Домашнее задание №4

1)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= -1\cdot 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 1\cdot 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 2\cdot 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -3(-2+1)+2(-2+1)-4\cdot 0 =$$

$$= 3-2=1$$

Ответ: совпадают

2) $V_1=(2,-1,3,5)$; $V_2=(4,-3,1,3)$, $V_3=(3,-2,3,4)$, $V_4=(4,-1,-15,17)$

Найдем базис среди данных векторов с помощью метода Гаусса

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -15 \\ 5 & 3 & 4 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1)\ (1):2 \\ 2)\ (2)+(1) \\ 3)\ (3)-3(1) \\ 4)\ (4)-5(1) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1{,}5 & 2 \\ 0 & -1 & -0{,}5 & 1 \\ 0 & -5 & -1{,}5 & -21 \\ 0 & -7 & -3{,}5 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4)\ (1)-2(2) \\ \cancel{1)\ (2)\cdot(-1)}\ \ 1)\ -(2) \\ \cancel{1)\ (3)+5(2)}\ \ 2)\ (3)+5(2) \\ 3)\ (4)+7(2) \end{matrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow V_1, V_2, V_3 \text{ – образуют базис}$$

Выразим вектор V_4 через базисные:

$$\begin{pmatrix}1&0&0,5&4\\0&1&0,5&-1\\0&0&1&-26\end{pmatrix}\begin{matrix}1)\ (1)-0,5(3)\\2)\ (2)-0,5(3)\\ \end{matrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&17\\0&1&0&12\\0&0&1&-26\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_4 = 17V_1 + 12V_2 - 26V_3$$

Ответ: V_1, V_2, V_3 — базис; $V_4 = 17V_1 + 12V_2 - 26V_3$

(3) 1) Определитель, при изменении строки i матрицы A на λi, будет равен $\det|A'| = \lambda \det A \Rightarrow$ если мы изменим n строк на $-a_{ij}$, то определитель будет равен $(-1)^n \det A \Rightarrow$ если n - четное, то определитель не изменится, иначе определитель будет равен $-\det A$. n - размерность A

2) Чтобы поменять все столбы понадобится $n-1$ перестановок, т.к первый столбец поменяется со всеми остальными $n-1$ столбцами. n - размерность матрицы

Соответственно, из св-в определителя $\det|A'| = (-1)^{n-1}\det|A| \Rightarrow$ для четных изменится и станет $-\det(A)$; для нечетных не изменится.

~~$n<$~~3) На матрицу A, чтобы изменились столбы нужно домножить справа на матрицу $[5\times 5]$ и т.к. изменится только 3 столбец, то: ~~B~~

$$B = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$b_{23} = 2$, т.к. к 3 столбцу требуется прибавить 2-ой с коэффициентом 2.

4) Многочлен максимальной степени равной 5 имеет всего 6 коэффициентов: $a_0, a_1, a_2 \ldots a_5$:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$.

Соответственно можно сделать вывод, что не может быть 7 линейно независимых многочленов. Максимальное количество линейно независимых многочленов степени не более 5 = 6.

4 Воспользуемся формулой: $A\hat{A}^T = (\det A)I \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{A}^T = A^{-1}(\det A)I$

Из св-в определителя:

$$\det(A \cdot \hat{A}^T) = \det A \cdot \underbrace{\det \hat{A}^T}_{=\det \hat{A}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \hat{A} = \frac{\det(A \cdot A^{-1} \cdot (\det A) I)}{\det A} = \frac{\det(I \cdot (\det A) I)}{\det A}$$

Т.к определитель единичной матрицы умноженной на число $\det A$ будет равен $(\det A)^n$, где n-размерность матрицы A, то:

$$\det \hat{A} = \frac{(\det A)^n}{\det A} = (\det A)^{n-1}$$