2.3: 单点支撑 DCM 轨迹规划示意图

利用 python 编写相关程序，预先给定 6 个落脚点，每段步利用 4 阶龙格库塔方法求解 CoM 的轨迹，当 DCM 到达终点之后一段的 CoM 轨迹则直接用修改 Euler 格式的单步迭代法求解，具体结果如下图 2.4 所示，显示了各个点、每步的时间以及总时间等信息。

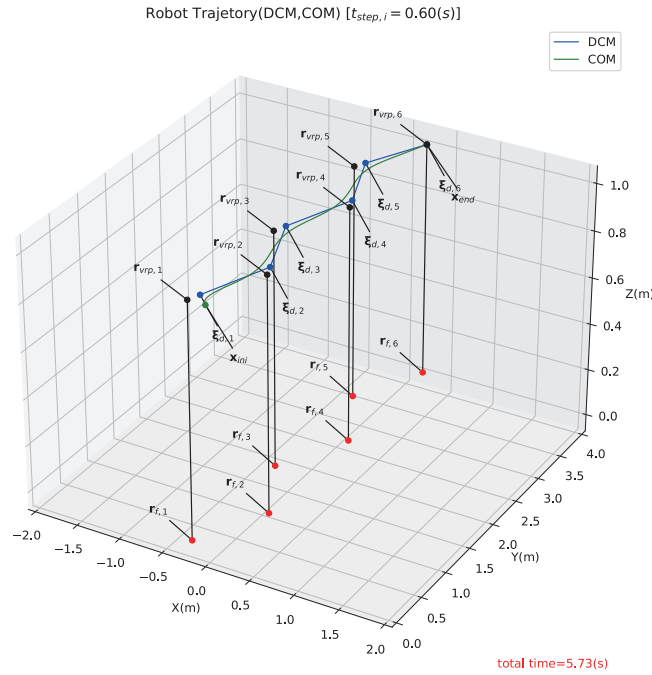


图 2.4: 复现单点支撑 DCM 轨迹规划图

2.2.2 连续双点支撑 DS (Double Support) 情形

由式(2.7)可知 \mathbf{r}_{vrp} 可由 DCM 表示:

$$\mathbf{r}_{vrp} = \boldsymbol{\xi} - \sqrt{\frac{\Delta z_{vrp}}{g}} \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.13)$$

若 DCM 轨迹连续则 VRP 轨迹连续, 并可进一步得到连续的外力, 因此可在 DCM 的折点附近定义两个点用于插值, 且 DCM 处于此两点之间时机器人处于双足支撑状态, 即两个单点支撑状态间的均匀过渡, 支点 CoP、eCMP 随 VRP 的连续运动也连续变化。单步 DCM 折点附近双足支撑的起始点定义为 $\boldsymbol{\xi}_{iniDS,i}$, 终止点定义为 $\boldsymbol{\xi}_{eoDS,i}$, 单步时起点到折点的时间为 $\Delta t_{DS,ini}$, 起点到折点的时间为 $\Delta t_{DS,end}$ 其过程示意图为图2.5, 且两者及其对应速度可由如下公式计算:

$$\boldsymbol{\xi}_{iniDS,i} = \mathbf{r}_{vrp,i-1} + e^{-\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \Delta t_{DS,ini}} (\boldsymbol{\xi}_{ini,i} - \mathbf{r}_{vrp,i-1}) \quad (2.14a)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{eoDS,i} = \mathbf{r}_{vrp,i} + e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \Delta t_{DS,end}} (\boldsymbol{\xi}_{ini,i} - \mathbf{r}_{vrp,i}) \quad (2.14b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{iniDS,i} = \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} e^{-\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \Delta t_{DS,ini}} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_{ini,i} - \dot{\mathbf{r}}_{vrp,i-1}) \quad (2.14c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{eoDS,i} = \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \Delta t_{DS,end}} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_{ini,i} - \dot{\mathbf{r}}_{vrp,i}) \quad (2.14d)$$

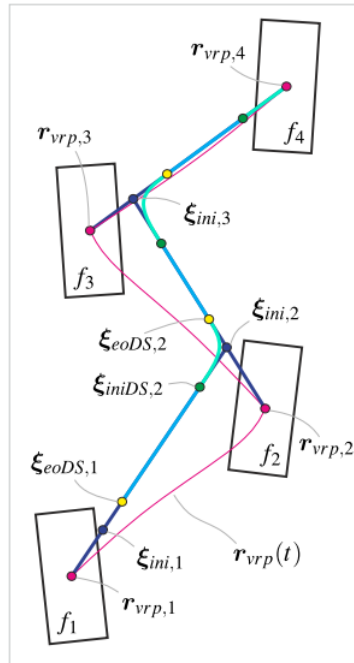


图 2.5: 双点支撑 DCM 轨迹规划示意图

双足支撑的起点 $\boldsymbol{\xi}_{iniDS,i}$ 与终止点 $\boldsymbol{\xi}_{eoDS,i}$ 之间的轨迹点可用三次多项式插值产生, 给定位置与速

度的 4 个边界条件，按以下公式计算：

$$P = \begin{bmatrix} 2/T_s^3 & 1/T_s^2 & -2/T_s^3 & 1/T_s^2 \\ -3/T_s^2 & -2/T_s & 3/T_s^2 & -1/T_s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{ini}^T \\ \dot{\xi}_{ini}^T \\ \xi_{end}^T \\ \dot{\xi}_{end}^T \end{bmatrix} \quad (2.15a)$$

$$\begin{bmatrix} \xi^T(t) \\ \dot{\xi}^T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} P \quad (2.15b)$$

设定好相关参数后，用 Python 编写双足支撑下的 CoM、DCM 规划程序，自定义六个落脚点以及初始 CoM 位置并进行规划，规划结果与相关参数如下图 2.6 所示，其中 $\Delta t_{DS,ini,i} = \alpha \Delta t_{DS,i}$ ， $\Delta t_{DS,end,i} = (1 - \alpha) \Delta t_{DS,i}$ 。

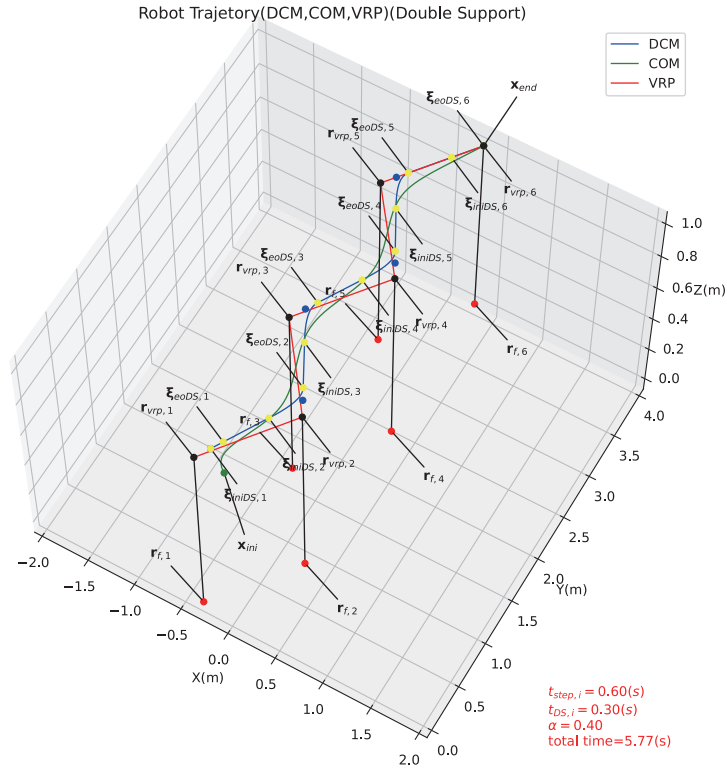


图 2.6: 复现双点支撑 DCM 轨迹规划图

2.2.3 连续足跟-足尖运动支撑切换 HT (Heel to Toe) 情形

上一小节中讨论的双足支撑机器人的脚固定在地面，为使机器人在双足支撑时的运动尽可能避开奇异构型并与人更为类似，现考虑加入足跟到足尖与足尖到足跟的连续支撑点切换。该动作可扩大机器

人单步运动的行程与范围，但在足尖与脚跟切换时其支撑多边形范围会变小。采用该动作时的轨迹示意图如下图2.7所示，将单步时间 $t_{step,i}$ 拆分为足跟到足尖支撑时间 $\Delta t_{HT} = \alpha_{HT} t_{step,i}$ 与足尖到足跟支撑时间 $\Delta t_{TH} = (1 - \alpha_{HT}) t_{step,i}$ 并可采用 2.2.1 单点支撑后向递推的方法算出各个 DCM 节点 $\xi_{ini,HT,i}$ 与 $\xi_{ini,TH,i}$ ，在每个脚跟 DCM 节点 $\xi_{ini,HT,i}$ 附近用上一小节式(2.14a)到(2.14d)的方法计算出双足支撑的 DCM 起始点与、终止点及其速度。

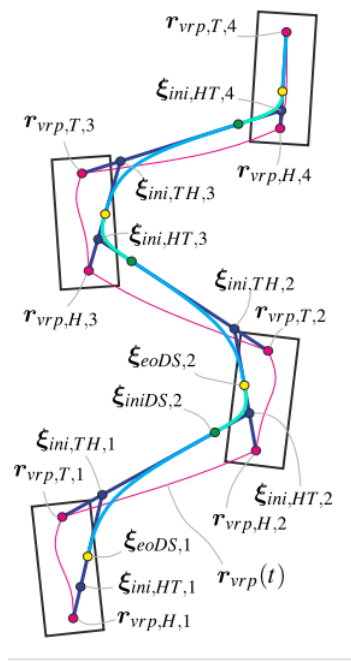


图 2.7: 足跟-足尖支撑 DCM 轨迹规划示意图

对该方法的复现结果与相关参数如下图2.8所示，其中开始时 $\xi_{ini,HT,1}$ 到 $\xi_{eoDS,1}$ 的 DCM 轨迹与末尾 $\xi_{eoDS,end}$ 到 $r_{vrp,end}$ 的 DCM 轨迹由式(2.15a)和(2.15b)计算得到，并利用式(2.13)推导出 VRP 轨迹，但最后一段利用插值所计算出的 VRP 轨迹超出了所在足跟和足尖的范围。

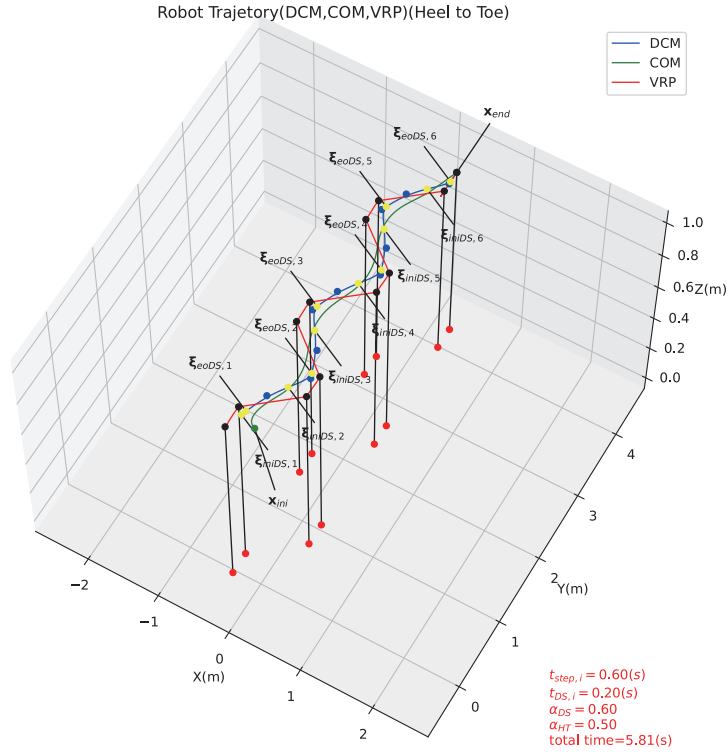


图 2.8: 复现足跟-足尖支撑 DCM 轨迹规划图

2.3 DCM 运动轨迹跟随控制

由于 DCM 动力学方程的解发散，需要对上述 DCM 规划的运动轨迹做跟随控制，引入一阶闭环动力学控制对 DCM 轨迹做位置跟随：

$$\underbrace{\dot{\xi} - \dot{\xi}_d}_{\dot{e}_\xi} = -k_\xi \underbrace{(\xi - \xi_d)}_{e_\xi} \quad (2.16)$$

当 $k_\xi > 0$ 时误差收敛到 0，DCM 速度、位置均收敛，由式(2.13)可知此时 VRP 位置也收敛，但常 VRP 位置受扰动发生了改变（之前在假设机器人进入单足支撑状态时 VRP 为固定常量），VRP 在闭环动力学下的方程如下式(2.17a)所示，代入式 $\dot{\xi}_d = \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} (\xi_d - r_{vrp,d,1})$ 可得目标 VRP 位置为常量时实际偏移后的 VRP 位置如下式(2.17b)所示。

$$r_{vrp} = \xi + k_\xi \sqrt{\frac{\Delta z_{vrp}}{g}} (\xi - \xi_d) - \sqrt{\frac{\Delta z_{vrp}}{g}} \dot{\xi}_d \quad (2.17a)$$

$$r_{vrp} = r_{vrp,d,1} + \left(1 + k_\xi \sqrt{\frac{\Delta z_{vrp}}{g}} \right) (\xi - \xi_d) \quad (2.17b)$$

CoM 动力学方程的收敛性没有变化，但其方程需代入式(2.16)进行修改，与 DCM 闭环动力学方

程一起写成矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \mathbf{I} & \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \mathbf{I} \\ 0 & -k_{\xi} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{\xi} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_d \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_d \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

其中系统矩阵的特征值在 $k_{\xi} > 0$ 时均大于 0，此时系统稳定，CoM、DCM 均可收敛到理想值。机器人所受合外力表达式为：

$$\mathbf{F}_c = \frac{m}{b^2} \left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} - k_{\xi} b (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d) + b \dot{\boldsymbol{\xi}}_d \right) \quad (2.19)$$

2.4 DCM 运动控制鲁棒性分析

根据上一小节的 DCM 跟随控制分别对 CoM 估计误差、常外力扰动、未知力迟滞、质量估计误差几个情况做鲁棒性分析。现假设传感器和滤波器估计的实际 CoM 位置表示为 $\hat{\mathbf{x}}$ ，由估计的 CoM 位置与速度计算出的 DCM 位置为 $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ ，测量估计质量为 \hat{m} ，由于机器人整体的运动需通过外界与机器人的接触力来驱动，据式(2.19)由观测估计值计算得到的合外力为：

$$\mathbf{F}_c = \frac{\hat{m}}{b^2} \left(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\boldsymbol{\xi}} - k_{\xi} b (\hat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}_d) + b \dot{\boldsymbol{\xi}}_d \right) \quad (2.20)$$

2.4.1 对 CoM 估计误差的鲁棒性分析

设估计偏差为 $\Delta \mathbf{x}$ ，则 CoM 位置与速度估计值如下：

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \quad (2.21a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} + \Delta \dot{\mathbf{x}} \quad (2.21b)$$

将上式代入 DCM 定义式(2.1)可得到估计的 DCM 状态：

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} + \Delta \mathbf{x} + b \Delta \dot{\mathbf{x}} \quad (2.22)$$

由式(2.20)计算的合外力代入 DCM 动力学方程式(2.3)，再结合 CoM 动力学方程可得如下闭环动力学方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} \mathbf{I} & \frac{1}{b} \mathbf{I} \\ 0 & -k_{\xi} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{\xi} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_d \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_{\xi} \mathbf{I} & -(k_{\xi} b + 1) \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}} \\ \Delta \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

若 CoM 估计误差 $\Delta \mathbf{x}$ 为常数，则 DCM 误差动力学方程及其解变为如下：

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -k_{\xi} \boldsymbol{\xi} + k_{\xi} \boldsymbol{\xi}_d + \dot{\boldsymbol{\xi}}_d - k_{\xi} \Delta \mathbf{x}, (\Delta \dot{\mathbf{x}} = 0) \quad (2.24a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_d = -k_{\xi} (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d) - k_{\xi} \Delta \mathbf{x} \quad (2.24b)$$

$$\mathbf{e}_{\xi}(t) = -\Delta \mathbf{x} + e^{-k_{\xi} t} (\mathbf{e}_{\xi,0} + \Delta \mathbf{x}) \quad (2.24c)$$

因此此时存在静态误差 $\mathbf{e}_{\xi,stat} = -\Delta \mathbf{x}$ 。

2.4.2 未知常外力扰动时的鲁棒性分析

假设机器人受到未知常外力 $\Delta \mathbf{F}$ ，机器人实际所受合外力为 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \Delta \mathbf{F}$ 。将其代入式(2.19)并与式(2.3)联立可得以下闭环动力学方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b}\mathbf{I} & \frac{1}{b}\mathbf{I} \\ 0 & -k_\xi \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_\xi \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_d \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b}{m}\mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{F} \quad (2.25)$$

动力学方程在 $k_\xi > 0$ 及 $b > 0$ 时稳定，与上一小节同理，可得到 DCM 误差：

$$\mathbf{e}_\xi(t) = \frac{b\Delta \mathbf{F}}{mk_\xi} + e^{-k_\xi t} \left(\mathbf{e}_{\xi,0} - \frac{b\Delta \mathbf{F}}{mk_\xi} \right) \quad (2.26)$$

静态误差 $\mathbf{e}_{\xi,stat} = \frac{b\Delta \mathbf{F}}{mk_\xi}$ ，类似于线弹性效应，其中刚度为 $\frac{mk_\xi}{b}$ 。

2.4.3 未知力迟滞情况的鲁棒性分析

对于实际的机器人硬件，无法瞬时产生所需的力，作用力会有所延迟，此处将该延迟效应表示如下：

$$\dot{\mathbf{F}} = -k_f(\mathbf{F} - \mathbf{F}_c) \quad (2.27)$$

其中 \mathbf{F} 为实际作用力， \mathbf{F}_c 为所需的目标作用力， $k_f > 0$ 。

由式(2.27)、式(2.3)与式(2.19)可得出闭环动力学方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\mathbf{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b}\mathbf{I} & \frac{1}{b}\mathbf{I} & 0 \\ -\frac{1}{b}\mathbf{I} & \frac{1}{b}\mathbf{I} & \frac{b}{m}\mathbf{I} \\ \frac{mk_f}{b^2}\mathbf{I} & -\frac{mk_f(1+k_\xi b)}{b^2}\mathbf{I} & -k_f\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{mk_f k_\xi}{b}\mathbf{I} & \frac{mk_f}{b}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_d \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_d \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

可利用 MATLAB 计算该动力学矩阵的特征值多项式，代码如下：

```
1 syms b k_xi m positive real
2 syms k_f real
3 syms lambda
4 syms I matrix real
5
6 dynm = [-1/b*I          1/b*I          0*I;
7         -1/b*I          1/b*I          b/m*I;
8         m*k_f/(b^2)*I   -m*k_f*(1+k_xi*b)/(b^2)*I   -k_f*I] %dynamics matrix
9
10 eigpoly = charpoly(dynm,lambda); %calculate characteristic polynomial
11 eigpoly = subs(eigpoly, I, 1)
12 root = solve(eigpoly, lambda, 'MaxDegree',3) %calculate the eigenvalues in explict form
```

计算结果如下：

$$\text{eigpoly} = k_f \lambda^2 + \lambda^3 + \frac{\lambda(k_f + b k_f k_\xi)}{b} + \frac{k_f k_\xi}{b} \quad (2.29a)$$

$$\text{root} = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{k_f}{3} \\ \frac{\sigma_2}{2\sigma_1} - \frac{k_f}{3} - \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sqrt{3}(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \sigma_1)i}{2} \\ \frac{\sigma_2}{2\sigma_1} - \frac{k_f}{3} - \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sqrt{3}(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \sigma_1)i}{2} \end{pmatrix}$$

where

(2.29b)

$$\sigma_1 = \left(\sqrt{\sigma_2^3 + \left(\frac{k_f^3}{27} - \frac{k_f(k_f+b k_f k_\xi)}{6b} + \frac{k_f k_\xi}{2b} \right)^2} - \frac{k_f^3}{27} + \frac{k_f(k_f+b k_f k_\xi)}{6b} - \frac{k_f k_\xi}{2b} \right)^{1/3}$$

$$\sigma_2 = \frac{k_f+b k_f k_\xi}{3b} - \frac{k_f^2}{9}$$

3 双足（人形）机器人接触动力学模型（Contact Dynamics）与相关约束

本章将对机器人与外界物体刚体接触的物理模型进行讨论总结，很大一部分内容参考[Stephane Caron 的博客](#) 及他所做的研究 [3, 4, 5]，这些内容对于增强优化机器人动力学规划时的可行性与稳定性至关重要。

3.1 关于接触的基础理论与模型

3.1.1 接触模式（Contact Modes）

根据 Balkcom 和 Trinkle[6]，不同的接触模式可以用其所约束的自由度数量定义。常见的几种接触模式如下（设约束自由度为 DOC）：

- (1) 断开：无接触（DOC=0）；
- (2) 滑动：与接触平面相对运动，伴随绕平面法向量的转动（DOC=3），无转动（DOC=4）；
- (3) 滚动：物体沿接触物的一条线滚动，物体可沿线平移（DOC=2），若物体不能沿线平移（DOC=3）；
- (4) 固定：完全约束（DOC=6）。

不同接触模式中运动自由度与接触力自由度间存在互补关系，这一关系可以用螺旋理论（Screw Theory）中的 reciprocal screws 的概念来定义，其中速度 twist 系统的自由度加上其对应 reciprocal screws 系统的自由度等于无约束时的运动自由度。

定义接触模式间的转换为接触切换（Contact Switches），当接触力越过其所在接触模式对应的力约束条件时发生接触切换，相当于离散的状态迁移，可以用对称矩阵表示。

3.1.2 接触稳定性（Contact Stability）

接触力

4 双足（人形）机器人脚步规划（Foot Step Planning）

A 人形机器人腿部运动学

A.1 腿部正运动学

A.2 腿部逆运动学

参考文献

- [1] Tomomichi Sugihara, Yoshihiko Nakamura, and Hirochika Inoue. Real-time humanoid motion generation through ZMP manipulation based on inverted pendulum control. In *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 02CH37292)*, volume 2, pages 1404–1409. IEEE.
- [2] Johannes Engelsberger, Christian Ott, and Alin Albu-Schäffer. Three-dimensional bipedal walking control using divergent component of motion. In *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2600–2607. IEEE.
- [3] Stephane Caron, Quang-Cuong Pham, and Yoshihiko Nakamura. Leveraging Cone Double Description for Multi-contact Stability of Humanoids with Applications to Statics and Dynamics. In *Robotics: Science and Systems*, volume 11, pages 1–9.
- [4] Stéphane Caron, Quang-Cuong Pham, and Yoshihiko Nakamura. Stability of surface contacts for humanoid robots: Closed-form formulae of the contact wrench cone for rectangular support areas. In *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 5107–5112. IEEE.
- [5] Stéphane Caron and Abderrahmane Kheddar. Multi-contact walking pattern generation based on model preview control of 3d com accelerations. In *2016 IEEE-RAS 16th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, pages 550–557. IEEE.
- [6] Devin J. Balkcom and Jeffrey C. Trinkle. Computing wrench cones for planar rigid body contact tasks. 21(12):1053–1066.