

Вероятностное пр-во

① Схема Тервера

эксп \longrightarrow исход \longrightarrow событие \longrightarrow вероятность

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

пр-во элементарных
исходов

$$A \in 2^\Omega$$

$$P: 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$1) P(\Omega) = 1$$

$$2) P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

вероятностная
тройка

не все
подмн. Ω
являются
событиями

\mathcal{F} - сигма-алгебра

$$\mathcal{F} = 2^\Omega$$

Св-ва вероятности:

$$1) P(\emptyset) = 0$$

$$2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underline{P(A \cap B)}$$

$$3) P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$4) A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

двойкой счёт



Упражнение

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} \square, \square, \square, \\ \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare \end{array} \right\}$$

A - выпала чёткая грань

$$A \subseteq \Omega \quad A \in 2^\Omega$$

$$A = \left\{ \square, \square, \blacksquare \right\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_i \mapsto \frac{1}{|\Omega|} \quad \text{равномерность}$$

Следствие:

Всякая вероятностная мера P на Ω имеет следующий вид: $P(A) = \sum_{k: \omega_k \in A} P_k$, $P_k \geq 0$

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

$$P_k = P(\omega_k)$$

Частный случай: исходы равновероятны

$$P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n = \frac{1}{n}$$

Упражнение (задача о разделе ставки)

I 5
II 3
победы
изра до 6

Попробуем догадаться:

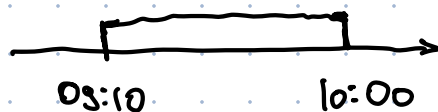
$$\left. \begin{array}{l} 3 \left\{ \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II I} \\ \text{II II I} \end{array} \right. \begin{array}{l} 1/2 \\ 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \\ 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8 \end{array} \\ 1 \left\{ \text{II II II} \right. \quad 1/8 \end{array} \right\} 7/8$$

хорошо бы поделить
как: 4:1

Упражнение (геометр. вер.)

Сама
Настя

1 час

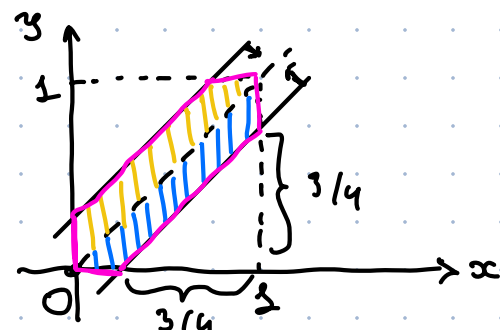


мгу 15 минут и
ухоту

какова вер. встречи?

$$\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$$

$$A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq 0.25\}$$



$$|x - y| \leq \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{1} x > y \quad x - y \leq \frac{1}{4} \quad y \geq x - \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{2} x < y \quad y - x \leq \frac{1}{4} \quad y \leq x + \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1 - (3/4)^2}{1} = 7/16$$

Чтобы всё работало:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ \oplus аксиомы $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$

вероятностная
тройка

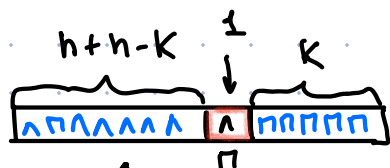
Упражнение (задача БАНАХА о сшивках)

Носил кучу сшивок в разные карманы
2 коробка по n сшивок

A - вынул из кармана пустой коробок
а в другом осталось k сшивок

$2n + 1$ Л П П Л Л Л Л П Л ... только рано или поздно
вытащу пустой

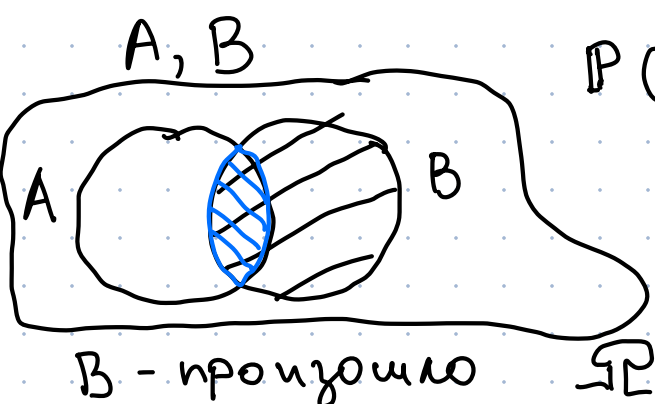
$$\frac{1}{2^{2n+1}}$$



$$2 \cdot C_{2n-k}^n \cdot 2^k$$

надо аккуратно
научиться считать \Rightarrow комбинаторика

② Условная вероятность



$$P(A|B) = \frac{|A \cap B| / |\Omega|}{|B| / |\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(B) > 0$$

$$P(B|B) = 1$$

Опр. Говорят, что соб. A и B нез. если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

следствие: $P(A|B) = P(A)$

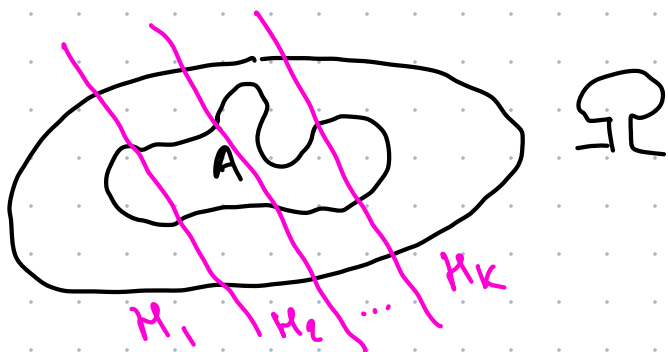
Опр. (Ф-ла Байеса)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Опр. (Ф-ла Полной вероятности)

полная группа событий



H_1, \dots, H_k - не пересекаются

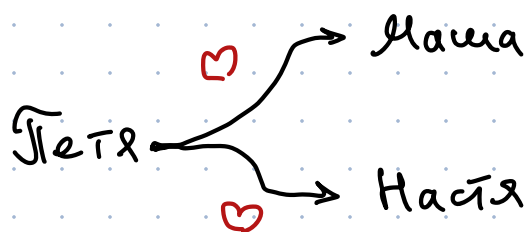
$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$$

$$\sum_{i=1}^k P(H_i) = 1$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^K P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^K P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

Упражнение

ходит на лекции
чтобы познакомиться



Вер. встретить Петю на лекции

0.1 если нет никого из девушек

0.5 если обе тут

0.3 Настя

0.2 Маша

девушки ходят

ка пары

нез. груз от

груза

Маша 0.6

Настя 0.7

а) $P(\text{придет } \pm \text{ г.})$

б) $P(\text{все 3 тут})$

в) $P(\text{Маша тут} \mid \text{Петя})$

2) $P(\text{Петя тут} \mid \text{пришла } \pm \text{ из девушек})$

П Н М

H_1 0.6 · 0.7

H_2 0.6 · 0.3

H_3 0.4 · 0.7

H_4 0.4 · 0.3

$\sum P_{H_i} = 1$

$$а) P(H \Delta M) = P(H \cap M^c) + P(H^c \cap M) =$$

$$P(H) \cdot P(M^c)$$

$$(1 - P(M))$$



$$= 0.7 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6$$

$$6) P(H \cap M \cap \Pi) = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.5$$

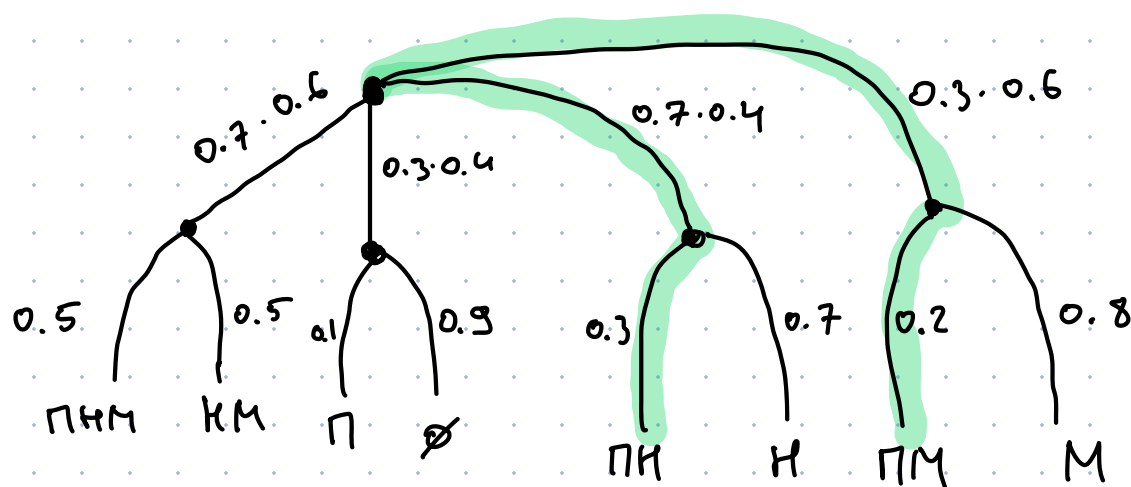
$$7) P(M | \Pi) = \frac{P(M \cap \Pi)}{P(\Pi)}$$

$$P(\Pi) = \sum_{i=1}^4 P(\Pi | H_i) \cdot P(H_i) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.4 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.7$$

$$P(M \cap \Pi) = \underset{\Pi}{0.5} \cdot \underset{M}{0.6} \cdot \underset{H}{0.7} + \underset{\Pi}{0.2} \cdot \underset{M}{0.6} \cdot \underset{H^c}{0.3}$$

2)

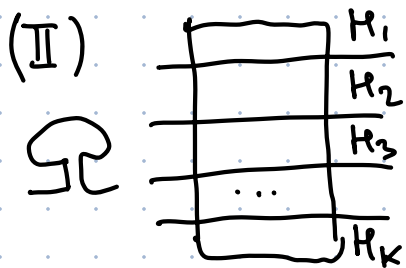


$$P(\Pi | M \Delta H) = \frac{P(\Pi \cap M \Delta H)}{P(M \Delta H)} = \frac{0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.2}{0.7 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.6}$$

Как задать вер. меру?

(I) Задать вер. исходов и собрать из них

$$P(A) = \sum_{k: w_k \in A} P(w_k)$$



заданы q_k $\sum q_k = 1$

и меры $P_k(\cdot)$ на Ω : $P_k(H_k) = 1$
 \parallel
 $P(w_k | H_k)$

Тогда:
$$P(B) = \sum_{i=1}^k P_i(B) \cdot q_i$$

$$P(B | H_i) \cdot P(H_i)$$

Пример:



m белые
остальные
чёрные

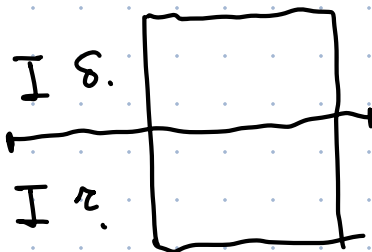


без возвр.

Ω $(i, j) \quad i \neq j$

$$|\Omega| = N \cdot (N-1)$$

$$P(w_i) = \frac{1}{N(N-1)}$$



$$q_1 = \frac{m}{N} = P(H_1)$$

$$P(w_i | H_1) = \frac{1}{N-1}$$

$$q_2 = \frac{N-m}{N} = P(H_2)$$

⊕ Ф-ла полной вер. и погреш
то же самое