SESIÓN 40

10/03/2021

DERIVADA IMPLÍCITA

Se usa la herramienta de la derivada implícita cuando una función no se expresa de forma explícita en términos de la variable x o en términos de la variable y, es decir, cuando no es muy fácil separar las variables o es muy difícil o imposible lograr la separación.

EJERCICIO 1

Encuentre la pendiente de la curva en el punto $(0,2)$

$$(x^2+y^2)^2=4y^2$$

$$x^4+2x^2y^2+y^4=4y^2$$

El Grado absoluto del polinomio es 4

$$x^4+2x^2y^2+y^4-4y^2=0$$

El Grado relativo se considera si estructuramos el polinomio en función de una variable.

Por ejemplo, la variable x. Entonces la otra variable hace la función de una constante.

$$x^4+2x^2y^2+y^4-4y^2=0$$

$$x^4+2y^2x^2+(y^4-4y^2)=0$$

El grado relativo del polinomio en x es 4

$$(x^2)^2+2y^2(x^2)^1+(y^4-4y^2)=0$$

$$a(x)^2+b(x)+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Para encontrar o resolver el polinomio en x cuadrático, se puede utilizar la fórmula general:

$$x^2=\frac{-2y^2\pm\sqrt{(2y^2)^2-4(1)(y^4-4y^2)}}{2(1)}$$

$$x^2=\frac{-2y^2\pm\sqrt{(4y^4)-4(y^4-4y^2)}}{2}$$

$$x^2=\frac{-2y^2\pm\sqrt{(4y^4)-4y^4+16y^2)}}{2}$$

$$x^2=\frac{-2y^2\pm\sqrt{(4y^4)-4y^4+16y^2)}}{2}$$

$$x^2 = \frac{-2y^2 \pm \sqrt{16y^2}}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{-2y^2 \pm \sqrt{16y^2}}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{-2y^2 \pm 4\mathrm{y}}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2y(-y \pm 2)}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{y(-y \pm 2)}{1}}$$

$$x = \sqrt{y(-y \pm 2)}$$

$$\frac{dx}{dy} = x'$$

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 * dy}{1 * dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$verdad$$

Por ejemplo, la variable y. Entonces la otra variable hace la función de una constante.

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4y^2 = 0$$

$$y^4 + 2x^2y^2 - 4y^2 + x^4 = 0$$

$$y^4 + (2x^2y^2 - 4y^2) + x^4 = 0$$

$$y^4 + (2x^2 - 4)y^2 + x^4 = 0$$

El grado relativo del polinomio en y es 4

$$(y^2)^2 + (2x^2 - 4)y^2 + x^4 = 0$$

$$a(y)^2 + b(y) + c = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para encontrar o resolver el polinomio en y cuadrático, se puede utilizar la fórmula general:

$$y^2 = \frac{-(2x^2 - 4) \pm \sqrt{(2x^2 - 4)^2 - 4(1)(x^4)}}{2(1)}$$

$$y^2 = \frac{-(2x^2 - 4) \pm \sqrt{4x^4 - 16x^2 + 16 - 4(x^4)}}{2}$$

$$y^2 = \frac{-(2x^2 - 4) \pm \sqrt{-16x^2 + 16}}{2}$$

$$y^2 = \frac{-(2x^2 - 4) \pm \sqrt{16(-x^2 + 1)}}{2}$$

$$y^2 = \frac{-(2x^2 - 4) \pm 4\sqrt{(-x^2 + 1)}}{2}$$

$$y^2 = \frac{-2(x^2 - 2) \pm 4\sqrt{(-x^2 + 1)}}{2}$$

$$y^2 = \frac{2\left[-(x^2 - 2) \pm 2\sqrt{(-x^2 + 1)}\right]}{2}$$

$$y^2 = \frac{\left[-(x^2 - 2) \pm 2\sqrt{(-x^2 + 1)}\right]}{1}$$

$$y^2 = -(x^2 - 2) \pm 2\sqrt{(-x^2 + 1)}$$

$$y = \sqrt{-(x^2 - 2) \pm 2\sqrt{(-x^2 + 1)}}$$

$$y = \left(-(x^2 - 2) \pm 2\sqrt{(-x^2 + 1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \left(-(x^2 - 2) + 2(-x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(-(x^2-2)+2(-x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}-1} * u'$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(-(x^2-2)+2(-x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} * u'$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(-(x^2-2)+2(-x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} * (-2x) + 2 * \frac{1}{2}(-x^2+1)^{\frac{1}{2}-1} * m'$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(-(x^2-2)+2(-x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} * (-2x) + 2 * \frac{1}{2}(-x^2+1)^{\frac{1}{2}-1} * (-2x)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(-(x^2-2)+2(-x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} * (-2x) + 2 * \frac{1}{2}(-x^2+1)^{-\frac{1}{2}} * (-2x)$$

$$y' = \left(-(x^2-2)+2(-x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} * (-x) + 2 * (-x^2+1)^{-\frac{1}{2}} * (-x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{x}{\left(-(x^2-2)+2(-x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x}{(-x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{\left(-(x^2-2)+2\sqrt{(-x^2+1)}\right)}} - \frac{2x}{\sqrt{(-x^2+1)}}$$

$$\frac{dx}{dy} = ?$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 * dx}{1 * dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy}$$

$verdad$

DERIVADA IMPLÍCITA

- ✓ Se deriva de forma normal, pero cuando derivemos a la variable y siempre se multiplicará por y'
- ✓ Se aplicará la propiedad asociativa, esto es, todos los términos que contienen y' se expresan en un solo lado de la igualdad. Los otros términos que no contienen y' se escriben en el otro miembro de la igualdad.
- ✓ Aplicamos la propiedad distributiva a la inversa llamado también factor común. El factor común obviamente es y'
- ✓ Se despeja el factor y' y de esta forma se encuentra la derivada de la función original.
- ✓ Si se desea obtener la ecuación de la recta tangente, se necesitará tener una condición inicial (x, y). Ejemplo $(0,1)$

Ejercicio

Derivar implícitamente:

$$(x^2 + y^2)^2 = 4y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = ?$$

Cada vez que derive a la variable "x", realice la derivada de forma normal aplicando las propiedades de las derivadas básicas o derivadas de funciones con cambio de variable. Si deriva a la variable "y", aplique las propiedades de las derivadas básicas o derivadas de funciones con cambio de variable, multiplicando inmediatamente por y'

$$2(x^2 + y^2)^{2-1} * \ derivada\ interna = 8y^1 * y'$$

$$2(x^2 + y^2) * (2x + 2y * y') = 8y * y'$$

Agrupar los términos que contengan y'

$$4x(x^2 + y^2) + \ 4y(x^2 + y^2)y' = 8y * y'$$

$$4x(x^2 + y^2) = 8yy' - 4y(x^2 + y^2)y'$$

$$4x(x^2 + y^2) = 4yy'\big(2 - (x^2 + y^2)\big)$$

$$y' = \frac{4x(x^2 + y^2)}{4y\big(2 - (x^2 + y^2)\big)}$$

$$y' = \frac{x(x^2 + y^2)}{y(2 - x^2 - y^2)}$$

Para la condición inicial CI = (0,2), encuentre la pendiente

$$y'(0{,}2) = \frac{(0)(0^2 + 2^2)}{(2)(2 - 0^2 - 2^2)}$$

$$y' = \frac{0}{2(2 - 4)}$$

$$y' = \frac{0}{2(-2)}$$

$$y' = \frac{0}{(-4)} = 0 = m$$

ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

$$y' = 0 = m$$

$$m = tan\theta$$

$$0 = tan\theta$$

$$arctan(0) = arctan(tan\theta)$$

$$f * f^{-1} = I = 1$$

$$\theta = \arctan(0)$$

$$\theta = 0°$$

Ecuación de la recta tangente:

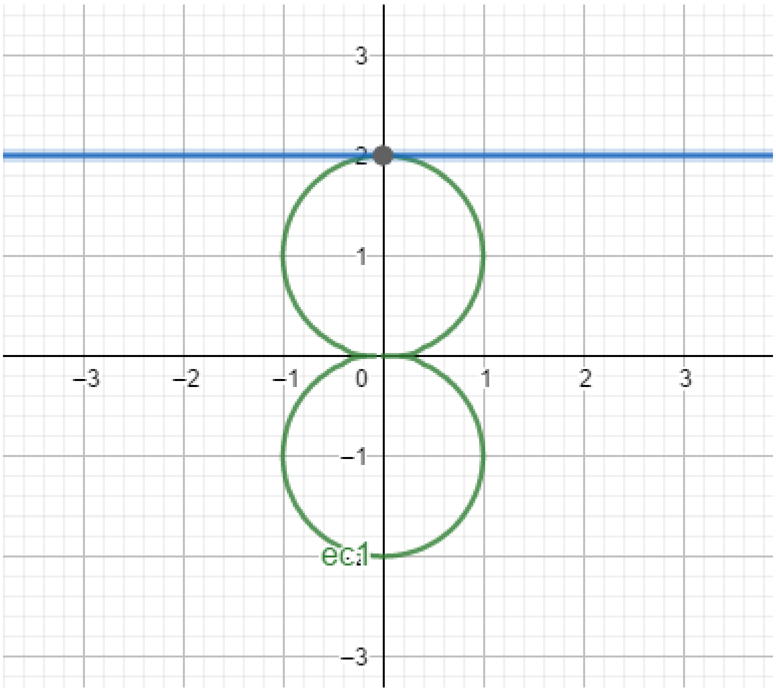
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 0(x - 0)$$

$$y - 2 = 0(x)$$

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2$$



DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

$$y' = \frac{x(x^2+y^2)}{y(2-x^2-y^2)}$$

$$y'' = [y']'$$

$$y'' = \left[\frac{x(x^2+y^2)}{y(2-x^2-y^2)}\right]'$$

Aplicando la propiedad de la derivada de un cociente de funciones

$$y'' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y'' = \frac{[x(x^2+y^2)]' * [y(2-x^2-y^2)] - [x(x^2+y^2)] * [y(2-x^2-y^2)]'}{[y(2-x^2-y^2)]^2}$$

Aplicando la propiedad de la derivada de un producto de funciones

$$y = u * v$$

$$y' = u' * v + u * v'$$

$$y'' = \frac{\{[x' * (x^2+y^2)] + [x * (x^2+y^2)']\} * [y(2-x^2-y^2)] - [x(x^2+y^2)] * \{[y' * (2-x^2-y^2)] + [y * (2-x^2-y^2)']\}}{[y(2-x^2-y^2)]^2}$$

$$y'' = \frac{\{[1 * (x^2+y^2)] + [x * (2x+2y * y')]\} * [y(2-x^2-y^2)] - [x(x^2+y^2)] * \{[y' * (2-x^2-y^2)] + [y * (-2x-2y * y']\}}{[y(2-x^2-y^2)]^2}$$

$$y'' = \frac{\{[(x^2+y^2)] + [x * (2x+2y * y')]\} * [y(2-x^2-y^2)] - [x(x^2+y^2)] * \{[y' * (2-x^2-y^2)] + [y * (-2x-2y * y']\}}{[y(2-x^2-y^2)]^2}$$

EJERCICIOS REFUERZO:

Tarea a presentar el próximo viernes 19 de marzo de 2021

PROBLEMAS 12.4

En los problemas del 1 al 24, encuentre dy/dx mediante diferenciación implícita.

1. $x^2 + 4y^2 = 4$

2. $3x^2 + 6y^2 = 1$

3. $2y^3 - 7x^2 = 5$

4. $5y^2 - 2x^2 = 10$

5. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3$

6. $x^{1/5} + y^{1/5} = 4$

7. $x^{3/4} + y^{3/4} = 5$

8. $y^3 = 4x$

9. $xy = 36$

10. $x^2 + xy - 2y^2 = 0$

11. $xy - y - 11x = 5$

12. $x^3 - y^3 = 3x^2y - 3xy^2$

13. $2x^3 + y^3 - 12xy = 0$

14. $5x^3 + 6xy + 7y^3 = 0$

15. $x = \sqrt{y} + \sqrt[4]{y}$

16. $x^3y^3 + x = 9$

17. $5x^3y^4 - x + y^2 = 25$

18. $y^2 + y = \ln x$

19. $\ln(xy) = e^{xy}$

20. $\ln(xy) + x = 4$

21. $xe^y + y = 13$

22. $4x^2 + 9y^2 = 16$

23. $(1 + e^{3x})^2 = 3 + \ln(x + y)$

24. $e^{x-y} = \ln(x - y)$

25. Si $x + xy + y^2 = 7$, encuentre dy/dx en $(1, 2)$.

26. Si $x\sqrt{y+1} = y\sqrt{x+1}$, encuentre dy/dx en $(3, 3)$.

27. Encuentre la pendiente de la curva $4x^2 + 9y^2 = 1$ en el punto $(0, \frac{1}{3})$; en el punto (x_0, y_0).

28. Encuentre la pendiente de la curva $(x^2 + y^2)^2 = 4y^2$ en el punto $(0, 2)$.

29. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$x^3 + xy + y^3 = -1$$