

# 双足人形机器人论文调研与复现

汤凯

2021 年 8 月 24 日

本文将对几篇关于人形机器人行走与步态规划控制论文进行总结与复现。

## 1 基于 ZMP 的双足（人形）机器人行走轨迹生成

### 1.1 基本的 ZMP 原理

ZMP(zero moment point) 基于倒立摆模型提出，原理是通过让机器人与外界的作用力所在作用线通过虚拟的 ZMP 点  $\mathbf{x}_{ZMP}$  与机器人质心  $\mathbf{x}_G$ ，该作用力不对机器人产生力矩，同时该作用力与  $\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_{ZMP}$  成正比 [1]，原理如图 1.1所示，其动力学方程为式(1.1)。

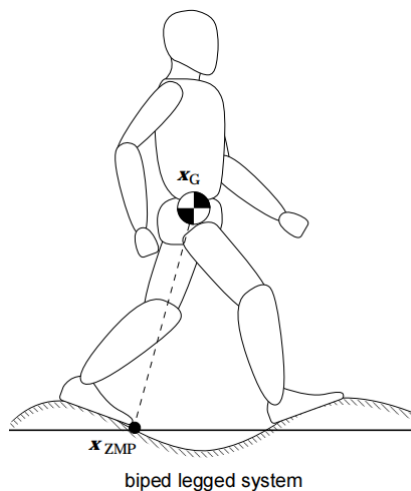


图 1.1: ZMP 原理示意图

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_G = -m\mathbf{g} + \mathbf{f} \\ \mathbf{f} = k(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_{ZMP}) \end{cases} \quad (1.1)$$

在  $\ddot{\mathbf{x}}_G$  各个分量中限制分量  $\ddot{z}_G$ （可通过控制方法使其收敛到 0）则其余分量可表示为式(1.2)，实际 ZMP 位置的控制则可通过设定一个参考的 ZMP 位置值代入该式进行控制。

$$\ddot{\mathbf{x}}_{G,xy} = \frac{\ddot{z}_G + g}{z_G - z_{ZMP}} (\mathbf{x}_{G,xy} - \mathbf{x}_{ZMP,xy}) \quad (1.2)$$

## 1.2 支撑多边形 (support polygon) 与 VHP (Virtual Horizontal Plane) 的定义

支撑多边形可用于检测 ZMP 的合理位置区间，构建 VHP 通过 ZMP 点（即  $z_{VHP} = z_{ZMP}$ ），机器人与环境的接触点  $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_N$  与  $\mathbf{x}_G$  的连线交 VHP 于点  $\mathbf{P}_1' \sim \mathbf{P}_N'$  以这些点作凸包 (convex hull) 得到 VHP 面上撑多边形，如图 1.2所示。

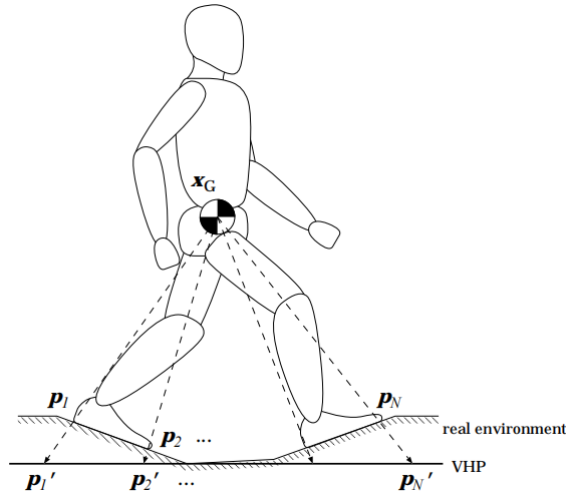


图 1.2: 支撑多边形与 VHP 示意图

## 2 基于 DCM 的双足（人形）机器人行走轨迹生成

该章主要根据文献 [2] 的内容进行重新整理和复现，下面介绍相关内容。

## 2.1 DCM 基本动力学方程的推导与几种特征点的定义

### 2.1.1 DCM（运动发散量）的定义

DCM (Divergent Component of Motion), 将其定义为相对机器人质心的偏移点, 其定义式如下:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} + b\dot{\boldsymbol{x}} \quad (2.1)$$

式(2.1)变形后可得到质心的动力学方程:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{b}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (2.2)$$

其中, 当  $b > 0$  时可得到稳定的一阶动力学方程。

将式(2.1)求一阶导并代入  $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}$  可得 DCM 动力学方程:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{1}{b}\boldsymbol{x} + \frac{1}{b}\boldsymbol{\xi} + \frac{b}{m}\boldsymbol{F} \quad (2.3)$$

### 2.1.2 eCMP 的定义

eCMP (Enhanced Centroidal Moment Pivot Point), 与式(1.1)中的外力定义形式类似, 此处将接触作用外力与 eCMP 定义联系, 其关系定义如下, 其中  $s > 0$  且为常数:

$$\boldsymbol{F}_{ext} = s(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_{ecmp}) \quad (2.4)$$

再将上式加上重力所求得合力的代入式(2.3)可得下式(2.5a), 再选择常数  $s = \frac{m}{b^2}$  可化简得下式(2.5b):

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \left(\frac{bs}{m} - \frac{1}{b}\right)\boldsymbol{x} + \frac{1}{b}\boldsymbol{\xi} - \frac{bs}{m}\boldsymbol{r}_{ecmp} + b\boldsymbol{g} \quad (2.5a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{b}\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{b}\boldsymbol{r}_{ecmp} + b\boldsymbol{g} \quad (2.5b)$$

### 2.1.3 VRP 的定义

引入 VRP (Virtual Repellent Point) 来进一步化简上式(2.5b), 定义 VRP 如下:

$$\boldsymbol{r}_{vrp} = \boldsymbol{r}_{ecmp} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & b^2g \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{r}_{ecmp} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta z_{vrp} \end{bmatrix}^T \quad (2.6)$$

将其代入式(2.5b)可得最终形式的 DCM 动力学方程：

$$\dot{\xi} = \frac{1}{b} (\xi - \mathbf{r}_{vrp}) = \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} (\xi - \mathbf{r}_{vrp}) \quad (2.7)$$

其中  $b = \sqrt{\frac{\Delta z_{vrp}}{g}}$  将其代入式(2.4)则可得所有合外力：

$$\mathbf{F} = \frac{m}{b^2} (\mathbf{x} - \mathbf{r}_{vrp}) \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{F} = \frac{mg}{\Delta z_{vrp}} (\mathbf{x} - \mathbf{r}_{vrp}) \quad (2.8b)$$

最后的质心 CoM 动力学方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = -\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} (\mathbf{x} - \xi) \quad (2.9)$$

所有特征点的示意图如下所示：

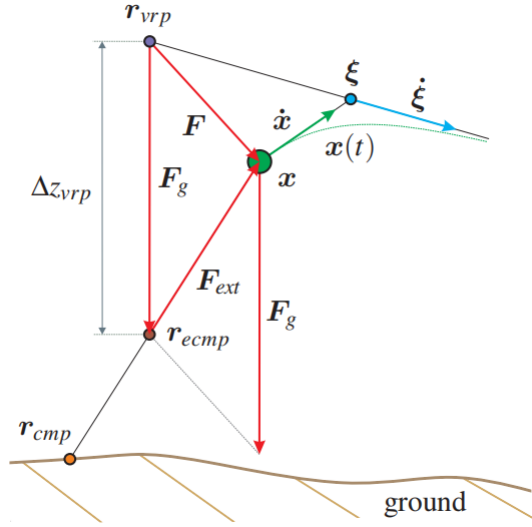


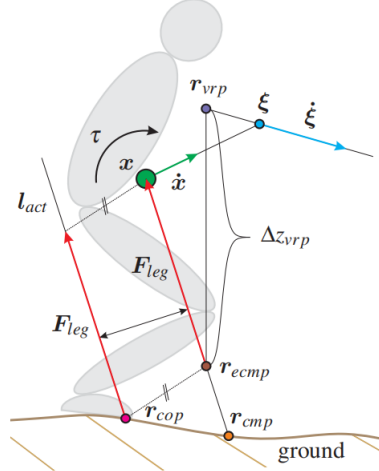
图 2.1: 所定义特征点的示意图

## 2.2 几种不同支撑类型下的 DCM、CoM 轨迹生成

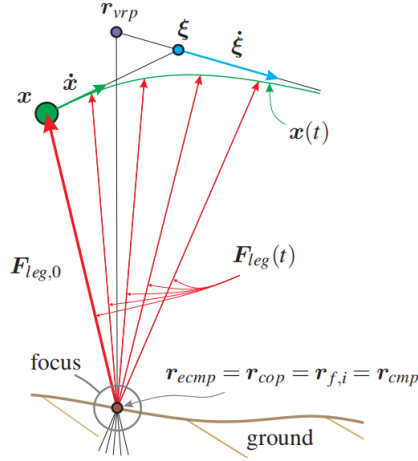
### 2.2.1 单点支撑 SS (Single Support) 情形

假设机器人的足为单点或支撑点位于脚掌中心，机器人角动量变化为 0，且随着双脚切换时支点的移动是瞬时的（没有双脚同时受力的情形），则

此时令脚支撑点  $\mathbf{r}_{f,i}$ 、压力中心  $\mathbf{r}_{cop}$  (Center of Pressure)、中心动量支点  $\mathbf{r}_{cmp}$  (Centroidal Moment Pivot Point) 以及  $\mathbf{r}_{ecmp}$  重合, 这几种点的作用示意图如下图 2.2a所示, 重合情况见下图 2.2b, 该方法使得 CoP 为常量, 接触外力总通过质心。



(a) CoP、CMP、eCMP 等点的定义



(b) 单点支撑时各点重合

图 2.2: 各点定义及单点支撑的示意图

首先设定  $N$  个落脚点  $\mathbf{r}_{f,i}$ , 限定单点支撑时 VRP 的位置为该支撑点竖直偏移  $\Delta z_{vrp}$  (因为此时 CoP 与 eCMP 重合) 即  $z_{vrp,d,i} = z_{f,i} + \Delta z_{vrp}$ ,

由此 VRP 的位置在第  $i$  个支撑点作用时为常量，求解方程 2.7 可得：

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{r}_{vrp} + e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}}t} (\boldsymbol{\xi}(0) - \mathbf{r}_{vrp}) \quad (2.10)$$

设定每一段的单个支撑点作用时间为  $t_{step,i}$ ，则上述  $t \in [0, t_{step,i}]$ 。设定最后机器人在第  $N$  个支撑点停下，下标  $d$  表示目标值 (desired)， $eos$  表示 end of support，此时  $\boldsymbol{\xi}_{d,eos,N-1} = \mathbf{r}_{vrp,d,N}$ ，可以通过向后迭代推算出每一段支撑运动的 DCM 起始值  $\boldsymbol{\xi}_{d,ini,N-1}$  与终止值  $\boldsymbol{\xi}_{d,eos,N-1}$ ，根据式 2.10 建立迭代式如下：

$$\boldsymbol{\xi}_{d,eos,i-1} = \boldsymbol{\xi}_{d,ini,i} = \mathbf{r}_{vrp,d,i} + e^{-\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}}t_{step,i}} (\boldsymbol{\xi}_{d,eos,i} - \mathbf{r}_{vrp,d,i}) \quad (2.11)$$

再将迭代结果代回式 2.10 并求导可得到 DCM 在每段的动力学解，即得到 DCM 轨迹：

$$\boldsymbol{\xi}_{d,i}(t) = \mathbf{r}_{vrp,d,i} + e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}}(t-t_{step,i})} (\boldsymbol{\xi}_{d,eos,i} - \mathbf{r}_{vrp,d,i}) \quad (2.12a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{d,i}(t) = \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}}(t-t_{step,i})} (\boldsymbol{\xi}_{d,eos,i} - \mathbf{r}_{vrp,d,i}) \quad (2.12b)$$

文献 [2] 中的示意图如下图 2.3 所示，规定好开始时 CoM 的位置  $\mathbf{x}_0$  以及 VRP 偏移 eCMP 的高度  $\Delta z_{vrp}$  便可完成规划，可取  $\Delta z_{vrp}$  为机器人单（双）腿直立站立静止时 CoM 与 eCMP 或支撑点的相对高度，使以上模型成立，到终点时 CoM 速度为零，DCM、CoM 与 VRP 重合 (DCM 先与 VRP 重合然后 COM 跟随一段时间才与 DCM 重合)。由于初始的 DCM 位置由脚步点规划后的反向迭代结果确定，因此初始点  $\mathbf{x}_0$  的选择决定了初始 CoM 速度  $\dot{\mathbf{x}}_0$ 。

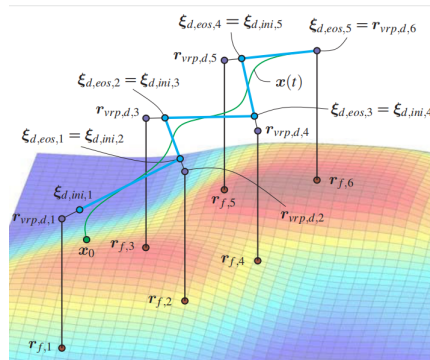


图 2.3: 单点支撑 DCM 轨迹规划示意图

利用 python 编写相关程序，预先给定 6 个落脚点，每段步利用 4 阶龙格库塔方法求解 CoM 的轨迹，当 DCM 到达终点之后一段的 CoM 轨迹则直接用修改 Euler 格式的单步迭代法求解，具体结果如下图 2.4所示，显示了各个点、每步的时间以及总时间等信息。

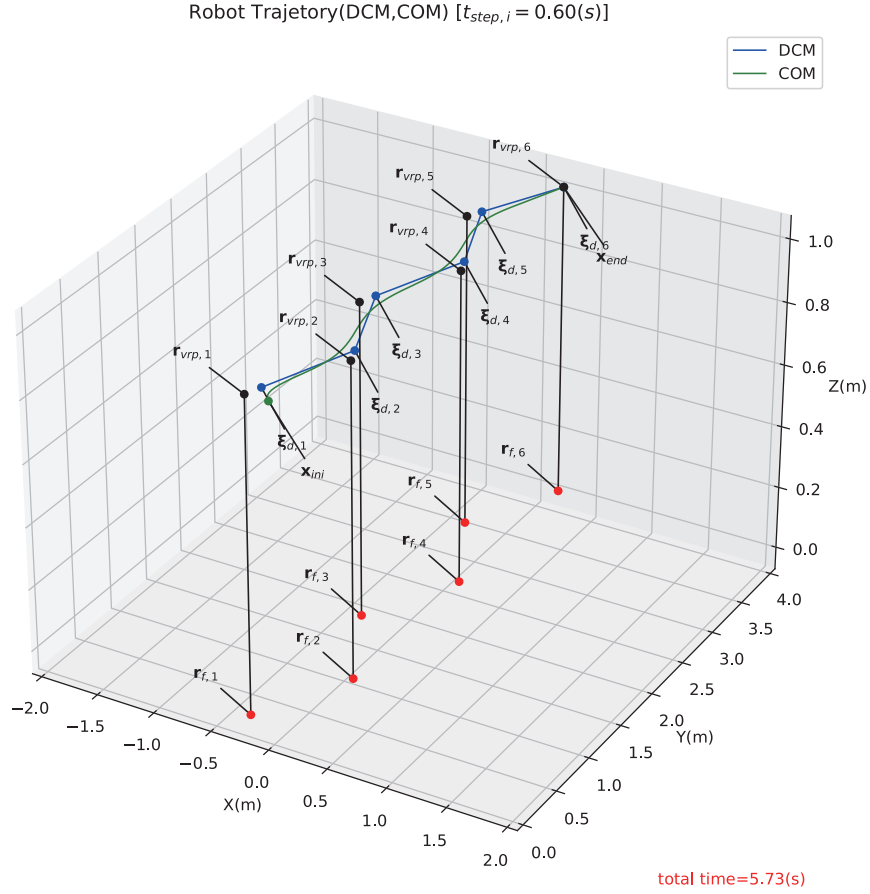


图 2.4: 复现单点支撑 DCM 轨迹规划图

### 2.2.2 连续双点支撑 DS (Double Support) 情形

由式(2.7)可知  $r_{vrp}$  可由 DCM 表示:

$$r_{vrp} = \xi - \sqrt{\frac{\Delta z_{vrp}}{g}} \dot{\xi} \quad (2.13)$$

若 DCM 轨迹连续则 VRP 轨迹连续，并可进一步得到连续的外力，因此可在 DCM 的折点附近定义两个点用于插值，且 DCM 处于此两点之间时机器人处于双足支撑状态，即两个单点支撑状态间的均匀过渡，支点 CoP、eCMP 随 VRP 的连续运动也连续变化。单步 DCM 折点附近双足支撑的起始点定义为  $\xi_{iniDS,i}$ ，终止点定义为  $\xi_{eoDS,i}$ ，单步时起点到折点的时间为  $\Delta t_{DS,ini}$ ，起点到折点的时间为  $\Delta t_{DS,end}$  其过程示意图为图 2.5，且两者及其对应速度可由如下公式计算：

$$\xi_{iniDS,i} = r_{vrp,i-1} + e^{-\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \Delta t_{DS,ini}} (\xi_{ini,i} - r_{vrp,i-1}) \quad (2.14a)$$

$$\xi_{eoDS,i} = r_{vrp,i} + e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \Delta t_{DS,end}} (\xi_{ini,i} - r_{vrp,i}) \quad (2.14b)$$

$$\dot{\xi}_{iniDS,i} = \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} e^{-\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \Delta t_{DS,ini}} (\xi_{ini,i} - r_{vrp,i-1}) \quad (2.14c)$$

$$\dot{\xi}_{eoDS,i} = \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} e^{\sqrt{\frac{g}{\Delta z_{vrp}}} \Delta t_{DS,end}} (\xi_{ini,i} - r_{vrp,i}) \quad (2.14d)$$

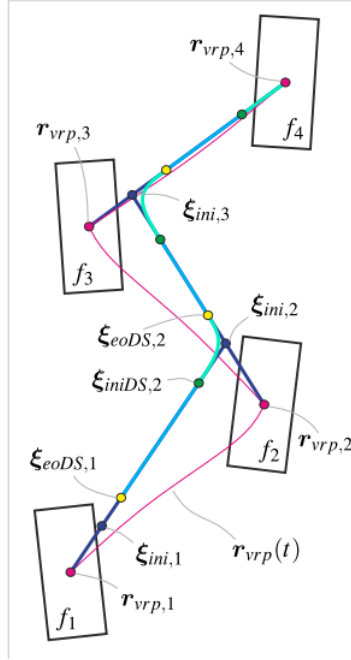


图 2.5: 双点支撑 DCM 轨迹规划示意图

双足支撑的起点  $\xi_{iniDS,i}$  与终止点  $\xi_{eoDS,i}$  之间的轨迹点可用三次多项



式插值产生，给定位置与速度的 4 个边界条件，按以下公式计算：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2/T_s^3 & 1/T_s^2 & -2/T_s^3 & 1/T_s^2 \\ -3/T_s^2 & -2/T_s & 3/T_s^2 & -1/T_s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{ini}^T \\ \dot{\xi}_{ini}^T \\ \xi_{end}^T \\ \dot{\xi}_{end}^T \end{bmatrix} \quad (2.15a)$$

$$\begin{bmatrix} \xi^T(t) \\ \dot{\xi}^T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P} \quad (2.15b)$$

设定好相关参数后，用 Python 编写双足支撑下的 CoM、DCM 规划程序，自定义六个落脚点以及初始 CoM 位置并进行规划，规划结果与相关参数如下图 2.6 所示，其中  $\Delta t_{DS,ini,i} = \alpha \Delta t_{DS,i}$ 、 $\Delta t_{DS,end,i} = (1 - \alpha) \Delta t_{DS,i}$ 。

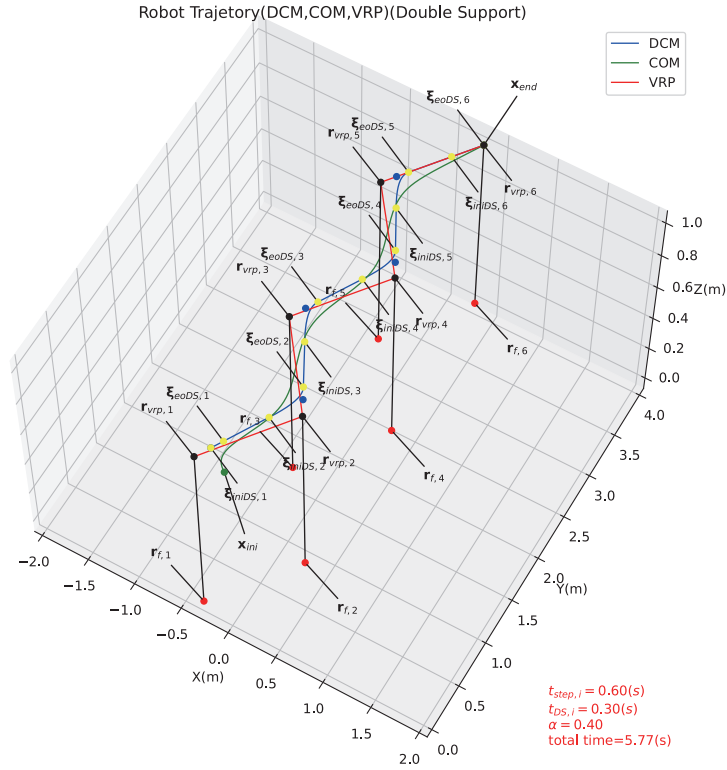


图 2.6: 复现双点支撑 DCM 轨迹规划图

### 2.2.3 连续足跟-足尖运动支撑切换 HT (Heel to Toe) 情形

上一小节中讨论的双足支撑机器人的脚固定在地面，为使机器人在双足支撑时的运动尽可能避开奇异构型并与人更为类似，现考虑加入足跟到足尖与足尖到足跟的连续支撑点切换。该动作可扩大机器人单步运动的行程与范围，但在足尖与脚跟切换时其支撑多边形范围会变小。采用该动作时的轨迹示意图如下图 2.7 所示，将单步时间  $t_{step,i}$  拆分为足跟到足尖支撑时间  $\Delta t_{HT} = \alpha_{HT} t_{step,i}$  与足尖到足跟支撑时间  $\Delta t_{TH} = (1 - \alpha_{HT}) t_{step,i}$  并可采用 2.2.1 单点支撑后向递推的方法算出各个 DCM 节点  $\xi_{ini,HT,i}$  与  $\xi_{ini,TH,i}$ ，在每个脚跟 DCM 节点  $\xi_{ini,HT,i}$  附近用上一小节式(2.14a)到(2.14d)的方法计算出双足支撑的 DCM 起始点与、终止点及其速度。

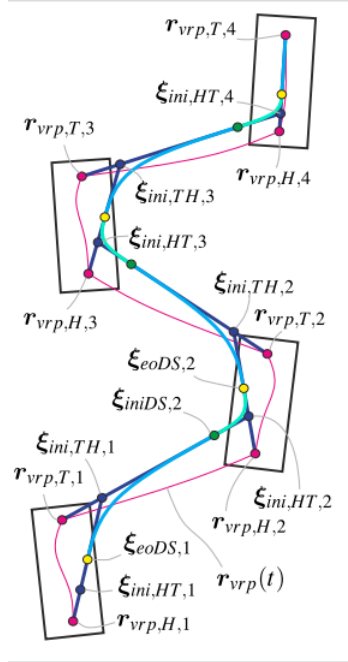


图 2.7: 足跟-足尖支撑 DCM 轨迹规划示意图

对该方法的复现结果与相关参数如下图 2.8 所示，其中开始时  $\xi_{ini,HT,1}$  到  $\xi_{eoDS,1}$  的 DCM 轨迹与末尾  $\xi_{eoDS,end}$  到  $r_{vrp,end}$  的 DCM 轨迹由式(2.15a)和(2.15b)计算得到，并利用式(2.13)推导出 VRP 轨迹，但最后一段利用插值所计算出的 VRP 轨迹超出了所在足跟和足尖的范围。

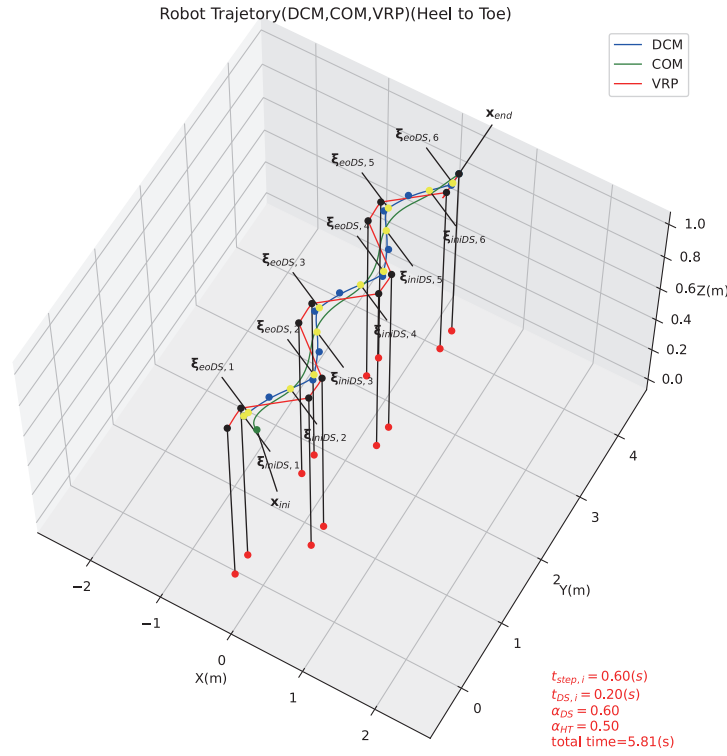


图 2.8: 复现足跟-足尖支撑 DCM 轨迹规划图

## 参考文献

- [1] Tomomichi Sugihara, Yoshihiko Nakamura, and Hirochika Inoue. Real-time humanoid motion generation through ZMP manipulation based on inverted pendulum control. In *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 02CH37292)*, volume 2, pages 1404–1409. IEEE.
- [2] Johannes Engelsberger, Christian Ott, and Alin Albu-Schäffer. Three-dimensional bipedal walking control using divergent component of motion. In *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2600–2607. IEEE.