ÜBUNG ZU MAS3 (SEvz)

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

(Michael Petz)

3. Semester Fachhochschul-Studiengang Software Engineering, Hagenberg, WS 2018/19

Beispiele zu Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

A01

Eine faire Münze wird viermal geworfen. Wir definieren verschiedene Ereignisse: A sei „es erscheint genau zweimal Kopf", B sei „Kopf und Zahl alternieren", und C sei „die ersten beiden Würfe sind Kopf". Welche Ereignisse sind disjunkt? Welche Ereignisse sind Teilmengen voneinander?

A02

Bei einem unfairen Würfel seien die W. der Elementarereignisse direkt proportional zur Augenzahl (eine Fünf ist somit fünfmal so wahrscheinlich wie eine Eins). Geben Sie den Ereignisraum dieses Experiments an. Wie wahrscheinlich ist es, eine gerade Zahl zu werfen? Wie wahrscheinlich, eine Primzahl zu werfen?

A03

Jemand würfelt gleichzeitig mit drei Würfeln. Wie viele verschiedene mögliche Ergebnisse gibt es?
Geben Sie an, wie viele Möglichkeiten es jeweils für folgende Ereignisse gibt:
Es werden/wird

a) lauter verschiedene Zahlen (z.B. 1-2-4)
b) ein Paar (z.B. 1-1-4)
c) ein Drilling (z.B. 2-2-2)

gewürfelt. Die Würfel sollen dabei als unterscheidbar angesehen werden.

A04

Wie verändern sich die Ergebnisse in Beispiel A03, wenn die Würfel als nicht unterscheidbar angesehen werden, es also nur auf die jeweilige Zusammenstellung an Augenzahlen ankommt, nicht jedoch, auf welchen Würfeln sie jeweils realisiert wurden? Ist die Betrachtungsweise aus Beispiel A03 oder aus Beispiel A04 günstiger für die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten?

Beachten Sie: 4 Beispiele = 4 Files zum Hochladen mit je max 2 Punkten Bewertung.

ÜBUNG ZU MAS3 (SEvz)
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
(Michael Petz)
3. Semester Fachhochschul-Studiengang Software Engineering, Hagenberg, WS 2018/19

Beispiele zur bedingten Wahrscheinlichkeit.

A05

Die Geburtswahrscheinlichkeiten für Knaben und Mädchen seien gleich groß (je 0,5) und die Geburten von Kindern (auch innerhalb einer Familie) seien stochastisch unabhängige Ereignisse. Jemand hat zwei Kinder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kinder Jungen sind, wenn
a) keine sonstigen Angaben vorliegen
b) bekannt ist, dass ein Kind ein Junge ist
c) bekannt ist, dass das ältere Kind ein Junge ist?

A06

Es seien die zwei Ereignisse
A ... eine Familie hat Kinder beiderlei Geschlechts
B ... eine Familie hat höchstens einen Buben
gegeben.
Man überprüfe, ob die beiden Ereignisse voneinander unabhängig sind, wenn die Familie
a) 2 Kinder
b) 3 Kinder
hat.
Welche Voraussetzungen müssen zur Lösung dieser Aufgabe sinnvollerweise getroffen werden?

A07

In Spam-Mails tritt das Wort „Sex“ mit 95% Wahrscheinlichkeit auf, in anderen Mails etwa mit 5% Wahrscheinlichkeit. Spam-Mails selbst treten im Verhältnis zu anderen Mails wie 80:1 auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine erhaltene Mail eine Spam-Mail ist, wenn in ihr das Wort „Sex“ auftaucht?

A08

Das Angelrevier von Paul besteht aus den drei Seen S1, S2 und S3. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er innerhalb einer Stunde einen Fisch fängt, beträgt für die drei Seen $P(F|S1) = 0{,}6$, $P(F|S2) = 0{,}5$ sowie $P(F|S3) = 0{,}8$. Paul geht mit der Wahrscheinlichkeit $P(Si) = 1/3$ $(i=1,2,3)$ an einen der drei Seen. Er ruft nach einer Stunde Angelzeit bei Agathe an und meldet den Fang eines Fisches. Mit welcher Wahrscheinlichkeit angelt er an Si $(i=1,2,3)$?

Beachten Sie: 4 Beispiele = 4 Files zum Hochladen mit je max 2 Punkten Bewertung.

ÜBUNG ZU MAS3 (SEvz)
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

(Michael Petz)

3. Semester Fachhochschul-Studiengang Software Engineering, Hagenberg, WS 2018/19

Beispiele zu diskrete Zufallsvariable.

A09

Ein Würfel werde einmal geworfen. Das Ergebnis des Wurfes (die Augenzahl) sei die ZV X. Wir betrachten die beiden ZV $D = 2X$ und $Q = X^2$, d.h. das Doppelte der Augenzahl und das Quadrat der Augenzahl. Bestimmen Sie die Verteilung von D und Q (also die Werte der W.-Funktionen dieser beiden Zufallsvariablen für alle Elemente ihrer Definitionsbereiche).

A10

Ein Würfel werde zweimal geworfen. Die beiden Ergebnisse seien die ZV X1 und X_2.
Wir betrachten die beiden ZV $S = X_1 + X_2$ und $P = X_1 \cdot X_2$, die die Summe bzw. das Produkt der beiden Würfe angeben. Bestimmen Sie die Verteilung von S und P (also die Werte der W.Funktionen dieser beiden Zufallsvariablen für alle Elemente ihrer Definitionsbereiche).

A11

Eine Zufallsvariable X besitze folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	0,1	0,15	0,3	0,15	

a) Bestimmen Sie den fehlenden Wert f(2), d.h. P(X=2).
b) Wie lauten die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsvariablen $Y = 4X+1$ und $Z = X^2$?

A12

Ein Würfel werde zweimal geworfen. Die beiden Ergebnisse seien die ZV X_1 und X_2.
Wir betrachten die ZV $U = |X_1 - X_2|$, die den Unterschied der Augenzahl der beiden Würfe angibt. Bestimmen Sie die Verteilung von U.

Beachten Sie: 4 Beispiele = 4 Files zum Hochladen mit je max 2 Punkten Bewertung.

ÜBUNG ZU MAS3 (SEvz)
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

(Michael Petz)

3. Semester Fachhochschul-Studiengang Software Engineering, Hagenberg, WS 2018/19

Beispiele zu bed. Wahrscheinlichkeit und diskrete Zufallsvariable (HGV, BV, PV).

A13

Von drei paarweise disjunkten Ereignissen A1, A2 und A3 und den zwei disjunkten Ereignissen B1 und B2 weiß man:
P(A1) + P(A2) + P(A3) = 1, P(B1) + P(B2) = 1 (Vollständigkeit), weiters
P(A2) = 0,3 und P(B2) = 0,8 (Einzelwahrscheinlichkeiten),
P(A2 und B2) = P(A3 und B2) = 0,2 (kombinierte unbedingte Wahrscheinlichkeiten) sowie
P(B2|A1) = 0,8 (bedingte W).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(A1), P(B1), P(A1 und B1), P(A1|B1), P(B1|A1) und beurteilen Sie für die folgenden Ereignispaare, ob diese unabhängig sind oder sich begünstigen oder benachteiligen: A1 und B1, A1 und B2, A2 und B1, A2 und B2.

A14

Ein dreimotoriges Flugzeug stürzt ab, wenn der Hauptmotor in der Mitte ausfällt oder beide Seitenmotoren ausfallen (mindestens - d.h. das Flugzeug stürzt auch ab, wenn mehr als die angegebenen Motoren ausfallen). Wenn jeder der Flugzeugmotoren mit der Wahrscheinlichkeit p auf einem bestimmten Flug ausfällt und unter der Annahme der Unabhängigkeit für das Eintreten der Defekte an den einzelnen Flugzeugmotoren berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein dreimotoriges Flugzeug durch Motorversagen abstürzt.

A15

Eine Urne enthält 1000 Lose, davon sind 10 Gewinnlose. Jemand kauft 20 Lose.
Wie wahrscheinlich ist es, dass sich unter den 20 gekauften Losen genau 1 Gewinnlos findet?
Berechnen Sie zunächst exakt (hypergeometrisch) und dann mittels Näherung durch Binomial- und Poissonverteilung. Wie groß sind die Fehler bei den Näherungen? Wenn die Anzahl der Lose reduziert wird, das Verhältnis der Gewinnlose zu den Nieten aber 1:99 bleiben soll, ab welcher Anzahl an Losen ist der Fehler der Näherungen zum exakten Ergebnis größer als 1%?

Beachten Sie: 3 Beispiele = 3 Files zum Hochladen mit je max 2 Punkten Bewertung.

ÜBUNG ZU MAS3 (SEvz)
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

(Michael Petz)

3. Semester Fachhochschul-Studiengang Software Engineering, Hagenberg, WS 2018/19

Zweidimensionale Zufallsvariable und Erwartungswert.

A16

Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Die ZV X und Y geben dabei an, wie oft Kopf unter den ersten zwei (X) bzw. allen drei (Y) Würfen aufgetreten ist.
Geben Sie die Tabelle der gemeinsamen Verteilung von X und Y an, und berechnen Sie die Randverteilungen. Sind X und Y unabhängig?

A17

Gegeben sei folgende gemeinsame Verteilung der beiden Zufallsvariablen X und Y:

	$f_{X,Y}$	y = 2	y = 3	y = 5
x	0	6/36	8/36	1/36
	2	8/36	4/36	2/36
	4	1/36	2/36	4/36

Berechnen Sie die Randverteilungen von X und Y. Sind die beiden ZV unabhängig?
Berechnen Sie die Erwartungswerte E(X), E(Y) und E(X·Y). Gilt E(X·Y) = E(X) · E(Y)?

A18

Studenten der FH Hagenberg, die sich selbst die Wäsche waschen, verschieben diese Tätigkeit manchmal um ein paar Tage. (Anmerkung: alle folgenden ZV sind paarweise unabhängig.)

a) Ein geschäftiger Student muss drei Aufgaben erledigen, bevor er sich seiner Schmutzwäsche widmen kann. Jede dieser drei Aufgaben dauert 1 Tag mit Wahrscheinlichkeit 2/3 und 2 Tage mit Wahrscheinlichkeit 1/3. Sei G die Anzahl Tage, die ein geschäftiger Student den Waschtag verschiebt. Berechnen Sie E(G).

b) Ein urgemütlicher Student wirft morgens einen fairen Würfel. Wenn er einen 1er würfelt, kümmert er sich sofort um die Wäsche (d.h. mit 0 Tagen Verzögerung). Sonst verschiebt er den Waschtag zunächst um einen Tag und wiederholt den Würfelwurf am nächsten Morgen. Sei U die Anzahl Tage, die ein urgemütlicher Student den Waschtag verschiebt. Berechnen Sie E(U).

c) Bevor er sich um seine Wäsche kümmern kann, muss sich ein kränkelnder Student erst ein paar Tage von einer (schweren?) Grippe erholen. Sei K die benötigte Anzahl an Tagen zur Erholung, die dem Produkt der Augenzahlen zweier fairer Würfel entspricht. Berechnen Sie E(K).

d) Ein Student sei geschäftig mit Wahrscheinlichkeit 1/2, urgemütlich mit Wahrscheinlichkeit 1/3 und kränkelnd mit Wahrscheinlichkeit 1/6. Sei W die Anzahl an Tagen, um die der Waschtag verschoben wird. Berechnen Sie E(W).

Beachten Sie: 3 Beispiele = 3 Files zum Hochladen mit je max 2 Punkten Bewertung.

ÜBUNG ZU MAS3 (SEvz)
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

(Michael Petz)

3. Semester Fachhochschul-Studiengang Software Engineering, Hagenberg, WS 2018/19

Erwartungswert und Varianz.

A19

Zu drei Zufallsvariablen X, Y und Z sind folgende Wahrscheinlichkeitsfunktionen gegeben:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

y	3	4	5	6	7
P(Y=y)	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

z	3	5	7	9	11
P(Z=z)	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

Man berechne zu allen drei Verteilungen
- ◆ die Erwartungswerte E(X), E(Y) und E(Z),
- ◆ die Varianzen Var(X), Var(Y) und Var(Z).

Lassen sich die Zufallsvariablen Y und Z durch je eine lineare Transformation von X beschreiben? Wenn ja: wie lautet/lauten diese?

A20

Finden Sie die unbekannten Parameter einer Zufallsvariablen (bekannter Verteilung) mit dem Erwartungswert E(X) = 50 und der Varianz Var(X) = 40 (falls möglich), wenn die ZV
- ◆ hypergeometrisch verteilt ist (Parameter n=300, aber M und N unbekannt)
- ◆ binomialverteilt ist (Parameter n und p unbekannt)
- ◆ poissonverteilt ist (Parameter λ unbekannt).

Falls es die Verteilung mit diesem Erwartungswert und dieser Varianz nicht gibt, begründen Sie warum!

A21

Eine Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion mit $a \in R^+$ und $p \in (0\,;0{,}5)$:

x	a	2a	3a
P(X=x)	p	1-2p	p

Bestimmen Sie den Erwartungswert E(X) und die Varianz V(X).
Setzen Sie die erhaltenen Ergebnisse in die Ungleichung von Tschebyscheff ein und prüfen Sie deren Gültigkeit für Epsilon = a (siehe Satz 8.12 im Skriptum).

Beachten Sie: 3 Beispiele = 3 Files zum Hochladen mit je max 2 Punkten Bewertung.

ÜBUNG ZU MAS3 (SEvz)
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
(Michael Petz)
3. Semester Fachhochschul-Studiengang Software Engineering, Hagenberg, WS 2018/19

Erwartungswert, Varianz, Kovarianz und Korrelation.

A22

Ein Würfel werde einmal geworfen. Das Ergebnis des Wurfes (die Augenzahl) sei die ZV X. Wir betrachten die beiden ZV $D = 2X$ und $Q = X^2$, d.h. das Doppelte der Augenzahl und das Quadrat der Augenzahl (siehe A09), zusätzlich sei $B=7–X$ als vierte ZV definiert (das ist die Augenzahl der Fläche, auf der der Würfel zu liegen kommt).
Weiters werde ein Würfel zweimal geworfen. Die beiden Ergebnisse seien die ZV X_1 und X_2. Wir betrachten die beiden ZV $S = X_1 + X_2$ und $P = X_1 \cdot X_2$, die die Summe bzw. das Produkt der beiden Würfe angeben (siehe A10).

Bestimmen Sie die Erwartungswerte der oben definierten Zufallsvariablen, d.h. $E(X)$, $E(X_1)$, $E(X_2)$, $E(D)$, $E(Q)$, $E(B)$, $E(S)$ und $E(P)$ direkt aus den Verteilungsfunktionen der ZV (d.h. ohne Verwendung von Transformationen schon errechneter Erwartungswerte).
Überprüfen Sie anhand der numerischen Ergebnisse die Gültigkeit der folgenden Gleichungen:

$E(2X) = 2 \cdot E(X)$, $E(X^2) = E(X)^2$, $E(7–X) = 7–E(X)$,
$E(X_1+X_2) = E(X_1) + E(X_2)$, $E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$.

A23

Unter Verwendung der ZV-Definitionen von A22:
Bestimmen Sie die Varianzen der oben definierten Zufallsvariablen, d.h. $V(X)$, $V(X_1)$, $V(X_2)$, $V(D)$, $V(Q)$, $V(B)$, $V(S)$ und $V(P)$ direkt aus den Verteilungsfunktionen der ZV (d.h. ohne Verwendung von Transformationen schon errechneter Varianzen).
Überprüfen Sie anhand der Ergebnisse die Gültigkeit der folgenden Gleichungen:

$V(2X) = 2 \cdot V(X)$, $V(X^2) = V(X)^2$, $V(7–X) = 7–V(X)$,
$V(X_1+X_2) = V(X_1) + V(X_2)$, $V(X_1 \cdot X_2) = V(X_1) \cdot E(X_2)$.

A24

Unter Verwendung der ZV-Definitionen von A22:
Berechnen Sie
- Cor(X,D),
- Cor(X,Q) und
- Cor(X,B)

und interpretieren Sie die Ergebnisse.

A25

Finden Sie eine 9-Felder-Tafel (wie in Aufgabe A17), die die gemeinsame Verteilung zweier ZV X und Y darstellt, mit folgenden Eigenschaften:
X kann die Werte {0,1,2} und Y die Werte {-1,0,1} annehmen,
X und Y sind unkorreliert (d.h. kein lin. Zusammenhang, also COV(X,Y) = 0), und
X und Y sind nicht unabhängig.

Beachten Sie: 4 Beispiele = 4 Files zum Hochladen mit je max 2 Punkten Bewertung.