①
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1)\ (1):2 \\ 2)\ (2)-(1) \\ \\ 3)\ -((4)-(3)) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 1)\ -2\cdot(2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rk = 4$$

② $\det A = \det(P\Lambda P^{-1}) = \det P \cdot \det\Lambda \cdot \det P^{-1} =$
$= \det\Lambda \cdot \det(P\cdot P^{-1}) = \det\Lambda$

Т.к $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

По св-ам следа:

$tr A = tr(P\Lambda P^{-1}) = tr(\Lambda P\cdot P^{-1}) = tr(\Lambda) \Rightarrow$
$\Rightarrow tr A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

③

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = 3\cdot1\cdot0 + 4\cdot2\cdot0 + 2\cdot0\cdot0 - 3\cdot0\cdot2 - 4\cdot0\cdot0 + $
$-2\cdot1\cdot0 = 0$; $trA = 3+1+0 = 4$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$(3-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) = 0$

$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$-\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$

$\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$D = 16 - 12 = 4$ $\quad$ Подставим λ

$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$ $\Rightarrow \det A = 0\cdot1\cdot3 = 0$ и $trA = 0+1+3 = 4$

1) $\lambda_1 = 0$:

$$(A-\lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V_1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1)\ (1):3 \\ \\ \\ \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 - \frac{8}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x_3 = 1$, тогда $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_2 = 1$

$$(A-\lambda_2 I)V = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} V = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2)\ (1):2 \\ \\ 1)\ -(3) \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}, \text{ тогда } X = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Пусть } x_2 = 1, \text{ тогда } V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda_3 = 3$

$$(A-\lambda_3 I)V = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} V = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2)\ -0{,}5(2) \\ 1)\ -\frac{(3)}{3} \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ тогда } \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Пусть } x_1 = 0, \text{ тогда } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Ответ</u>: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$; $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det B = 0\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 2\cdot 2 + - 0\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot 0 = -8$; $tr B = 0+2+0 = 2$

$$\det(B-\lambda I) = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$(-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) - 2\cdot 2\cdot(2-\lambda) = 0$

$\lambda^2(2-\lambda) - 4(2-\lambda) = 0$

$(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_3 = -2$ $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \det B = 2\cdot(-2)\cdot 2 = -8$; $tr B = 2-2+2 = 2$

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$(B-\lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} V_1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} 2)\ (1):(-2) \\ \\ 1)\ (3)+(1) \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = x_3 \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Пусть $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, тогда $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пусть $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, тогда $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_3 = -2$:

$$(B-\lambda_3 I)V_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} V_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2)\ (1):2 \\ 3)\ (2):4 \\ 1)\ (3)-(1) \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Пусть $x_3 = 1$, тогда $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$; $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) 1) Если λ - это собственное число матрицы A, тогда λ^2 - собственное число A^2

$Av = \lambda v$ | слева умножаем на A

$A^2 v = A(\lambda v)$, т.к λ - скаляр, то:

$A^2 v = \lambda (Av) \Rightarrow A^2 v = \lambda(\lambda v) \Rightarrow A^2 v = \lambda^2 v$

2) λ^{-1} собственное число A^{-1}, т.к A^{-1} существует $\Rightarrow \lambda \neq 0$

$Av = \lambda v$ | умножаем слева на A^{-1}

$Iv = \lambda A^{-1} v$ | $:\lambda$

$\lambda^{-1} v = A^{-1} v \Rightarrow$ доказано.

3) $Av = \lambda v$

$(I + A)v = v + \overset{= \lambda v}{Av} = v + \lambda v = v(\lambda + 1) \Rightarrow$ верно.

5) 1) Если $rkA = \overset{\text{размерность } A}{n}$, то $\det A \neq 0 \Rightarrow$ по формуле:

$rk(A \cdot \hat{A}) = rk(I \cdot \det A) = n$, т.к. $\det A \neq 0$.

т.е. $rk(A \cdot \hat{A}) \le \min(rkA, rk\hat{A})$, т.к $rkA = n$,

то $n \le \min(n, rk\hat{A})$, т.е $rk\hat{A} = n$

2) Если $rkA < n$, то ~~detA~~ $\det A = 0$:

$rk(A \cdot \hat{A}) \le \min(rkA, rk\hat{A})$, т.е:

$0 \le \min(rkA, rk\hat{A})$

2.1) При $rkA = n - 1$, $rk\hat{A} = 1$, т.к матрица алгебраических дополнений строится на определителях подматриц $(n-1) \times (n-1)$ матрицы A, которые не равны 0 и каждая из этих подматриц пропорциональна другой при единственном свободном направлении в линейных комбинациях столбцов A.

2.2) В ином случае (т.е при $rkA < n-1$) $rk\hat{A} = 0$

$\Rightarrow$ Ответ: $rk\hat{A} = \begin{cases} n, & \text{при } rk(A) = n \\ 1, & \text{при } rk(A) = n-1 \\ 0, & \text{при } rk(A) < n-1 \end{cases}$, где n - размерность A