实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

蛟龙四班

简单数论

Mas

整除

设 $a,b \in \mathbb{Z}$,$a \neq 0$,若$\exists\, q \in \mathbb{Z}$,使得 $b = aq$

那么就说b 可被 a 整除,记作 $a \mid b$,且称 b 是 a的倍数,a是b的约数(因数)

b 不被 a 整除,记作 $a \nmid b$

整除的性质

- $a \mid b \iff -a \mid b \iff a \mid -b \iff |a| \mid |b|$
- $a \mid b \land b \mid c \implies a \mid c$
- $a \mid b \land a \mid c \iff \forall\, x,y \in \mathbb{Z}, a \mid (xb + yc)$
- $a \mid b \land b \mid a \implies b = \pm a$
- 设 $m \neq 0$,那么 $a \mid b \iff ma \mid mb$
- 设 $b \neq 0$,那么 $a \mid b \implies |a| \leq |b|$
- 设 $a \neq 0, b = qa + c$,那么 $a \mid b \iff a \mid c$

特殊地,我们认为 0 是所有非 0 整数的倍数,即 $m \mid 0\ (m \neq 0)$

#2322、Mas爱数数

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

题目描述

Mas 是一个喜欢数数的人

我们称一个数是优秀的数字,当且仅当其约数个数为偶数.现在 Mas 想知道, $1 \sim n$ 中有多少个优秀的数字?

输入格式

一行,一个数, n

输出格式

一行,一个数,表示答案

样例输入

```
3
```

样例输出

```
2
```

数据规模与约定

对于 10% 的数据, $1 \leq n \leq 500$

对于 30% 的数据, $1 \leq n \leq 5 \times 10^4$

对于 70% 的数据, $1 \leq n \leq 5 \times 10^6$

对于 100% 的数据, $1 \leq n \leq 5 \times 10^9$

不难想到只有平方数的因子个数为奇数

总数减去平方数的个数即可

平方数个数为$\lfloor \sqrt{n} \rfloor$

时间复杂度$O(\log n)$

带余数除法

对于任何整数 a 和任何正整数 m

存在唯一整数 q 和 r,满足 $0 \leq r < m$ 且 $a = qm + r$

其中 $q = \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor$ 为商, $r = a \bmod m$为余数

余数的性质

- 任一整数被正整数 a 除后,余数一定是且仅是 $0 \sim a-1$ 这 a 个数中的一个
- 相邻的 a 个整数被正整数 a 除后,恰好取到上述 a 个余数,特别地,一定有且仅有一个数被 a 整除

算术基本定理

若整数 $N \geq 2$,那么 N 一定可以惟一地表示为若干素数的乘积(p_i为素数$c_i \geq 0$)

$$N = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_k^{c_k}$$

N的正约数的集合可以写作

$$p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k} \ (0 \leq b_i \leq c_i)$$

N的正约数个数为

$$(c_1 + 1) \times (c_2 + 1) \times \cdots \times (c_k + 1) = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} (c_i + 1)$$

N的正约数之和为

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{c_1}\right) \times \left(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{c_2}\right) \times \cdots \times \left(1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{c_k}\right)$$

$$= \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} (\sum_{j=0}^{c_i} (p_i)^j)$$

算术基本定理

约数个数的公式推导

$$(c_1+1)\times(c_2+1)\times\cdots\times(c_k+1)=\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}}(c_i+1)$$

对于每个因子p_i考虑它选了几次：0次,1次, ⋯, c_i 次,用乘法原理将所有因子合并起来即可

约数和的公式推导

$$\left(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{c_1}\right)\times\left(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{c_2}\right)\times\cdots\times\left(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{c_k}\right)=\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}}\left(\sum_{j=0}^{c_i}(p_i)^j\right)$$

对于每一个因子 p_i,选了 0次,1次,⋯ 后的值分别是 $p_i^0,p_i^1,\cdots$

这些值都会乘上其他因子,所以运用乘法分配律先把它们加起来再乘别的因子

#2399、约数个数

实验舱 青少年编程 LAB 走近科学 走进名校

题目描述

给定 n 个正整数 a_i ,请你输出这些数的乘积的约数个数,答案对 10^9+7 取模

输入格式

第一行包含整数 n

接下来 n 行,每行包含一个整数 a_i

输出格式

输出一个整数,表示所给正整数的乘积的约数个数,答案需对 10^9+7 取模

输入样例

```
3
2
6
8
```

输出样例

```
12
```

数据范围

对于全部的数据 $1 \le n \le 100, 1 \le a_i \le 2 \times 10^9$

```
void fac(long long num)
{
  for (long long i = 2; i * i <= num; i++)
    while (num % i == 0)
      cnt[i]++, num /= i;
  if (num > 1)
    cnt[num]++;
}
```

#2653、约数之和

题目描述

给定 n 个正整数 a_i ,请你输出这些数的乘积的约数个数,答案对 10^9+7 取模

输入格式

第一行包含整数 n

接下来 n 行,每行包含一个整数 a_i

输出格式

输出一个整数,表示所给正整数的乘积的约数之和,答案需对 10^9+7 取模

输入样例

```
3
2
6
8
```

输出样例

```
252
```

数据范围

对于全部的数据 $1 \le n \le 100, 1 \le a_i \le 2 \times 10^9$

最大公约数

设 a,b 是不都为0的整数,c 为满足 $c|a$ 且 $c|b$ 的最大整数,则称 c 是 a,b 的**最大公约数**,记为$\gcd(a,b)$或 (a,b)

- $\gcd(a,b)=\gcd(b,a)$
- $\gcd(a,b)=\gcd(-a,b)$
- $\gcd(a,b)=\gcd(|a|,|b|)$
- $d \mid a \wedge d \mid b \iff d \mid \gcd(a,b)$
- $\gcd(a,0)=a$
- $\gcd(a,ka)=a$
- $\gcd(an,bn)=n\gcd(a,b)$
- $\gcd(a,b)=\gcd(a,ka+b)$

如果 $(a,b)=1$,称它们互质

欧几里得算法

不妨设 $a > b$

若 $b \mid a$,那么 $b = (a, b)$

若 b ∤ a , 即 $a = b \times k + c$,其中 $c < b$

通过证明可以得到 $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$

设d为a 和 b的公约数,即 $d|a, d|b$

设$a = bk + c \Longrightarrow c = a - bk$,同时除以 d 可得 $\frac{c}{d} = \frac{a}{\mathrm{d}} - \frac{b}{d}k$

因为 $d|a, d|b$,所以 $\frac{a}{d}$ 和 $\frac{b}{d}$ 为整数,那么 $\frac{c}{d}$ 也为整数,即$d \mid \mathrm{c}$

对于所有 a 与 b 的公约数d,它也是 b 与 c即 $(a \bmod b)$的公约数

若出现$b = 0$,那么本层的a为所求

时间复杂度$O(\log n)$

最小公倍数

a 和 b 最小的正公倍数为 a 和 b 的**最小公倍数**,记作 $\mathrm{lcm}(a,b)$ 或者 $[a,b]$

设 $a\ =\ p_1^{k_{a1}}\ p_2^{k_{a2}} \cdots p_s^{k_{as}}$, $\mathrm{b} = p_1^{k_{b1}}\ p_2^{k_{b2}} \cdots p_s^{k_{bs}}$

对于a和 b,二者的最大公约数等于

$$p_1^{\min(k_{a_1},k_{b_1})} \times p_2^{\min(k_{a_2},k_{b_2})} \times \cdots \times p_s^{\min(k_{a_s},k_{b_s})}$$

最小公倍数等于

$$p_1^{max(k_{a_1},k_{b_1})} \times p_2^{\max(k_{a_2},k_{b_2})} \times \cdots \times p_s^{max(k_{a_s},k_{b_s})}$$

由于 $k_a\ +\ k_b\ =\ \max(k_a,k_b) +\ \min(k_a,k_b)$

所以

$$\gcd(a,b) \times\ \mathrm{lcm}(a,b) =\ a \times\ b$$

#1377、两仪剑法

实验舱 青少年编程 LAB 走近科学 走进名校

题目描述

两仪剑法是武当派武功的高级功夫,且必须 2 个人配合使用威力才大

同时该剑法招数变化太快、太多。设武当弟子甲招数变化周期为 n ,武当弟子乙招数变化周期为 m ,两弟子同时使用该剑法,当两人恰好同时达到招数变化周期结束时,威力最大,此时能将邪教妖人置于死地

请你计算威力最大时,每人用了多少招?

输入格式

首先输入一个 T 表示测试组数

每组输入 2 个数 n, m

输出格式

对于每组输出,输出用了多少招数

数据规模

对于 40% 的数据, $1 \le T \le 100, 1 \le n \le m \le 10^4$

对于 60% 的数据, $1 \le T \le 10000, 1 \le n \le m \le 10^6$

对于 100% 的数据, $1 \le T \le 100000, 1 \le n \le m \le 10^8$

样例输入

```
3
2 3
8 9
4 8
```

样例输出

```
6
72
8
```

同余

如果 $a \bmod m = b \bmod m$,且 $m \neq 0$,即 a, b 除以 m 所得的余数相等,记作: $a \equiv b(\bmod m)$

若 $a \equiv b(\bmod m)$,则$m \mid (a-b)$

若 $a \equiv b(\bmod m)$,且 $d|m$,则 $a \equiv b(\bmod d)$

若 $a \equiv b(\bmod m)$,则 $(a, m) = (b, m)$

如果 $a \equiv b(\bmod m)$ 且有 $c \equiv d(\bmod m)$,那么下面的模运算律成立:

$$a \pm c \equiv b \pm d(\bmod m)$$

$$a \times c \equiv b \times d(\bmod m)$$

$$a^n \equiv b^n(\bmod m)$$

以下用$\%\, m$表示 $(\bmod m)$

$$(a+b)\%\, m = \big((a \,\%\, m) + (b \,\%\, m)\big)\%\, m$$

$$(a-b)\%\, m = \big((a \,\%\, m) - (b \,\%\, m) + m\big)\%\, m$$

$$(a \times b)\%\, m = \big((a \,\%\, m) \times (b \,\%\, m)\big)\%\, m$$

#2674、九的余数

题目描述

现在给你一个自然数 $n(0 \leq n \leq 10^{100000})$,现在你要做的就是求出这个数整除九之后的余数

输入格式

第一行有一个整数 $m(1 \leq m \leq 8)$,表示有 m 组测试数据

随后 m 行每行有一个自然数 n

输出格式

输出 n 整除九之后的余数,每次输出占一行

样例输入

```
3
4
5
465456541
```

样例输出

```
4
5
4
```

$$n = a_t 10^t + a_{t-1} 10^{t-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

对于n需要使用字符串存储

从高位到低位考虑

令r_i表示

$$\left(\sum_{j=t}^{i} a_j 10^j\right) \bmod 9$$

有$r_{i-1} = r_i \times 10 + a_{i-1}$

输出r_0即可

质数

设整数 $p \neq 0, \pm 1$,如果 p 除了显然约数外没有其他约数,那么称 p 为素数(不可约数)

若整数 $a \neq 0, \pm 1$ 且 a 不是素数,则称 a 为合数

p 和 $-p$ 总是同为素数或者同为合数(如果没有特别说明,素数总是指正的素数)

整数的因数是素数,则该素数称为该整数的素因数(素约数)

小于或等于 n 的素数的个数,用 $\pi(n)$表示,随着 n 的增大,有这样的近似结果:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

素数与合数的简单性质:

- 对于合数a,一定存在素数 $p \leq \sqrt{a}$使得 $p \mid a$
- 素数有无穷多个
- 所有大于 3 的素数都可以表示为 $6n \pm 1$ 的形式

Eratosthenes筛法

每个合数 a 一定可以写成 $p \times x$ 的形式,其中 p 为a的质因子

对于每一个 $1\sim n$ 内的素数 p,枚举x,将 $p \times x$ 标记为合数

上述做法就是埃氏筛法

时间复杂度

$$O(\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{\mathrm{n}}{5}+\cdots) = O(n\mathrm{loglog}n)$$

一个小优化

对于素数 p,只筛倍数 $x \geq p$ 的数

如果 $x < p$,则 x 中一定有比 p 小的素因子,$p \times x$ 会在前面筛选过程中被筛出

```
void eratos(int n)
{
    memset(nPrime, false, sizeof nPrime);
    for (long long i = 2; i <= n; i++)
        if (!nPrime[i])
        {
            primeList[++pos] = i;
            for (long long j = i * i; j <= n; j += i)
                nPrime[j] = true;
        }
}
```

Euler筛法

保证每个合数仅被最小质因子筛去,可保证每个合数仅被筛一次

枚举 $2 \sim n$ 中的每一个数 i

- 如果 i 是素数则保存到素数表中
- 利用 i 和素数表中的素数 p_j去筛除 $i \times p_j$

  为确保 $i \times p_j$ 只被素数 p_j 筛除过这一次

  要确保 p_j 是p_j中最小的素因子即 i 中不能有比 p_j还要小的素因子

若 $p_j \mid i$,设 $i = p_j \times x$

$\forall k > j, i \times p_k = x \times p_j \times p_k$,由于 $p_j < p_k$,说明p_j不是最小质因子

当 $p_j \mid i$ 结束循环

因为每个合数仅被筛过一次,时间复杂度 $O(n)$

```
void eruleSieve(int n)
{
  memset(nPrime, false, sizeof nPrime);
  for (int i = 2; i <= n; i++)
  {
    if (!nPrime[i])
      p[++pos] = i;
    for (int j = 1; j <= pos && p[j] * i <= n; j++)
    {
      nPrime[i * p[j]] = true;
      if (i % p[j] == 0)
        break;
    }
  }
}
```

#1730、最大最小素数对

题目描述

Mas 请你输出 $[l,r]$ 上距离最近的相邻的素数对和距离最远的相邻的素数对。$3,5$ 是相邻的素数, $2,5$ 不是相邻的素数

素数对的距离定义为 2 个素数的差的绝对值

> *如* $5,7$ *距离为* 2

输入格式

输入 2 个整数 $l,r(1 \le l \le r \le 8000000)$

输出格式

如果 $a,b(a<b)$ 是距离最近的素数对, $c,d(c<d)$ 是距离最远的素数对,按如下格式输出 `a,b are closest, c,d are most distant.`

如果最近或者最远有多对,输出 a 和 c 最小的

如果没有相邻是素数对,输出 `There are no adjacent primes.`

样例输入1

```
3 10
```

样例输出1

```
3,5 are closest, 3,5 are most distant.
```

欧拉函数

欧拉函数($Euler's\ totient\ function$)即 $\varphi(n)$,表示的是小于等于 n 和 n 互质的数的个数

如 $\varphi(1) = 1$, $\varphi(8) = 4$

当 n 是质数的时候,根据定义有

$$\varphi(n) = n - 1$$

欧拉函数是积性函数,如果 $(a, b) = 1$,那么

$$\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$$

当 n 是奇数时

$$\varphi(2n) = \varphi(n)$$

欧拉函数

设 p 为任意质数,那么

$$\varphi\left(p^k\right) = p^k \times \frac{p-1}{p}$$

证明

$1 \sim p^k$ 的所有数中,除了 p^{k-1}个 p 的倍数外其它数都与 p^k 互素

$$\varphi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1} \times (p-1)$$

$$= p^k \times \frac{p-1}{p}$$

欧拉函数

根据唯一分解定理有

$$\varphi(n) = \varphi(\prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i})$$

$p_i^{k_i}$ 之间显然两两互质,根据积性函数的性质有

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{s} \varphi\left(p_i^{k_i}\right)$$

整理可得

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{s} (p_i - 1) \times p_i^{k_i - 1} = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i} \times (1 - \frac{1}{p_i}) = n \times \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

#2398、互质数个数

实验舱 青少年编程 LAB 走近科学 走进名校

题目描述

给定一个整数 n，请问有多少个整数 i 满足条件：$gcd(i,n)=1$，$1 \le i \le n$

输入格式

输入一行，输入一个整数 n。

输出格式

输出一行，输出一个整数，表示符合条件的整数个数。

样例输入

```
16
```

样例输出

```
8
```

数据规模

对于 30% 的数据 $1 \le n \le 1000$

对于 100% 的数据 $1 \le n \le 10^9$

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int n, ans;
int main()
{
  cin >> n;
  ans = n;
  for (int i = 2; i * i <= n; i++)
  {
    if (n % i == 0)
      ans = ans / i * (i - 1);
    while (n % i == 0)
      n /= i;
  }
  if (n > 1)
    ans = ans / n * (n - 1);
  cout << ans;
  return 0;
}
```

实验舱
青少年编程
LAB
走近科学 走进名校

谢谢观看