

MINI-PROJET MODÉLISATION

CENTRALESUPÉLEC - 1A

GROUPE 218

Lokta Volterra

5 janvier 2021



CentraleSupélec

Auteurs :

Matthieu BRIET

Tanguy COLLEVILLE

Antoine PAGNEUX

Table des matières

I	Introduction	3
II	Modélisation à état continu	3
II.1	Mise en équation du modèle Lotka Volterra	3
II.2	Analyse des points d'équilibre	3
II.3	Évolution des grandeurs en fonction du temps	4
II.4	Portrait de phase des grandeurs u, v, w	4
II.5	Conclusion	5
III	Modélisation à événements discrets	5
III.1	Réseau de pétri	5
IV	Conclusion	6

Table des figures

1	Évolution des grandeurs, méthode Scipy	4
2	Évolution des grandeurs, méthode d'Euler	4
3	Comparaison des méthodes de résolution avec Euler explicite et Scipy	4
4	Convergence vers le point d'équilibre	5
5	Portrait de phases	5
6	Réseau de Pétri du système	6

I Introduction

L'objectif de ce projet de modélisation est de proposer une simulation de l'évolution des populations, d'un couple proie prédateur dans un écosystème, par le biais des équations de Lotka Volterra. Dans un premier temps, Nous étudierons et développerons le modèle à temps continu pour ensuite nous intéresser à la modélisation en temps discret. Nous nous intéresserons à l'évolution des populations de sardines et de requins dans la mer Adriatique. Ce type d'étude peut aider des états à prendre des mesures politiques environnementales et commerciales afin de préserver les écosystèmes des impacts de l'activité humaine, telle que la pêche intensive qui menace certaines espèces.

II Modélisation à état continu

II.1 Mise en équation du modèle Lotka Volterra

On note u la densité de proies et v la densité de prédateurs. On note ensuite w l'effort de pêche. On cherche à connaître en l'évolution de ces trois grandeurs au cours du temps. Les différents paramètres sont décrits dans le documents support

Ces grandeurs vérifient le système d'équations différentielles non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(a_1 - b_1 u - \frac{c_1 v}{u + k_1} \right) u - mquw \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \left(a_2 - \frac{c_2 v}{u + k_2} \right) v \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \lambda (pmqu - c) w \end{cases}$$

Avec les conditions initiales suivantes : $u(0) \geq 0$, $v(0) \geq 0$ et $w(0) \geq 0$. On en déduit le schéma d'Euler explicite suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h \left(\left(a_1 - b_1 u_n - \frac{c_1 v_n}{u_n + k_1} \right) u_n - mqu_n w_n \right) \\ v_{n+1} = v_n + h \left(\left(a_2 - \frac{c_2 v_n}{u_n + k_2} \right) v_n \right) \\ w_{n+1} = w_n + h (\lambda (pmqu_n - c) w_n) \end{cases}$$

Ce système est convergent d'ordre 1, autrement dit il assure la stabilité et la consistance du modèle.

II.2 Analyse des points d'équilibre

On cherche les points d'équilibre $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \bar{u} - b_1 \bar{u}^2 - \frac{c_1 \bar{v}}{\bar{u} + k_1} \bar{u} - mqu\bar{w} = 0 \\ a_2 - \frac{c_2 \bar{v}}{\bar{u} + k_2} = 0 \\ \lambda \bar{w} (pmq\bar{u} - c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{w} = \frac{1}{mq\bar{u}} \left(a_2 a_1 \bar{u} - b_1 \bar{u}^2 - \frac{c_1 \bar{v}}{\bar{u} + k_1} \bar{u} \right) \\ \bar{v} = \frac{a_2}{c_2} (\bar{u} + k_2) \\ \bar{u} = \frac{c}{pmq} \end{cases}$$

Soient les points : $\begin{cases} \bar{w} = \frac{1}{mq} \left(\frac{a_1 pmq - b_1 c}{pmq} - \frac{c_1 a_2 (c + k_2 pmq)}{c_2 (c + k_1 pmq)} \right) \\ \bar{v} = \frac{a_2}{c_2} \left(\frac{c}{pmq} + k_2 \right) \\ \bar{u} = \frac{c}{pmq} \end{cases}$ à condition que les conditions énoncées dans le lemme 4.1 du document support soient respectées.

II.3 Évolution des grandeurs en fonction du temps

Une solution approchée du systèmes d'équations différentielles a été déterminée à partir du module python Scipy et à partir d'un schéma d'Euler explicite. L'évolution des population de requins, de sardines et de l'effort de pêche est tracé ci-dessous. On remarque que les solutions Scipy et Euler explicite convergent bien vers les valeurs d'équilibre : proportion de sardines de **16.8**, proportion de requins de **14.75** et un effort de pêche de **3.4**.

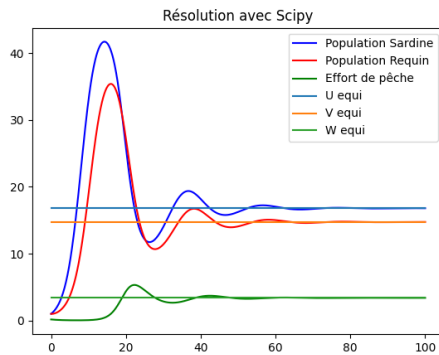


FIGURE 1 – Évolution des grandeurs, méthode Scipy

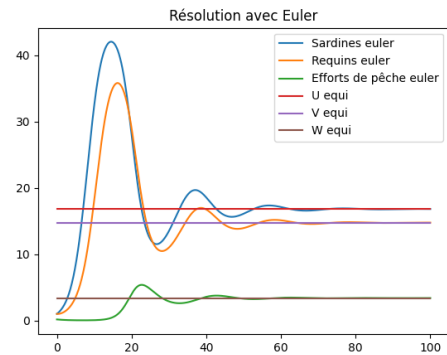


FIGURE 2 – Évolution des grandeurs, méthode d'Euler

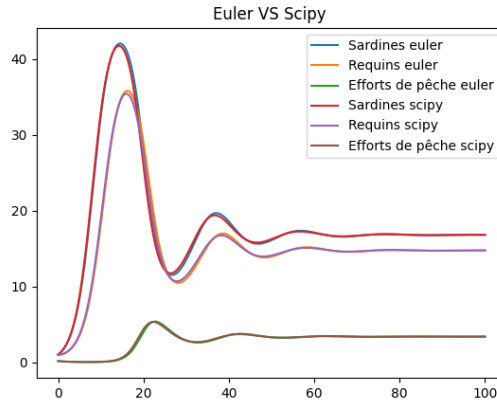


FIGURE 3 – Comparaison des méthodes de résolution avec Euler explicite et Scipy

II.4 Portrait de phase des grandeurs u, v, w

Le graphique d'évolution de la population de requins, de la population de sardines et de l'effort de pêche est donné ci dessous. On remarque la convergence vers le point d'équilibre.

Euler convergence vers le point d'équilibre

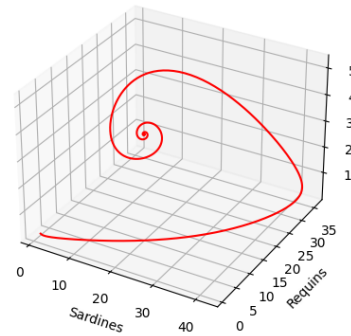


FIGURE 4 – Convergence vers le point d'équilibre

Les portraits de phases des 3 grandeurs sont ainsi obtenus.

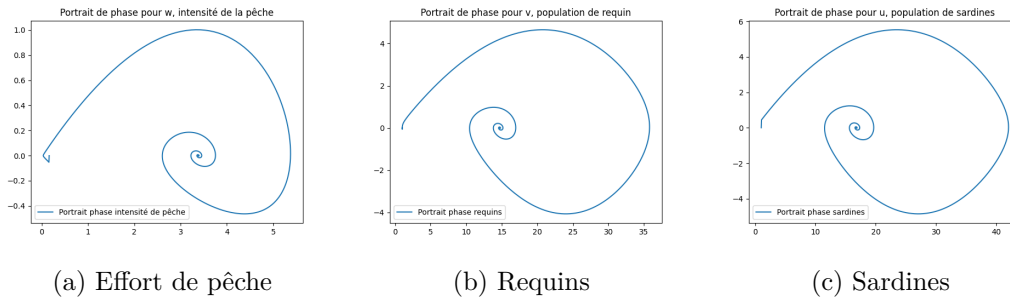


FIGURE 5 – Portrait de phases

II.5 Conclusion

On peut voir que notre modèle est juste, en effet on retrouve les résultats mis en exergue dans les papiers de recherche à propos de ce sujet. On remarque également que nos modèles sont convergents, i.e. stable et consistant. De plus on remarque que la méthode de résolution avec scipy vient corroborer les résultats obtenus via la méthode d'euler explicite. Enfin, ces deux modèles permettent de vérifier nos intuitions quant aux dynamiques de population avec des cas particuliers, comme l'absence de pêche qui induit un état d'équilibre plus haut pour la population de sardine. Cependant les cas de ce genre ne sont pas exposés dans ce rapport par soucis de concision.

III Modélisation à événements discrets

III.1 Réseau de pétri

Pour modéliser la prise en compte des morts et naissances à l'état discret nous avons développé le modèle de Lotka-Volterra en temps discret avec le réseau de Pétri ci-dessous.

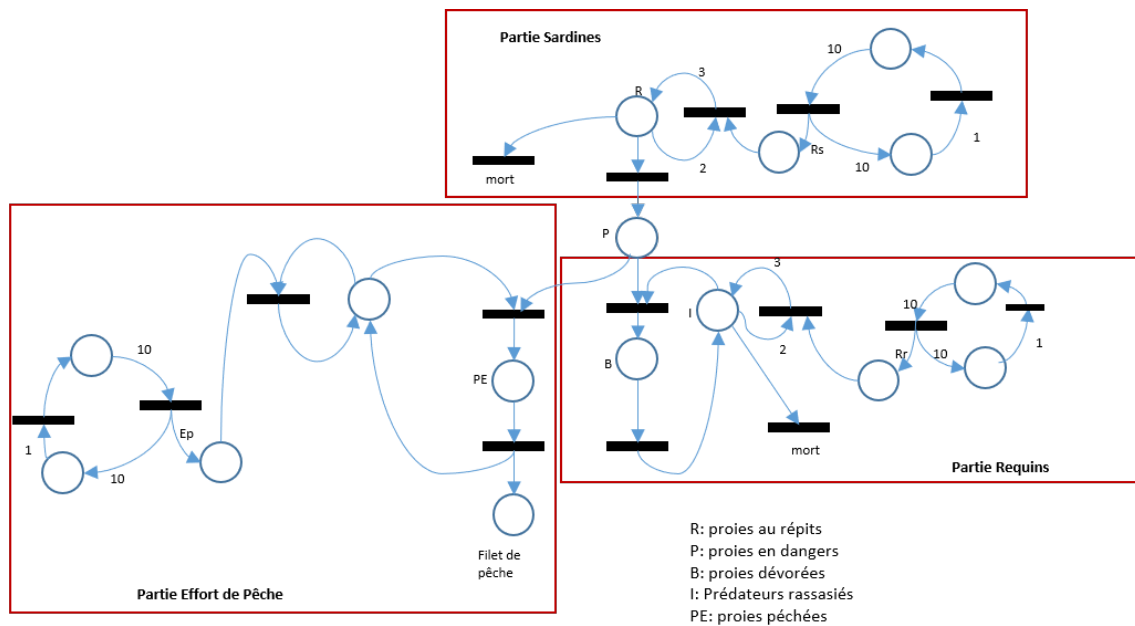


FIGURE 6 – Réseau de Pétri du système

Ce réseau permet via un compteur de comptabiliser les paramètres R_s et R_r qui représentent les taux de reproduction des populations de sardines et de requins et E_p qui permet de tenir compte de l'effort de pêche. Il permet également via le même système de compteur de modéliser l'effort de pêche. Aussi, la compétition entre individu définie par les variables b_1 et b_2 et pris en compte avec les puits qui symbolisent la mort d'un individu.

IV Conclusion

Nous avons pu voir au terme de ce projet, les enjeux de la modélisation d'un phénomène complexe. En effet, la prise d'initiative et d'hypothèses ont été primordiales afin de mener à bien notre projet de modélisation de l'évolution des populations de sardines exposées à la pêche et à la chasse des requins en mer adriatique. Par ailleurs, nous avons pu voir, par le biais de différentes modélisations, que les hypothèses changeaient en passant du temps discret au temps continu. Enfin nous pouvons affirmer que les résultats sont satisfaisants dans la mesure où ses derniers correspondent aux résultats mis en exergue dans les rapports de recherches émis sur le sujet et dans la mesure où ils viennent corroborer nos intuitions concernant la dynamique des populations.

Bibliographie

- [1] B Andreianov, C Caldini, C Donadello, and P Klein. Mathématiques pour la modélisation Dynamique des populations. page 39.
- [2] Philippe Etchécopar. Des prédateurs et leurs proies. 8 :4, 2013.
- [3] Pauline Lafitte. Responsable du cours : Pauline LAFITTE • Professeur de Mathématiques à CS. page 120.
- [4] Audrey Lustig. Réseaux de Pe'tri et modèles proies-pre'dateurs. page 17.