

图论复习

__stdcall

讲些什么

大量例题

经典老套路

新套路

不常见的套路

好用的套路

没什么套路的智商题



BFS

重点在建模

NORMAL

<http://codeforces.com/contest/883/problem/G>

给出一个 n 个点 m 条边的图，和一个起点 s

其中有的边是有向边，有的边是无向边

要求完成两个任务

给所有无向边定向，使得从 s 出发，能到达的点尽量多

给所有无向边定向，使得从 s 出发，能到达的点尽量少

$n, m \leq 300000$

NORMAL

直接在 BFS 过程中贪心地定向就好了

HARD

<https://www.luogu.org/problemnew/show/P1979>

HARD

重点在建模

如何设计状态？

不难想到把指定棋子和空白位置的坐标记入状态

这样直接进行 BFS ，复杂度 $O(n^4 * q)$ ，可以获得 60 分

为什么这么慢？

状态太多了

考虑精简状态

HARD

不难发现，空白格子在整个地图上乱窜是没有什么卵用的

她只有呆在指定棋子旁边的时候才有用

考虑用 $f[x][y][d]$ 表示状态

指定棋子在位置 (x, y) ，空白格子在紧挨着她的 d 方向，这里 d 可以取上下左右

转移有两种

把指定棋子和空白格子交换位置

把空白格子移动到指定棋子的另外一个方向

第二种需要的操作数量好像有点多啊。。。。

HARD

预处理

用 $f[x][y][d1][d2]$ 表示指定棋子在 (x, y) ，空白格子想要从 $d1$ 方向移动到 $d2$ 方向所需要的最少操作次数

把 (x, y) 看作障碍，BFS 一遍就可以了

预处理是 $O(n^4)$ 的，状态有 $O(n^2)$ 个，每个状态都要进行一遍 $O(n^2)$ 的 BFS

但是预处理只需要进行一次

有了预处理结果之后，我们发现之前的做法，第二种转移带了边权，因此要跑最短路

使用 Dijkstra，点数和边数都是 $O(n^2)$ 的，最短路复杂度是 $O(n^2 * \log n)$

HARD

至此完美解决，总复杂度 $O(n^4 + n^2 * \log n * q)$

HARD

https://agc012.contest.atcoder.jp/tasks/agc012_b

给一个 n 个点 m 条边的无向图，有 q 次操作

第 i 次操作，给出 v ， d ， c ，把所有到点 v 的距离不超过 d 的点都染上颜色 c

问最后每个点的颜色

$n, m, q, c \leq 100000$

$d \leq 10$

HARD

如果倒着做的话，每个点只会被染一次，染过的点就不能再染色了

是不是总复杂度可以变成 $O(n)$ ？

不太行，我不能遇到一个染过颜色的点就不走了，因为之后可能还有东西没有染色

emmmmmm。。。。

HARD

重点在建模

$d \leq 10$ ，是不是在提示我们把 d 记入状态？

用 $f[u][d]$ 表示，与 u 距离 d 以及以内的点，是否都被染过颜色了

在这个状态表示的基础上 BFS，遇到访问过的状态就可以停下来了

复杂度 $O(n * d)$

连通性

一个看起来很奇怪的问题，转化为图论就能做了

重点在建模

把 xxx 看作点，当满足 xxx 条件的时候在 xxx 之间连边

NORMAL

<https://loj.ac/problem/540>

NORMAL

瞪出来的结论

题目没说图必须连通啊？

考虑增量构造

一个团的三元环数量为 $C(n,3)$

所以我们从大到小放若干个团进去就行了

写出来跑一下，发现恰好能完美解决这个数据范围

NORMAL

<http://codeforces.com/problemset/problem/990/D>

给你 n , a , b , 你需要构造一个 n 个点的图 , 使得他的连通块有 a 个 , 她的补图的连通块个数有 b 个

你需要输出这个图的邻接矩阵

或者输出 NO , 表示不存在这样的图

$n \leq 1000$

NORMAL

不难发现， a 和 b 不可能同时大于 1

因为一个有多个连通块的图，她的补图一定只有一个连通块

所以在 a 或 b 大于 1 的时候，就可以随便构造了

当 $a=b=1$ 的时候，构造一条链就可以了

当然在 n 很小的时候是有反例的，因此要特判

NORMAL

<http://codeforces.com/contest/939/problem/D>

给定两个长度为 n 的由小写字母组成的字符串

每次可以花费 1 的代价，指定两个字母，把其中一个全部变为另一个

求使两个字符串相同的最小花费

$n \leq 100000$

NORMAL

答案不会超过 25 ，因为字母只有 26 个

重点在建模，想办法抽象为图论问题

每个字母建立一个点

如果两个字符串对应位置的字母不同，分别为 u 和 v ，那么在点 u 和点 v 之间连一条边，表示这两个字母需要相互转化

对于一个有 n 个点的连通分量，只需要 $n-1$ 次转化，就可以把这个连通分量内的所有字母都变成同一个字母

证明：任取一棵生成树，随意定一个节点为根，把每个字母都转化为她的父亲

直接用 DFS 或 BFS 统计连通块信息就可以了

LUNATIC

<http://codeforces.com/contest/871/problem/C>

平面上有 n 个点，对于每个点，你可以画一条过她的竖着的直线，或者画一条过她的横着的直线，问你能得到多少种不同的图案？

$n \leq 100000$

LUNATIC

这道题最难的部分在于看出她是一个图论题

考虑建模，使用经典的行列模型

把每行看作一个点，每列看作一个点

如果存在点 (x, y) ，那么在列 x 和行 y 所代表的点之间连一条边

问题转化为，给一个图，每条边可以附属于它所连接的两个点之中的一个，问一共有多少种不同的附属状态

如果一个连通块是一棵树，那么数量是 2^{n-1} ，否则数量是 2^n

证明：任取一棵生成树

二分图

重点还是在建模 = =

一个很奇怪的问题，转化成图论之后发现图是一个二分图

一个奇怪的图论问题，发现图实际上是一个二分图

NORMAL

<https://www.luogu.org/problemnew/show/P1525>

NORMAL

划分成两部分，已经在提示这是一个二分图的题了。。。。

二分答案，然后判定能否划分为二分图

HARD

https://code-festival-2017-qualb.contest.atcoder.jp/tasks/code_festival_2017_qualb_c

给你一个 n 个点 m 条边的无向图，进行以下操作

如果存在两个点 u 和 v ，使得从 u 走三步能恰好到达 v ，那么在 u 和 v 之间连接一条边

重复这个操作直到不能再连接新的边，问最后有多少条边？

$n, m \leq 100000$

HARD

难点在于从二分图的角度入手考虑这个题

每个连通块分开考虑

如果这是个二分图会怎么样？

观察不难发现，如果这个连通块是二分图，那么最后会变成完全二分图，否则最后会变成完全图

HARD

<https://vjudge.net/problem/UVA-11396>

给一个 n 个点的图，保证每个点度数都等于 3，问是否能把这个图分解成若干个爪

爪的定义为，左边一个点，右边三个点的完全二分图

每条边只能出现在一个爪中，但是点可以出现在多个爪中

$n \leq 300$

HARD

到这里基本上大家都能猜到结论了。。。

如果是二分图，那么可以，否则不行

考虑证明

必要性证明

把爪分为“中心”和“附属”两个部分

两个中心不能相邻，两个附属不能相邻

充分性证明

取一边为“中心”，另一边为“附属”

LUNATIC

https://agc025.contest.atcoder.jp/tasks/agc025_d

给出 n ，考虑所有坐标在 $[0, 2n-1]$ 之间的整点，一共有 $4n^2$ 个

给出 $d1$ 和 $d2$ ，请你从这 $4n^2$ 个点中选出 n^2 个，使得这 n^2 个点中不存在两个点，它们的距离为 $\sqrt{d1}$ 或者 $\sqrt{d2}$

$n \leq 300$

LUNATIC

从二分图的角度入手考虑这个题

假如只有一个 d 的限制的话，原图是二分图

证明：首先对原图进行棋盘黑白染色

当 d 是奇数，显然两个点之间如果距离为 \sqrt{d} ，那么颜色肯定不同

于是取白色为一边，黑色为另一边

当 d 是偶数，显然两个点之间如果距离为 \sqrt{d} ，那么颜色肯定相同

这时候不妨考虑所有黑色点，然后我们把 d 除以 2，变成了规模更小的子问题

LUNATIC

也就是说，这个图是两个二分图叠加在一起的图

不妨设这两个二分图分别为 A 和 B

我们这样把原图分为四个部分

同时在 A 的左边，B 的左边的点

在 A 的左边，B 的右边

A 的右边，B 的左边

A 的右边，B 的右边

根据抽屉原理，至少有一个集合大小为 n^2

并查集

并查集的考查方式有很多种

比如图论建模，首先建模成图论问题，再用并查集做

比如某些图论问题，某一步需要用到并查集解决

比如一些经典套路

NORMAL

<https://www.luogu.org/problemnew/show/P1197>

NORMAL

经典套路题

删边不好做？

离线倒着做

HARD

<http://codeforces.com/problemset/problem/915/F>

给出一个 n 个点的带边权的树

定义 $\max(u, v)$ 表示 u 到 v 的路径最大值, $\min(u, v)$ 是路径最小值

定义 $f(u, v)$ 表示 $\max(u, v) - \min(u, v)$

求所有路径的 f 的和

$n \leq 1000000$

HARD

$$f = \max - \min$$

所以分开求和，再减一下就可以了

如何求所有路径的 \max 的和呢

考虑边权最大的边，所有经过这条边的路径的 \max 都是这条边的权值

经过这条边的路径条数就是一边的点数 * 另一边的点数

然后删掉这条边，变成两个规模更小的子问题

删边不好做，倒过来使用并查集维护连通块，并加权记录连通块大小即可

对于求 \min 的和同理

HARD

<https://www.luogu.org/problemnew/show/P2024>

HARD

经典套路题

上一题中的加权并查集，维护的是一整个集合的信息，也就是集合的大小，这类信息只需要记录在代表元上即可

这个题中，我们使用点到代表元的距离表示这个点的种类，加权维护的是路径信息，因此每个点上都要记录信息

注意合并的时候细节的处理

LUNATIC

<http://codeforces.com/contest/875/problem/F>

有 n 个宝物和 m 个收藏家

每个收藏家喜欢两个宝物，但是只能从中拿走一个，每个宝物只能被一个收藏家拿走

如果第 i 个收藏家拿到了自己喜欢的宝物，会获得 $w[i]$ 的愉悦值

如何分配宝物，使得愉悦值的总和最大

可以有收藏家拿不到宝物，可以有宝物没有被拿走

$n, m \leq 200000$

LUNATIC

很裸的二分图最大权匹配

但是点数有 200000

TLE

而且二分图最大权匹配也不在考点内。。。。

LUNATIC

打开脑洞

把每个宝物看作一个点

把每个收藏家看作一个有权值的边，连接着她喜欢的两个宝物

如果连通块是一个树，每个收藏家都能拿到宝物

如果连通块是一个基环树，每个收藏家都能拿到宝物

再多一条边就不行了

最大生成基环森林

LUNATIC

怎么做？并查集？Kruskal？

先把所有边按照边权从大到小排序

依次尝试加入到图中

使用加权并查集

在每个集合的代表元上维护一个信息 `cycle`，表示这个连通分量内是否有环

合并两个集合的时候进行分类讨论

类似的题目：BZOJ 1854，Codeforces 871C

LUNATIC

常见错误方法

首先求出最大生成森林

然后在每一棵树上加一条权值最大的边

生成树

前面刚刚讲过一个最小生成树的例题了

常见的算法是 Kruskal ，再其次是 Prim ，假老师在 WC2018 上还讲了一个 B 什么的算法

Kruskal 的复杂度是 $O(m \log m)$ ，因为有个 sort 在里面

Prim 的复杂度是 $O(n^2)$ ，可以用堆优化到 $O(m \log n)$

在朴素地求 MST 的时候，显然如果 m 接近 $O(n^2)$ ，用 Prim 会更快一点，比如洛谷的 P1265

有些题的性质只有在特定的算法下才能发现，因此遇到题要几种都试试，比如假老师那个题，只能用 B 什么什么算法才能做

生成树

最小生成树有两个非常重要的性质，一般的题都离不开这两个性质

回路性质

在原图上任取一个环，环上权值最大的边一定不出现在最小生成树中

切割性质

把节点分为 S 和 T 两部分，在所有连接 S 和 T 的边中，边权最小的那条一定出现在最小生成树中

用这两个性质可以做很多经典题，比如次小生成树，比如动态加边的最小生成树，比如 Codeforces 888G

这里放一个和 MST 没什么关系的题

HARD

<http://codeforces.com/problemset/problem/840/B>

给一个 n 个点 m 条边的图，每个点有权值，权值只可能是 -1 ， 0 ， 1 之中的一个，你需要选出一些边构成一个新图，使得

所有权值为 0 的点，度数为偶数

所有权值为 1 的点，度数为奇数

所有权值为 -1 的点，度数没有限制

或者输出无解

$n, m \leq 300000$

HARD

有一种构造技巧，叫做任取一个生成树

我们任取一个原图的生成树，然后删掉所有边

如果有两个点权值为 1，那么把这条路径上的边的状态取反

如果不存在 -1 且 1 的个数是奇数个，那么无解

这道题的加强版出现在了 HAOI2018

最短路

最短路有三种常见算法

Dijkstra , 复杂度 $O(n^2)$, 堆优化可以做到 $O(m\log n)$

SPFA 或者 BF , 复杂度 $O(nm)$, 可以跑带负权的图或者判负环

Floyd , 复杂度 $O(n^3)$, 常数极小 , 有优良性质

需要注意的是

$O(nm)$ 跑不过的题千万不要用 SPFA , 除非你能保证迭代次数很少

所谓的 SLF 和 LLL 还有 DFS-SPFA 都是假的 , 复杂度都是指数级

勤快点 , 养成写 Dijkstra 的好习惯

HARD

<https://loj.ac/problem/6354>

HARD

直接建图，边数是 $O(n^2)$ 的，需要优化建图之后跑最短路

关于位运算有一些常用的优化建图套路

在这个题中，对于两个点 u 和 v ，我们在她们之间连边，当且仅当 $u \text{ xor } v$ 的结果中，有且只有一个位是 1

不难发现，这样建图和原图是等价的

现在边的数量只有 $O(n \log n)$ 了，可以跑了！

SPFA

SPFA 有一些妙用（经典套路）

比如做环状依赖的 DP

对于某个题，我们设状态 $f(S)$ 表示在 S 状态下的最值，然后用形如 $f(S) + w(S, T)$ 的方式更新 $f(T)$ ，当这个 DP 有环状依赖的时候，就可以用 SPFA 解决

比如经典的斯坦纳树问题

在边权都为正的时候，用 Dijkstra 会更好一点

NORMAL

<http://codeforces.com/problemset/problem/938/D>

有 n 个城市和 m 条双向道路，每条道路有经过她的费用 $w[i]$

在第 i 个城市看演唱会的费用是 $a[i]$

可以跑到其他城市看演唱会，再返回原城市，路费需要算两遍

对于每个城市，求出如果这个城市的人想要看演唱会，最小花费是多少

$n, m \leq 200000$

NORMAL

因为路费要算两遍，因此先把边权乘以 2

设在第 i 个城市看演唱会的费用是 $f[i]$

转移是用 $f[u] + w(u, v)$ 更新 $f[v]$

发现实际上就是最短路

建立超级源，跑 Dijkstra

FLOYD

Floyd 有一些优秀的性质

跑 Floyd 的时候，我们在最外层循环枚举 k

当 $k=u$ 的外层循环结束的时候，所有经过 u 点的最短路就已经求出来了

HARD

<https://www.luogu.org/problemnew/show/P1119>

HARD

把所有节点按照时间排序

然后直接利用刚刚那个性质做就可以了

差分约束

有一类问题是这个样子

给你很多条件，问你是否存在一组符合这些条件的解

$$v[a] - v[b] \leq c$$

$$v[a] - v[b] \geq c$$

$$v[a] = v[b]$$

移项，发现和松弛不等式长得一样，于是建图跑最短路

也可以看作一个带环 DP

NORMAL

<https://www.luogu.org/problemnew/show/P1993>

NORMAL

差分约束模板题，不解释

注意有两种建图方法

一种是跑最短路，存在负环无解，得到的解是负权值

一种是跑最长路，存在正环无解，得到的解是正权值

拓扑排序

接下来讲一些 DAG 相关的问题

拓扑排序可以用来 DP ，也可以用来判环

NORMAL

<http://codeforces.com/contest/915/problem/D>

给出一张 n 个点 m 条边的有向图

问是否能删掉一条边，变成一个 DAG ？

$n \leq 500, m \leq 100000$

NORMAL

我们可以枚举要删掉哪一条边，然后用拓扑排序判环
复杂度太高了

考虑优化暴力，合理枚举

首先找到一个环，如果不存在环肯定有解

然后枚举删掉环上的哪一条边，再判环

环的大小是 $O(n)$ 的，因此总复杂度是 $O(nm)$

DILWORTH 定理

在一个 DAG 上

最小反链覆盖等于最长链长度

最小链覆盖等于最长反链长度

反链：一个点集，没有任何一对点是前驱后继关系

著名的例题：洛谷 P1020 导弹拦截

好像没怎么考过。。。

欧拉路

小学生都会的东西（大雾

有向图和无向图的判定条件不太一样

注意是边连通，允许有孤立点的存在

构造算法可以参考紫书的算法，当然要进行优化

注意记录每条边的访问次数，注意使用当前弧优化

在 UOJ 上过了才算掌握这个板子

不过好像也没怎么考过。。。。

HARD

<http://codeforces.com/problemset/problem/788/B>

给出一个 n 个点 m 条边的图，你需要遍历这个图，起点和终点任意，使得恰好有两条边只经过一遍，其他的边都经过两遍，这样的一条遍历路径称为好的路径

定义两个好的路径不同，当且仅当那些“只经过一遍的边构成的集合不同”

问一共有多少条好的路径

保证无重边，但可能有自环

$n, m \leq 1000000$

HARD

首先，如果要求每条边都经过两遍，是很容易做到的

证明：任取一个生成树

接下来要从中选出两条边只经过一遍

不难发现，为了保证欧拉路存在，这两条边必须有一个公共顶点

然后随便算一算就好了，注意讨论一下自环的情况，挺麻烦的

HARD

<http://codeforces.com/contest/723/problem/E>

给出一个 n 个点 m 条边的无向图，你需要给每条边定向，使得有尽量多的点，入度等于出度，并构造方案

一共有 t 组数据

$t, n \leq 200$

HARD

先猜个结论：所有度数是偶数的点，最后都可以做到入度等于出度
没用啊，怎么构造方案啊？

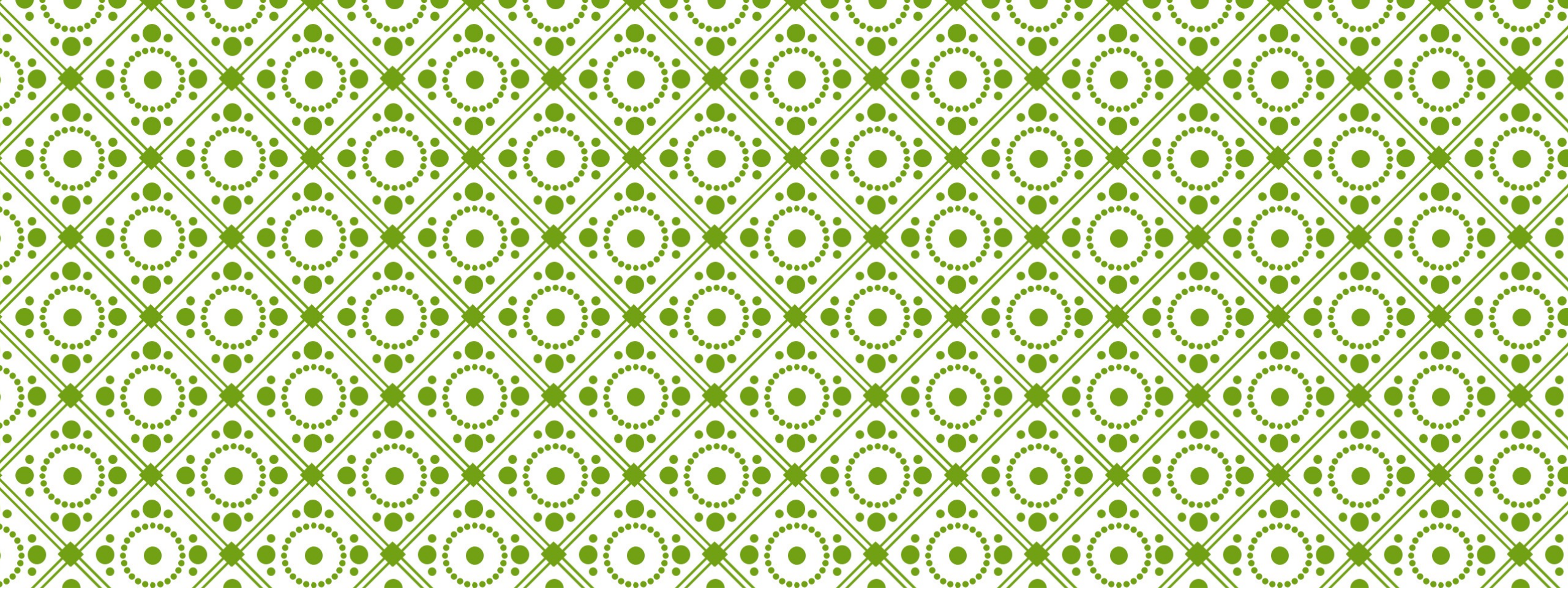
看起来挺像欧拉路的一个东西，但是跑不了欧拉路

把图改一改就可以跑了

把所有度数为奇数的节点分成两个一组，组内的两个点连一条边

现在就可以跑欧拉路了，跑完之后删掉我们加上去的边就可以了

同时证明了我们猜出来的结论



谢谢捧场 QWQ | __stdcall