① $\det\begin{pmatrix}1&3\\4&11\end{pmatrix} = 11-12=-1 \Rightarrow$ обратная матрица существует

$$\begin{pmatrix}1&3\\4&11\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix}11&-3\\-4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11&3\\4&-1\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-3&1\\-5&-1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}2&-3\\3&-5\end{pmatrix} = 3(3+5)+4(-2-3)+$$

$+5(-10+9) = 24-20-5=-1 \Rightarrow$ обратная матрица существует

б) $$\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}3&-4&5&1&0&0\\2&-3&1&0&1&0\\3&-5&-1&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}(1)/3\\(2)-2(1)\\(3)-(1)\end{matrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{4}{3}&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&-\frac{1}{3}&-\frac{7}{3}&-\frac{2}{3}&1&0\\0&-1&-6&-1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}(1)-\frac{5}{3}(3)\\-3\cdot(2)\\(3)+(2)\end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{4}{3}&0&-\frac{4}{3}&5&-\frac{5}{3}\\0&1&7&2&-3&0\\0&0&1&1&-3&1\end{array}\right)\begin{matrix}(1)+\frac{4}{3}(2)\\(2)-7(3)\end{matrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-8&29&-11\\0&1&0&-5&18&-7\\0&0&1&1&-3&1\end{array}\right) = \begin{pmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{pmatrix}$$

в) $$\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&2\\1&1&2&0\\\hline 0&0&1&-1\\0&0&1&-2\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline 0&C\end{array}\right),$$ где $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix} = \det A\cdot\det C = (2-3)(-2+1) = -1\cdot(-1) = 1 \neq 0$

Воспользуемся формулой из 4-го задания

$$\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}BC^{-1}\\0&C^{-1}\end{pmatrix}.$$

1) $A^{-1} = \frac{1}{2-3}\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}$ 2) $C^{-1} = \frac{1}{-2+1}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

3) $-(A^{-1}BC^{-1}) = +\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-6&2\\-1+4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -10+2 & 5-2 \\ 6-2 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Подставляем в формулу и получаем обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

② $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Так как данная матрица является матрицей Якоби (трехдиагональной), то можем воспользоваться следующей рекурентной формулой:

$f_n = a_n f_{n-1} - c_{n-1} b_{n-1} f_{n-2}$, где

$$\begin{cases} a_1, \ldots, a_n = 1 \text{ (главная диганоль)} \\ b_1 \ldots b_{n-1} = 1 \text{ (соседняя верхняя диагональ)} \\ c_1 \ldots c_{n-1} = -1 \text{ (соседняя нижняя диагональ} \\ f_0 = 1 \\ f_{-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} f_5 &= f_4 + f_3 = 8 \\ f_4 &= f_3 + f_2 = 5 \\ f_3 &= f_2 + f_1 = 3 \\ f_2 &= f_1 + f_0 = 2 \\ f_1 &= f_0 + f_{-1} = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ответ: 8

③ $$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

③ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Определитель можно разложить по 3-му, 4-му или 5-му столбцу. И т.к все миноры, связанные с данными столбцами содержат нулевые строки, эти миноры равны 0 => определитель равен 0.

④

а) $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \det A \cdot \det C$

$K = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & C_1 \end{pmatrix}$

$K \cdot L = E \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} AA_1 + BD_1 & AB_1 + BC_1 \\ CD_1 & CC_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

, т.е: $\begin{cases} AA_1 + \underbrace{BD_1}_{\to 0} = 1 \Rightarrow A_1 = A^{-1} \\ AB_1 + BC_1 = 0 \Rightarrow AB_1 = -BC_1 \Rightarrow B_1 = -A^{-1}BC^{-1} \\ CD_1 = 0 \Rightarrow \text{так } C^{-1} \text{ существует, то } C \neq 0 \Rightarrow D_1 = 0 \\ CC_1 = 1 \Rightarrow C_1 = C^{-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$

б) $M = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det M = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix}$

$M \cdot N = E \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} N_{11}+XN_{21}+YN_{31} & N_{12}+XN_{22}+YN_{32} & N_{13}+XN_{23}+YN_{33} \\ N_{21}+ZN_{31} & N_{22}+ZN_{32} & N_{23}+ZN_{33} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Распишем:

$$\begin{cases} N_{11}+XN_{21}+YN_{31}=1 \Rightarrow N_{11}=1 \\ N_{12}+XN_{22}+YN_{32}=0 \Rightarrow N_{12}=-X \\ N_{13}+XN_{23}+YN_{33}=0 \Rightarrow N_{13}=XZ-Y \\ N_{21}+ZN_{31}=0 \Rightarrow N_{21}=0 \\ N_{22}+ZN_{32}=1 \Rightarrow N_{22}=1 \\ N_{23}+ZN_{33}=0 \Rightarrow N_{23}=-Z \\ N_{31}=0 \\ N_{32}=0 \\ N_{33}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & X & Y \\ 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -X & XZ-Y \\ 0 & 1 & -Z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) $(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(B^{-1}-A^{-1})^{-1}A^{-1}$

Рассмотрим и докажем следующее уравнение:

$(I+A)^{-1} = I - (A^{-1}+I)^{-1}$

1) Домножем слева каждый член уравнения на $(I+A)$

$I = (I+A)I - (I+A)(A^{-1}+I)^{-1} \Rightarrow \cancel{I} = \cancel{I}+A-(I+A)(A^{-1}+I)^{-1} \Rightarrow$

$A = (I+A)(A^{-1}+I)^{-1}$

2) Домножем справа каждый член уравнения на $(A^{-1}+I)$

$A(A^{-1}+I) = I+A \Rightarrow I+A = I+A \Rightarrow$ уравнение верно

3) Аналогично докажем уравнение:

$(A-B)^{-1} = A^{-1}+A^{-1}(B^{-1}-A^{-1})^{-1}A^{-1}$

Домножем слева каждый член ур-я на A

$A(A-B)^{-1} = I + (B^{-1} - A^{-1})^{-1} A^{-1}$

Домножем каждый член ур-я слева на $(B^{-1} - A^{-1})$

$(B^{-1} - A^{-1}) A (A-B)^{-1} = B^{-1} \cancel{- A^{-1}} \cancel{+ A^{-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (B^{-1} A - I)(A-B)^{-1} = B^{-1}$

Домножем каждый член ур-я справа на $(A-B)$

$B^{-1} A - I = B^{-1}(A-B) \Rightarrow B^{-1} A - I = B^{-1} A - I \Rightarrow$

<u>уравнение верно</u>