



## 3a - Méthode X13-ARIMA: décomposition avec X-11

ANNA SMYK ET TANGUY BARTHÉLÉMY  
Division Recueil et Traitement de l'Information  
Département des Méthodes Statistiques

# X13-ARIMA

---

X pour eXperience. . .

Deux modules :

- X11 : phase de décomposition

Décomposition de la série en tendance-cycle, saisonnalité et irrégulier, à l'aide de **moyennes mobiles**.

- REG-ARIMA : phase de pré-ajustement pour obtenir une série linéarisée (séquence suivante)  
Correction **préalable** par régression linéaire des points aberrants, ruptures de tendance, effets de calendrier.

Objectif de cette séquence : comprendre la phase de décomposition X11

# Sommaire

---

## 1. Phase de décomposition (X11)

1.1 Les moyennes mobiles

1.2 Le principe itératif de X11

1.3 Les étapes de X11

## 2. Conclusion

## Moyennes mobiles : définition (1/2)

---

Dans X-13-Arima, la série est décomposée à l'aide de moyennes mobiles. Le module de décomposition est souvent appelé X-11 (module historique). Bien qu'on en soit à X-13, la décomposition a peu varié.

Il est nécessaire de connaître quelques concepts sur les moyennes mobiles pour comprendre la phase de décomposition.

La moyenne mobile d'ordre  $p + f + 1$  de coefficients  $(\theta_i)$  est l'opérateur  $M$  défini par :

$$MX_t = \sum_{i=-p}^f \theta_i X_{t+i}$$

Valeur en  $t$  remplacée par une moyenne pondérée de  $p$  valeurs passées, de la valeur courante et de  $f$  valeurs futures.

Notée usuellement  $MX_t$ , la moyenne mobile est bien une fonction, on pourrait écrire  $M(X_t)$

## Moyennes mobiles : définition (2/2)

---

$$MX_t = \sum_{i=-p}^f \theta_i X_{t+i}$$

Si  $p = f$ , la moyenne mobile est dite *centrée*

Si, de plus  $\theta_{-i} = \theta_i$ , elle est dite *symétrique*

Les moyennes mobiles centrées symétriques sont celles qui ont les propriétés les plus intéressantes pour la décomposition (car elles conservent les droites).

## Exemples de moyenne mobile simple d'ordre 3

---

Deux exemples de moyennes mobiles simples (tous les coefficients égaux) d'ordre 3 :

$$MX_t = \frac{1}{3}(X_{t-2} + X_{t-1} + X_t)$$

→ cette moyenne mobile n'est pas centrée (donc pas symétrique non plus)

$$MX_t = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$$

→ celle-là est centrée et symétrique.

# Moyennes mobiles : linéarité et composition

---

**Une MM est un opérateur linéaire :**

Linéarité :  $M(X_t + Y_t) = M(X_t) + M(Y_t)$

$$\begin{aligned} X_t &= T_t + S_t + I_t \\ \rightarrow MX_t &= M(T_t) + M(S_t) + M(I_t) \end{aligned}$$

## Composition de moyennes mobiles

Moyenne arithmétique de  $p$  Moyennes Mobiles de même ordre (longueur) :  
 $M_{p \times \text{ordre}}$

## Moyennes mobiles : exemple de composition à l'ordre 12 (1/2)

Pour une MM d'ordre 12, deux écritures (naturelles) sont possibles :

$M_{1 \times 12}$

$$M1X_t = \frac{1}{12}(X_{t-6} + X_{t-5} + X_{t-4} + X_{t-3} + X_{t-2} + X_{t-1} \\ + X_t + X_{t+1} + X_{t+2} + X_{t+3} + X_{t+4} + X_{t+5})$$

Ou bien :

$M_{1 \times 12}$  bis

$$M2X_t = \frac{1}{12}(X_{t-5} + X_{t-4} + X_{t-3} + X_{t-2} + X_{t-1} + X_t \\ + X_{t+1} + X_{t+2} + X_{t+3} + X_{t+4} + X_{t+5} + X_{t+6})$$

Cette deuxième version a un point de moins dans le passé et un point de plus dans le futur. L'ordre 12 étant PAIR, on ne peut pas obtenir une moyenne mobile simple centrée symétrique.



## Moyennes mobiles : exemple de composition à l'ordre 12 (2/2)

La **composition** permet d'obtenir une moyenne mobile centrée symétrique pour un **ordre pair**.

$$M_{2 \times 12} = \frac{1}{2}(M1X_t + M2X_t)$$

ce qui donne, lorsque l'on développe et regroupe :

$$\begin{aligned} M_{2 \times 12} = & \frac{1}{24}(X_{t-6}) + \frac{1}{12}(X_{t-5} + X_{t-4} \\ & + X_{t-3} + X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + X_{t+2} \\ & + X_{t+3} + X_{t+4} + X_{t+5}) + \frac{1}{24}(X_{t+6}) \end{aligned}$$

On obtient une moyenne mobile centrée symétrique à  $1 + (5 + 1 + 5) + 1 = 13$  termes (demi-poids aux extrémités)

## Moyennes mobiles : élimination de la saisonnalité

Si l'on se place dans l'hypothèse vue d'une saisonnalité constante :

$$\sum_{i=1}^{12} S_{t+i} = 0$$

L'effet d'une moyenne mobile d'ordre 12 sera de supprimer une saisonnalité mensuelle localement stable  $M_{1 \times 12}(S) = 0$

La moyenne  $M_{2 \times 12}$  aura aussi cet effet

$$M_{2 \times 12}(S) = \frac{1}{2}(M1X_t(S) + M2X_t(S)) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$$

L'avantage de la  $M_{2 \times 12}$  sur la  $M_{1 \times 12}$  est d'être centrée symétrique.

**PROPRIETE ESSENTIELLE : une moyenne mobile dont l'ordre est égal à la périodicité élimine une saisonnalité localement stable.**

## Moyennes mobiles : extraction de la saisonnalité (1/4)

La saisonnalité est donc éliminée avec une moyenne mobile où ordre = périodicité

$$M_{2 \times 12}(X_t) = M_{2 \times 12}(T + S + I) = M_{2 \times 12}(T) + M_{2 \times 12}(S) + M_{2 \times 12}(I)$$

Comme  $M_{2 \times 12}(S) = 0$ , en négligeant\*  $I$  à ce stade, on obtient une approximation de  $T$ . Puis de  $S + I$  par soustraction (car  $S + I = X - T$ ).

On va calculer  $S$  en négligeant\*  $I$ .

Le calcul se fait période par période : type de mois par type de mois, type de trimestre par type de trimestre (on considère : la sous-série des janvier, des février. . . )

Pas de mélange de types mois/trimestres à ce stade, car on cherche à estimer ce qui est commun à chaque type de période.

Si on cherchait à estimer une saisonnalité strictement constante, le facteur  $S$  d'une période donnée serait égal à la moyenne empirique des  $\widehat{S + I}$  de l'ensemble des valeurs correspondant à ce type de période.

## Moyennes mobiles : extraction de la saisonnalité (2/4)

Dans le cas d'une saisonnalité strictement constante :

Pour calculer le coefficient  $S$ , commun à tous les mois d'avril de la série (par hypothèse), en notant  $T$  = nombre d'avrils dans la série :

$$S_{avril} = \frac{1}{T}(\widehat{S} + I_{avril,1} + \dots + \widehat{S} + I_{avril,T})$$

Toutefois, on considère que l'hypothèse d'une saisonnalité strictement constante est trop restrictive.

On va laisser la saisonnalité évoluer lentement au fil des ans en utilisant des moyennes mobiles  $3 \times 3$  ou  $3 \times 5$ , le plus souvent. En effet, les MM permettent de faire contribuer un nombre limité de voisins à l'estimation du  $S$  d'une période. De plus, les poids des voisins décroissent lorsqu'ils sont plus lointains  $\rightarrow$  importance moindre quand éloignement temporel.

Négliger  $I$  est une approximation justifiée dans ce calcul car les moyennes mobiles utilisées dans les deux cas réduisent  $I$ . (pas détaillé ici)

## Moyennes mobiles : extraction de la saisonnalité (3/4)

La moyenne mobile  $3 \times 3$  est une composition des moyennes mobiles simples d'ordre 3 vues en début de séquence.

$$M1X_t = \frac{1}{3}(X_{t-2} + X_{t-1} + X_t)$$

$$M2X_t = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$$

$$M3X_t = \frac{1}{3}(X_t + X_{t+1} + X_{t+2})$$

$$M_{3 \times 3}X = \frac{1}{3}(M1X_t + M2X_t + M3X_t)$$

On obtient, après avoir développé et regroupé, une moyenne mobile centrée symétrique à 5 termes :

$$M_{3 \times 3}X = \frac{1}{9}(X_{t-2}) + \frac{2}{9}(X_{t-1}) + \frac{3}{9}(X_t) + \frac{2}{9}(X_{t+1}) + \frac{1}{9}(X_{t+2})$$

Les fractions ont été laissées non simplifiées à dessein.

## Moyennes mobiles : extraction de la saisonnalité (4/4)

La moyenne mobile  $3 \times 5$ , aussi utilisée par X-11, fonctionne sur le même principe : moyenne arithmétique de 3 moyennes simples d'ordre 5, qui est une moyenne mobile centrée symétrique à 7 termes.

Intérêt d'une moyenne mobile composée vs une moyenne mobile simple :

- pour l'élimination de la saisonnalité : obtenir une moyenne mobile symétrique d'ordre égal à la périodicité, alors que la périodicité est paire.
- pour l'extraction de la saisonnalité : attribuer des poids décroissants aux valeurs éloignées et réduire  $I$ .

# Principe itératif de X11 (1/2)

Une première estimation de la CVS :

1. Estimation de la **tendance-cycle** par moyenne mobile  $2 \times 12$  :

$$T_t^{(1)} = M_{2 \times 12}(X_t)$$

2. Estimation de la composante **saisonnier-irrégulier** :

$$(S_t + I_t)^{(1)} = X_t - T_t^{(1)}$$

3. Estimation de la composante **saisonnière** par moyenne mobile  $3 \times 3$  sur **chaque mois** :

$$S_t^{(1)} = M_{3 \times 3} \left[ (S_t + I_t)^{(1)} \right] \text{ et normalisation } Snorm_t^{(1)} = S_t^{(1)} - M_{2 \times 12} \left( S_t^{(1)} \right)$$

4. Première estimation de la série corrigée des variations saisonnières :

$$Xsa_t^{(1)} = (T_t + I_t)^{(1)} = X_t - Snorm_t^{(1)}$$

## Principe itératif de X11 (2/2)

Une seconde estimation de la CVS :

1. Estimation de la **tendance-cycle** par moyenne de Henderson (généralement 13 termes, cf infra) :

$$T_t^{(2)} = H_{13}(Xsa_t^{(1)})$$

2. Estimation de la composante **saisonnier-irrégulier** :

$$(S_t + I_t)^{(2)} = X_t - T_t^{(2)}$$

3. Estimation de la composante **saisonnrière** par moyenne mobile  $3 \times 5$  (généralement) pour **chaque mois/trimestre** :

$$S_t^{(2)} = M_{3 \times 5} \left[ (S_t + I_t)^{(2)} \right] \text{ et normalisation } Snorm_t^{(2)} = S_t^{(2)} - M_{2 \times 12} \left( S_t^{(2)} \right)$$

4. Estimation de la série corrigée des variations saisonnières :

$$Xsa_t^{(2)} = X_t - Snorm_t^{(2)}$$



# Bilan : les différentes moyennes mobiles utilisées par X11 (1/2)

---

## 3 types de MM utilisés par X11 :

1. Moyennes mobiles d'ordre = la périodicité (ex.  $M_{2 \times 12}$ ) pour éliminer une saisonnalité localement stable :  $M(S_t) = 0$

On utilise la  $M_{2 \times 12}$  et pas simplement  $M_{1 \times 12}$ , car les propriétés de symétrie sont importantes.

2. Moyennes mobiles  $M_{3 \times k}$  avec  $k$  impair, pour extraire la saisonnalité
3. Moyennes mobiles de Henderson (pour extraire la tendance d'une série NON saisonnière)  $\rightarrow H_{13}$ 
  - conservent la tendance polynômiale (ordre 3) :  
 $M(at^3 + bt^2 + ct + d) = at^3 + bt^2 + ct + d$
  - réduisent le bruit au maximum
  - n'éliminent pas la saisonnalité

## Bilan : les différentes moyennes mobiles utilisées par X11 (2/2)

---

NB. Les Moyennes Mobiles d'extraction de la saisonnalité sont des compositions de MM d'ordre impair.

Elles peuvent être des  $3 \times 3$  ou  $3 \times 5$  ou  $3 \times 9$ ... La longueur n'est pas la même à toutes les étapes de l'algorithme et elle est en partie paramétrable par l'utilisateur.

# Les étapes de X11

---

3 grandes étapes

**Étapes B et C** : lissage de la série (enlève les points aberrants)

**Étape D** : désaisonnalisation finale (avec l'algorithme de désaisonnalisation décrit précédemment)

On retrouve les séries intermédiaires et finales dans JDemetra+.

# Le problème des fins de série

---

Une moyenne mobile centrée d'ordre  $2p+1$  ne peut être appliquée aux «  $p$  » premiers ni aux «  $p$  » derniers points

Solution 1 : utiliser des moyennes mobiles asymétriques

Les MM asymétriques de MUSGRAVE permettent de minimiser les révisions (associées à celles d'Henderson)

Méthode historique... en voie de réapparition ?

Solution 2 : prolonger la série par prévision et appliquer une moyenne mobile symétrique (par défaut 12 mois prévus)

(Les prévisions sont une combinaison linéaire du passé, ça reste asymétrique, mais « mieux » que MUSGRAVE.)

## Choix du filtre de tendance (Henderson)(1/2)

L'algorithme choisit entre différentes longueur de filtres sur la base du ratio  $I/C$  ( $C$  désigne ici  $T$ , notation d'origine conservée)

Les calculs des premières étapes sont faits avec  $H_{13}$ )

L'utilisateur peut modifier ce choix pour l'étape finale (étape 2 de la partie D)

$$\frac{I}{C} = \frac{\sum_t \left| \frac{\tilde{i}_t}{\tilde{i}_{t-1}} - 1 \right|}{\sum_t \left| \frac{\tilde{t}_t}{\tilde{t}_{t-1}} - 1 \right|}, \quad \text{with } \begin{array}{l} \tilde{i}_t = \text{temporary irregular} \\ \tilde{t}_t = \text{temporary trend-cycled} \end{array}$$

	Decision rule		
I/C	[0, 1)	[1, 3.5)	[3.5, ∞)
Henderson filter ( $m$ )	9-term	13-term	23-term

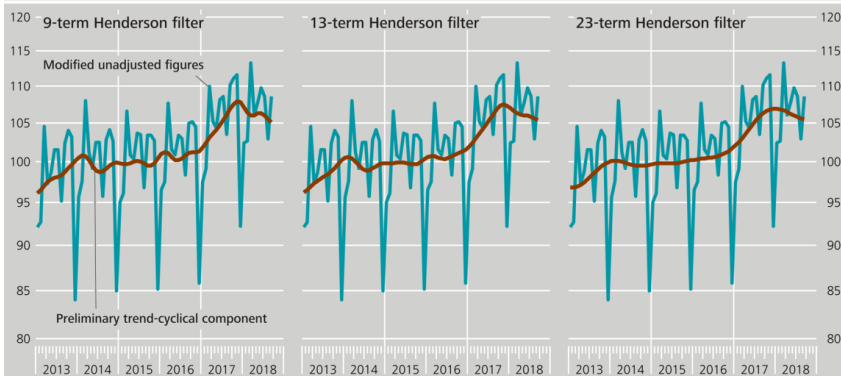
Aim:

- dominance of irregular (I/C ratio large) → choose long filter
- dominance of trend-cycle (I/C ratio small) → choose short filter

# Choix du filtre de tendance (Henderson) (2/2)

## Output in industry – intermediate goods

Volume, 2015 = 100, log scale



Deutsche Bundesbank

S3PR0400U.Chart

## Choix du filtre d'extraction de la saisonnalité (1/2)

L'algorithme choisit entre différentes longueur de filtres sur la base du ratio  $I/S$

Les calculs des premières étapes sont faits avec  $M_{3 \times 3}$

L'utilisateur peut modifier ce choix pour l'étape finale (étape 2 de la partie D)

$$\frac{I}{S} = \frac{\sum_t \left| \frac{i_t}{i_{t-12}} - 1 \right|}{\sum_t \left| \frac{s_t}{s_{t-12}} - 1 \right|}, \quad \text{with} \quad \begin{array}{l} \tilde{i}_t = \text{temporary irregular} \\ \tilde{s}_t = \text{temporary seasonal} \end{array}$$

	Decision rule				
I/S	[0, 2.5]	[2.5, 3.5]	(3.5, 5.5)	[5.5, 6.5]	[6.5, ∞)
Seasonal filter	3 × 3	???	3 × 5	???	3 × 9

???: Maximum of five I/S recalculations under omission of the respective last year, application of 3 × 5 in case still no decision could be taken.

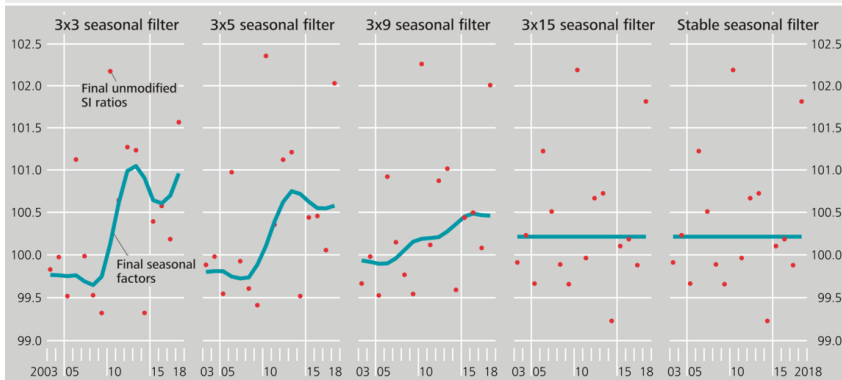
Aim:

- dominance of irregular (I/S ratio large) → choose long filter

# Choix du filtre d'extraction de la saisonnalité (2/2)

## Output in industry – intermediate goods

Volume, 2015 = 100, log scale, May data of each year



Deutsche Bundesbank

S3PR0400P.Chart

(correction des valeurs extrêmes non détaillée ici)



## Les statistiques M (1/2)

---

11 statistiques sur la qualité de la décomposition (M1 à M11) et deux statistiques moyennes (Q et Q-M2) (seuils de 1 calculés empiriquement)

**M1 et M2** : contribution de l'irrégulier à la variance de la série stationnarisée

**M3 et M5** : comparent les variations de  $I$  sur  $T$  (noté  $C$ )

→ si tendance plate à ignorer

**M4** teste  $I$  bruit blanc versus hyp AR(1). Si échec des CJO, outliers. . .

Éventuellement améliorer la linéarisation

**M6**, valable si filtre  $S$  est  $M_{3 \times 5}$ , vérifie si ce choix est adapté.

→ **Si M6 échoue** et MSR global grand (6,5), choisir filtre long, filtre court si petit (2,5)

→ regarder aussi les MSR par mois Decomposition > Quality Measures > Details

## Les statistiques M (2/2)

---

**M7** indique si saisonnalité identifiable

→ **M7 est important.** Rien à faire dans X11, actions en amont : rupture de S à corriger, série non saisonnière, série trop courte (modèle) ou trop longue (supprimer le début), schéma multiplicatif

Statistiques sur la fin de la série :

**M8 et M9** mesurent respectivement variations de S à court et à long terme (linéairement)

**M10 et M11** mêmes indicateurs sur la fin de série (4 années, N-2 à N-5)

Les statistiques Q et les priorités La stat Q est une moyenne pondérée des 11 stat M

La stat Q2 exclut la M2

Par ordre d'importance : - M7 - Q2 - M6 si filtre  $M_{3 \times 5}$  - ...

Idée : agir au maximum dans la phase de pré-traitement (span, calendrier, outliers..)

# Paramètres ajustables à l'interface

## Parameter options for x11 in JDemetra+

Parameter	Options ( <i>default</i> )
Mode	<i>Undefined</i> , Additive, Multiplicative, LogAdditive, PseudoAdditive
Seasonal component	yes/no
Forecasts horizon	no. of periods (positive values) or years (negative values) (-1)
Backcasts horizon	no. of periods (positive values) or years (negative values) (0)
LSigma	> 0.5 (1.5)
USigma	> LSigma (2.5)
Seasonal filter	3x1, 3x3, 3x5, 3x9, 3x15, stable, X11Default, <i>Msr</i>
Details on seasonal filters	period specific filters
Automatic henderson filter	yes/no
Henderson filter	odd number [3,101] (13)
Calendarsigma	<i>None</i> , Signif, All, Select
Excludeforecast	yes/no

# Sommaire

---

1. Phase de décomposition (X11)

2. Conclusion

# Les essentiels

---

- L'algorithme X13-ARIMA travaille en deux phases : pré-ajustement et décomposition
- Le pré-ajustement linéarise (par régression) et prolonge les séries en faisant des prévisions (par modèle ARIMA)
- La décomposition X11 estime les composantes T, S, I et calcule la série CVS ( $T+I$  ou  $T*I$ )
- X11 décompose la série linéarisée
- X11 utilise successivement plusieurs moyennes mobiles ayant des propriétés complémentaires
- Les deux indicateurs de qualité de la décomposition les plus importants sont M7 (essentiel) et Q2 (dans une moindre mesure).