

MINI-PROJET MODÉLISATION

CENTRALESUPÉLEC - 1A

GROUPE 218

Lokta Volterra

22 décembre 2020



CentraleSupélec

Auteurs :

Matthieu BRIET

Tanguy COLLEVILLE

Antoine PAGNEUX

Table des matières

| | | |
|------------|--|----------|
| I | Introduction | 3 |
| II | Modélisation à état continu | 3 |
| II.1 | Mise en équation du modèle Lotka Volterra | 3 |
| II.2 | Analyse des points d'équilibre | 3 |
| II.3 | Évolution des grandeurs en fonction du temps | 4 |
| II.4 | Portrait de phase des grandeurs u, v, w | 4 |
| II.5 | Conclusion | 5 |
| II.6 | Cas particulier du système sans prédateur | 5 |
| III | Modélisation à événements discrets | 5 |
| III.1 | blabla. | 5 |

Table des figures

| | | |
|---|--|---|
| 1 | Évolution des grandeurs, méthode Scipy | 4 |
| 2 | Évolution des grandeurs, méthode d'Euler | 4 |
| 3 | Comparaison des méthodes de résolution avec Euler explicite et Scipy | 4 |
| 4 | Convergence vers le point d'équilibre | 4 |
| 5 | Portrait de phases | 5 |

I Introduction

L'objectif de ce projet de modélisation est de proposer une simulation de l'évolution des populations, d'un couple proie prédateur dans un écosystème, par le biais des équations de Lotka Volterra. Dans un premier temps, Nous étudierons et développerons le modèle à temps continu pour ensuite nous intéresser à la modélisation en temps discret. Nous nous intéresserons à l'évolution des populations de sardines et de requins dans la mer Adriatique. Ce type d'étude peut aider des états à prendre des mesures politiques environnementales et commerciale afin de préserver les écosystèmes des impacts de l'activité humaine, telle que la pêche intensive qui menace certaines espèces.

II Modélisation à état continu

II.1 Mise en équation du modèle Lotka Volterra

On note u la densité de proies et v la densité de prédateurs. On note ensuite w l'effort de pêche. On cherche à connaître en l'évolution de ces trois grandeurs au cours du temps. Ces grandeurs vérifient le système d'équations différentielles non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(a_1 - b_1 u - \frac{c_1 v}{u + k_1} \right) u - mquw \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \left(a_2 - \frac{c_2 v}{u + k_2} \right) v \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \lambda (pmqu - c) w \end{cases}$$

Avec les conditions initiales suivantes : $u(0) \geq 0$, $v(0) \geq 0$ et $w(0) \geq 0$. On en déduit le schéma d'Euler explicite suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h \left(\left(a_1 - b_1 u_n - \frac{c_1 v_n}{u_n + k_1} \right) u_n - mqu_n w_n \right) \\ v_{n+1} = v_n + h \left(\left(a_2 - \frac{c_2 v_n}{u_n + k_2} \right) v_n \right) \\ w_{n+1} = w_n + h (\lambda (pmqu_n - c) w_n) \end{cases}$$

Ce système est convergent d'ordre 1.

II.2 Analyse des points d'équilibre

On cherche les points d'équilibre $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \bar{u} - b_1 \bar{u}^2 - \frac{c_1 \bar{v}}{\bar{u} + k_1} \bar{u} - m\bar{q}\bar{u}\bar{w} = 0 \\ a_2 - \frac{c_2 \bar{v}}{\bar{u} + k_2} = 0 \\ \lambda \bar{w} (pm\bar{q}\bar{u} - c) = 0 \end{cases}$$

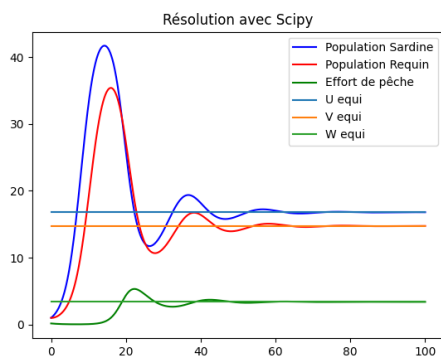


FIGURE 1 – Évolution des grandeurs, méthode Scipy

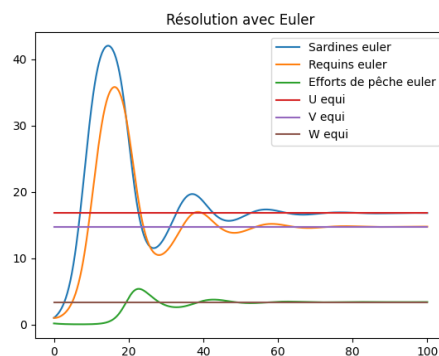


FIGURE 2 – Évolution des grandeurs, méthode d'Euler

II.3 Évolution des grandeurs en fonction du temps

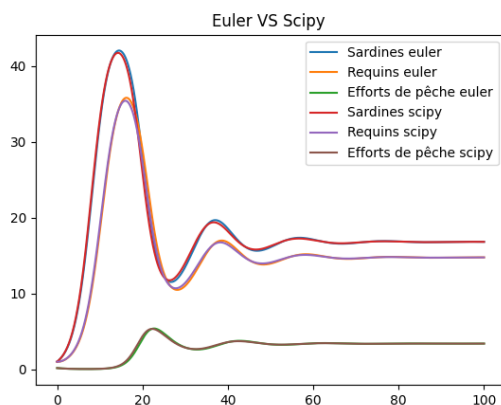


FIGURE 3 – Comparaison des méthodes de résolution avec Euler explicite et Scipy

II.4 Portrait de phase des grandeurs u, v, w

Euler convergence vers le point d'équilibre

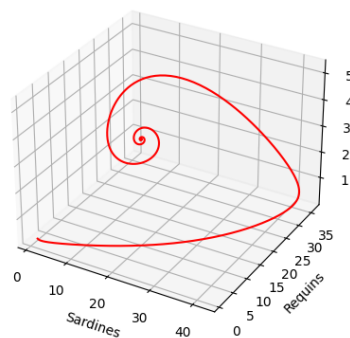


FIGURE 4 – Convergence vers le point d'équilibre

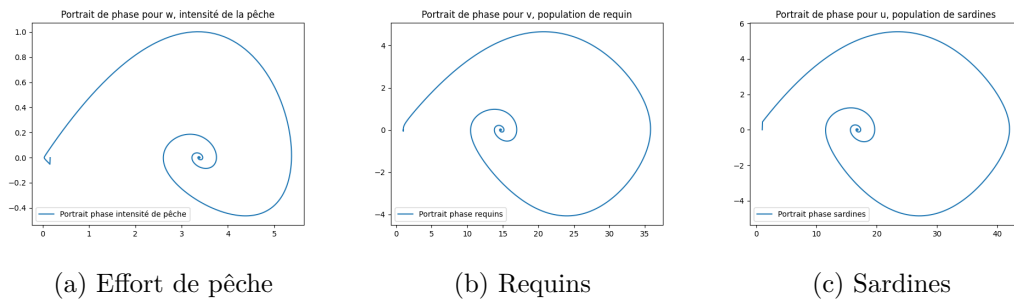


FIGURE 5 – Portrait de phases

II.5 Conclusion

II.6 Cas particulier du système sans prédateur

III Modélisation à événements discrets

III.1 blabla