

第 13 章

欧拉图与哈密顿图

说到图论，就不能不提到欧拉在 1736 年的开创性工作。在解决著名的 Königsberg 七桥难题中，欧拉建立了欧拉图类存在性的完整理论，图论的研究方法也随之进入了数学的广大领域。

13.1 欧拉图与中国邮递员问题

Königsberg 是 18 世纪东普鲁士的一个城市，Pregel 河流经该市，并把该市陆地分成了四个部分：两岸及两个河心岛。陆地间共有七座桥相通，如图 13-1a 所示。长期以来，人们一直在议论一个话题：能否从任何一块陆地出发，通过每座桥一次且仅一次，最后又返回出发点？尽管人们做了许多试验，但没有一人成功。欧拉把这个实际问题转化为图 13-1b 所示的一个图论问题。他用结点 A, B, C, D 分别表示对应的陆地，用边来表示连接陆地的桥，这样，七桥问题等价于在图 13-1b 中找寻一条包括每条边一次的回路，或者说，从图中任一点发出，一笔把图画出来（每边只能经过一次）。欧拉证明，七桥问题具有否定的答案，从而解决了这一难题。下面介绍解决这一问题的基本思想。

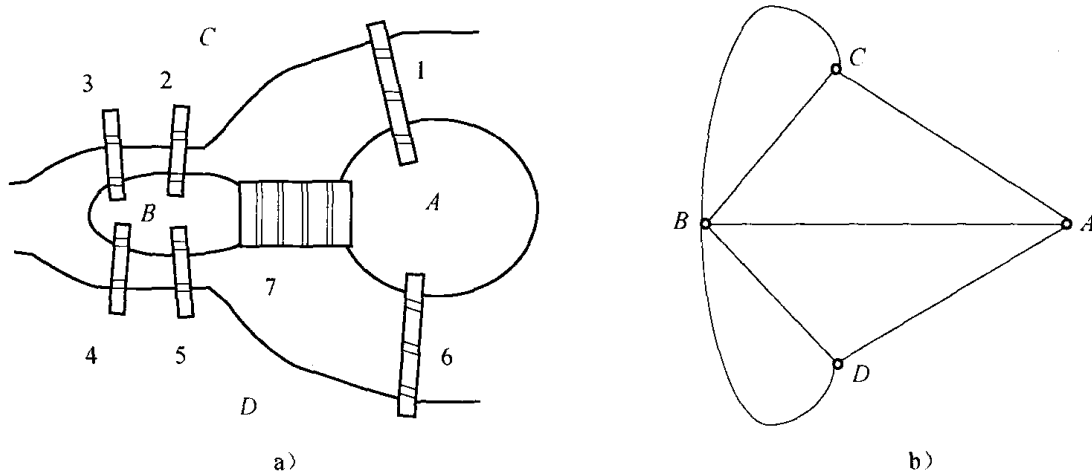


图 13-1

定义 13.1 设 G 是一个无向图，包含 G 的每条边的简单道路称为欧拉道路，包含 G 的每条边的简单回路称为欧拉回路，具有欧拉回路的图称为欧拉图。

在这里做个规定，即平凡图是欧拉图。

显然, 每个欧拉图必然是连通图。

定理 13.1 连通图 G 是欧拉图, 当且仅当 G 不含奇数度结点。

【证明】 设 G 是欧拉图, 则必然存在一条包含每条边的回路 C ; 当沿着回路 C 朝一个方向前进时, 必定沿一条边进入某结点后再沿另一条边由这个结点出去, 即每个结点都和偶数条边关联, 因此 G 的结点都是偶数度结点。

反过来, 设连通图 G 的结点都是偶数度结点, 则 G 含有回路。设 C 是一条包含 G 中边最多的简单回路。若 C 包含了 G 的全部边, 则 G 是欧拉图的结论成立; 如果 C 不能包含 G 的全部边, 则删边子图 $G - E(C)$ 仍无奇数度结点。由于 G 是连通的, C 中应至少存在一点 u , 使 $G - E(C)$ 中有一条包含 u 的回路 C' (图 13-2)。这样, 就可以由 C 和 C' , 构造出 G 的一条包含边数比 C 多的回路, 与 C 的最大性假设矛盾。因此, G 中包含边数最多的回路必是欧拉回路, 即是说, 不含奇数度结点的连通图是欧拉图。 ■

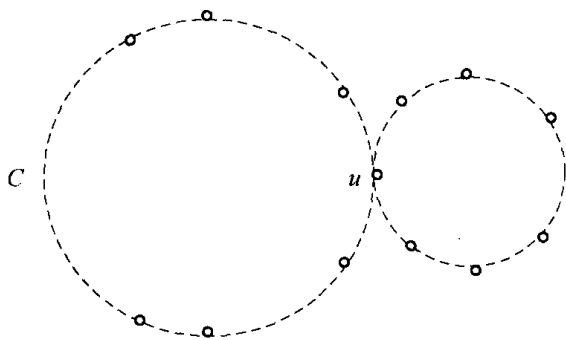


图 13-2

推论 13.1.1 非平凡连通图 G 含有欧拉道路, 当且仅当 G 最多有两个奇数度结点。

【证明】 设连通图 G 含有一条欧拉道路 L , 则在 L 中除起点与终点外, 其余每个结点都与偶数条边相关联, 因此, G 中最多有两个奇数度的结点。反过来, 若 G 没有奇数度结点, 显然有一条欧拉道路; 若 G 有两个奇数度结点 u, v , 则 $C + uv$ 是欧拉图, 从而存在欧拉回路 C 。从 C 中去掉边 uv , 则得到一条简单道路 L , 其起点是 u , 终点是 v , 并且包含了 G 的全部边, 即 L 是 G 的一条欧拉道路。 ■

由定理 13.1 及其推论知道, 因为图 13-1b 中没有偶数度结点, 且奇度点个数大于 2, 因此, 不存在欧拉回路, 也不存在欧拉道路, 所以 Königsberg 七桥问题有否定的结论。

无向图的欧拉道路问题及其有关结果很容易推广到有向图中去。这时, 我们考虑的是有向欧拉道路和有向欧拉回路。

定理 13.2 连通有向图 G 含有有向欧拉回路, 当且仅当 G 中每个结点的入度等于出度。连通有向图 G 含有有向欧拉道路, 当且仅当除最多两个结点外, 其余每个结点的入度等于其出度, 而这两个结点中一个结点的入度比其出度多 1, 另一结点的入度比其出度少 1。

【证明】 这个定理的证明与定理 13.1 及其推论的证明类似。显然, 一条有向欧拉回路进入任何一个结点的次数和离开这个结点的次数应该一样, 因此有向欧拉图的结点度数也是偶数。同样, 含有有向欧拉道路的图最多有两个奇数度结点。 ■

对于一个已知的欧拉图可以按下述方式构造一条欧拉回路。设置两个变量 s 和 e , 分别表示当前位于的结点和要经历的边。

由欧拉图 $G = (V, E)$ 构造欧拉回路算法如下:

- 1) 从 G 中任选一点 v_0 和与 v_0 关联的边 e_0 , 置 $s = v_0$, $e = e_0$ 。
- 2) 记录 s 和 e , 并在 G 中标记 e 。设与 e 关联的另一结点为 u_0 , 置 $s = u_0$ 。

3) 设从 G 中删去已标记过的全部 k 条边后得到的子图为 G_k , 则

- ① 当 G_k 为零图时, 算法结束。
- ② 若在 G_k 中与 s 关联的边都不是割边, 则任选其中一边 e' , 置 $e=e'$, 转 2)。
- ③ 若在 G_k 中与 s 关联的边有割边 e' 且 s 是 G_k 中的一度点, 则令 $e=e'$, 转 2); 否则在 G_k 中任选一条与 s 关联的非割边 e'' , 令 $e=e''$, 转 2)。

这种构造欧拉回路的方法对于有向欧拉图和无向欧拉图同样适用, 后面将举例说明。欧拉图的一个应用例子就是所谓模数转换问题。

【例 13.1】 设一个旋转鼓的表面分成了 16 个扇形段(图 13-3), 每个扇段由导体材料或者绝缘材料构成, 分别表示 0 和 1 两种状态。现在要用四位的二进制数 $abcd$ 给出 a 对应扇段的位置, 要怎样安排或设置 0 和 1 两种状态的扇段, 才能使 16 个扇段的位置号码各不相同? 也就是说, 如何把 16 个 0 或 1 排成一个循环, 使得按同一方向由 4 个依次相连的 0 或 1 能够组成 0000~1111 中的每一个二进制码?

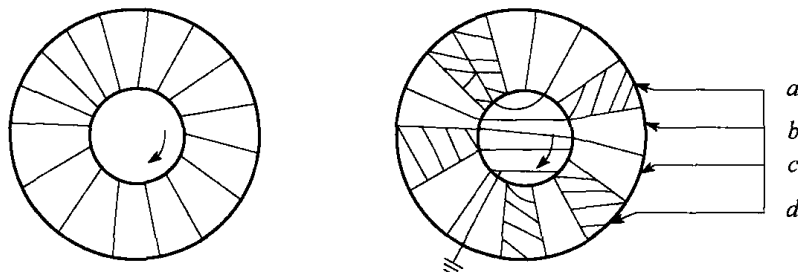


图 13-3

【解】 这个问题可以这样来考虑: 如图 13-4, 用 8 个结点分别表示 000~111 的 8 个二进制码。

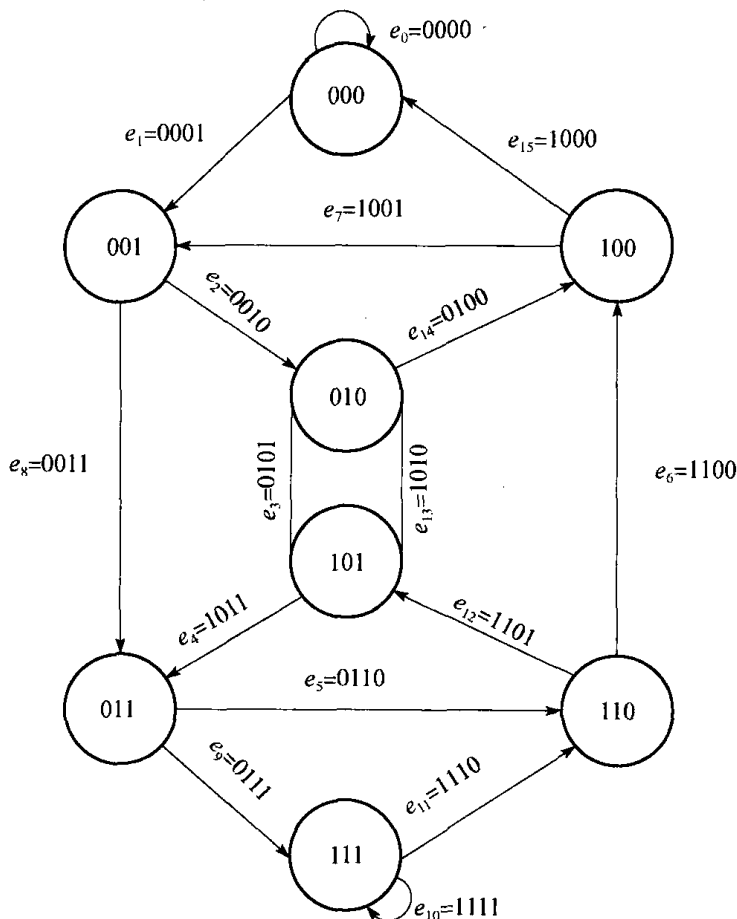


图 13-4

设结点 u 的二进码为 $a_1a_2a_3$ 。结点 v 的二进码为 $a_2a_3a_4$ ，则 (u, v) 是有向图的一条边，这条边对应于四位的二进码 $a_1a_2a_3a_4$ 。通过这种办法，可以构造出一个有 8 个结点、16 条边的有向图，这 16 条边分别对应于 0000~1111 的 16 个二进码，且边 (u, v) 的二进码的后三位与边 (v, w) 的二进码的前三位相同。因此，上述找由 16 个 0 或 1 组成的循环，正好对应应在图 13-4 中找一条有向欧拉回路，由回路中每条边对应码的第一个符号构成的循环序列就是所求结果。 ■

现在，按前面构造欧拉回路的算法列表，见表 13-1。

表 13-1

顺 序	当前所在结点 s	当前标记边 e
0	000	$e_0 = 0000$
1	000	$e_1 = 0001$
2	001	$e_2 = 0010$
3	010	$e_3 = 0101$
4	101	$e_4 = 1011$
5	011	$e_5 = 0110$
6	110	$e_6 = 1100$
7	100	$e_7 = 1001$
8	001	$e_8 = 0011$
9	011	$e_9 = 0111$
10	111	$e_{10} = 1111$
11	111	$e_{11} = 1110$
12	110	$e_{12} = 1101$
13	101	$e_{13} = 1010$
14	010	$e_{14} = 0100$
15	100	$e_{15} = 1000$

由图中得到一条欧拉回路 C ，其边序列为

$$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10}e_{11}e_{12}e_{13}e_{14}e_{15}$$

由此得到对应的 16 个 0 或 1 的排列 00001011100111101。 ■

另一个与欧拉图有密切关系的应用问题是 1962 年由管梅谷先生提出的“中国邮递员问题”：一个邮递员从邮局出发，在其分管的投递区域内走遍所有的街道把邮件送到每个收件人手中，最后又回到邮局，要怎样走使全程的路线最短？这个问题可以用图来表示：以街道为图的边，以街道交叉口为图的结点，问题就是：要从这样一个图中找出一条至少包含每个边一次的总长最短的闭道路。显然，当这个图是欧拉图时，任何一条欧拉回路都符合要求；但是，当这个图不是欧拉图时，所求闭道路必然要重复通过某些边。对此，管梅谷曾证明：若图的边数为 m ，则所求闭道路的长度最少是 m ，最多不超过 $2m$ ，并且每条边在其中最多出现两次。中国邮递员问题还可以进一步推广到带权的连通图上，即在带权图中找一个包括全部边的且权最小的闭道路。

一般意义下的中国邮递员问题是运筹学中一个典型的优化问题，这个问题有着有效的解决办法，其中最直观的方法之一是把图中的某些边复制成两条边，然后在所得图中找一个欧拉回路，这个回路即是原来问题的解。下面仅对无向图介绍算法的基本思想。

求解无向图的中国邮递员问题算法：

- 1) 若 G 不含奇度结点, 则按本节前面介绍的方法构造的欧拉回路, 就是问题的解。
- 2) 若 G 含有 $2k$ 个奇度结点, 则先求出其中任何两个结点之间的最短道路, 然后再在这些道路之中找出 k 条道路 P_1, P_2, \dots, P_k , 使得
 - ① 任何 p_i 和 $p_j (i \neq j)$ 没有相同的起点和终点。
 - ② 在所有满足 1) 的 k 条道路的集合中, P_1, P_2, \dots, P_k 的长度总和最短。
- 3) 根据 2) 中求出的 k 条最短道路 P_1, P_2, \dots, P_k , 在原图 G 中复制所有出现在这 k 条道路上的边, 设所得之图为 G' 。
- 4) 造 G' 的欧拉回路, 即得到中国邮递员问题的解。

【例 13.2】 图 13-5 中 G 含有 4 个奇度结点:

$$d(u_1) = 3, d(u_2) = 5, d(u_3) = 3, d(u_5) = 5$$

求得距离

$$d(u_1, u_3) = 5, \quad d(u_1, u_2) = 3$$

$$d(u_1, u_5) = 4, \quad d(u_2, u_3) = 2$$

$$d(u_2, u_5) = 3, \quad d(u_3, u_5) = 4$$

从中选出两条长度总和最小的道路 $P_1 = u_1 u_7 u_5$ 和 $P_2 = u_2 u_3$, 构造图 G' , 则中国邮递员问题的一个解便是回路

$$C = u_1 u_7 u_3 u_2 u_4 u_5 u_6 u_2 u_7 u_5 u_3 u_2 u_1 u_7 u_5 u_1$$

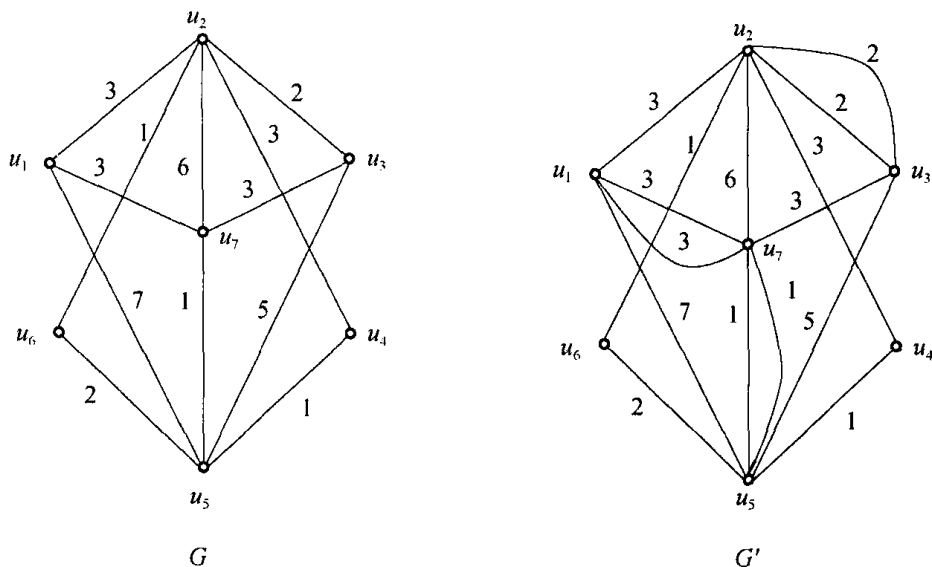


图 13-5

求中国邮递员问题的算法中, 包含了两个基本的优化算法: 求任意两点的距离及求最佳匹配, 它们都有对应的有效算法。

13.2 哈密顿图与推销商问题

1857 年, 爱尔兰数学家 W. R. Hamilton 发明了一种“周游世界”的游戏。他用一个正十二面体的 20 个顶点代表世界上的 20 个大城市, 每条棱表示城市间的一条路线, 这个正十二面体的平面图形如图 13-6 所示。要求游戏者从任何一个顶点出发沿着棱行走, 通过每个顶点一次且仅通过一次, 最后回到出发点。

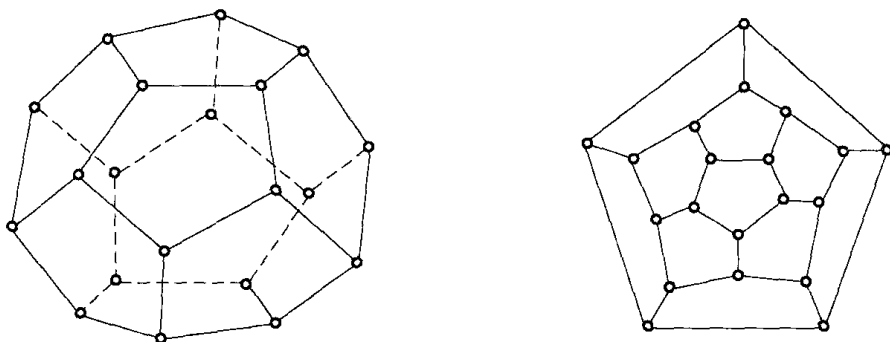


图 13-6

这个游戏的解是容易找到的。重要的是，这个游戏可以概括为一个有普遍意义的图论问题：判定一个连通图中是否存在着一个包含全部结点的圈。尽管欧拉图问题与哈密顿图问题都是求图的一个生成闭道路的问题，但是后者却要困难得多，至今尚未找到一个简单的充分必要条件去判定一个图是否是哈密顿图。判定哈密顿圈的存在性一直是图论中的重要课题之一。本节将介绍几个基本结果，并对与哈密顿图有关的推销商问题作简要叙述。

定义 13.2 设 G 是一个连通图。若 G 中存在一条包含全部结点的基本道路，则称这条道路为 G 的**哈密顿道路**。若 G 中存在一个包含全部结点的圈，则称这个圈为 G 的**哈密顿圈**。含有哈密顿圈的图称为**哈密顿图**。

从定义可以看出，研究哈密顿道路只要考虑简单图的情况就行了。

定理 13.3 如果 $G=(V, E)$ 是哈密顿图，则对 V 的任何非空真子集 S ，都有

$$\omega(G-S) \leq |S|$$

【证明】 设 C 是 G 的一个哈密顿圈，那么对于 V 的每个非空真子集 S 都应有

$$\omega(C-S) \leq |S|$$

但是 $C-S$ 是 $G-S$ 的一个生成子图，从而 $\omega(G-S) \leq \omega(C-S) \leq |S|$ 。 ■

应用这个定理可以确定某些特殊的图不是哈密顿图。如在图 13-7 中，令

$$S = \{a, b, c, d, e\}$$

则 $\omega(G-S) = 6 > |S| = 5$ ，因此它不是哈密顿图。但是，定理 13.3 只是哈密顿图的一个必要条件，满足这个条件的图不一定是哈密顿图。例如 Petersen 图就满足这个条件，但它不是哈密顿图。

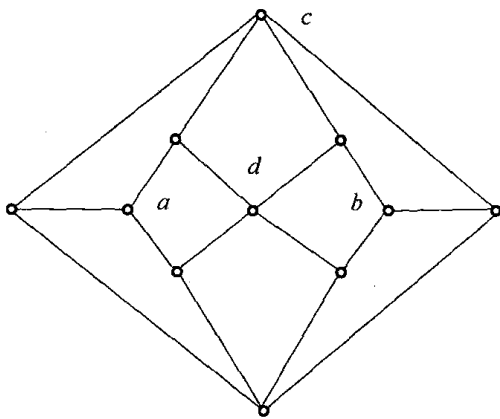


图 13-7

定理 13.4 设 $G=(V, E)$ 是 n 阶简单图。如果 G 中任一对结点 u 和 v , 满足 $d(u)+d(v)\geq n-1$, 则 G 中必有哈密顿道路。

【证明】 首先, 在定理条件下 G 必是连通的, 不然, G 至少有两支, 即 $G_1=(V_1, E_1)$ 和 $G_2=(V_2, E_2)$; 任取 $u_1\in V_1, u_2\in V_2$, 可得

$$d(u_1)+d(u_2)\leq |V_1|-1+|V_2|-1=n-2$$

与已知条件矛盾。

其次, 设 $L=u_1u_2\cdots u_k$ 是 G 中最长的一条基本道路。若 $k=n$, 则 L 就是所求道路, 定理得证; 若 $k<n$, 由 L 的最长性知道 u_1 和 u_k 的全部邻接结点都在 L 上; 若 $u_1u_k\in E$, 则 L 加上边 u_1u_k 就构成 G 的一个包含 L 的圈; 若 $u_1u_k\notin E$, 则必存在 L 上的结点 u_i , 使得 $u_1u_i\in E, u_{i-1}u_k\in E$ 。否则, 设 u_1 的邻接结点是 $u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_t}$, 则 u_k 不能与 $u_{i_1-1}, u_{i_2-1}, \cdots, u_{i_t-1}$ 中任何一个邻接, 这样就有

$$d(u_k)\leq k-t-1, d(u_1)=t$$

从而

$$d(u_1)+d(u_k)\leq k-1<n-1$$

与已知条件矛盾。因此, 由 $u_1u_i\in E, u_{i-1}u_k\in E$ 可以构造出一个圈 $u_1u_2\cdots u_{i-1}u_ku_{k-1}\cdots u_iu_1$, 如图 13-8 所示, 这个圈包含 L 中的全部结点。但是, 由于 $k<n$, 则必另有一结点 u 与 L 中的某结点 u_j 邻接, 从而可以构造出一条比 L 更长的基本道路

$$L'=uu_ju_{j+1}\cdots u_{i-1}u_ku_{k-1}\cdots u_iu_1u_2\cdots u_{j-1}$$

又与 L 的最长性假设相矛盾。由此可知, L 必是 G 的一条哈密顿道路。 ■

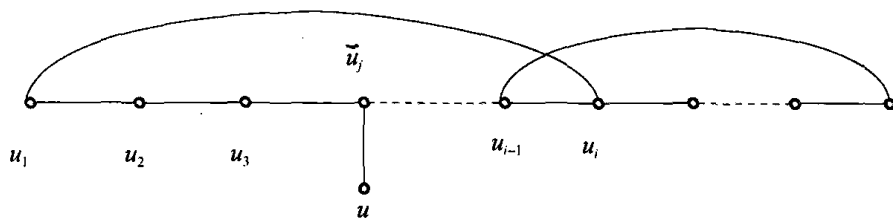


图 13-8

定理 13.5 设 $G=(V, E)$ 是 $n\geq 3$ 阶的简单图。若对每对结点 $u, v\in V, d(u)+d(v)\geq n$, 则 G 必是哈密顿图。

【证明】 由定理 13.4 知道 G 必有一条哈密顿道路, 然后, 可以依照定理 13.4 的证明方法, 由这条哈密顿道路构造出一条哈密顿圈。详细说明略。 ■

定理 13.5 的条件很强, 不满足条件的图也可能是哈密顿图, 例如圈就是这种图; 还有些图虽然不直接满足这个条件, 但是可以通过在一定条件下加边的办法来满足这个条件, 这就涉及图的闭包的概念。

定义 13.3 设 $G=(V, E)$ 是 n 阶的简单图。若存在一对不相邻接的结点 u 和 v , 满足 $d(u)+d(v)\geq n$, 则构造图 $G+uv$ 并且在图 $G+uv$ 上重复上述步骤, 直至不再存在着这样的结点对为止, 所得之图称为 G 的闭包, 记为 $c(G)$ 。

定理 13.6 一个简单图是哈密顿图当且仅当其闭包图是哈密顿图。

【证明】 首先证明, 若 u, v 是 n 阶简单图 G 的两个非邻接点且 $d(u)+d(v)\geq n$, 则 G 是哈密顿图, 当且仅当 $G+uv$ 是哈密顿图。当 G 是哈密顿图时, $G+uv$ 当然也是哈密顿图; 反过来, 若 $G+uv$ 是哈密顿图, 则 G 中必然存在一条以 u 为起点, v 为终点的哈密顿道路

L , 然后可仿照定理 13.4 的证明过程由 L 构造一个哈密顿圈, 即由 $G+uv$ 是哈密顿图推出 G 也是哈密顿图。

其次, 根据上述证明知道, 在构造 $c(G)$ 的每个步骤中得到的图与 G 同为哈密顿图或同不为哈密顿图, 因此定理成立。■

下面介绍平面图成为哈密顿图的一个必要条件。

定理 13.7 设 G 是一个 n 阶无环的连通平面图。若 G 含有哈密顿圈 C , 则

$$\sum_{i=1}^n (i-2)(f_i^{(1)} - f_i^{(2)}) = 0$$

其中 $f_i^{(1)}$ 和 $f_i^{(2)}$ 分别是含在圈 C 内部和外部的 i 度面的数目。

【证明】 设 C 是平面图 G 的一个哈密顿圈, 则 G 的边可以分为三类: 在圈 C 外部的边 (其数目设为 ϵ_2)、在圈 C 内部的边 (其数目设为 ϵ_1), 以及在圈 C 上的边 (数目为 n)。相应地, 位于 C 内部的面数是 $\epsilon_1 + 1$ 位于 C 外部的面数为 $\epsilon_2 + 1$, 每条在 C 外部的边都是两个面的公共边界, 而 C 上的边都正好在外部的一个面的边界上。因此, 位于 C 的外部的面, 其度之和是

$$\sum_{i=1}^n i f_i^{(2)} = 2\epsilon_2 + n$$

对于位于 C 的内部的面, 可以得出类似的关系式

$$\sum_{i=1}^n i f_i^{(1)} = 2\epsilon_1 + n$$

两式相减得

$$\sum_{i=1}^n i(f_i^{(1)} - f_i^{(2)}) = 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

注意

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = \sum_{i=1}^n f_i^{(1)} - 1 - \sum_{i=1}^n f_i^{(2)} + 1 = \sum_{i=1}^n (f_i^{(1)} - f_i^{(2)})$$

代入上式即得

$$\sum_{i=1}^n (i-2)(f_i^{(1)} - f_i^{(2)}) = 0 \quad \blacksquare$$

利用这个定理, 往往可以否定某些平面图是哈密顿图。例如图 13-7 只有 4 度的面, 如果它是哈密顿图, 则必须满足 $2(f_4^{(1)} - f_4^{(2)}) = 0$ 。但是, 面的总数是 9, 无论如何也不能使上式成立, 因此图 13-7 不是哈密顿图。

著名的推销商问题 (货郎担问题) 是一个在带权的完全图中求最优哈密圈的问题。设 u_1, u_2, \dots, u_n 代表 n 个城市, $\omega(u_i, u_j)$ 表示城市 u_i 和 u_j 之间的距离 (或旅费)。有一个商人从其中一个城市出发, 去每个城市经商一次, 最后又回到出发地。问怎样安排行程以使总的路程最短 (或旅费最少)?

推销商问题对应的图论问题是要在一个带权的完全图中, 找一个各边权之和最小的哈密顿圈。这里提出的最优问题具有重要的实际意义, 但是至今却未找到一个有效的方法来解决它。现在已提出来的解决方法有两种: 求近似解和精确解。求近似解一般可以通过不多的步骤得到比较满意的结果, 使误差在允许的范围之内, 其代表有回路修正法和近邻法 (见参考文献 [14])。这里只介绍一种求精确解的方法—分枝定界法。这个方法所需执行时间是指数

级的, 需要存贮的中间信息也比较多, 然而这个方法比较直观, 对于不太复杂的权图往往很快就能得到精确解, 因而也是运筹学中一个常用的方法。下面将用一个例子来说明它, 后面还列有一个表说明权阵的变化情况以供对照阅读。

【例 13.3】 给定在 4 个城市间旅行所需费用的矩阵如下 (为便于求解, 矩阵的主对角元都以 ∞ 表示)。

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 17 & 28 & 8 \\ 11 & \infty & 18 & 3 \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 19 & 3 & 17 & \infty \end{pmatrix} \end{matrix}$$

【解】 根据所给 D , 找一个权最小的哈密顿圈的步骤如下:

1) 把 D 变成每行每列都有元素 0 的矩阵。为此, 先找出每行的最小元, 同时用该行元素各减去这个最小元, 再在所得矩阵的各列施行同一方法, 最后得到矩阵 D' , 显然, D 和 D' 对应于相同的最优哈密顿圈, 因而可以只针对 D' 求解。 D' 右下角的 (31) 是由 D 得到 D' 时从各行各列减去的最小元素之和, 它显然是所求问题的一个下界。下面由 D' 来求最优解。为方便起见, 把 u_i 行 u_j 列的元素, 即 $\omega(u_i u_j)$ 简记为 (i, j) 。

2) 在 D' 中的 u_1 行找到最小元 $(1, 4)$ 。假设元 $(1, 4)$ 包含在最优解中, 则从 D' 中划去第 1 行和 4 列, 同时把元 $(4, 1)$ 改成 ∞ (因为包含了 $(1, 4)$ 则不可能再包含 $(4, 1)$), 所得矩阵记为 D'_{14} 。 D'_{14} 的第 1 行没有 0 元最小元是 1, 于是 D'_{14} 对应的权下界累计为 32。

3) 但是, 当假设最优解不包含元 $(1, 4)$ 时, 由 D' 得到的权下界是 31, 比 D'_{14} 所得下界 32 要小, 自然应先选择具有最小累计下界的矩阵求解。既然这里已假定最优解不包含 $(1, 4)$, 则在 D' 中把 $(1, 4)$ 改成 ∞ , 所得矩阵记为 D'_{14^-} , 它的第 1 行的最小元素为 6, 从而使累计下界变为 37, 大于 D'_{14} 的下界, 故暂停搜索, 转而处理 D'_{14} 。

4) 在 D'_{14} 中 $(2, 3)$ 是 0。假定最优解包含 $(2, 3)$, 划掉 u_2 行和 u_3 列, 同时把 $(3, 2)$ 改为 ∞ , 所得矩阵记为 D'_{14-23} , 它对应的权下界仍为 32, 是当前最小下界, 因此, 可继续沿这一方向搜索。

5) 在 D'_{14-23} 中 $(3, 1)$ 是 0。假定最优解包含 $(3, 1)$, 划掉 u_3 行和 u_1 列后, 只剩下 $(4, 2)$, 且元素 $(4, 2)$ 为 0, 累计权下界仍为 32, 是最小的下界; 同时, 由它已经得到一条哈密顿圈 $u_1 u_4 u_2 u_3 u_1$ 其权是 32, 是各种情况中最小的。这说明沿其他方向搜索已无价值, 这个哈密顿圈就是最优解。

上面的过程可以用权矩阵变化情况表示出来。每个矩阵前面尖括号内的数表示求解过程中产生矩阵的顺序, 后面括号内的数是对应的下界。各箭头旁边的符号 (i, j) 表示最优解包含边 $u_i u_j$ 而 $\overline{(i, j)}$ 表示不包含边 $u_i u_j$ (图 13-9)。

讨论: 上述求最优解的算法, 在实际的求解过程中, 计算量是相当大的, 实际的计算过程并不都像事例一样直接; n 阶完全带权图中共存在 $(n-1)!/2$ 种不同的哈密顿回路, 经过比较, 可找出最短哈密顿回路。 $n=4$ 时, 有 3 种不同的回路, $n=5$ 时有 12 种, $n=6$ 时有 60 种, $n=7$ 时有 360 种, \dots , $n=10$ 时有 1 814 400 种。对于推销商问题, 人们一方面在寻找好的算法, 另一方面也在寻找各种近似算法。

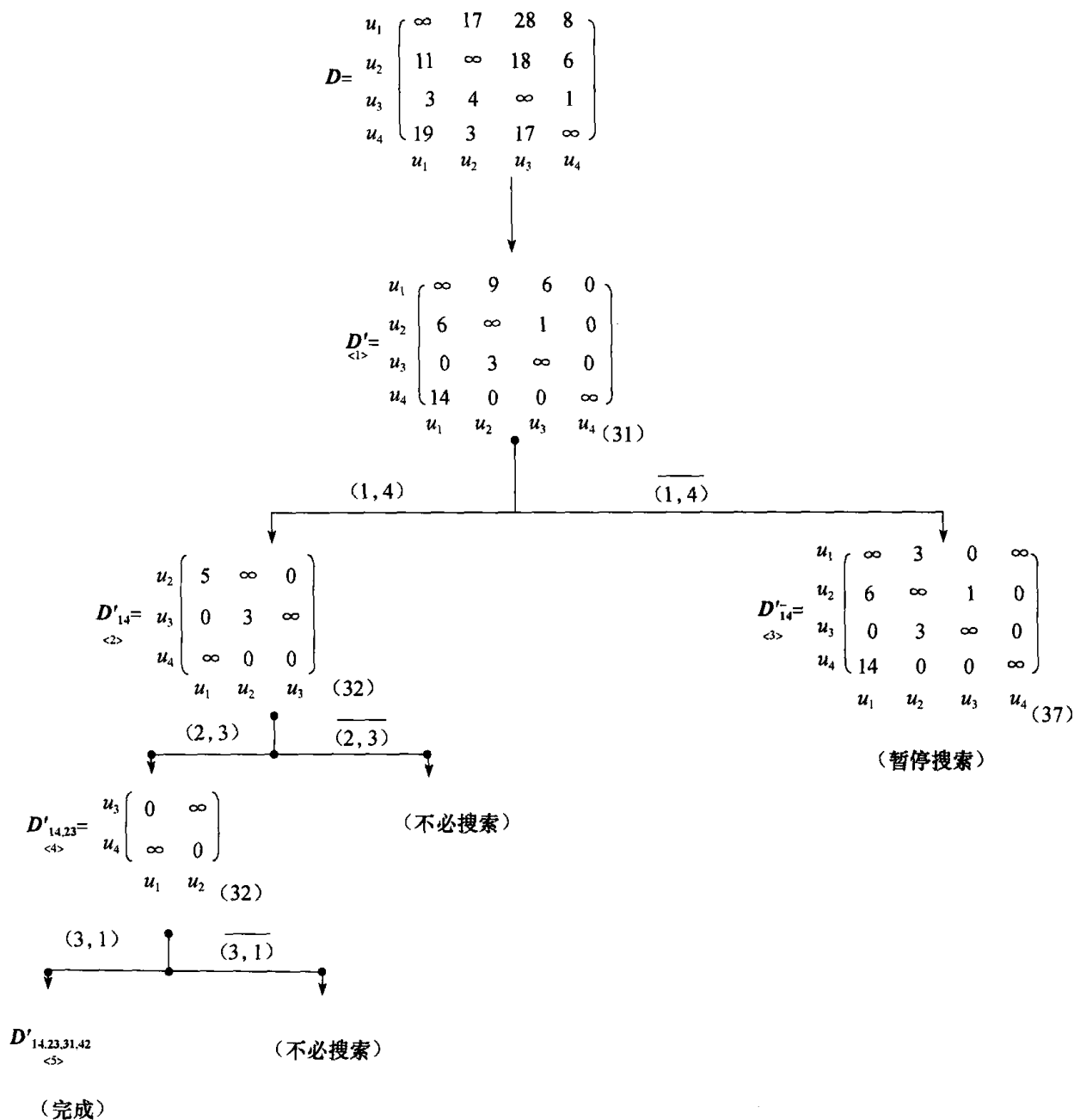


图 13-9

习题十三

- 构造 (n, m) 欧拉图使满足条件: (1) m 和 n 奇偶性相同; (2) m 和 n 奇偶性相反。
- 设 $G=(V, E)$ 是一个具有 $2k(k>0)$ 个奇数度结点的连通图。证明: G 中必存在 k 条边不相重的简单道路 P_1, P_2, \dots, P_k , 使得

$$E = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_k)$$

- 设 $G=(V, E)$ 是不含奇度结点的非平凡图。证明: G 中必有 k 个边不相重的回路 C_1, C_2, \dots, C_k , 使得

$$E = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_k)$$

- 设计一个由 9 个 a , 9 个 b , 9 个 c 组成的环形排列, 使得由 $\{a, b, c\}$ 组成的字长为 3 的 27 字中的每一个在排列中恰好出现一次。
- 在图 13-10 中求中国邮递员问题的解。

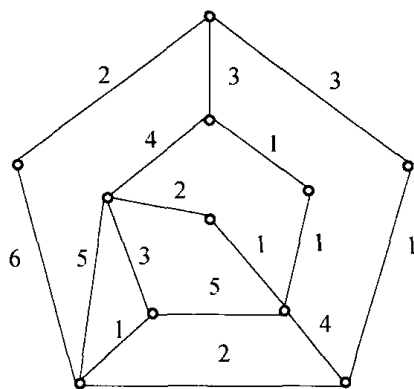


图 13-10

6. 设 G 是有两个奇度点的连通图, 设计一个构造 G 的欧拉道路的算法。
7. n 为何值时, 无向完全图 K_n 是欧拉图? n 为何值时, 无向完全图 K_n 仅存在欧拉道路而不存在欧拉回路?
8. $n(n \geq 2)$ 个结点的有向完全图中, 哪些是欧拉图?
9. 证明: 凡有割点的图都不是哈密顿图。
10. 证明: $4k+1$ 阶的所有 $2k$ 正则简单图都是哈密顿图。
11. 在无向完全图 K_n 中有多少条没有公共边的哈密尔顿回路?
12. 11 个学生打算几天都在一张圆桌上共进午餐, 并且希望在每次午餐时, 每个学生两旁所坐的人都不相同。问 11 人共进午餐最多能有多少天?
13. 假定在 n 个人的团体中, 任何 2 人合起来认识其余的 $n-2$ 个人。证明:
 - (1) 这 n 个人可以排成一排, 使得站在中间的每个人的两旁都是自己认识的人, 站在两端的人旁边各有 1 个认识的人。
 - (2) 当月 $n \geq 4$ 时, 这 n 个人可以围成一个圆圈, 使得每个人两旁都是自己所认识的人。
14. 设 G 是 (n, m) 简单图。若 $m \geq C_{n-1}^2 + 2$, 证明 G 必是哈密顿图。
15. 用两种以上的办法判别图 13-11 不是哈密顿图。
16. 证明: 图 13-12 中不存在同时包含边 e_1 和 e_2 的哈密顿圈。

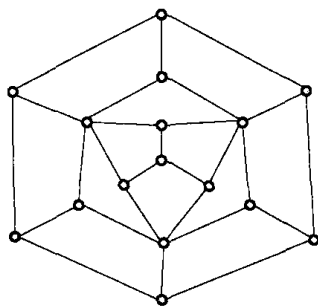


图 13-11

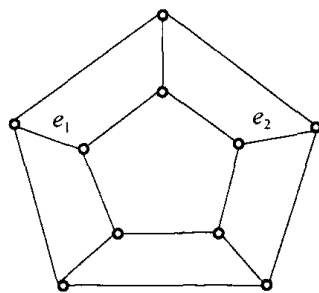


图 13-12

17. 对于下面给出的权阵, 试用分枝定界法求对应的最优哈密顿圈。

$$D = \begin{pmatrix} \infty & 15 & 9 & 5 & 8 \\ 13 & \infty & 20 & 9 & 4 \\ 7 & 9 & \infty & 16 & 11 \\ 6 & 3 & 10 & \infty & 13 \\ 8 & 6 & 14 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$