1 - Le modèle Reg-ARIMA

Anna Smyk et Tanguy Barthélémy
Division Recueil et Traitement de l'Information
Département des Méthodes Statistiques

Objectifs de cette séquence

Connaissance plus approfondie du module Reg-ARIMA de la méthode X13-ARIMA.

Après cette séquence, vous :

- connaîtrez les objectifs de l'utilisation d'un modèle Reg-ARIMA et sa structure
- pourrez identifier les modèles utilisés par JDemetra+
- pourrez modifier les spécifications du modèle

X13-ARIMA

Deux modules :

- X11 : phase de décomposition (T S I)
- Reg-ARIMA : phase de pré-ajustement
  - Régression linéaire pour correction préalable des « non-linéarités »
  - Modélisation ARIMA pour faire des prévisions
  - Deux étapes indépendantes en apparence, mais traitements imbriqués

Sommaire

Stationnarité

La notion de **stationnarité** est ici importante car c'est une propriété nécessaire pour le type de modélisation que nous allons décrire.

La série est dite (faiblement) stationnaire lorsque :

- les moments d'ordre 1 et 2 ne dépendent pas du temps

$E(X_t) = m,\ V(X_t) = \sigma^2$

- la covariance entre t et $t-h$ ne dépend pas du temps, mais de la distance h : $cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$

En pratique : regardée « par fenêtre mobile » la série a toujours « la même allure ».

Exemple fondamental : un bruit blanc, noté usuellement ε_t

- espérance nulle $E(\varepsilon_t) = 0$
- variance non nulle et constante $\forall t, V(\varepsilon_t) = \sigma^2$
- covariance entre t et t' nulle : $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0$

La partie « régression linéaire » de X13-ARIMA

Objectif : supprimer les effets déterministes par régression linéaire :

- outliers
- effets de calendrier

$$Y_t = \sum \hat{\alpha}_i O_{it} + \sum \hat{\beta}_j C_{jt} + X_t$$

Série *linéarisée* : $X_t = Y_t - \sum \hat{\alpha}_i O_{it} - \sum \hat{\beta}_j C_{jt}$

<u>GROS résidu</u> de la régression est modélisé par un modèle ARIMA

(Ici les $\hat{\alpha}_i$ et les $\hat{\beta}_j$ ne pourraient être estimés par moindres carrés ordinaires (MCO) car le résidu est autocorrélé dans les séries temporelles.
$\rightarrow$ le modèle ARIMA modélise justement cette autocorrélation et permet une estimation de type moindres carrés généralisés (MCG).)

La décomposition est réalisée sur la série linéarisée, prise en entrée de X-11.

Sommaire

Construction du modèle ARMA : Modèles Autorégressifs (AR)

Un modèle *ARMA* (on verra le sens du *I* enlevé) comporte une partie Auto Regressive *AR* et une partie Moving Average (*MA*)

Pour écrire ces modèles, on introduit un opérateur retard souvent noté B (Backwards) ou L (Lag) :

B opérateur retard : $B(X_t) = X_{t-1}$, et $B^p(X_t) = X_{t-p}$

Modèle *autorégressif* d'ordre p, $AR(p)$:

$$\begin{aligned} & X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \\ \iff & (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t = \varepsilon_t \\ \iff & \Phi(B) X_t = \varepsilon_t \end{aligned}$$

ε_t *innovation* du processus (bruit blanc indépendant du passé de X)

ε_t n'est pas corrélé aux $X_1, X_2......., X_{t-1}$

Un $AR(p)$ modélise l'influence de p réalisations passées sur la réalisation courante : effet mémoire.

Modèles « Moving Average » (MA)

Modèle *moyenne mobile* d'ordre q, $MA(q)$:

$$
\begin{aligned}
& X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\
\iff & X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)\varepsilon_t \\
\iff & X_t = \Theta(B)\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

Processus MA toujours stationnaire

Résulte d'une accumulation non persistante de “q” chocs indépendants.

On décrit les phénomènes qui fluctuent autour d'une moyenne par un MA(1) avec une constante.

Modèles ARMA

Modèles $ARMA(p, q)$: combine $AR(p)$ et $MA(q)$, sans ou avec constante

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

$$\Phi(B)X_t = \mu + \Theta(B)\varepsilon_t$$

Un processus $ARMA$ résulte d'un effet "mémoire" et d'une accumulation non persistante de chocs aléatoires indépendants.

Stationnarité et modélisation ARMA

Les séries stationnaires peuvent, en théorie, être modélisées par un modèle *ARMA*.

Théorème de Wold :

Sous hypothèse de stationnarité (faible)

- il existe un « modèle ARMA » qui approche la série.
- les erreurs de prévision se comportent comme le résidu du modèle (bruit blanc, non corrélé avec le passé des observations)

Modèles SARMA : écriture adaptée aux séries saisonnières des modèles ARMA

Pour modéliser des séries saisonnières, on écrit des modèles **S**ARMA qui permettent de mettre en évidence les retards d'ordre égal à la périodicité s.

Aucun ajout conceptuel par rapport aux modèles *ARMA* mais plus grande clarté d'écriture.

Modèle $SARMA(P, Q)$: *ARMA* avec polynôme d'ordre s (4 pour les séries trimestrielles, 12 pour les séries mensuelles) :

$$\Phi(B^s)X_t = \Theta(B^s)\varepsilon_t \text{ ou } \Phi_s(B)X_t = \Theta_s(B)\varepsilon_t$$

Intérêt :

- mettre en relief les autocorrélations d'ordre s
- simplifier l'écriture par factorisation

Un $ARMA(p, q)(P, Q)$ combine parties régulière et saisonnière : $ARMA(p, q) \times SARMA(P, Q)$.

Identique à un $ARMA(p + P * s, q + Q * s)$

Traitement des processus non stationnaires : Modèles dits **I**ntégrés

Seul un processus stationnaire est modélisable avec un modèle ARMA. Or les séries temporelles couramment rencontrées, notamment les indicateurs économiques, sont rarement sationnaires. On va identifier l'origine de la non-stationnarité et voir comment **stationnariser le processus**.

Soit X un processus « tendance linéaire » :

$$X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

Pour voir si une série est stationnaire, on calcule l'espérance puis si nécessaire la variance et les autocovariances. (NB. La variance est l'autocovariance avec un retard $k = 0$.)

Pour une tendance linéraire (déterministe) + bruit blanc (aléatoire)

$$E(X_t) = \alpha + \beta t + E(\varepsilon_t) = \alpha + \beta t$$

L'espérance dépend du temps, la série n'est pas stationnaire.

Tendance linéaire et différenciation

Calculons la variance.

$$V(X_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

La variance, elle, ne dépend pas du temps.

On va **différencier** cette série

Différence d'ordre 1 :

$$(I - B)X_t = X_t - X_{t-1} = \alpha + \beta t + \varepsilon_t - \alpha - \beta(t-1) - \varepsilon_{t-1}$$

soit

$$(I - B)X_t = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

Stationnarisation par différenciation

Calculons l'espérance, la variance et les covariances de la série différenciée.

$$E((I - B)X_t) = \beta$$

$\rightarrow$ l'espérance ne dépend pas du temps

$$V((I - B)X_t) = V(\varepsilon_t) + V(\varepsilon_{t-1}) = 2\sigma^2$$

car les ε_t et ε_{t-1} ne sont pas corrélés

Calculons la covariance entre t et $t + h$, quand $h > 0$:
$cov((I - B)X_t, (I - B)X_{t+h}) = cov(\beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \beta + \varepsilon_{t+h} - \varepsilon_{t+h-1}) = 0$
car $\forall t \neq t' \ : \ cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0$

$\rightarrow$ la différenciation (ici d'ordre 1) a permis de stationnariser la série.

Ordres de différenciation

Si X est un processus « tendance polynomiale d'ordre 2 », différencier deux fois va stationnariser la série : $(I-B)^2 X_t$ est stationnaire.

De manière générale $(I-B)^d$ stationnarisera un polynôme d'ordre d.

$\rightarrow$ d est appelé ordre de la différenciation.

Un modèle AR**I**MA aura donc 3 ordres : (p, d, q).

L'ordre et le choix des lettres sont conventionnels : AR d'ordre p et MA d'ordre q.

Stationnarisation d'un processus saisonnier stable

Soit X, processus « saisonnier stable » :

$$X_t = S_t + \varepsilon_t \quad \text{avec} \quad \forall t,\, S_t = S_{t+s} \quad \text{et} \quad \varepsilon_t \text{ un bruit blanc}$$

Le processus X_t est-il stationnaire ?

Calculons son espérance : $E(X_t) = S_t$.

On aura $E(X_t) = E(X_{t+12})$ mais $E(X_t) \neq E(X_{t+11})$, donc le processus n'est pas stationnaire.

$$V(X_t) = E((X_t - E(X_t))^2) = E((S_t + \varepsilon_t - S_t - 0)^2) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

Différenciation saisonnière

Pour stationnariser X_t on va appliquer une **différenciation saisonnière** d'ordre 1 :

$$(I - B^s)X_t = S_t + \varepsilon_t - S_{t-12} - \varepsilon_{t-12} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-12}$$

On obtient une combinaison linéaire de bruits blancs, qui est donc stationnaire.

Si X comportait en plus une tendance linéaire $X_t = S_t + a \times t + b + \varepsilon_t$:

$$(I-B^s)X_t = S_t+a\times t+b+\varepsilon_t-S_{t-12}-a\times(t-12)-b-\varepsilon_{t-12} = 12\times a+\varepsilon_t-\varepsilon_{t-12}$$

On voit que même avec l'ajout d'une tendance linéaire, la différenciation saisonnière stationnariserait la série.

On remarque que la différenciation simple est comprise dans la différenciation saisonnière :

$$(I - B^s)X_t = (I - B)(I + B + ... + B^{s-1})X_t$$

Ordre de différenciation et tendances polynomiales

De manière générale, une différenciation « simple » d'ordre d supprime les tendances polynomiales d'ordre d :

$$(I-B)^d X_t$$

Une différenciation « saisonnière » supprime aussi les tendances linéaires :

$$(I-B^s)X_t$$

Dans JD$+$, $D \leq 1$ et $d \leq 1$ dans X-13-ARIMA.

Modèles ARIMA

$ARIMA(p, d, q)$ modélise les séries non saisonnières avec tendance :

$$\Phi(B)(I - B)^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

En mettant en évidence les polynômes en B^s $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)$ modélise les séries avec tendance et saisonnalité :

$$\Phi(B)\Phi_s(B)(I - B)^d (I - B^s)^D X_t = \Theta(B)\Theta_s(B)\varepsilon_t$$

Modèles ARIMA et saisonnalité (1/3)

Considérons la partie saisonnière d'un ARIMA :

1 - Une série avec modèle $(p, d, q)(0, 0, 0)$ est-elle saisonnière ?

2 - que dire de $(p, d, q)(0, 0, Q)$?

3 - $(p, d, q)(0, 1, 0)$?

Modèles ARIMA et saisonnalité (2/3)

Réponses :

1 - Non, aucune autocorrélation d'ordre s.

2 - Non, un MA reflète des fluctuations non persistantes, la saisonnalité persiste dans le temps.

3 - Oui, une saisonnalité stable.

Modèles ARIMA et saisonnalité (3/3)

Deux cas fréquents :

- $(p,d,q)(0,1,1)$ saisonnalité stable en moyenne, avec des fluctuations ponctuelles du niveau de θ_s (plus θ_s est grand, plus ça fluctue)
- $(p,d,q)(1,1,1)$ saisonnalité évolutive avec dérive + fluctuations ponctuelles de niveau θ_s

Sommaire

Méthode de Box-Jenkins (1/2)

La méthode de Box et Jenkins peut être en employée pour déterminer « manuellement » les paramètres $(p, d, q)(P, D, Q)$. Elle repose sur le fait que les ACF de la partie AR ont une forme particulière et que les ACF des parties MA sont nulles à partir de l'ordre q+1. (Et l'inverse est vrai pour les PACF, Fonctions d'autocorrélations partielles).

On pourrait procéder ainsi :

1. Stationnariser le processus : d, D
2. Identifier les ordres ARMA : p, P, q, Q, c'est à dire la structure d'autocorrélation de la série grâce à l'allure des ACF et PACF
3. Estimer les coefficients ARMA (par maximum de vraisemblance)

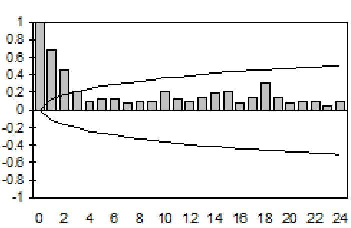
Méthode de Box-Jenkins (2/2)

4. Valider le modèle : les résidus sont-ils un bruit blanc ?
5. Choix du modèle (si plusieurs modèles valides) avec des critères d'information
6. Prévision de la série avant l'étape de décomposition.

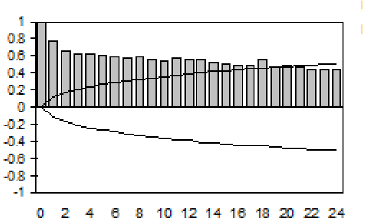
Les algorithmes Reg-Arima de X-13-ARIMA et Tramo de Tramo-Seats ne procèdent pas ainsi. Ils font tous deux une première estimation complète (coefficients de la régression et coefficients du modèle Arima) avec le modèle ARIMA le plus fréquent (0,1,1)(0,1,1), appelé *Airline* car il a historiquement servi à modéliser des flux de passagers dans le transport aérien. Puis les algorithmes recherchent des modèles concurrents à comparer à ce modèle par défaut.

Stationnarité et ACF

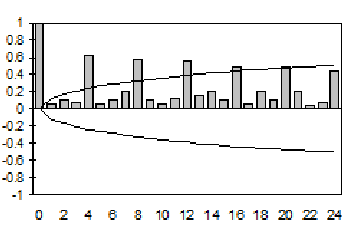
Série stationnaire



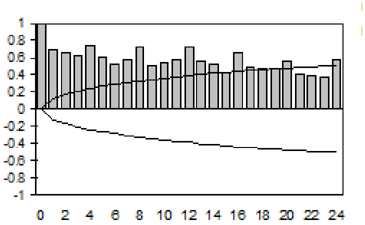
Série non stationnaire : $(I-B)$ **pr station.**



Série non stationnaire : $(I-B^s)$ **pr station.**



Série non stationnaire : $(I-B)(I-B^s)$ **pr sta.**



Choix du modèle

Critères d'information (à **minimiser**) pour comparer les modèles :

- L'AIC (critère de Akaiké) :

$$AIC(p,q) = -2\ln(L) + 2*(p+q)$$

- L'AICC (corrigé pour les courtes périodes) :

$$AICC(p,q) = -2\ln(L) + 2(p+q)\left(1 - \frac{n+p+1}{N_{obs}}\right)^{-1}$$

- Le BIC (critère de Schwarz) :

$$BIC(p,q) = -2\ln(L) + (p+q)\ln(N_{obs})$$

Attention, ne pas comparer des modèles d'ordres de différenciation différents !

Sommaire

Principe de TRAMO

TRAMO = Time séries régression with ARIMA noise, Missing values and Outliers

Mêmes objectifs du pré-ajustement de X13-ARIMA (convergence des algorithmes dans JDemetra+ 3.0) :

- corriger la série des points atypiques, des effets de calendrier et imputation des valeurs manquantes
- prolonger la série
- fournir à SEATS le modèle ARIMA qui servira à la décomposition

Principe de SEATS (1/3)

SEATS = Signal Extraction in ARIMA Time séries

SEATS utilise le modèle ARIMA de la série linéarisée TRAMO :

$$\underbrace{\Phi(B)\Phi_s(B)(I-B)^d(I-B^s)^D}_{\Phi(B)} X_t = \underbrace{\Theta(B)\Theta_s(B)}_{\Theta(B)} \varepsilon_t$$

Hypothèses :

1. La série linéarisée peut être modélisée par un modèle ARIMA.
2. Les différentes composantes sont décorrélées et chaque composante peut être modélisée par un modèle ARIMA.
3. Les polynômes AR des composantes n'ont pas de racine commune.

Principe de SEATS (2/3)

On factorise le polynôme AR $\Phi(B)$:

$$\Phi(B) = \phi_T(B)\phi_S(B)\phi_C(B)$$

- $\phi_T(B)$ racines correspondant à la tendance
- $\phi_S(B)$ racines correspondant à la saisonnalité
- $\phi_C(B)$ racines correspondant au cycle

Principe de SEATS (3/3)

X_t est exprimé sous la forme :

$$X_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t = \underbrace{\frac{\theta_T(B)}{\phi_T(B)}\varepsilon_{T,t}}_{\text{Tendance}} + \underbrace{\frac{\theta_S(B)}{\phi_S(B)}\varepsilon_{S,t}}_{\text{Saisonnalité}} + \underbrace{\nu_t}_{\substack{\text{Irrégulier}\\\text{(bruit}\\\text{blanc)}}}$$

Un modèle ARIMA est associé à chaque composante.

Infinité de solutions : on retient celle qui maximise la variance de l'irrégulier.

$\rightarrow$ Estimation par filtre de Wiener-Kolmogorov

$\rightarrow$ En France c'est X-13ARIMA qui est principalement utilisé : importance moindre de la modélisation ARIMA. En Italie et en Espagne, Tramo-Seats est privilégié.

$\rightarrow$ SEATS décompose les séries bimestrielles

Pour en savoir plus (méthodes et paramétrages du logiciel JD+)

- Handbook on seasonal adjustement d'eurostat https://ec.europa.eu/eurostat/web/products-manuals-and-guidelines/-/KS-GQ-18-001
- Documentation JDemetra+ (partie théorique sur les méthodes) https://jdemetradocumentation.github.io/JDemetra-documentation/

Sommaire

Les essentiels

Les séries économiques ne sont pas stationnaires : ni leur niveau, ni leurs fluctuations ne sont constants dans le temps

Différencier un processus permet de le stationnariser.

Un MA capte les fluctuations non persistantes autour d'un niveau constant : c'est donc un processus stationnaire.

Un AR met en évidence l'influence des réalisations passées sur la réalisation courante.

Un ARIMA reflète la structure des autocorrélations de la série, ainsi que son degré de variabilité dans le temps.

L'examen des résidus permet de valider les modèles. Le choix entre plusieurs modèles valides se fait grâce aux critères d'information.

La modélisation ARIMA du module de pré-ajustement permet de linéariser et de prolonger la série. Elle ne permet pas d'isoler la composante saisonnière.

Exercice

Exercices : écrire les modèles Reg-ARIMA de vos séries à partir des éléments donnés par JDemetra+.