Домашнее задание №2

Жарова Татьяна

Задача №1

1. Перепишем систему уравнений в матричном виде и найдем случаи, когда определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-1)-(\lambda-1)+(1-\lambda) = \lambda(\lambda^2-1)-2(\lambda-1) = (\lambda^2+\lambda-2)(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$$

Т.е. при $\lambda = -2$ и $\lambda = 1$ определитель равен 0.

2. Найдем решение СЛАУ методом Гаусса при $\lambda = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Первую строку делим на -2, а затем из 2-ой и 3-ей отнимаем первую:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Третью строку складываем с второй:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Так как $0 * x_3 \neq 3$, то можно сделать вывод, что система не имеет решения при $\lambda = -2$.

3. Найдем решение СЛАУ методом Гаусса при $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Из 2-ой и 3-ей отнимаем первую:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тогда $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, соответственно при $\lambda = 1$ система имеет множество решений.

4. Решим СЛАУ методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right).$$

1-ую строку делим на λ, далее из 2-ой отнимаем 1-ую и из 3-ей отнимаем 1-ую:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} & \frac{\lambda-1}{\lambda} & \frac{\lambda-1}{\lambda} \\ 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda} & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} & \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{array}\right).$$

2-ую строку делим на $\frac{\lambda^2-1}{\lambda}$ и отнимаем из 3-ей строки 2-ую умноженную $\frac{\lambda-1}{\lambda}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+1} & \frac{1}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & \frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{\lambda+1} & \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \end{array}\right).$$

3-ю строку делим $\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{\lambda+1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+1} & \frac{1}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{array}\right).$$

Из 2-ой строки отнимаем 3-ю умноженную на $\frac{1}{\lambda+1}$, а затем из 1-ой строки отнимаем 3-ю умноженную на $\frac{1}{\lambda}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda(\lambda+2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{array}\right).$$

Из 1-ой строки отнимаем 2-ую умноженную на $\frac{1}{\lambda}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{array}\right).$$

5. Получается, что при $\lambda = -2$ решения СЛАУ нет, при $\lambda = 1$ СЛАУ имеет множество решений, удовлетвояющие условию $x_1+x_2+x_3 = 1$, в иных случаях СЛАУ имеет единственное решение:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 2}.$$

Ответ: При $\lambda = -2$ решения СЛАУ нет, при $\lambda = 1$ СЛАУ имеет множество решений, удовлетвояющие условию $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, в иных случаях СЛАУ имеет единственное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2}$.

Задача №2

1. $A^2 + AB + BA + B^2 = A(A+B) + B(A+B) = (A+B)(A+B) = (A+B)^2$
2. $A + B = \begin{pmatrix} 47 & 59 \\ -23 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -42 & -59 \\ 22 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5*5+0*(-1) & 5*0+0*1 \\ -1*5+1*(-1) & -1*0+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

Задача №3

X - матрица размером $[3] \times [3]$, так как в ином случае перемножить матрицы, поменяв их местами, нельзя. Тогда пусть матрица $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} & x_{13}+x_{23} \\ x_{21}+x_{31} & x_{22}+x_{32} & x_{23}+x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{11}+x_{12} & x_{12}+x_{13} \\ x_{21} & x_{21}+x_{22} & x_{22}+x_{23} \\ x_{31} & x_{31}+x_{32} & x_{32}+x_{33} \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} & x_{13}+x_{23} \\ x_{21}+x_{31} & x_{22}+x_{32} & x_{23}+x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{11}+x_{12} & x_{12}+x_{13} \\ x_{21} & x_{21}+x_{22} & x_{22}+x_{23} \\ x_{31} & x_{31}+x_{32} & x_{32}+x_{33} \end{pmatrix}$
4. Тогда:

$$\begin{gathered}
x_{11} + x_{21} = x_{11} \Rightarrow x_{21} = 0 \\
x_{21} + x_{31} = x_{21} \Rightarrow x_{31} = 0 \\
x_{12} + x_{22} = x_{11} + x_{12} \Rightarrow x_{22} = x_{11} \\
x_{22} + x_{32} = x_{21} + x_{22} \Rightarrow x_{32} = x_{21} = 0 \\
x_{22} + x_{32} = x_{21} + x_{22} \Rightarrow x_{32} = x_{21} = 0 \\
x_{13} + x_{23} = x_{12} + x_{13} \Rightarrow x_{23} = x_{12} \\
x_{23} + x_{33} = x_{22} + x_{23} \Rightarrow x_{33} = x_{22} = x_{11}
\end{gathered}$$

5. Тогда матрица $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

, где a, b, c - произвольные скаляры

Ответ: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, где a, b, c - произвольные скаляры

Задача №4

Определители исходной матрицы A и изменённой будут равны по свойствам определителя, поэтому мы можем сравнивать обратные матрицы черз транспонированны матрицы алгебраических дополнений.

Рассмотрим матрицу A размером 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица алгебраических дополнений имеет вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}.$$

Пусть B будет равна изменённой A, то есть:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 2a_{11} & a_{22} + 2a_{12} & a_{23} + 2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица алгебраических дополнений имеет вид:

$$B^* = \begin{pmatrix} (a_{22}+2a_{12}) - (a_{23}+2a_{13})a_{32} & (a_{23}+2a_{13})a_{31} - (a_{21}+2a_{11})a_{33} & \to \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & \to \\ (a_{23}+2a_{13})a_{12} - (a_{22}+2a_{12})a_{13} & (a_{21}+2a_{11})a_{13} - (a_{23}+2a_{13})a_{11} & \to \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \to & (a_{21}+2a_{11})a_{32} - (a_{22}+2a_{12})a_{31} \\ \to & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \\ \to & (a_{22}+2a_{12})a_{11} - (a_{21}+2a_{11})a_{12} \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу и раскрываем скобки:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} + 2a_{12}a_{33} - 2a_{13}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} + 2a_{13}a_{31} - 2a_{11}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} + 2a_{32}a_{11} - 2a_{12}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}.$$

Теперь отнимем матрицу $\hat{A}$ из $\hat{B}$:

$$\hat{B} - \hat{A} = \begin{pmatrix} 2a_{12}a_{33} - 2a_{13}a_{32} & 0 & 0 \\ 2a_{13}a_{31} - 2a_{11}a_{33} & 0 & 0 \\ 2a_{32}a_{11} - 2a_{12}a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

То есть можно сделать вывод, что при добавлении ко второй строке две первые строки матрицы A, у обратной матрицы изменится первый столбец, причем на удвоенные алгебраические дополнения второй строки, т.к:

$$2a_{12}a_{33} - 2a_{13}a_{32} = -2 * A^*{}_{21},$$

$$2a_{13}a_{31} - 2a_{11}a_{33} = -2 * A^*{}_{22},$$

$$2a_{32}a_{11} - 2a_{12}a_{31} = -2 * A^*{}_{23}.$$

Ответ: изменится первый столбец на удвоенные алгебраических дополнения второй строки исходной матрицы A.