OI数学基础

Shinetism
YALI
July 21, 2019

OI数学基础

- 之前讲了数学基础，为什么还要讲数学基础?
- 因为数学的内容太多了，接下来还要将数学，难度会稍微大一些。
- 当然，OI中的数学远远不止这些，所以仍然是数学基础。

目录

矩阵快速幂

利用交换律解决问题!

矩阵快速幂

- 矩阵是一个按照长方形阵列排列的数字的集合。
- 矩阵加减法：对应位置相加减（仅限同型矩阵）
- 矩阵乘法：
  - 记 $C = AB$，则： $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \times B_{k,j}$
- 所以矩阵乘法要求一个 $n \times m$ 的矩阵和一个 $m \times k$ 的矩阵相乘，得到一个 $n \times k$ 的矩阵。
- 矩阵的乘法不满足交换律。
- 但是满足结合律（这是关键）

矩阵快速幂

- 假设我们要求斐波那契数列的第 n 项。
- 构造矩阵 $A_n = \begin{bmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- 则 $A_{n+1} = BA_n$
- 所以 $A_n = B\left(B\left(B \cdots (BA)\right)\right) = B^{n-1}A_1$
- 利用快速幂求解。

T1 XN数列

- Description:
  - 给你6个数，m, a, c, x_0, n, g
  - $x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m$，求$\sum_{i=1}^{n} x_i \bmod m$.
- Restraints:
  - 六个数均小于 $1e18$.

T1 「WIKI1281」XN数列

- 构造矩阵 $\begin{bmatrix} x_n \\ c \\ s_{n-1} \end{bmatrix}$
- 那么转移矩阵为 $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 将乘法改为取模快速乘。

生成树计数

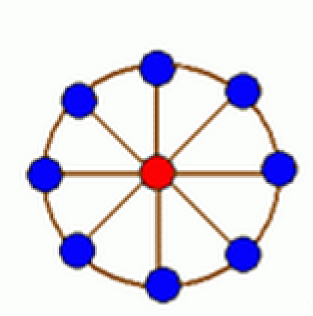
令人惊奇!

生成树计数

- 一个图 G 的度数矩阵为 D。当 $i \neq j$ 时，$D_{i,j} = 0$；否则等于点 i 的度数。
- 一个图 G 的邻接矩阵为 A。
- 那么 G 的基尔霍夫矩阵 $C = D - A$
- 根据矩阵树定理，图 G 的生成树是矩阵 C 的任意 $n-1$ 阶主子式的行列式的绝对值。
- 这个定理很神奇，证明较为复杂，用处不大，这里略过。

T2 「WIKI1281」[FJOI2007]轮状病毒

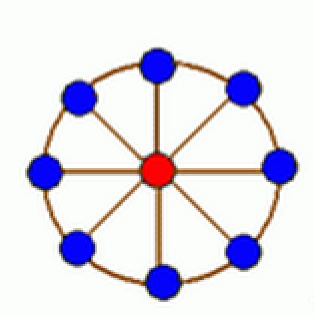
- Description:
  - 求一个外围有 n 个点的如右图形式的图的生成树个数。



- Restraints:
  - $n \leq 100$

T2 「WIKI1281」[FJOI2007]轮状病毒

- 直接上生成树计数是可以的。
- 也可以用行列式推导，得到递推式：$f(i) = f(i-1) \times 3 - f(i-2) + 2$
- 直接找规律也可以发现上面的式子。



分数规划

二分！

分数规划

- 分数规划是一类相对抽象的问题。
- 主体思路如下：
- 我们需要求 $\frac{A}{B}$ 的最大值，首先二分一个值 λ。
- 接下来我们要判定$\frac{A}{B}$是否可以大于这个值。
- 即 $A-\lambda B$ 是否可以为正。
- 采取其他思路解决这个问题。

T3 SDOI2017 新生舞会

- Description:
  - 有 n 个男生和 n 个女生参加新生舞会，要求两两配对，共 n 对。
  - 任意一对男女之间存在一个喜悦程度 $a_{i,j}$，存在一个不协调度 $b_{i,j}$。
  - 寻找一种配对方式，使得 $\frac{\sum a_i}{\sum b_i}$ 最大。
- Restraints:
  - $n \leq 100$

T3 SDOI2017 新生舞会

- 二分后，建立二分图
- 对应边权为 $a_{i,j} - \lambda b_{i,j}$，求二分图带权最大匹配。
- 直接跑费用流吧。

博弈论

运筹学!

博弈论

- 博弈论是运筹学的分支（是不是很高大上？）
- OI中的博弈主要是平等博弈，感性地来讲就是同一个局面对于不同的人是一样的（比如可以进行的操作不会因为不同的人而改变）
- 在平等博弈中通常是有必胜策略的（好像OI题目几乎都是这样）
- 我们今天讲一个最常考的、最基础的考点——SG函数。

SG函数和SG定理

- 平等博弈有两个特性（或者说两个规则）：
  - 一个状态是必败状态当且仅当它的所有后继状态是必胜状态
  - 一个状态是必胜状态当且仅当它有一个后继状态是必败状态
- 我们先定义一种运算$mex(S)$，表示数集S不包含的最小自然数。
- 那么对于当前状态x，$SG(x) = mex(S)$，其中S为x的所有后继状态的SG值的集合。
- 我们根据这样的定义，可以发现：
  - $SG(x) = 0$当且仅当x为必败状态
- 接下来有SG定理：
  - 假设有多局游戏同时进行，每个人每次可以在任意一局游戏中操作一次，那么新游戏的SG值是各局游戏的SG值的异或和。

NIM游戏

- 我们先讲著名的NIM游戏：
  - 有 n 堆石子，两人轮流操作，每次可以从一堆石子中拿走任意颗。无法操作的人输。给定状态，求必胜还是必败。
- 我们先思考一堆石子（一局游戏）
- 它的SG值就是石子个数。
- 那么直接异或起来就行了。

T4 「BZOJ1188」[HNOI2007] 分裂游戏

- Description:
  - 有n个瓶子，每个瓶子中有p_i颗石子。
  - 每次可以选择一个瓶子i，取出其中一颗石子，并在瓶子j,k中分别放入一颗石子（必须满足$i < j \le k$）
  - 如果当前状态必胜，输出必胜方案的第一步操作（字典序最小的）以及第一步操作的方案数。
  - 如果当前状态必输，输出-1。
- Restraints:
  - $1 < n \le 21, p_i \le 10000$

T4 「BZOJ1188」[HNOI2007] 分裂游戏

- 我们把一个石子看作一局游戏。
- 直接$O(n^3)$求出SG值。
- 然后根据每个瓶子中石子的奇偶性判断是否需要异或。
- 得到当前局面的SG值。
- 然后枚举第一步操作，判断后续状态是否必输来得到方案和方案数。

概率论

计数！期望

概率论

- 曾有位智者说过：OI中的概率题都是计数题。
- 很大一部分是这样的，如果题目需要求概率，直接根据古典概型转化为两部分计数。
- 而涉及到期望的题目常常用到期望的线性性：$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- 期望题是不同于概率题的，它往往更加多变，理解起来难度也更大。
- 下面我们来看一道题

T5 「BZOJ1076」[SCOI2008] 奖励关

- Description:
  - 你有 k 次获得奖励的机会，每次之间互不影响。
  - 对于每一次机会，系统会随机给出 n 种物品中的一种，每种物品有一个价值p_i，也有前提物品集合 S_i（只有集合中的物品都已取得时，才能取得该物品）
  - 每次机会你都可以自由决定是否取得，在最优操作策略下，求期望物品总价值（同一物品可以重复取得）
- Restraints:
  - $1 \le k \le 100, 1 \le n \le 15, -1e6 \le p_i \le 1e6$

T5 「BZOJ1076」[SCOI2008] 奖励关

- n 相对较小，我们思考下状压DP。
- 设$dp(i,s)$表示已经用过第1~$(i-1)$次机会，选取物品集合为s，接下来采取最优策略在以后会取得的期望总价值。
- 更新时先枚举每一个物品j，若物品j可取，则：
  - $dp(i,s) += \max\big(dp(i+1,s), dp(i+1, s\cup\{j\}) + p(j)\big) \times \frac{1}{n}$
- 若物品 j不可取，则：
  - $dp(i,s) += dp(i+1,s) \times \frac{1}{n}$
- 倒过来进行状态更新
- Time Complexity:$O(nk2^n)$

完结撒花～