① Нормы

Опр. $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ — норма
$ \mathbb{R}^n$

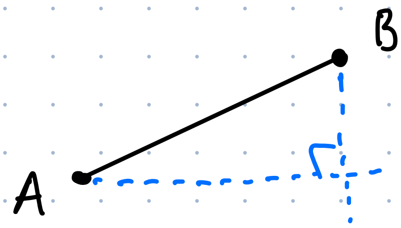
1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \; \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall x \in V$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$ нер. треугольника

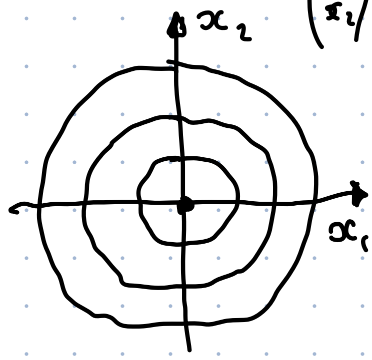
$\rho(x, y) = \|x - y\|$ — расстояния

$x_1^2 + x_2^2 = a^2$

$\mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

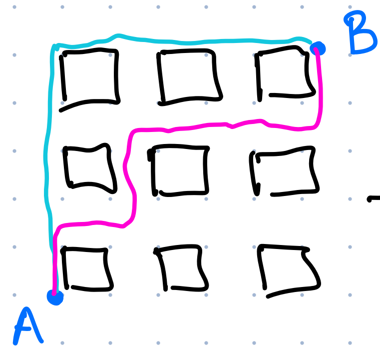
Векторные нормы:

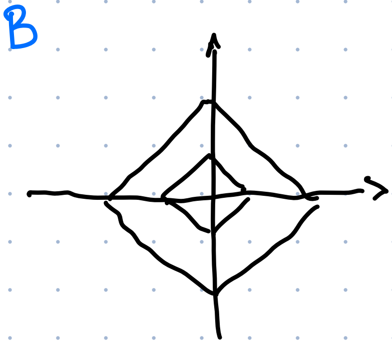




→ Евклидова ℓ_2-норма

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$



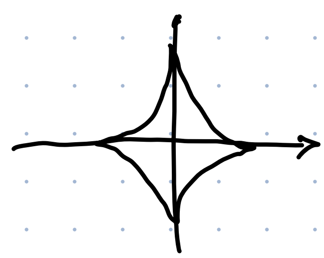


→ Манхэттенская ℓ_1-норма

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

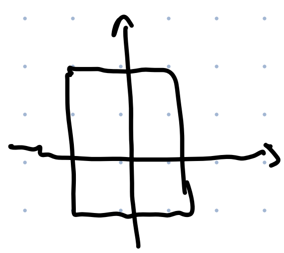
→ Норма Минковского ℓ_p

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$



→ Чебышёва $p \to \infty$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$



Упражнение

Шахматы – какая фигура по какому расстоянию ходит – ?

Матричные нормы

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

→ норма Фробениуса

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \qquad \|A\|_F = \sqrt{tr(A^T A)}$$

→

$$\|A\|_{sum} = \sum_i \sum_j |a_{ij}|$$

→

$$\|A\|_c = \max_{ij} a_{ij}$$

→ Операторные нормы

$$\|\cdot\|_a \text{ на } \mathbb{R} \qquad \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1 (A^T A)}$$

$(V \ \|\cdot\|)$

$(V \ \langle , \rangle)$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Евклидово пространство

$$-1 \leq \underbrace{\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}}_{\cos \alpha} \leq 1 \qquad \alpha \in [0; \pi]$$

Примеры:

1. $\mathbb{R}^2$ $\qquad \langle x, y\rangle = x^T y$ Плоскость из школы

2. $\langle A, B\rangle_F = tr(A^T B)$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{\langle A, A\rangle_F} = \sqrt{tr(A^T A)} = \sqrt{tr(AA^T)}$$

„Длина матрицы"

$$\arccos\left(\frac{\langle A, B\rangle_F}{\|A\|_F \cdot \|B\|_F}\right) \text{ — угол между матрицами}$$

3. $C[0;1]$ $\qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$

$f(x) \in \mathcal{D}[0;1]$

$\in C[0;1]$

2. Квадратичная форма

$f(x_1, \ldots, x_n)$ $\qquad x_i^2 \quad x_i x_j$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 0\cdot x_1x_2 + 0\cdot x_2x_3 + 0\cdot x_1x_3$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad f(x) = x^T A x, \text{ где } A^T = A$$

$f(0) = 0^T A 0 = 0$ всегда равна 0 в точке 0

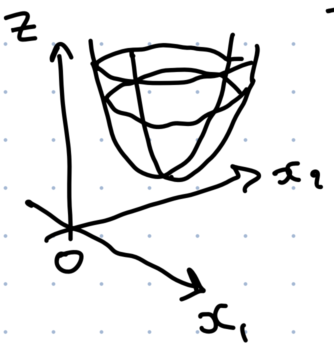
$\Rightarrow$ мы будем интересоваться тем, что за пределами нуля.

Опр.

$f(x) = x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$ положит. опр.

$f(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ отриц. опр.

$\geq 0 \quad \forall x \neq 0$ полож. полуопр.



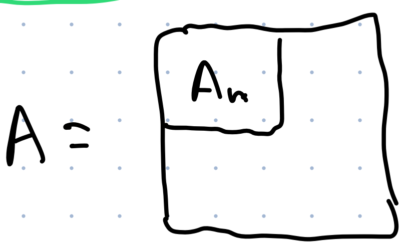
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2$$

Критерий Сильвестра



$\Delta_n = \det A$

A полож. опр. $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$

отриц. опр. $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0 \ldots$

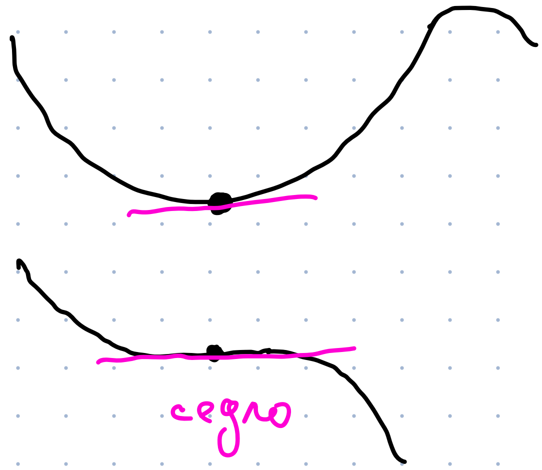
иначе „седло"

Упражнение

$$f(x) = -\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \to \min_x$$

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}\right\}$$ критические точки



$$f''(x) = -2x + 6$$

$$f''(1) = 4 > 0 \quad \min$$

$$f''(5) = -4 < 0 \quad \max$$

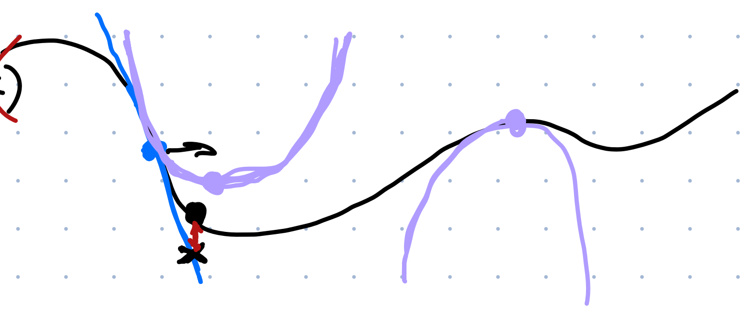
$$\boxed{f''(\cdot) = 0}$$

Теорема о перед. знаков.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)\,dx + \cancel{o(x)}$$

$$+ \frac{f''(x)}{2!} dx^2$$



$$f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\nabla_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

градиент

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta, \dots x_n)}{\Delta}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

матрица Гессе

Упражнение

$$f(x,y) = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y \to \min_{x,y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + y + 0 - 1 - 0 = 6x + y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y - 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x + y - 1 \\ x + 4y - 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x + y - 1 = 0 \\ x + 4y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Критическая точка

$$H = \nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{matrix}$$

$f'_x = 6x + y - 1 \qquad f''_{xx} = 6 \qquad f''_{xy} = 1$

$f'_y = x + 4y - 4 \qquad f''_{yy} = 4 \qquad f''_{yx} = 1$

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

H пол. опр. => минимум

H отр. опр. => максимум

иначе седло

$\Delta_1 = 6 > 0$

$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 24 - 1 = 23 > 0$

=> по критерию Сильвестра мы в минимуме.

$f(x_1, \dots, x_n) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$