(7.2.14) 式的证明如下:

当 $F \sim F(n,m)$ 时, 则 $\frac{1}{F} \sim F(m,n)$, 从而

$$\begin{aligned} p = P(F \leqslant F_p(n,m)) &= P\left(\frac{1}{F} \geqslant \frac{1}{F_p(n,m)}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{1}{F} < \frac{1}{F_p(n,m)}\right). \end{aligned}$$

即

$$P\left(\frac{1}{F} < \frac{1}{F_p(n,m)}\right) = 1 - p.$$

由 $p$ 分位点定义, 知

$$\frac{1}{F_p(n,m)} = F_{1-p}(m,n),$$

由 (7.2.14) 式, 我们可以得到

$$F_{0.05}(15,10) = \frac{1}{F_{0.95}(10,15)} = \frac{1}{2.54} = 0.394.$$

## §7.3 统计量和抽样分布定理

### §7.3.1 统计量

抽取样本后要对总体的有关问题进行推断, 首先需要对数据, 即对样本观测值, 进行整理, 加工. 这就是要构造样本的函数.

**定义 7.6** 样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个连续函数 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为**样本函数**. 若 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 不含任何未知参数, 则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为一个**统计量**. 而代入样本观测值后 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫做**统计量的观测值**.

如总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$ 已知, $\mu$ 未知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X$ 的样本. 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2/\sigma^2$ 是统计量. 而 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ 是样本函数.

常用的统计量有以下一些:

(1) 样本均值

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{7.3.1}$$

其观测值为

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

(2) 样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \tag{7.3.2}$$

其观测值为

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

(3) 样本标准差

$$S = \sqrt{S^2}. \tag{7.3.3}$$

(4) 样本 $k$ 阶原点矩

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \tag{7.3.4}$$

其观测值为

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

(5) 样本 $k$ 阶中心矩

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, \tag{7.3.5}$$

其观测值为

$$b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

与总体矩一样, 样本 $k$ 阶中心矩也可由各阶样本原点矩表示. 如

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\overline{X}^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) = A_2 - \overline{X}^2. \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

由以上可见, 样本均值 $\overline{X}$ 是一阶样本原点矩 $A_1$, 样本方差 $S^2$ 不是二阶样本中心矩 $B_2$, 而且统计量是一个随机变量, 其观测值为一个实数.

### §7.3.2　抽样分布定理

从理论上说, 当知道总体分布时, 统计量与样本函数的分布都可以确定. 但事实上一般确定统计量与样本函数的分布却十分困难. 而当总体服从正态分布时, 一些常用统计量与样本函数的分布则是容易确定的. 我们把常用统计量与样本函数的分布的结果叫做抽样分布定理.

1. 一个正态总体下的抽样分布定理

**定理 7.3** 样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 则

(1) $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$; (7.3.7)

(2) $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$. (7.3.8)

**证** 只需证 (7.3.7), 但这几乎是显然的. 因为

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu,$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

再由正态分布可加性, 知

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

**推论** 样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自任何总体, 都有

$$E(\overline{X}) = E(X), \quad D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n}. \tag{7.3.9}$$

**定理 7.4** 样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 则

(1) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; (7.3.10)

(2) $\overline{X}$ 与 $S^2$ 相互独立.

定理 7.4 的证明超出了本书范围, 故略去.

注意 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 有两个等价的表达式, 即

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{nB_2}{\sigma^2}.$$

**定理 7.5** 样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1). \tag{7.3.11}$$

**证**　由定理 7.3, 知

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

又由定理 7.4, 知

$$V=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

且 $\overline{X}$ 与 $S^2$ 相互独立, 从而 $U$ 与 $V$ 相互独立. 于是由 $t$ 分布定义, 得

$$\begin{aligned}\frac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n-1}}}&=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Bigg/\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}\\&=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=t\sim t(n-1).\end{aligned}$$

由于 $t$ 分布的极限分布是标准正态分布 $N(0,1)$, 故在定理 7.5 条件下, $n$ 充分大时, $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 近似地服从标准正态分布 $N(0,1)$. 这个结论还可以推广到非正态总体的情形.

**定理 7.6**　对任何总体 $X, E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2>0, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的样本, 则当 $n$ 充分大时, 近似地有

(1) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1);$　　(7.3.12)

(2) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$　　(7.3.13)

(7.3.12) 是中心极限定理的等价叙述. (7.3.13) 的证明超出本书范围, 故略去.

**例 7.6**　设总体 $X\sim N(50,0.64), X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是样本, 求 $\overline{X}-\mu$ 大于总体均值 $\mu$ 的 1% 的概率.

**解**　$\overline{X}\sim N\left(50,\dfrac{0.64}{9}\right)$, 从而 $\overline{X}-\mu\sim N\left(0,\dfrac{0.64}{9}\right)$. 于是

$$\begin{aligned}P(\overline{X}-50>0.5)&=1-\Phi\left(\frac{0.5}{0.8/3}\right)=1-\Phi(1.875)\\&=1-0.969\,7=0.030\,3.\end{aligned}$$

2. 两个正态总体下的抽样分布定理

对于来自两个总体 $X$ 与 $Y$ 的两个独立样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}; Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别用 $\overline{X}, \overline{Y}, S_1^2, S_2^2$ 表示其样本均值和样本方差.

**定理 7.7** 若两个总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则统计量

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right), \tag{7.3.14}$$

从而

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1). \tag{7.3.15}$$

**证** 由定理 7.3, 知

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \quad \overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

由两个样本的独立性, 知 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立. 再由正态分布可加性, 知

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

**定理 7.8** 若两个总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, 则

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \tag{7.3.16}$$

其中

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

**证** 由定理 7.7, 知

$$U = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

又由定理 7.4, 知

$$\chi_1^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 - 1), \qquad \chi_2^2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2 - 1),$$

由两个样本的独立性知 $\chi_1^2$ 与 $\chi_2^2$ 相互独立, 再由 $\chi^2$ 分布可加性, 得

$$V = \chi_1^2 + \chi_2^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2).$$

注意 $U$ 与 $V$ 也相互独立, 于是由 $t$ 分布定义, 有

$$\frac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n_1+n_2-2}}}=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2).$$

**定理 7.9** 若两个总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 则

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1). \tag{7.3.17}$$

**证** 因为

$$\chi_1^2=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1),\quad \chi_2^2=\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1),$$

且 $\chi_1^2$ 与 $\chi_2^2$ 相互独立, 由 $F$ 分布定义, 有

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2(n_1-1)}\Big/\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2(n_2-1)}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

**例 7.7** 两个总体 $X\sim N(30,12),Y\sim N(20,18)$. 从两个总体中分别抽取容量为 16 与 25 的两独立样本. 求:

(1) 两个样本均值差在 (8,12) 内的概率;

(2) 两个样本方差比不大于 1.40 的概率.

**解** (1) 由定理 7.7 知

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(10,\ \frac{12}{16}+\frac{18}{25}\right),$$

即

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(10,1.47).$$

于是

$$\begin{aligned}P(8<\overline{X}-\overline{Y}<12)&=\varPhi\left(\frac{12-10}{\sqrt{1.47}}\right)-\varPhi\left(\frac{8-10}{\sqrt{1.47}}\right)\\&=2\varPhi(1.65)-1=2\times0.950\,5-1=0.901\,0.\end{aligned}$$

(2) 由定理 7.9, 知

$$\frac{S_1^2/12}{S_2^2/18}\sim F(15,24).$$

从而

$$\begin{aligned}P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\leqslant1.40\right)&=P\left(\frac{S_1^2/12}{S_2^2/18}\leqslant\frac{18}{12}\times1.40\right)\\&=P\left(\frac{S_1^2/12}{S_2^2/18}\leqslant2.1\right)=0.95.\end{aligned}$$

最后一步是因为查表知 $F_{0.95}(15,24)=2.11$.

## §7.4 复习分析题

**例 7.8** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\overline{X}$ 与 $B_2$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本均值与样本二阶中心矩, 试证:

$$T = \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{\sqrt{B_2}} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t(n-1).$$

**分析** 由 $t$ 分布定义, 要将 $T$ 表示为 $\dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n-1}}}$, 其中 $U \sim N(0,1), V \sim \chi^2(n-1)$, 且 $U$ 与 $V$ 相互独立.

**证** 因为 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right), X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $\overline{X}$ 与 $X_{n+1}$ 独立, 由正态分布可加性, 知

$$X_{n+1} - \overline{X} \sim N\left(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2\right),$$

从而

$$U = \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}} \sim N(0,1).$$

又由定理 7.4 后的说明, 有

$$\frac{nB_2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

由定理 7.4, 知 $\overline{X}$ 与 $S^2$ 相互独立, 从而有 $U$ 与 $\dfrac{nB_2}{\sigma^2}$ 独立. 于是由 $t$ 分布定义, 得

$$\frac{U}{\sqrt{\dfrac{nB_2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{\sqrt{B_2}} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t(n-1).$$

**例 7.9** 设总体 $X \sim N(\mu, 16)$, 其中 $\mu$ 未知, $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 $X$ 的样本.

(1) 求概率 $P(|\overline{X} - \mu| > 2)$;

(2) 记 $Y = \sum\limits_{i=1}^{9}(X_i - \overline{X})^2$, 求概率 $P(Y \leqslant 248)$.

**分析** 由正态总体下 $\overline{X}$ 的抽样分布定理可求 (1). 而 $Y$ 的形式与 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 只差一个因子 $\dfrac{1}{\sigma^2}$, 故应考虑由定理 7.4 求解 (2).

**解**　(1) 由定理 7.3, 知 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{16}{9}\right)$, 从而 $\overline{X} - \mu \sim N\left(0, \dfrac{16}{9}\right)$, 于是

$$\begin{aligned}
P(|\overline{X} - \mu| > 2) &= 1 - P(|\overline{X} - \mu| \leqslant 2) \\
&= 1 - P(-2 \leqslant \overline{X} - \mu \leqslant 2) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{2}{4/3}\right) + \Phi\left(\frac{-2}{4/3}\right) \\
&= 2(1 - \Phi(1.5)) = 2(1 - 0.933\ 2) = 0.133\ 6.
\end{aligned}$$

(2) 因为 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, 从而 $Y = (n-1)S^2$, 由定理 7.4, 有 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{Y}{\sigma^2} \sim \chi^2(8)$, 即 $\dfrac{Y}{16} \sim \chi^2(8)$. 于是

$$P(Y \leqslant 248) = P\left(\frac{Y}{16} \leqslant 15.5\right).$$

查 $\chi^2$ 分布表知 $\chi^2_{0.95}(8) = 15.5$, 故 $P(Y \leqslant 248) = 0.95$.

**例 7.10**　$X_1, X_2$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 证明:

$$F = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2} \sim F(1, 1).$$

**分析**　由 $F$ 分布定义, 要将 $F$ 表示为两个独立的 $\chi^2(1)$ 分布随机变量之比.

**证**　由正态分布可加性, 知

$$\begin{aligned}
X_1 - X_2 &\sim N(0, 2\sigma^2), \\
X_1 + X_2 &\sim N(0, 2\sigma^2).
\end{aligned}$$

于是, 由 $\chi^2$ 分布定义, 知

$$\begin{aligned}
U &= \frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1), \\
V &= \frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1).
\end{aligned}$$

下面证明 $U$ 与 $V$ 相互独立, 又由于 $(X_1, X_2)$ 服从二维正态分布, 于是 $X_1$ 与 $X_2$ 的任何线性组合 $aX_1 + bX_2$ 也服从一维正态分布. 令 $Y_1 = X_1 - X_2, Y_2 = X_1 + X_2$. 则 $cY_1 + dY_2 = aX_1 + bX_2$ 服从一维正态分布. 由第五章定理 5.8, 知 $(Y_1, Y_2)$ 也服从二维正态分布.

但由第四章习题四 (A) 组第 17 题, 知 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = D(X_1) - D(X_2) = 0$, 又二维正态分布不相关与独立性是等价的. 从而 $Y_1$ 与 $Y_2$ 相互独立, 于是 $U$ 与

$V$ 相互独立, 再由 $F$ 分布定义有

$$F = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2} = \frac{(X_1 - X_2)^2/2\sigma^2}{(X_1 + X_2)^2/2\sigma^2}$$
$$= \frac{U/1}{V/1} \sim F(1,1).$$

**例 7.11** 样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自总体 $X$, 其中 $X$ 服从指数分布 $e(\lambda)$, 求样本均值 $\overline{X}$ 的分布.

**分析** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 若能求出 $\frac{1}{n}X_i$ 也服从指数分布, 则由 $\Gamma$ 分布可加性可得 $\overline{X}$ 的分布.

**解** 记 $Y = \frac{1}{n}X$, 则 $Y$ 的值域 $R(Y) = (0, +\infty)$, 对任意 $y > 0, Y$ 有分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{1}{n}X \leqslant y\right) = P(X \leqslant ny)$$
$$= \int_0^{ny} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda y},$$

从而 $Y$ 有密度

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0, \end{cases}$$

即 $Y = \frac{1}{n}X \sim e(n\lambda)$, 也就是 $Y \sim \Gamma(1, n\lambda)$.

注意 $\overline{X} = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n$, 而 $\frac{1}{n}X_i$ 独立同服从于 $\Gamma(1, n\lambda)$ 分布, $i = 1, 2, \cdots, n$. 从而由 $\Gamma$ 分布可加性, 知 $\overline{X} \sim \Gamma(n, n\lambda)$.

# 习 题 七

(A)

**一、选择题**

1. $X \sim t(n), Y = \frac{1}{X^2}$, 则 (　　).

(A) $Y \sim \chi^2(n)$　　(B) $Y \sim t(n)$　　(C) $Y \sim F(n,1)$　　(D) $Y \sim F(1,n)$

2. $X$ 和 $Y$ 都服从 $N(0,1)$ 分布, 则 (　　).

(A) $X + Y$ 服从正态分布　　(B) $X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2)$

(C) $\frac{X^2}{Y^2}$ 服从 $F$ 分布　　(D) $X^2, Y^2$ 都服从 $\chi^2$ 分布

3. $X_1, X_2, X_3, X_4$ 为来自总体 $N(0, 2^2)$ 的样本, $Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$. 若 $Y \sim \chi^2(2)$ 分布, 则 (　　).

(A) $a=\dfrac{1}{20}, b=\dfrac{1}{100}$　　(B) $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{10}$

(C) $a=20, b=10$　　(D) $a=20, b=100$

4. 总体 $X$ 服从正态分布, 且 $E(X)=-1, E(X^2)=4. X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的样本, 则 $\overline{X}$ 所服从的分布为 (　　).

(A) $N\left(-1, \dfrac{4}{n}\right)$　(B) $N\left(-1, \dfrac{3}{n}\right)$　(C) $N\left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{3}{n}\right)$　(D) $N\left(-\dfrac{1}{n}, 3\right)$

5. $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{10}$ 分别为来自总体 $N(-1, 2^2)$ 和 $N(2, 5^2)$ 的两个独立样本, 且 $S_1^2$ 和 $S_2^2$ 分别是两个样本方差. 则服从 $F(7,9)$ 分布的统计量为 (　　).

(A) $\dfrac{4S_1^2}{25S_2^2}$　(B) $\dfrac{25S_1^2}{4S_2^2}$　(C) $\dfrac{4S^2}{25S_1^2}$　(D) $\dfrac{25S_1^2}{2S_2^2}$

6. 设 $\overline{X}$ 与 $S^2$ 分别为来自正态总体的样本均值和样本方差. 下面说法哪一个正确 (　　).

(A) $\overline{X}^2 = aS^2$　　(B) $\dfrac{\overline{X}^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

(C) $\overline{X}^2$ 与 $S^2$ 相关　　(D) $\overline{X}^2$ 与 $S^2$ 不相关

**二、填空题**

1. 总体 $X \sim N(0,1), X_1, X_2, \cdots, X_6$ 为样本, $Y=(X_1+X_3+X_5)^2+(X_2+X_4+X_6)^2$. 若 $cY \sim \chi^2(n)$, 则 $c=$ ____, $n=$ ____.

2. $X \sim F(n,n)$, 且 $P(X<a)=0.3$, 则 $P\left(X<\dfrac{1}{a}\right)=$ ____.

3. 两个总体 $X, Y$ 独立同服从于 $N(0,3^2)$ 分布, 而 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$ 分别为来自 $X$ 和 $Y$ 的两个样本, 则统计量 $U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从 ____ 分布.

4. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $e(\lambda)$ 的样本. 已知 $E\left(\overline{X}-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2=\dfrac{0.25}{n}$, 则 $\lambda=$ ____.

5. $X_1, X_2, \cdots, X_{17}$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\overline{X}$ 和 $S^2$ 是其样本均值与样本方差, 若 $P(\overline{X}>\mu+kS)=0.05$, 则 $k=$ ____.

6. 总体 $X \sim N(72, 100)$, 为使样本均值大于 70 的概率不小于 0.95, 样本容量 $n$ 至少应取 ____.

**三、解答题和证明题**

1. 从一批保险丝中抽取 9 根, 测试得其熔化时间 (单位: ms) 数据如下:

$$50, 49, 48, 53, 52, 49, 51, 54, 49,$$

计算样本均值、样本方差及样本二阶中心矩.

2. 求证: 对 $k$ 阶样本中心矩 $B_k$ 及各阶样本原点距 $A_m$, 有关系

$$B_k=\sum_{m=0}^{k} \mathrm{C}_k^m A_m(-\overline{X})^{k-m}.$$

3. 设总体 $X \sim N(0, 6.4), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X$ 的样本, 记 $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$, 若要使 $P(Y_n > 200) \leqslant 0.1$, 问 $n$ 至多能取多大?

4. 设总体 $X \sim N(2, 9), X_1, \cdots, X_{16}$ 是样本. 求

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(X_i-2)^2}{\sum\limits_{j=11}^{16}(X_j-2)^2} > 4.9\right).$$

5. 在总体 $N(52, 6.3^2)$ 中随机抽取一个样本.

(1) 若样本容量为 36, 求样本均值落在 50.8~54.8 之间的概率;

(2) 若要使 $E(|\overline{X}-52|^2) \leqslant 0.5$, 样本容量 $n$ 至少要多大.

6. 分别从总体 $X \sim N(30, 3^2)$ 和总体 $Y \sim N(40, 2^2)$ 中抽取两个独立样本 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{12}$.

(1) 求概率 $P(|\overline{X}-\overline{Y}| < 12)$;

(2) 确定常数 $C_1, C_2$, 使得

$$P\left(\frac{\overline{X}-30}{S_1/3} < C_1\right) = 0.975 \quad 及 \quad P\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} < C_2\right) = 0.05,$$

其中 $S_1^2$ 和 $S_2^2$ 分别为两个样本方差.

7. 设总体 $X \sim P(\lambda)$, 抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$. 若 $P(\max\{X_1, X_2, \cdots, X_{10}\} \geqslant 1) = 0.864\,7$, 则总体参数 $\lambda$ 应取多少?

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本. 令 $Y_1 = \frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6} X_i, Y_2 = \frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9), S^2 = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$. 证明:

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S} \sim t(2).$$

(B)

**一、选择题**

1. $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的样本, 则 $Y = \frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 所服从的分布为 (　　).

(A) $\chi^2(15)$　　(B) $t(4)$　　(C) $F(10, 5)$　　(D) $F(5, 10)$

2. 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本, $Y_1 = \frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2, Y_2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$, 则有 (　　) 成立.

(A) $Y_1, Y_2$ 均与 $\overline{X}$ 独立　　(B) $Y_1, Y_2$ 均与 $\overline{X}$ 不独立

(C) $Y_2$ 与 $\overline{X}$ 独立, 而 $Y_1$ 与 $\overline{X}$ 不独立　　(D) $Y_1$ 与 $\overline{X}$ 独立, 而 $Y_2$ 与 $\overline{X}$ 不独立

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 记 $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, S_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, S_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$, 则服从自由度为 $n-1$ 的 $t$ 分布的随机变量 $T = ($　　$)$.

(A) $\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　　(B) $\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$　　(C) $\frac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　　(D) $\frac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

**二、填空题**

1. $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的两个独立样本, 则 $P(|\overline{X} - \overline{Y}| > \sigma) \geqslant 0.01$ 时, $n \leqslant$ ____.

2. 总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别为来自总体 $X$ 和 $Y$ 的两个独立样本, 则

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\right] = \_\_\_\_.$$

**三、解答题和证明题**

1. 设 $X_1, X_2$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 证明: $\frac{X_1 - X_2}{|X_1 + X_2|} \sim t(1)$.

2. 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ 为来自总体 $X$ 的样本. 记 $\overline{X} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$, $Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2$, 求 $E(Y)$.

3. 设总体 $X \sim B(n, p), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是样本. 求:

(1) $E(\overline{X}), D(\overline{X})$;

(2) $\overline{X}$ 的概率分布.