第12章 二值数学形态学

12.1 基本集合定义

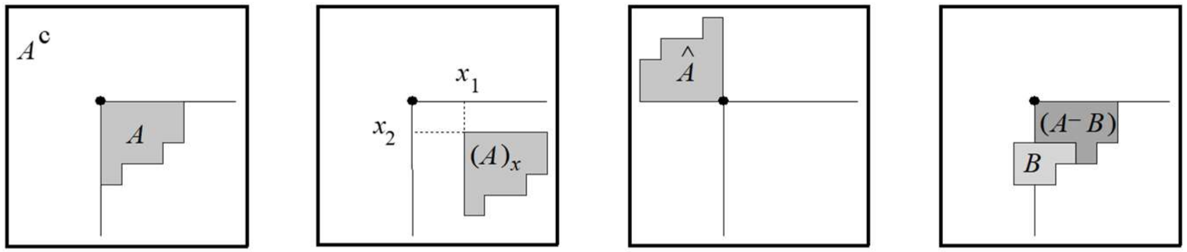
(1)　集合：用大写字母表示，空集记为$\varnothing$

(2)　元素：用小写字母表示

(3)　子集：

(4)　并集：

(5)　交集：



(a)　(b)　(c)　(d)

(6)　补集：$A^c = \{x \mid x \notin A\}$

(7)　位移：$(A)_x = \{y \mid y = a + x,\ a \in A\}$

(8)　映像：$\hat{A} = \{x \mid x = -a,\ a \in A\}$

(9)　差集：$A - B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\} = A \cap B^c$

12.2 二值形态学基本运算

集合运算：

- A为图象集合，B 为结构元素（集合）
- 数学形态学运算是用 B 对 A 进行操作
- 结构元素要指定1个原点（参考点）

12.2.1 膨胀和腐蚀

12.2.2 开启和闭合

12.2.3 基本运算性质

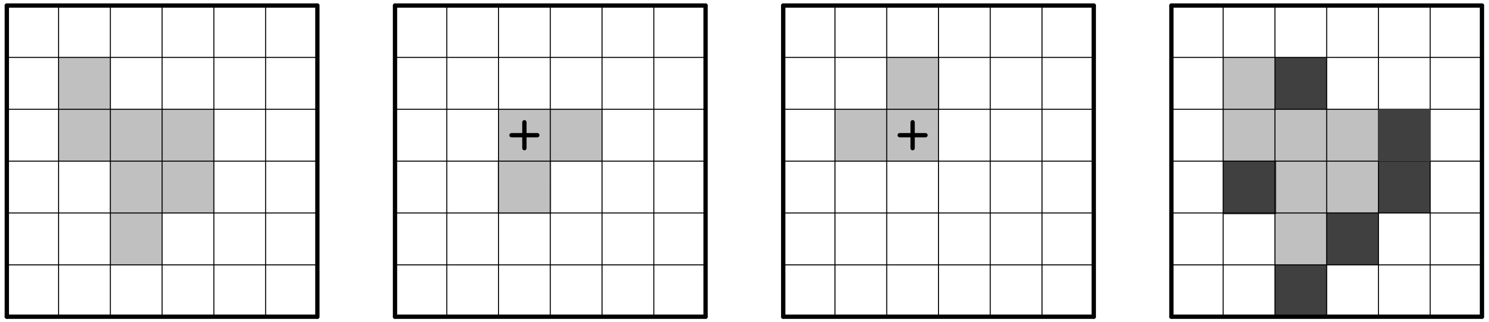
12.2.1 膨胀和腐蚀

1. 膨胀

膨胀的算符为⊕

$$A \oplus B = \{x \mid [(\hat{B})_x \cap A] \neq \varnothing\}$$

集合A　　结构元素B　　B的映象　　集合$A \oplus B$



(a)　(b)　(c)　(d)

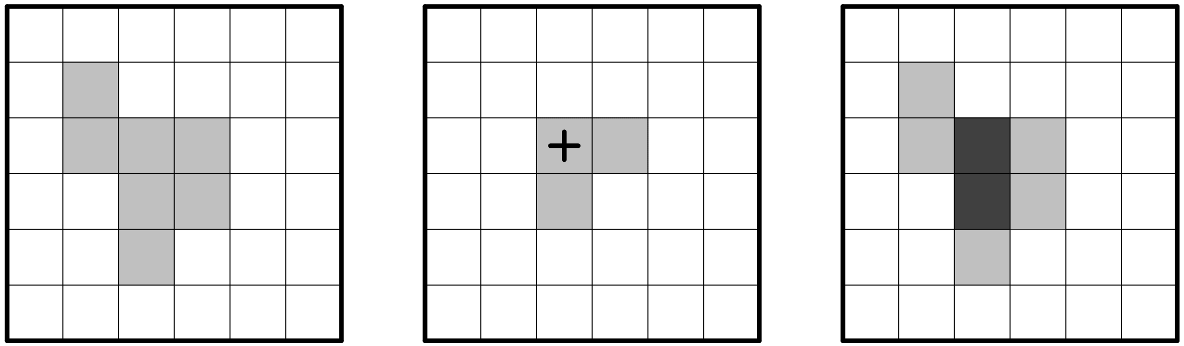
12.2.1 膨胀和腐蚀

2. 腐蚀

腐蚀的算符为$\ominus$

$$A \ominus B = \left\{ x \mid (B)_x \subseteq A \right\}$$

集合A　　结构元素B　　集合$A \ominus B$



(a)　　(b)　　(c)

12.2.1 膨胀和腐蚀

3. 原点不包含在结构元素中时的膨胀和腐蚀

原点包含在结构元素中

膨胀运算：$A \subseteq A \oplus B$

腐蚀运算：$A \ominus B \subseteq A$

原点不包含在结构元素中

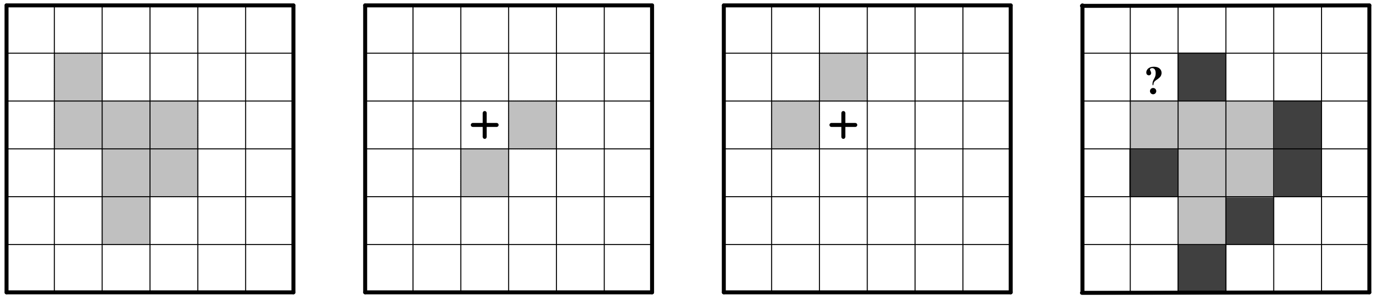
膨胀运算：$A \not\subset A \oplus B$

腐蚀运算：$A \ominus B \subseteq A$，或 $A \ominus B \not\subset A$

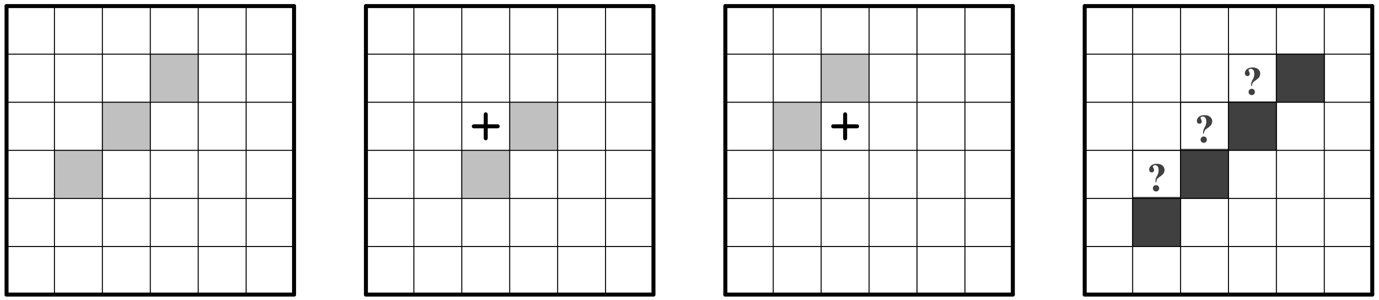
12.2.1 膨胀和腐蚀

原点不包含在结构元素中时的膨胀运算

$$A \not\subset A \oplus B$$



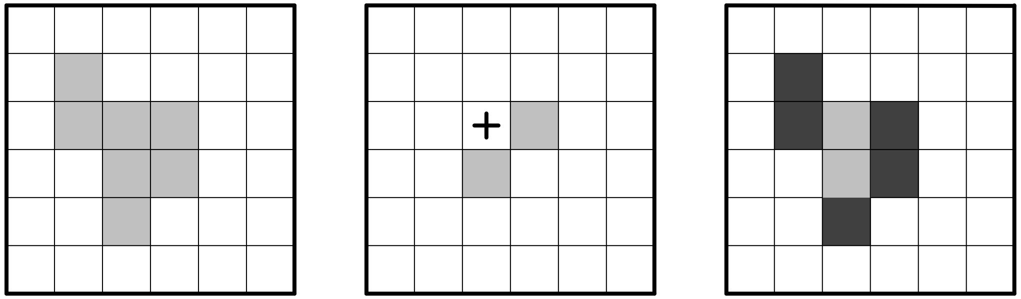
A在膨胀中自身完全消失了



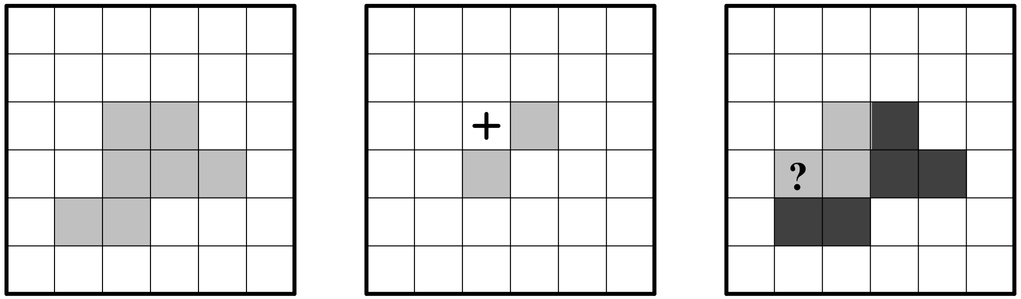
12.2.1 膨胀和腐蚀

原点不包含在结构元素中时的腐蚀运算

$$A \ominus B \subseteq A$$



$$A \ominus B \not\subset A$$



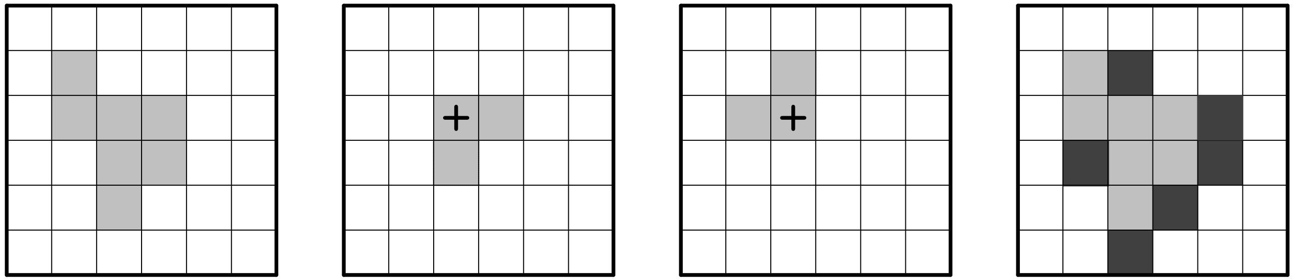
12.2.1 膨胀和腐蚀

4. 用向量运算实现膨胀和腐蚀

$$A \oplus B = \left\{ x \mid x = a + b \quad \text{对某些} \quad a \in A \text{和} b \in B \right\}$$

$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4)\}$

$B = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$



$A \oplus B = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2),$

$(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (2, 4), (3, 4), (2, 5)\}$

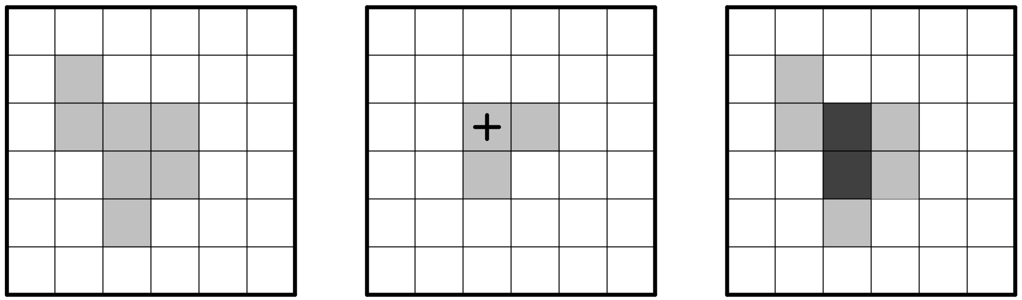
12.2.1 膨胀和腐蚀

4. 用向量运算实现膨胀和腐蚀

$$A \ominus B = \left\{ x \mid (x+b) \in A \quad \text{对每一个} \ b \in B \right\}$$

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4)\}$$

$$B = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$$



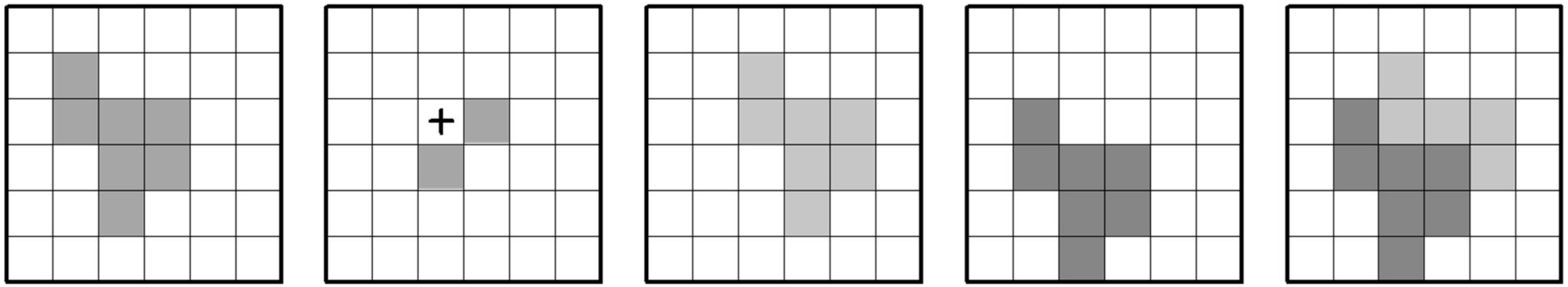
$$A \ominus B = \{(2, 2), (2, 3)\}$$

12.2.1 膨胀和腐蚀

5. 用位移运算实现膨胀和腐蚀

按每个b来位移A并把结果或（OR）起来

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$



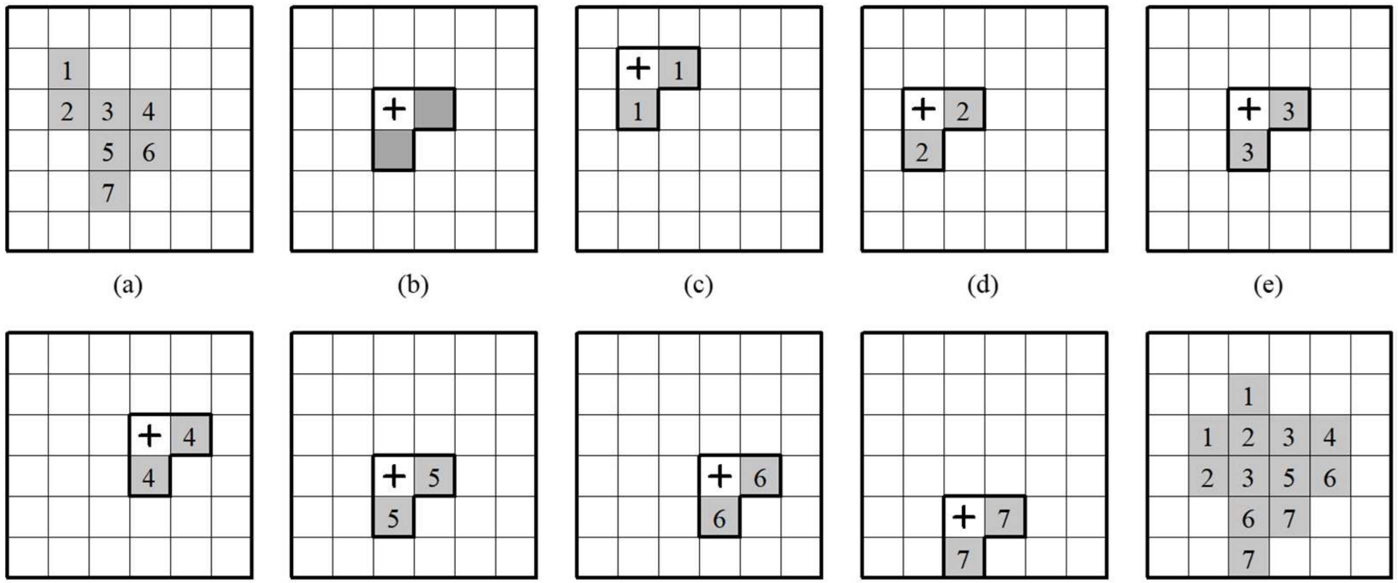
(a) (b) (c) (d) (e)

12.2.1 膨胀和腐蚀

5. 用位移运算实现膨胀和腐蚀

按每个a来位移B并把结果或（OR）起来

$$A \oplus B = \bigcup_{a \in A} (B)_a$$



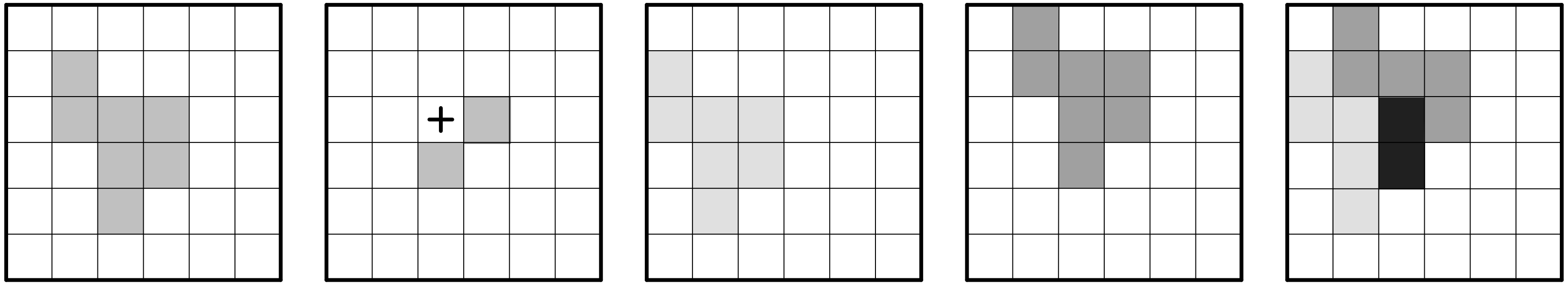
(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j)

12.2.1 膨胀和腐蚀

5. 用位移运算实现膨胀和腐蚀

按每个b来负位移A并把结果交（AND）起来

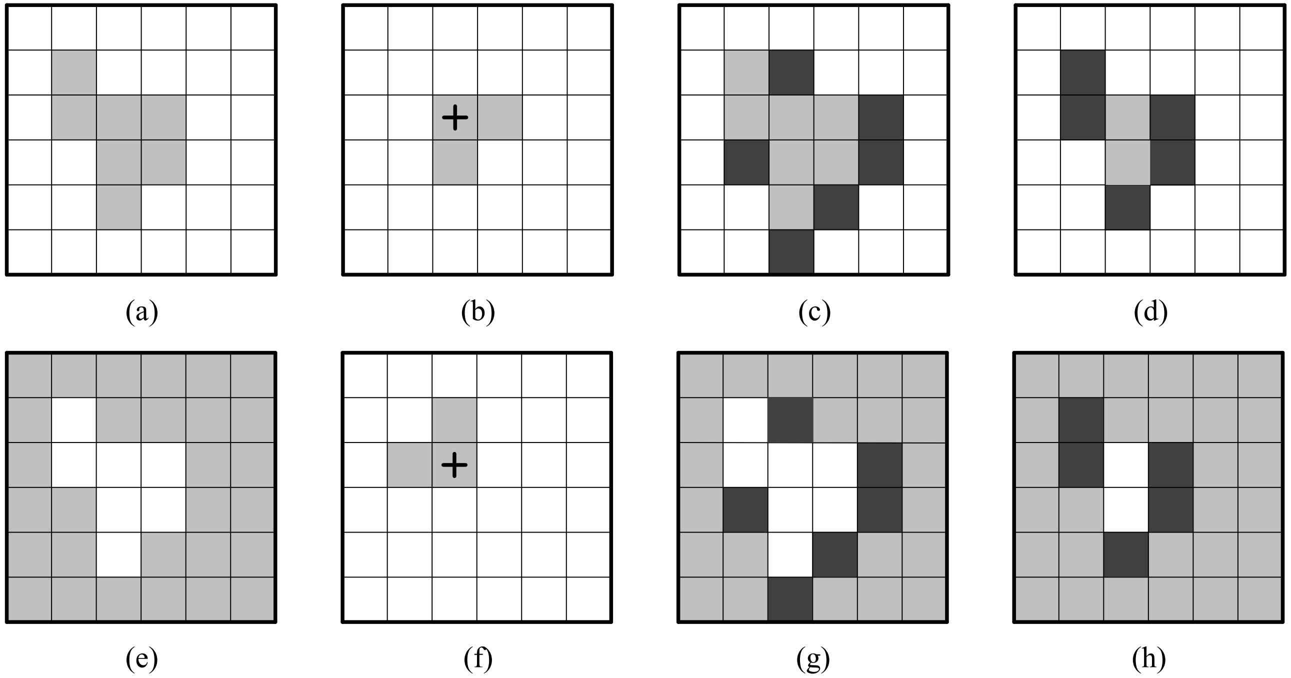
$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$



(a) (b) (c) (d) (e)

6.　膨胀和腐蚀的对偶性

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B} \qquad (A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$



12.2.1 膨胀和腐蚀

6. 膨胀和腐蚀的对偶性

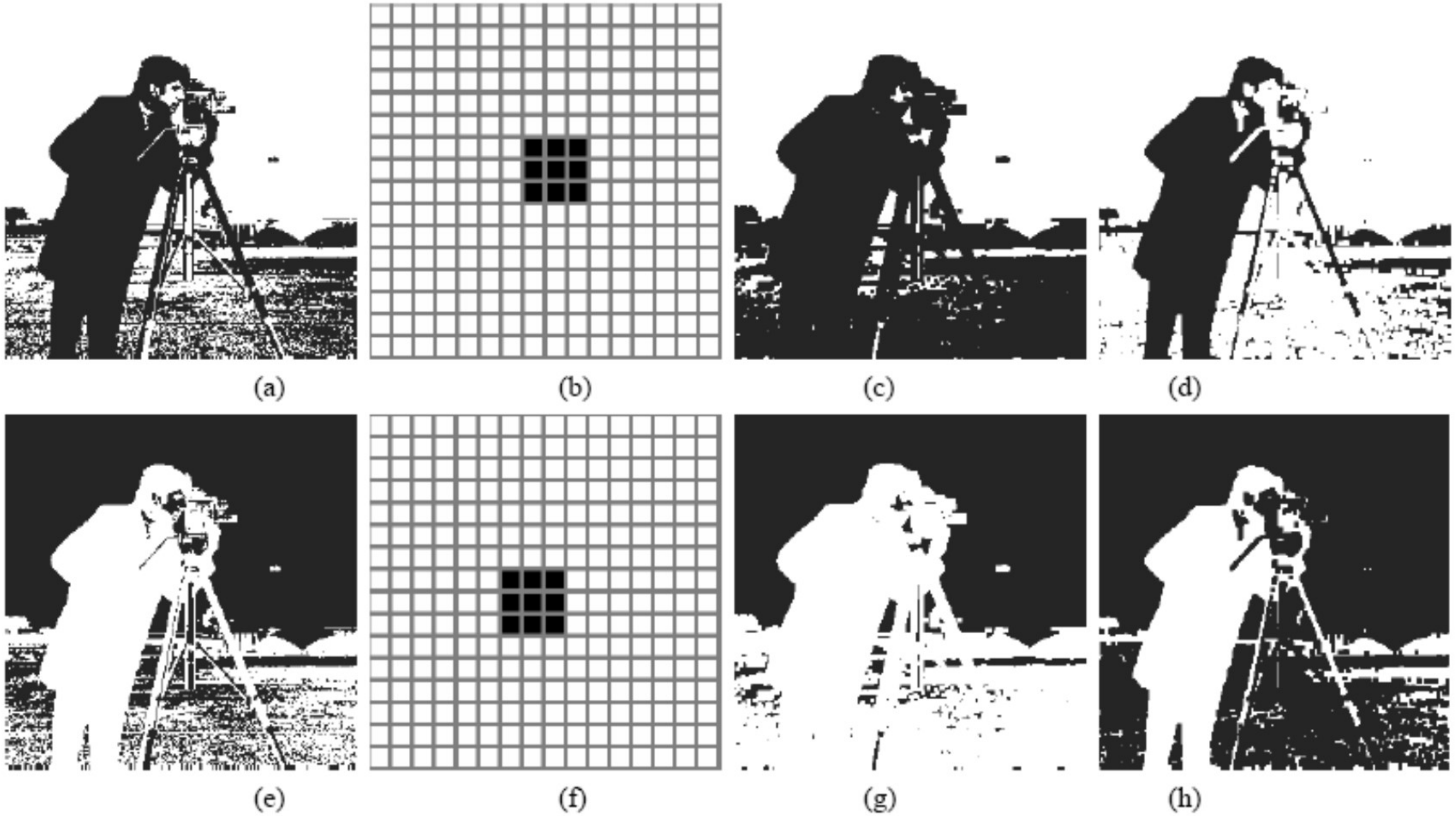


图 14.2.12 膨胀和腐蚀的对偶性验证实例

12.2.2 开启和闭合

1. 开启和闭合定义

膨胀和腐蚀并不互为逆运算

它们可以级连结合使用

开启：先对图象进行腐蚀然后膨胀其结果

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

闭合：先对图象进行膨胀然后腐蚀其结果

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

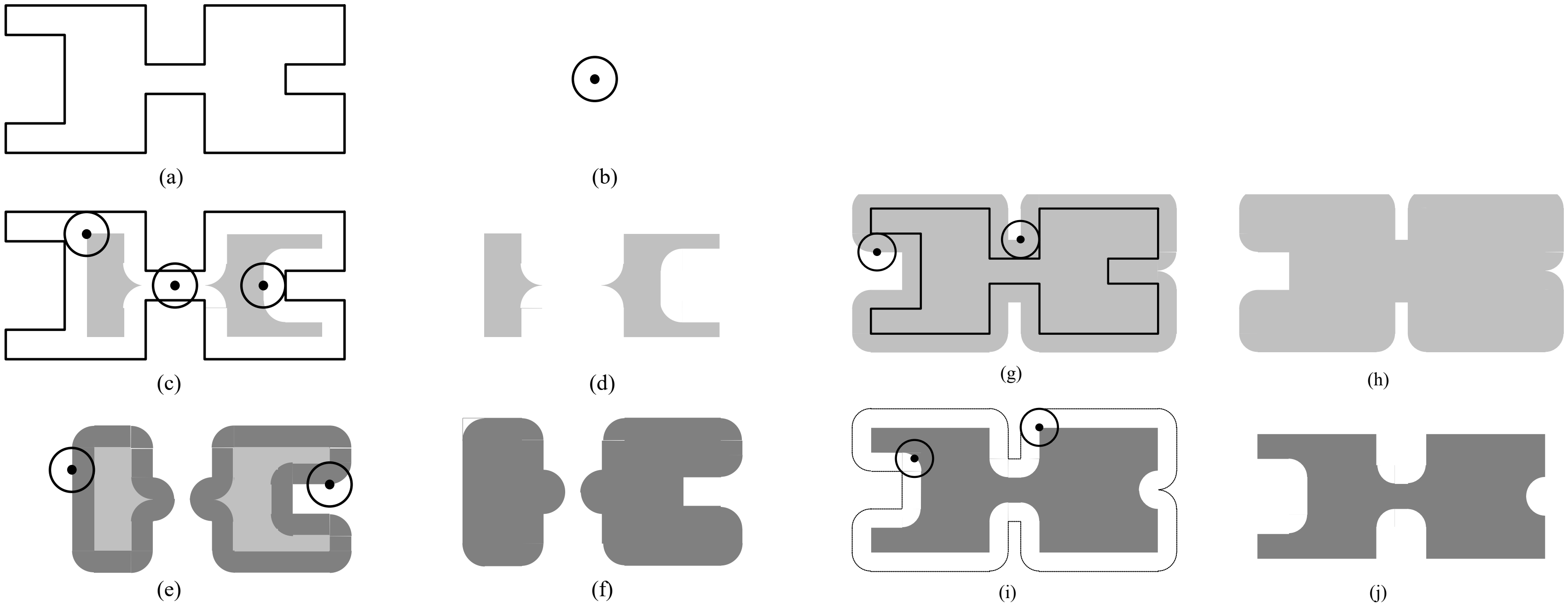
开启和闭合不受原点是否在结构元素之中的影响

12.2.2 开启和闭合

1. 开启和闭合定义

开启运算可以把比结构元素小的突刺滤掉

闭合运算可以把比结构元素小的缺口或孔填充上



12.2.2 开启和闭合

1. 开启和闭合定义

原图

(a) (b)

图 14.2.14 开启和闭合实例

12.2.2 开启和闭合

2. 开启和闭合的对偶性

开启和闭合也具有对偶性

$$\left(A \circ B\right)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \bullet \hat{B}$$

$$\left(A \bullet B\right)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \circ \hat{B}$$

$$(A \circ B)^{\mathrm{c}} = [(A \ominus B) \oplus B]^{\mathrm{c}} = (A \ominus B)^{\mathrm{c}} \ominus \hat{B} = A^{\mathrm{c}} \oplus \hat{B} \ominus \hat{B} = A^{\mathrm{c}} \bullet \hat{B}$$

$$(A \bullet B)^{\mathrm{c}} = [(A \oplus B) \ominus B]^{\mathrm{c}} = (A \oplus B)^{\mathrm{c}} \oplus \hat{B} = A^{\mathrm{c}} \ominus \hat{B} \oplus \hat{B} = A^{\mathrm{c}} \circ \hat{B}$$

12.2.2 开启和闭合

3. 开启和闭合与集合的关系

操 作	并 集	交 集
开 启	$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \circ B \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \circ B)$	$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \circ B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \circ B)$
闭 合	$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bullet B \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \bullet B)$	$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \bullet B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \bullet B)$

12.2.2 开启和闭合

4. 开启和闭合的几何解释

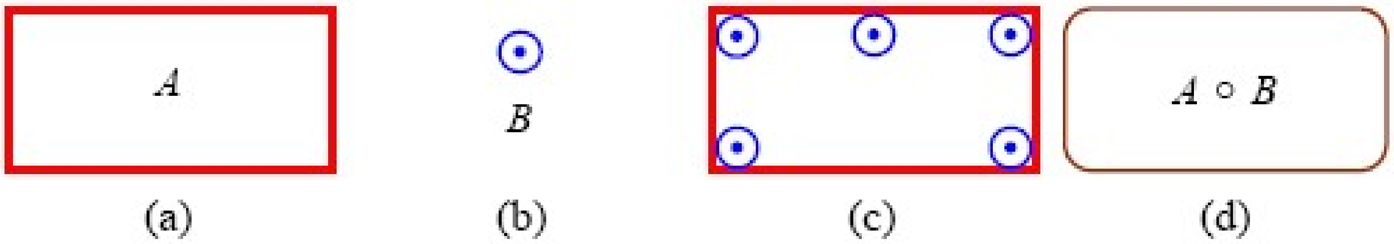


图 14.2.15 开启的填充特性

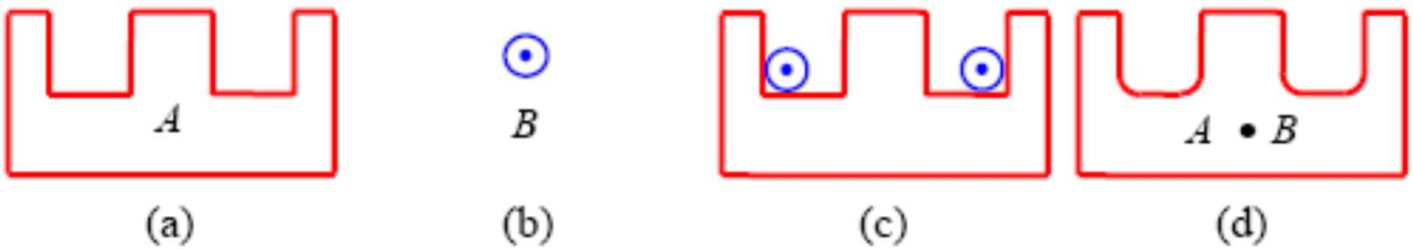


图 14.2.16 闭合的几何解释

12.3 二值形态学组合运算

基本运算：

膨胀、腐蚀、开启、闭合

击中-击不中变换（hit or miss）

组合运算，{基本算法}

12.3.1　　击中-击不中变换

12.3.2　　组合运算

12.3.1 击中-击不中变换

击中-击不中变换

形状检测的一种基本工具

对应两个操作，所以用到两个结构元素

设A为原始图象，E和F为一对不重合的集合

$$A \Uparrow (E,F) = (A \ominus E) \cap (A^c \ominus F) = (A \ominus E) \cap (A \oplus F)^c$$

E：击中结构元素

F：击不中结构元素

12.3.1 击中-击不中变换

击中-击不中变换

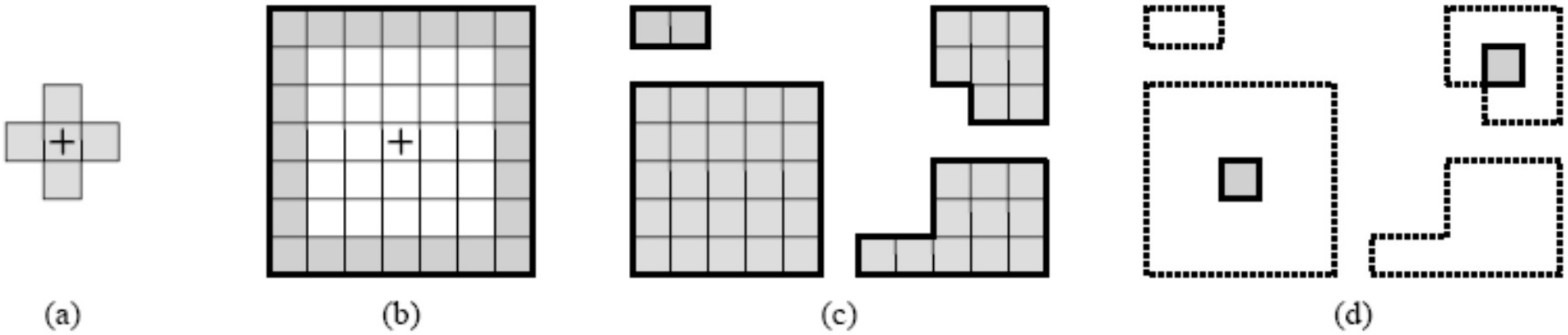


图 14.3.1 击中-击不中变换示例

12.3.1 击中-击不中变换

击中-击不中变换

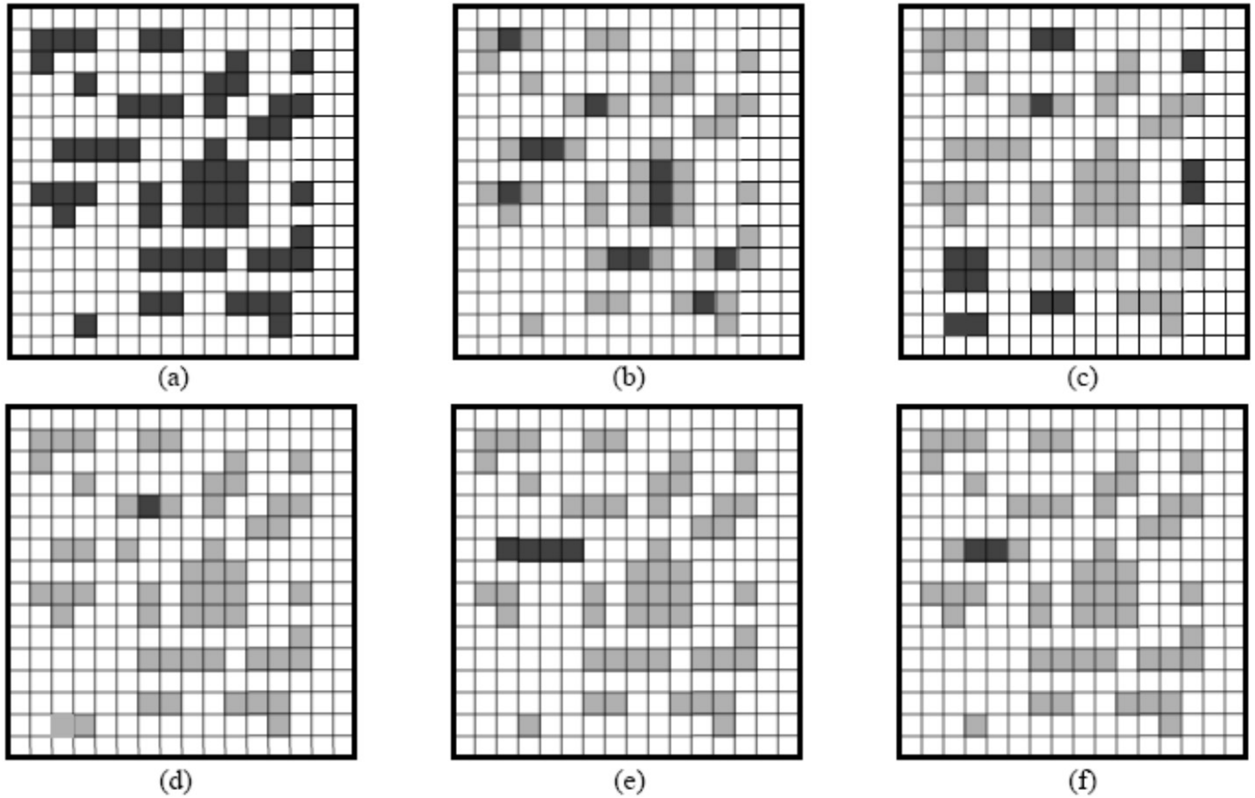


图 14.3.2 利用击中-击不中算子以提取包含水平方向上有连续 3 个像素的线段

12.3.1 击中-击不中变换

击中-击不中变换

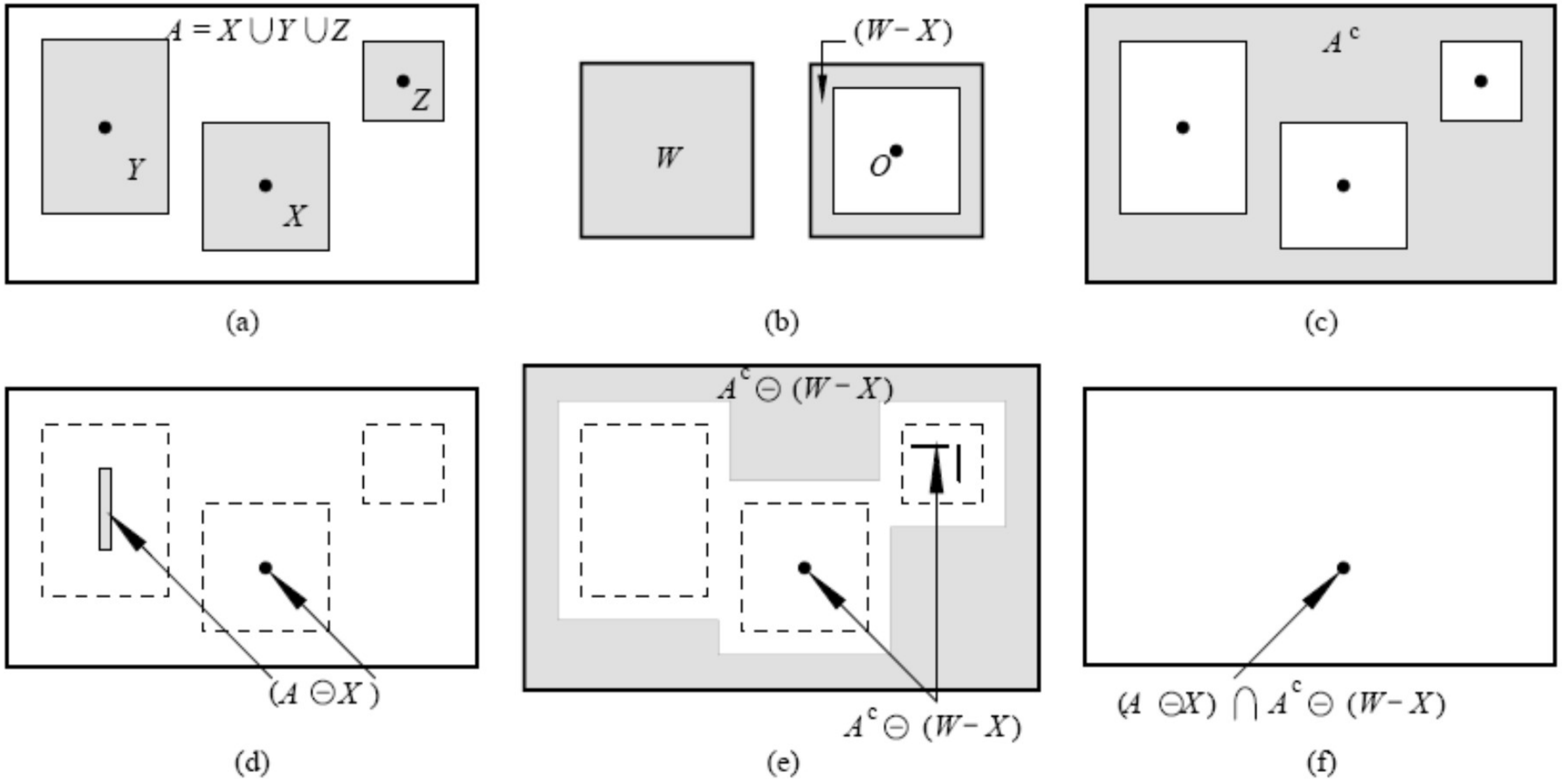
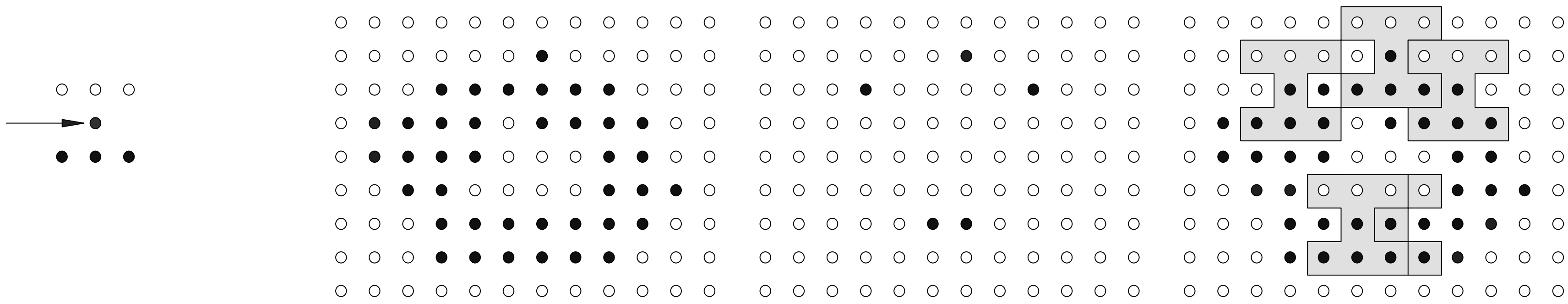


图 14.3.3 击中-击不中变换示例

12.3.1 击中-击不中变换

击中-击不中变换中的结构元素

$A \Uparrow B$的结果中仍保留的目标象素对应在A中其邻域与结构元素B对应的象素



(a) (b) (c) (d)

12.3.2 组合运算

1. 区域凸包

令B_i，$i = 1, 2, 3, 4$，代表4个结构元素，$X_i^0 = A$

构造：

$$X_i^k = \left(X_i^{k-1} \Uparrow B_i\right) \cup A \qquad i = 1, 2, 3, 4 \quad 和 \quad k = 1,\ 2,\ \cdots$$

令 $D_i = X_i^{\text{conv}}$，上标“conv”表示在 $X_i^k = X_i^{k-1}$ 意义下收敛

A的凸包可表示为：$C(A) = \bigcup_{i=1}^{4} D_i$

12.3.2 组合运算

1. 区域凸包

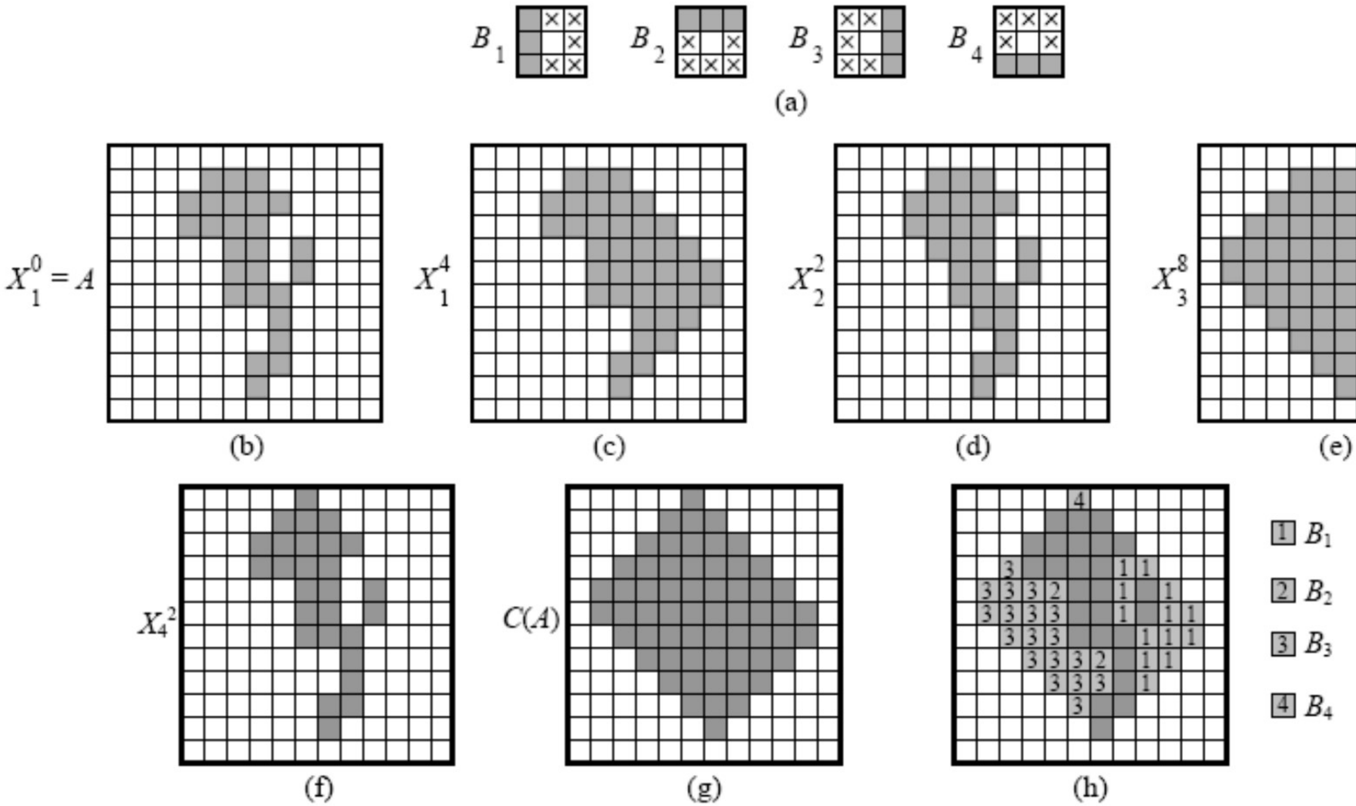


图 14.3.5 构造凸包的示例

12.3.2 组合运算

2. 细化

用结构元素B细化集合A记作$A \otimes B$

借助击中–击不中变换定义

$$A \otimes B = A - (A \Uparrow B) = A \bigcap (A \Uparrow B)^{\mathrm{c}}$$

定义一个结构元素系列

$$\{B\} = \{B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n\}$$

$$\boxed{A \otimes \{B\} = A - ((\cdots((A \otimes B_1) \otimes B_2)\cdots) \otimes B_n)}$$

12.3.2 组合运算: 细化

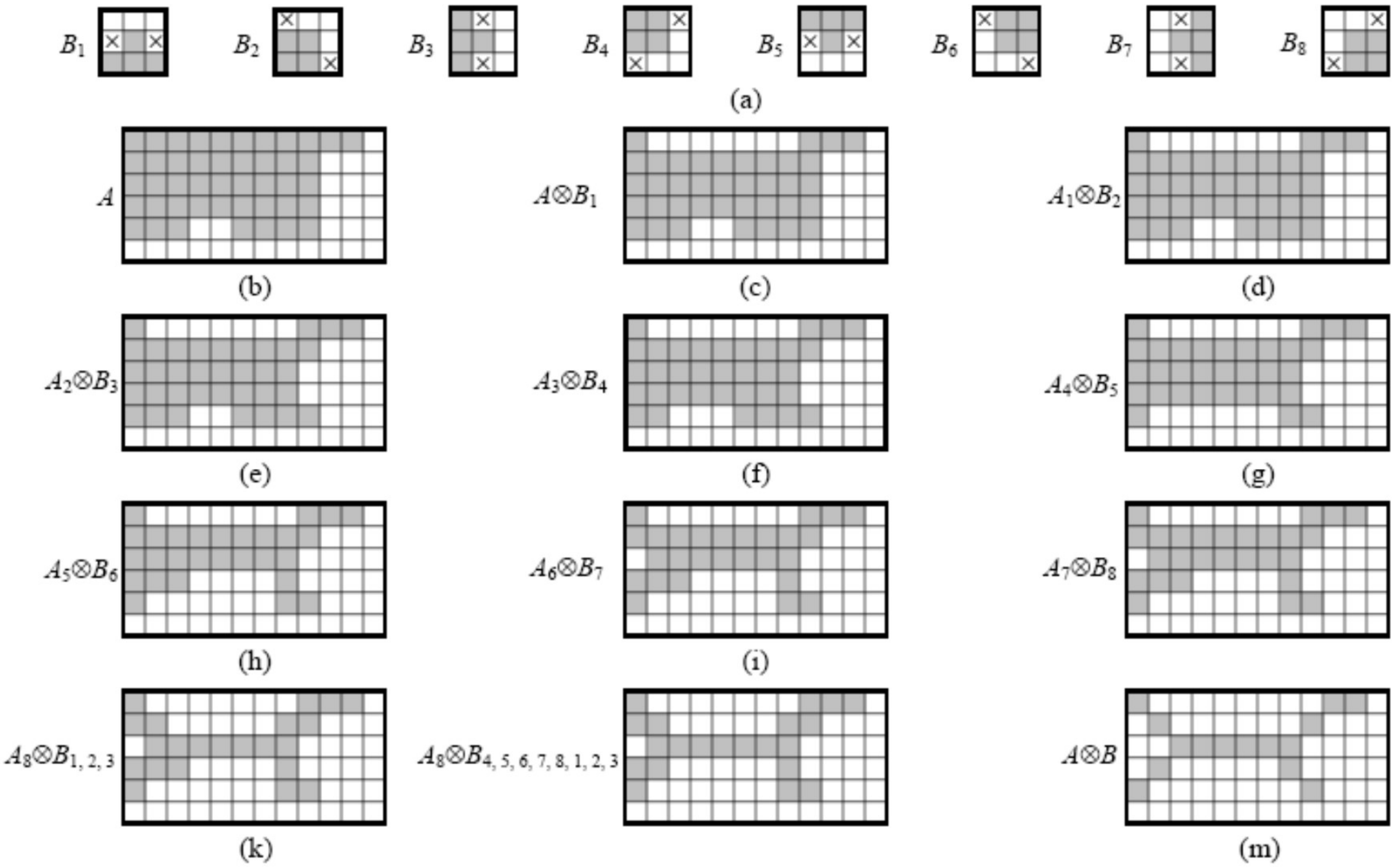


图 14.3.6　细化示例

12.3.2 组合运算

3. 粗化

用结构元素B粗化集合A记作$A \circledast B$

$$A \circledast B = A \bigcup (A \Uparrow B)$$

定义为一系列操作

$$A \circledast \{B\} = ((\cdots((A \circledast B_1) \circledast B_2)\cdots) \circledast B_n)$$

粗化从形态学角度来说与细化是对应的，实际中可先细化背景然后求补以得到粗化的结果。换句话说，如果要粗化集合A，可先构造$C = A^c$，然后细化C，最后求C^c。

12.3.2 组合运算

3. 粗化

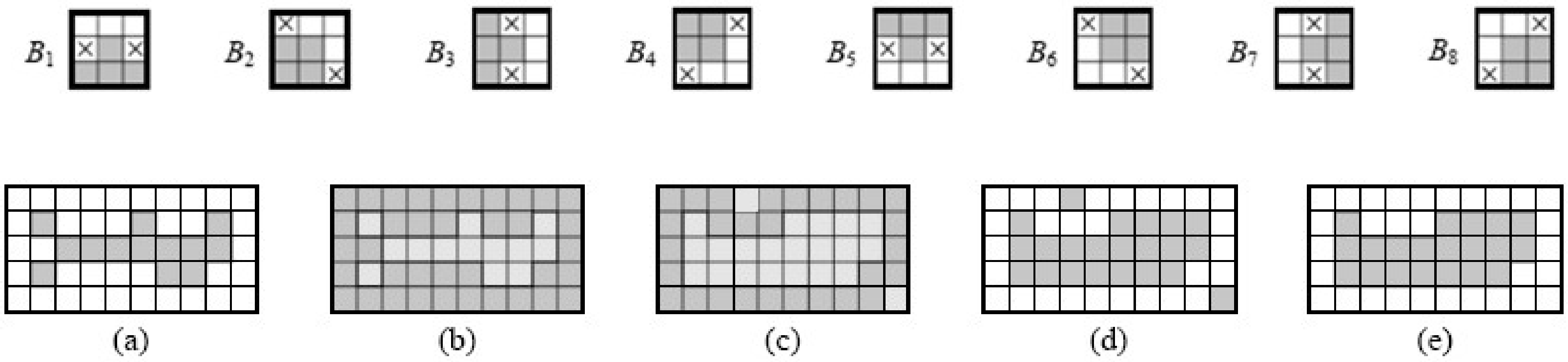


图 14.3.7 利用细化进行粗化

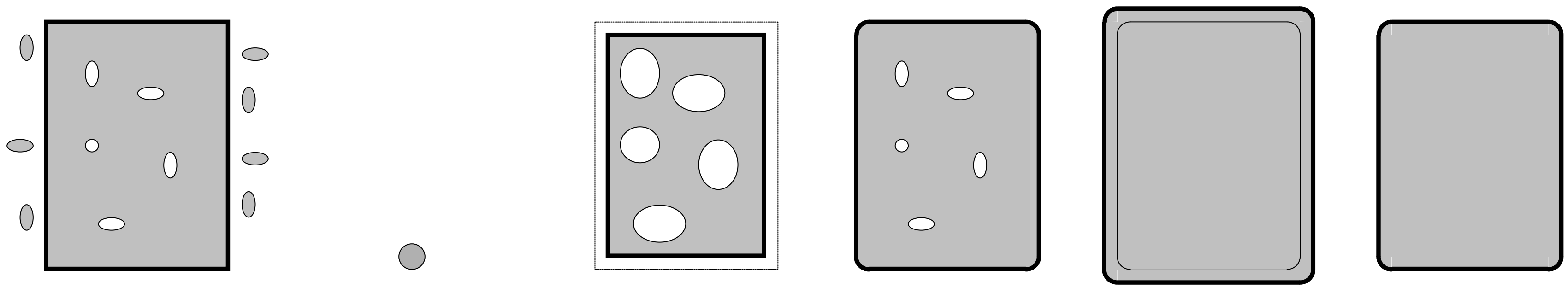
12.4 二值形态学实用算法

1. 噪声滤除

先开启后闭合

$$\{[(A \ominus B) \oplus B] \oplus B\} \ominus B = (A \circ B) \bullet B$$

腐蚀　　膨胀　　膨胀　　腐蚀



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

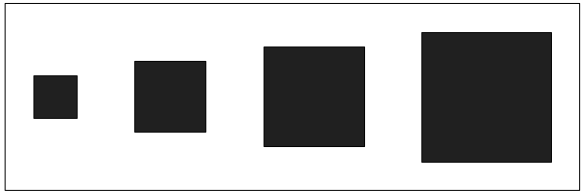
12.4 二值形态学实用算法

2. 目标检测

3 × 3，5 × 5，7 × 7和9 × 9的实心正方形

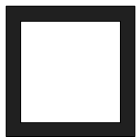
3 × 3实心正方形

9 × 9方框

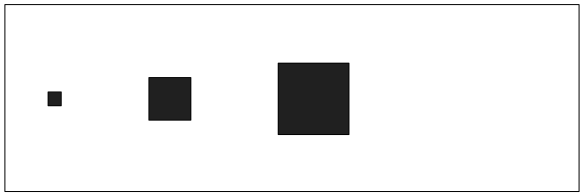


(a)

(b)



(c)



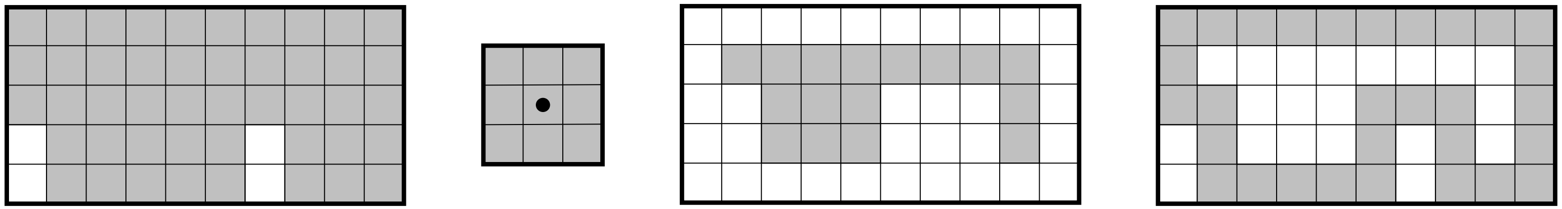
(d)

12.4 二值形态学实用算法

3. 边界提取

先用1个结构元素B腐蚀 A，再求取腐蚀结果和A的差集就可得到边界 $\beta(A)$

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$



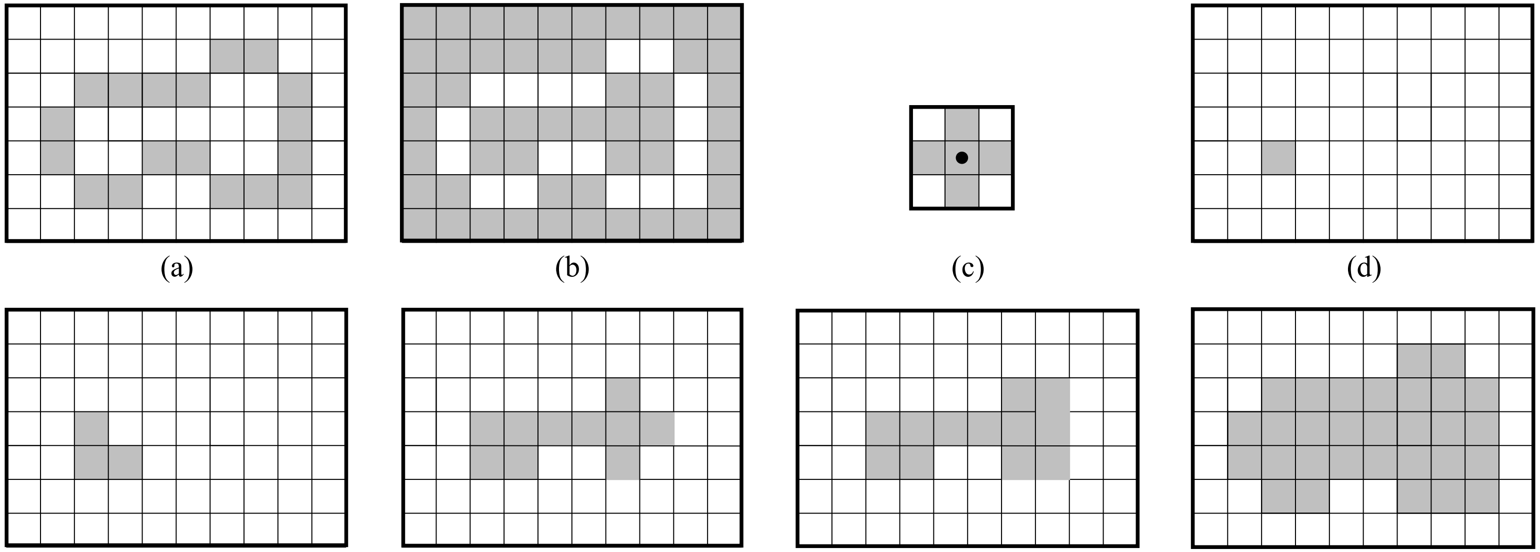
(a) (b) (c) (d)

结构元素是8-连通的，而所得到的边界是4-连通的

12.4 二值形态学实用算法

4. 区域填充

$$X_k = \left(X_{k-1} \oplus B\right) \bigcap A^c \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$



(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

结构元素是4-连通的，而原填充的边界是8-连通的

12.4 二值形态学实用算法

5. 区域骨架提取

$$S(A)=\bigcup_{k=0}^{K} S_k(A) \quad S_k(A)=(A\ominus kB)-[(A\ominus kB)\circ B]$$

$$(A\ominus kB)=((\cdots(A\ominus B)\ominus B)\ominus\cdots)\ominus B$$

$$K=\max\{k \mid (A\ominus kB)\neq\phi\}$$

$$A=\bigcup_{k=0}^{K}(S_k(A)\oplus kB)$$

12.4 二值形态学实用算法

5. 区域骨架提取

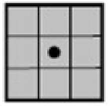
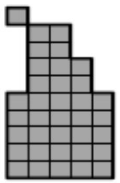
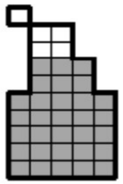
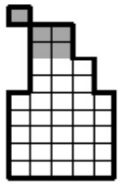
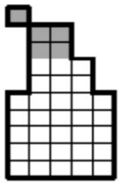
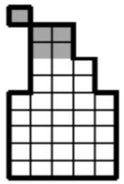
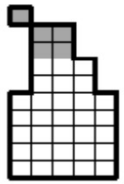
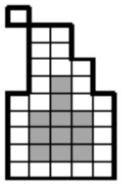
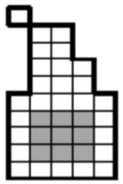
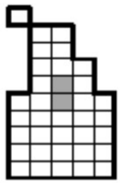
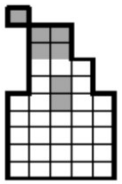
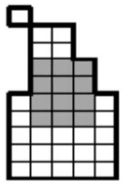
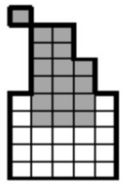
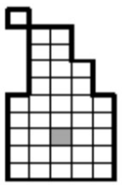
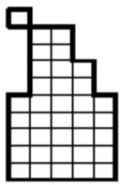
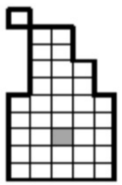
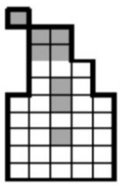
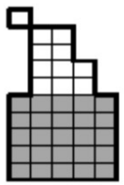
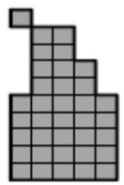


表 14.4.1 区域骨架抽取示例

列	1	2	3	4	5	6	7
运算		$A \ominus kB$	$(A \ominus kB) \circ B$	$S_k(A)$	$\bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$	$S_k(A) \oplus kB$	$\bigcup_{k=0}^{K} [S_k(A) \oplus kB]$
	$k=0$						
	$k=1$						
	$k=2$						

12.4 二值形态学实用算法

5. 区域骨架提取

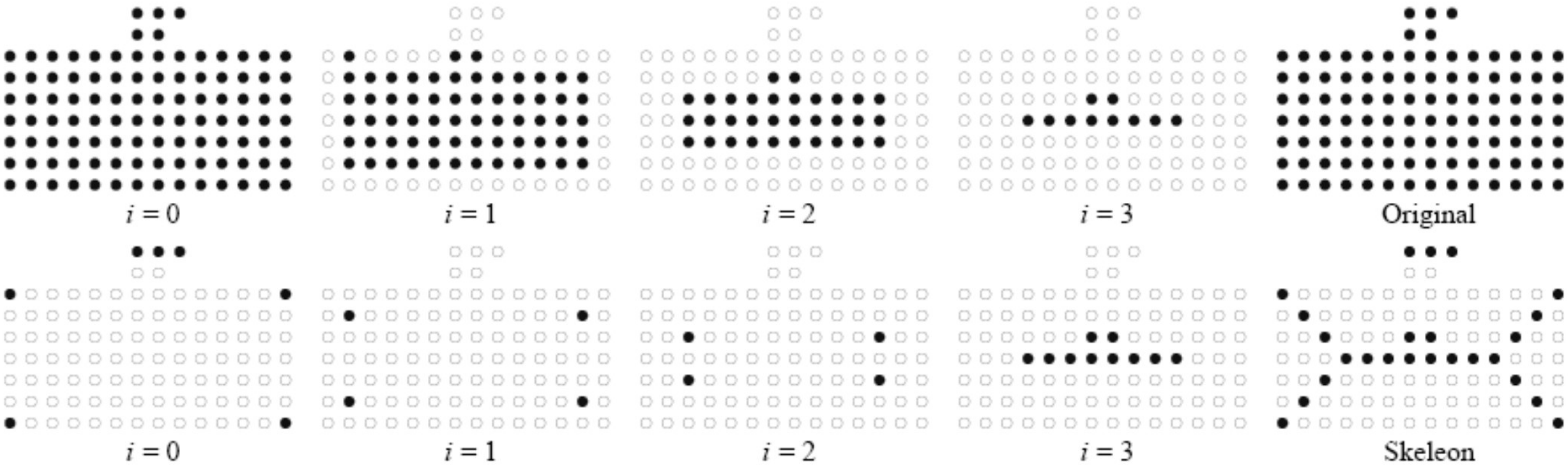


图 14.4.6 形态学骨架示例.

12.4 二值形态学实用算法

5. 区域骨架提取

(a) (b) (c) (d)

图 14.4.7 形态学骨架计算实例

(b) 3x3; (c) 5x5; (d) 7x7