搜索选讲

ddd

2018 年 10 月 1 日

例题 1

给你 n 张扑克牌，保证这 n 张来自于同一副。你可以打若干次牌，第一次可以打任意数字，之后每次打的数字，必须是之前打过的数字之和的约数。问是否存在一种打牌方案，使得可以打出所有牌，输出方案。

- $1 \leq n \leq 52$。

题解

一个显而易见的做法是直接搜索，搜索过程中记录前面的数字之和，只选可能的牌作为下一张。

然然而这么做是通过不了的。

尝试倒着搜索，搜索过程中记录剩下的牌的数字之和，只选可能的牌作为前一张。显然状态数会少很多。

可以通过了。

例题 2

给出一个由'a', 'b', 'c' 组成的长度为 n 的字符串。

定义一个子序列 T 的价值为 $\frac{\mathrm{len}_T^2}{c_T}$，其中 len_T 表示 T 的长度，c_T 表示 T 的最小循环节长度。

找出价值最大的子序列。

- $1 \le n \le 10^4$。

题解

可以发现答案不会小于 $\frac{n^2}{9}$，因为选出现次数最多的字母即可达到这个值。所以最优情况下，子序列的最小循环节长度不会超过 8，暴力枚举所有长度不超过 8 的字符串，作为最小循环节，更新答案即可。

时间复杂度 $O(3^8 n)$。

例题 3

给出平面上 n 个点 (x_i, y_i)，要求找到一个点 (x, y)，使得这个点到给出的那些点的欧几里得距离之和最短。

- $1 \le n \le 1000$。
- $-10^6 \le x_i, y_i \le 10^6$。

题解

当 x 固定时，答案随着 y 的变化是一个单峰函数。所以对于一个给定的 x，可以通过三分法求出最优的 y。

对于不同的 x，最优答案随 x 的变化也是一个单峰函数，所以可以通过三分套三分求出最优的 x，同时得到最优的 y。

时间复杂度 $O(n\log^2 V)$。

例题 4

定义 ′ 运算如下：

- 如果 $p=1$，$p^{'}=0$。
- 如果 p 是质数，$p^{'}=1$
- 否则 $p^{'}=(a\times b)^{'}=a^{'}\times b+a\times b^{'}$

给出 k,r，求出所有满足 $x^{'}=kx, 1\leq x\leq r$ 的 x。

- $1\leq k\leq 30, 1\leq r\leq 2\times 10^{18}$。

题解

设 $n=\prod_{i=1}^{t}p_i^{q_i}$，其中 p_i 为质数。则 $n^{'}=\sum_{i=1}^{t}\frac{q_i}{p_i}n$。由于 $n^{'}=kn$，所以 $\sum_{i=1}^{t}\frac{q_i}{p_i}=k$。

因为 p_i 为质数，所以不可能出现这种情况：$\frac{q_x}{p_x}$ 和 $\frac{q_y}{p_y}$ 都不是整数，而他们的和为整数。也就是说 $\frac{q_i}{p_i}$ 必须为整数。

即对于一个 p_i，其在 n 中的次数必定为 p_i 的倍数。所以把形如 p^p 的数拿出来，暴力搜索从中选 k 个可以组成的数，即为答案。

例题 5

给出 n 杯糖水，第 i 杯糖水的总质量为 m_i，其中糖的质量为 t_i。现在给出一个分数 $\frac{a}{b}$，问能否选出若干杯糖水，使得这些杯混合之后，糖的质量占总质量之比为 $\frac{a}{b}$。

- $2 \leq n \leq 35$。
- $1 \leq t_i \leq m_i \leq 10000$。
- $1 \leq a \leq b \leq 10000$。

题解

假设选的糖水的下标集合为 S，则混合之后的浓度为 $\frac{\sum_{i\in S} t_i}{\sum_{i\in S} m_i}$。由该式等于 $\frac{a}{b}$ 可得：$a\times\sum_{i\in S} m_i = b\times\sum_{i\in S} t_i$。

一个显而易见的暴力为：枚举 S，对于每个 S 判断是否可行，复杂度 $O(n\times 2^n)$，不太行。

设 $m=[\frac{n}{2}]$，先考虑前 m 杯糖水的下标的子集 S_1，可以得到 2^m 组 $(\sum_{i\in S_1} t_i, \sum_{i\in S_1} m_i)$。再考虑剩下的 $n-m$ 杯糖水的下标的子集 S_2，可以得到 2^{n-m} 组 $(\sum_{i\in S_2} t_i, \sum_{i\in S_2} m_i)$。

考虑合并 S_1, S_2 的信息。如果 $S_1\cup S_2$ 满足条件，则 $a\times(\sum_{i\in S_1} m_i+\sum_{i\in S_2} m_i) = b\times(\sum_{i\in S_1} t_i+\sum_{i\in S_2} t_i)$。移项可得 $a\times\sum_{i\in S_1} m_i - b\times\sum_{i\in S_1} t_i = -(a\times\sum_{i\in S_2} m_i - b\times\sum_{i\in S_2} t_i)$。

题解

$$a \times \sum_{i \in S_1} m_i - b \times \sum_{i \in S_1} t_i = -(a \times \sum_{i \in S_2} m_i - b \times \sum_{i \in S_2} t_i)$$

所以预处理出 S_1 和 S_2 对应的 $a \times \sum_{i \in S} m_i - b \times \sum_{i \in S} t_i$，接下来只需要考虑两个集合里面有多少对元素之和为 0 即可。可以用 map 统计。总时间复杂度 $O(n \times 2^{\frac{n}{2}})$。

例题 6

Johnny 有若干个玩具，玩具的种类可能相同也可能不同。现在已知他的这些玩具有 n 个本质不同的子集（包括空集），问玩具的个数可能是多少。输出所有的可能解。

- $1 \le n \le 10^9$。

题解

假设 Johnny 有 a_i 个玩具 i，那么显然会有 $\prod_i(a_i+1)$ 个本质不同的子集。所以题目也就是求：如果 $n=a_1a_2\ldots a_k$，$\sum_{i=1}^{k} a_i$ 有多少种可能。

由于 a_i 的顺序不影响答案，所以不妨让 a_i 以非降序分布。如果现在已经决策到了 a_k，且 $\prod_{i=1}^{k-1} a_i=t$，那么 a_k 一定是 $\frac{n}{t}$ 的约数，根号分解约数即可。

例题 7

给定一个 $a \times b \times c$ 的长方体，定义其表面上两个点的距离为沿着长方体表面走的最短路径的长度。找到距离最远的点对的距离，且其中一个点为长方体的顶点。

- $1 \leq a, b, c \leq 1000$。

题解

由于答案肯定在某个面上，所以不妨设在 $z = c$ 这个面上。

当 x 固定时，最远距离是关于 y 的一个单峰函数，可以三分求解。

对于不同的 x，最优答案随 x 的变化也是一个单峰函数，所以可以通过三分套三分求出最优的 x，同时得到最优的 y。

时间复杂度 $O(\log^2 V)$。

例题 8

给出一个 n 个点 m 条边的随机生成的无权无向图，有 q 次询问，每次给出 $x, y(1 \leq x, y \leq n, x \neq y)$，询问 x 到 y 的最短路。

- $n = 10^5, m = 3 \times 10^5, q = 10^4$。

题解

由于图是随机生成的，两点间的最短路期望大约是 6。对于一次询问，分别从起点和终点开始 BFS 四层，通过共同访问过的点更新答案。如果没有共同访问过的点，那么就暴力求两点间的最短路，由于这种情况的概率很小，所以不会影响复杂度。

例题 9

给出一个 n 个点 m 条边的无向图连通简单图。每条边的长度为 1；第 i 个点种有 v_i 个金币。

小偷住在 1 号点，王宫在 2 号点，小偷需要沿着到王宫的最短路去进贡。在去进贡的途中，对于经过的每个点，他都可以选择偷或不偷。如果偷，他将获得这个点的金币，但是回程时将不能访问这个点。

小偷想知道在他能回家的前提下，最多可以进贡多少金币。

- $2 \le n \le 36, 1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$。

题解

对于一个简单无向图来说，两点间的最短路的条数约为 $O(e^{\frac{n}{e}})$ 级别。所以可以搜索出所有的最短路出来逐个判断。

回程时不能经过偷过金币的点的限制可以如下转换：去程在所有点都偷窃，回程如果经过去程经过的点，那么扣除这个点的金币。显然这样与原来是等价的。

所以对于每一条最短路，先算出这条路径上的金币之和，再算一下从王宫到小偷家的最小费用，相减更新答案即可。

例题 10

给出 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，相邻两数间的空隙可以填 $+$ 或 $-$，问有多少种填法，使得运算结果等于 x。

- $2 \leq n \leq 35$。
- $-1000 \leq a_i, x \leq 1000$。

题解

折半搜索。

$O(n \times 2^{n/2})$

Thank you!