组合, 特殊序列, 生成函数

qrsikno

2019 年 8 月 3 日

扉页

本人水平有限，因此能讲解的东西水较为简单

扉页

本人水平有限，因此能讲解的东西水较为简单

欢迎大家多多举报身边的同学

Leftmost Ball[1]

给定 n 种颜色, 每种颜色有 k 个球.

现在把他们排列成一行, 再把每种颜色第一个染成 0 号颜色 (之前未出现).
求经过操作之后能有多少种不同的序列.

两个序列不同被认为是长度不同或某个位置颜色不同.

$n \le 2000, k \le 2000$

[1] AtCoder Grand Contest 002F

Solution

- 容易发现一个性质，合法序列的任意前缀都有 0 球数 $\geq$ 颜色数
- 考虑固定颜色第一次出现的顺序，最后乘上全排列个数即可.
- 容易发现我们一个颜色 (除 0 之外可以一次性放完). 于是用 dp 来解决
- 设 $dp[i][j]$ 表示放了 i 个 0 球和 j 种颜色.
  因为没有顺序的放可能会算重，我们钦定每次放到球放到第一个空位.
- $dp[i][j] = dp[i-1][j] + dp[i][j-1] * \binom{n*k-i-j*(k-1)-1}{k-2}$
- 时间复杂度 $O(n^2)$

管道取珠[2]

给定两个 01 字符串, 每次选择从第一个字符串中还是从第二个字符串中取一个, 将其按取球顺序合并成一个字符串.
设有 a_i 种选择顺序能产生某种相同输出, 求 $\sum a_i^2$.

字符串长度:$n, m \le 500$

[2] BZOJ1566

Solution

- 因为这题强行给 a_i 加上了一个平方，直接 dp 没有办法转移
- 考虑 A_i^2 的直接意义，就是你有两个互不影响，同时进行的游戏．当产生的字符串是一样的时候，当前他们的各自的方案数乘积与所求是相等的 (都是 A_i)．
- 设 $dp[i][j][k][l]$ 表示 A 在上管道中取了 i 个球，A 在下管道中取了 j 个球，B 在上管道中取了 k 个球，B 在上管道中取了 l 个球;
- 容易发现 $i+j=k+l$，那么 dp 就只有 3 维了，可以直接做．
- 主要是这个 A_i^2 的转换，有时侯一个状态没法表示的时候可以思考其组合意义，然后把问题按照其意义计算．

Destory the Colony[3]

给定一个偶数长度 n($n \le 10^5$) 的字符串, 只包含大小写字母.

有 q($q \le 10^5$) 次询问, 每次指定两个位置, 要求通过交换字符, 使这两个位置上的类型的字符在字符串中线同一边.

并且对于其他类型的字符, 不能跨过串的中线 (也就是说必须在一边, 但是可以不跟指定的字符一边).

询问之间独立, 求方案数模 $1e9+7$ 的值.

[3] CF1111D

Solution

- 考虑去掉多余的询问, ~~实际上来讲~~只有 $52^2 = 2704$ 种状态, 其他的询问都是多余的.
- 考虑钦定两种字母, O(n) 计算方案数. 发现答案是 $|S| = \sum cnt[i] = \frac{n}{2}$, $\frac{(|S|!)^2}{\prod_{i\in S} cnt_i! \times \prod_{i\notin S} cnt_i!} = \frac{(\frac{n}{2}!)^2}{\prod cnt_i}$
- 那么就只需要考虑如何把剩下的 50 种字母塞进 $\frac{n}{2} - cnt_i - cnt_j$ 的大小的背包;
- 解决的方案是: 可以先跑一次背包, 每次要去掉两个物品时直接沿着 dp 方向转移, 减去转移的值;

Anton and School 2[4]

给定你一个只有圆括号的长度为 n 的字符串，现在要你删除一部分位置，使得剩下的子串为完美的字符串.

一个完美的字符串长度为偶数，并且左括号全在左边，右括号全在右边.

$n \leq 2e5$

[4] CF785D

Solution

- 范德蒙卷积: $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$

Solution

- 范德蒙卷积: $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$
- 考虑枚举中线的位置，但是这个位置不好找，所以我们枚举最靠右的左括号.
- 设这个左括号的左边有 L 个'(' 括号，右边有 R 个')' 括号，它的贡献为:

$$\sum_{i=1}^{min(r-1,l)} \binom{l}{i}\binom{r}{i+1}$$

- 利用组合数性质开始化柿子:

$$= \sum_{i=1}^{min(r-1,l)} \binom{l}{i}\binom{r}{r-i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{r-1} \binom{l}{i}\binom{r}{r-i-1} = \binom{l+r}{r-1}$$

时间复杂度 $O(n)$

introduction

对于一个序列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots\}$, 我们希望将他们整体都表示出来.
于是我们将序列元素作为系数, 放在函数里, 就有了生成函数: $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

introduction

对于一个序列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3 \dots\}$, 我们希望将他们整体都表示出来.
于是我们将序列元素作为系数, 放在函数里, 就有了生成函数: $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$
比如序列 $1, 2, 3, 4, 5 \dots$ 的生成函数是:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k$$

当然, 其加法可以看做是两个数列加起来, 乘法可以看做两个数列进行卷积乘 (指数位置的幂大小不变)

introduction

考虑一个全 1 的序列: $1 + x^2 + x^3 + \ldots$

令他的生成函数为 S, 我们直接等比数列求和得到:$S = \frac{1}{1-x}$~~(更加严谨的办法: x = 0 的泰勒展开)~~

; 我们可以做一些替换:

- 将 x = -x 带入, 得到正负交替的序列:$\frac{1}{1+x} = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
- 将 x = 2x 带入, 得到:$\frac{1}{1-2x} = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
- 将 0 式乘以 2, 得到:$\frac{2}{1-x} = 2, 2, 2, 2, 2, \ldots$
- 将 x 替换成 x^2, 得到:$\frac{1}{1-x^2} = 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
- 乘上一个 x, 得到:$\frac{x}{1-x^2} = 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
- 同样的, 将上面两个柿子相加, 有:$\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}$

introduction

怎么计算序列 $0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2$ 的生成函数?

introduction

怎么计算序列 $0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2$ 的生成函数?
一个比较好的办法就是差分!

$$S = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots$$

$$xS = 0 + 1x^2 + 4x^3 + 9x^4 + \ldots$$

$$(1-x)S = 1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots$$

$$x(1-x)S = 0 + 1x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots$$

$$(1-x)^2S - x = 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \ldots$$

$$(1-x)^2S - x = \frac{2x}{1-x}$$

$$S = \frac{3x - x^2}{(1-x)^3}$$

introduction

如果对生成函数求导函数，~~会是什么样子~~

- 求 0 次导，得到: $\frac{1}{(1-x)^1} = 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- 求 1 次导，得到: $\frac{1}{(1-x)^2} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- 求 2 次导，除 2 得到: $\frac{1}{(1-x)^3} = 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$
- 求 n 次导，得到: $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$ 为杨辉三角第 n+1 列的生成函数.

introduction

生成函数还可以用来求解递推数列, 对于 Fibonacci 序列:

$$A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots$$

$$xA(x) = 0 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots$$

$$x^2A(x) = 0 + 0 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \dots$$

所以有:$(1 - x - x^2)A(x) = 1 \iff A(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$
因为递推时是二元递推数列, 所以我们移动两次, 一定能保证所有的项全被减除.

当然, 下面的东西也可以用来计算特征根.

例子

有重量为 1,3,5（克）的砝码两个，问：

(1) 可以称出多少种不同重量的物品？

(2) 若要称出重量为 7 克的物品，所使用的砝码有多少种本质不同的情况？

solution

(1) 根据题目条件列出生成函数, 上标为重量
有:$f(x) = (1 + x + x^2)(1 + x^3 + x^6)(1 + x^5 + x^{10})$
最高次项为 $18 = 10 + 6 + 2$, 所以可以称出重量为 0 个物品

(2) 将 $f(x)$ 暴力展开, 发现 x^7 的系数为 2, 因此答案为 2.

- 指数型生成函数解决的是排列问题
- 对于数列 a_n，我们定义其指数型生成函数为

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+a_3\frac{x^3}{3!}+a_4\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\frac{x^i}{i!}$$

- 为什么？假设有两个 EGF(指数生成函数)，F(x)，G(x)，他们代表的序列为 $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,$ $b_0,b_1,b_2,b_3,\ldots,$ 那么：

$$F(x)\times G(x)=(\sum_{i=0}^{\infty}a_i\frac{x^i}{i!})(\sum_{i=0}^{\infty}b_i\frac{x^i}{i!})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_ix^i}{i!}\cdot\frac{b_{n-i}x^{n-i}}{(n-i)!})x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}a_ib_{n-i})\frac{x^n}{n!}$$

- 很明显，两个函数相乘是在将两个数列重新排列，中间的组合数就是枚举的位置.

Formula Table

介绍一些常用的柿子:
泰勒展开:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$ln(1+x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{i+1}}{i+1}$$

$$(1+x)^a=\sum_{i=0}^{\infty}a^{\underline{i}}\frac{x^i}{i!}$$

Tirple[5]

给出 n 个物品，价值为别为 Xi 且各不相同，现在可以取 1 个、2 个或 3 个，问每种价值和有几种情况？

顺序不同算一种

$X_i \leq 40000$

[5] BZOJ3771

Solution

设生成函数 $f(x)$，将系数定为选的方案数，指数定为代价: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i}$

记 $B(x)$ 表示连续取相同 2 个物品的生成函数，$C(x)$ 表示连续取相同 3 个物品的生成函数

考虑用 f^3, f^2, f 来表示选 3 个，选 2 个，选 1 个的方案.
显然这样会算重，$(x, y), (y, x)$ 会算总共 2 次，但是 (x, x) 只会算一次. 所以连续取 2 个的方案就是: $\frac{f^2 - B}{2}$

算 3 个的时候，(a, a, b) 会算 3 次，(a, b, c) 会被算 6 次，(a, a, a) 会被算 1 次.
于是直接容斥减去多余的方案数，连续取 3 个的方案数为:

$$\frac{f^3 - 3AB + 2C}{6}$$

多项式求逆元

给定 $A(x)$, 求出 $B(x)A(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$ 的 $B(x)$

多项式求逆元

给定 $A(x)$, 求出 $B(x)A(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$ 的 $B(x)$

每次先求出 $\mod x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 的值, 然后平方求出 $\mod x^n$ 的值. 假定我们求得:

$$A(x)G(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$$

那么必然有: $A(x)B(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$
两式相减再除掉 A(x):

$$\therefore B(x) - G(x) \equiv 0 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$$

平方 + 乘 A(x):

$$A(x)B^2(x) + A(x)G^2(x) - 2A(x)B(x)G(x) \equiv 0 \pmod{x^n}$$

整理:$B(x) + A(x)G^2(x) - 2G(x) \equiv 0 \pmod{x^n}$

$B(x) \equiv 2G(x) - A(x)G^2(x) \pmod{x^n}$

多项式求平方根

给定 $A(x)$, 求出 $B^2(x) \equiv A(x) \pmod{x^n}$ 的 $B(x)$

多项式求平方根

给定 $A(x)$, 求出 $B^2(x) \equiv A(x) \pmod{x^n}$ 的 $B(x)$

每次先求出 $\mod x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 的值, 然后平方求出 $\mod x^n$ 的值. 假定我们求得:

$$G^2(x) \equiv A(x) \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$$

那么必然有: $(G^2(x) - A(x)) \equiv 0 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$
平方:

$$(G^2(x) - A(x))^2 \equiv 0 \pmod{x^n}$$

配凑一下:

$$(G^2(x) + A(x))^2 \equiv 4G^2(x)A(x) \pmod{x^n}$$

整理得:$(\frac{G^2(x)+A(x)}{2G(x)})^2 \equiv A(x) \pmod{x^n}$

小朋友和二叉树[6]

考虑一个含有 n 个互异正整数的序列 c[1],c[2],...,c[n]。
如果一棵带点权的有根二叉树满足其所有顶点的权值都在集合 c[1],c[2],...,c[n] 中，就是好的二叉树。
一棵带点权的树的权值，是其所有顶点权值的总和。
给出一个整数 m，对于任意的 s(1<=s<=m) 计算出权值为 s 的好二叉树的个数。
两个二叉树不同当他们点数不同或者结构不同.

我们只需要知道答案关于 998244353 取模后的值。

$$1 <= n <= 10^5 1 <= m <= 10^5, A_i \leq 1e5$$

[6] CF438E

Solution

考虑一个基本的 Dp, 设 $dp[k]$ 表示树的权值为 k 的方案数, 那么当 (k $>$ 0):

$$dp[k] = \sum_{i=0}^{m} vis[i] \sum_{j=0}^{k} dp[j] * dp[k-i-j]$$

不难发现:

$$dp = \sum_{i=0}^{m} (dp * dp)(k-i) * vis[i] = dp^2 * vis$$

综合一下, 有:

$$dp = dp^2 * vis + 1$$

解得

$$dp = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4vis}}{2vis} = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1-4vis}}$$

由于 vis[0] $=$ 0, 所以当取减号的时候逆元不存在, 所以保留 $+$ 号.

直接多项式求逆, 多项式开根即可.

多项式求 ln

给出 $A(x)$, **求出** $B(x) \equiv ln(A(x)) \pmod{x^n}$

考虑对 ln(f(x)) **求导再积分**:

$$ln(f(x)) = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

多项式求 exp

给出 $A(x)$, 求出 $ln(B(x)) \equiv A(x) \pmod{x^n}$

首先你必须知道一个牛顿迭代:

$$F(x) \equiv F_0(x) - \frac{F_0(x)}{F'_0(x)} \pmod{x^n}$$

每次迭代一次精度可以翻倍.

我们整理一下, 令 $G(B(x)) = \ln B(x) - A(x)$
把 $B(x)$ 当作自变量, $A(x)$ 当作常数, 求导得: $G'(B(x)) = \frac{1}{B(x)}$

那么直接套用牛顿迭代的柿子:

$$F(x) = F_0(x) - (ln(F_0(x)) - A(x)) * F_0(x)$$

$$F(x) = F_0(x)(1 - \ln F_0(x) + A(x))$$

其中

$$F_0(x)$$

为上一次计算的结果.

付公主的背包[7]

背包最多可以装 10^5 大小的东西

有 n 种商品，每种商品体积为 Vi，都有 10^5 件

给定 m，对于 $s \in [1, m]$，请你回答用这些商品恰好装 s 体积的方案数

$$n, m, V_i \le 10^5$$

[7] Luogu4389

Solution

首先列出生成函数:

$$f(x) = \prod \sum_{i=1} x^{iv} = \prod \frac{1}{1 - x^v}$$

当然, ~~雨果~~你要把这些生成函数全部乘起来, ~~那是不可能的~~, 时间复杂度爆炸.

我们可以把多项式先 ln, 然后再 exp 回去. $g(x) = ln \prod f(x) = \sum \ln f(x)$
考虑求导再积分:

$$\ln f(x) = \int (1 - x^v) \sum_{i=0} ivx^{iv-1} \, dx$$

$$= \int \sum_{i=1} ivx^{iv-1} - \sum_{i=1} (i-1) vx^{iv-1} \, dx$$

$$= \int \sum_{i=1} vx^{iv-1} \, dx = \sum_{i=1} \frac{x^i v}{i}$$

发现这是一个调和级数的形式, 所以我们只要每次枚举倍数去构造 $\ln f(x)$, 最后直接 exp

Catalan

- $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
- 生成函数: $g(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$
- 卡特兰数 (C_n) 是 $n+2$ 条边的凸多边形的三角剖分方案，也是长度为 2n 的合法括号序列，和 n 个数出栈入栈的方案数.

Catalan

- $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
- 生成函数: $g(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$
- 卡特兰数 (C_n) 是 $n+2$ 条边的凸多边形的三角剖分方案, 也是长度为 2n 的合法括号序列, 和 n 个数出栈入栈的方案数.
- 由于它是多边形三角剖分的方案数. 显然 $C_1 = 1$, 特别的令 $C_0 = 1$
- (意义) 考虑 $(n, 1)$ 这条边所在的三角形的另一个点, 会将整个多边形分成三个部分, 变成三个子问题

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} * C_{n-i}$$

- 也就是说满足以上柿子的都是卡特兰数.
- 同样的对于括号序列, 出栈问题, 我们可以采用同样的方法分析.

第一类斯特林数

- 定义: 表示将 n 个数分为 k 个轮换的方案数.(不能翻转)

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

- 性质:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

- 生成函数:

$$f_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Bandit Blues[8]

给你三个正整数 n,a,b, 定义 A 为一个排列中是前缀最大值的数的个数,B 为一个排列中是后缀最大值的数的个数.

求长度为 n 的排列中满足 A = a 且 B = b 的排列个数在模 998244353 意义下的值。

$n \leq 10^5$

[8] CF960G

Solution

设 $f(i,j)$ 表示 i 个数的排列，有 j 个前缀最大值。
从大到小放数字, 可以得到递推式:$f(i,j) = f(i-1,j-1) + (i-1)f(i-1,j)$, 就是第一类斯特林数。
因为 n 的前面和后面都没有比它更大的数, 所以题目要求的 a 个数一定在 n 前面，b 个数一定在 n 后面，枚举 n 所在的位置，答案就是:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} \begin{bmatrix} i-1 \\ a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-i \\ b-1 \end{bmatrix}$$

考虑其意义, 在 n - 1 个点里面选 i - 1 个点结成 a - 1 环, 再把剩下的点结成 b - 1 个环.
就相当于我们结成 a + b - 2 个环, 再选出 a - 1 个环.

$$Ans = \begin{bmatrix} n-1 \\ a+b-2 \end{bmatrix} \binom{a+b-2}{a-1}$$

直接 NTT 求出第一类斯特林数即可.

Festival Organization[9]

求 $\sum\limits_{n=l}^{r}\binom{f_n}{k} \bmod 10^9+7$. 其中 f_n 是长度为 n 的 01 序列中，没有连续两个或超过两个 0 的个数。

$1 \le k \le 200, 1 \le l \le r \le 10^{18}$

[9] CF717A

Solution

先考虑怎么求 f_n, 设 $dp[i][j]$ 表示做到第 i 位, 结尾为 j 的方案数, 容易得到:

$$dp[i][0] = dp[i-1][1]$$

$$dp[i][1] = dp[i-1][1] + dp[i-1][0]$$

将递推柿子写成矩阵的形式, 发现它和 $fibonacci$ 的矩阵是一样的.
我们可以通过手玩得到, $dp[1][1] = 1$, $dp[2][1] = 2$, 跟 fib 数列的第 $2, 3$ 项是一样的.

$$dp[i][1] = fib(i+1), dp[i][0] = fib(i), f(i) = fib(i+2)$$

Solution

现在的问题转化成了: $\sum_{n=l}^{r} \binom{fib(n+2)}{k} \bmod 10^9+7$

显然我们只要求: $\sum_{n=l}^{r} \binom{fib(n)}{k} \bmod 10^9+7$

然后开始化柿子:

$$\sum_{n=l}^{r} \binom{fib_n}{k}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=l}^{r} fib_n^{\underline{k}}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=l}^{r} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} fib_n^i$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \sum_{n=l}^{r} fib_n^i$$

Solution

这时候就要运用特征方程法，求出 fib 的前缀和.

$$fib_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

令 a$=\frac{\sqrt{5}}{5}, b = -\frac{\sqrt{5}}{5}, x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，那么 $fib_n = ax^n + by^n$。

$$\sum_{i=l}^{r} fib_i = \sum_{n=l}^{r} (ax^n + by^n)^i$$

$$= \sum_{n=l}^{r} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (ax^n)^j (by^n)^{i-j}$$

$$= \sum_{n=l}^{r} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (a^j b^{i-j})(x^j y^{i-j})^n$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (a^j b^{i-j}) \sum_{n=l}^{r} (x^j y^{i-j})^n$$

Solution

但是有个严重的问题：$\sqrt{5}$ 在模 10^9+7 意义下不存在。
那么就要用到一个骚操作：

令 $(a, b) = a + b\sqrt{5}$，那么上文中的四个常数
$a = (0, 5^{-1}), b = (0, -5^{-1}), x = (2^{-1}, 2^{-1}), y = (2^{-1}, -2^{-1})$。

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac + 5bd, ad + bc)$$

$$\frac{1}{(a, b)} = (\frac{a}{a^2 - 5b^2}, \frac{-b}{a^2 - 5b^2})$$

第二类斯特林数

- 定义: 表示将 n 个数分为 k 个不可区分的箱子的方案数.

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

- 先容斥一下, 得到:

$$\left\{ m \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{k!}{i!(k-i)!} (k-i)^m = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \frac{i^m}{i!}$$

- 这个柿子是可以 O(nlogn) 卷积的.
- 考虑一个实际问题, k 个球放到 n 个盒子, 可能没法放进去:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} \binom{n}{k} k!$$

Crash 的文明世界[10]

给你一个 n 个点的树，对于点 i，求:

$$S(i) = \sum_{i=1}^{n} dist(i,j)^k$$

$n \le 5e4, k \le 150$

[10] BZOJ2159

Solution

利用上面写的那个常用的转化。

令 $dp[i][j] = \sum\limits_{k=1}^{n} C(dist(i,k),j)$.

那么答案 $s(i)$ 就可以表示为 $\sum\limits_{j=1}^{k} S(k,j) \times j! \times dp[i][j]$

注意到 $dp[u][j] = \sum_{i=1}^{n} C(dis(u,i),j)$ 是组合数.

设 $down[u][j]$ 表示 $i \in subtree[u]$ 的解, $up[u][j]$ 表示 $i \in tree - subtree[u]$ 的解
利用杨辉三角形的公式转移.

时间复杂度就是 $O(nk + k^2)$.

Thanks.