Обратные матрицы, определитель

① Дефекты матриц

$(AB)C = A(BC)$

$A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$

а) $AB \neq BA$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б) Делители нуля т.е. $\exists A \neq 0, B \neq 0 : A \cdot B = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в) $A \neq 0 \qquad A^n = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

г) Проблемы с делением

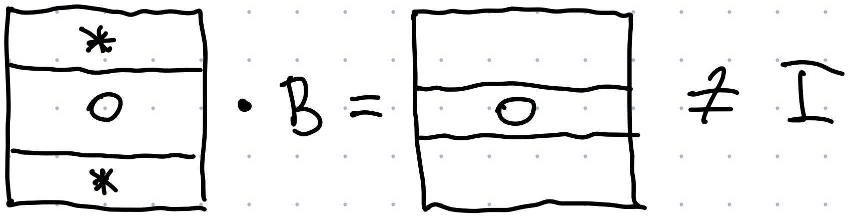
$$\left.\begin{matrix} \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1} \\ b \cdot b^{-1} = 1, \; b^{-1} = \frac{1}{b} \end{matrix}\right] \text{ числа}$$

$\cancel{\frac{A}{B}} \qquad \cancel{A \cdot \frac{1}{B}}$

квадратн. A обратима, если $\exists B = A^{-1}: \; AB = BA = I$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Проблема: A^{-1} может не $\exists$



останется нулевая строка

Утверждение

Если $\exists A^{-1}$ то она единств.

$\forall$ - для любой

$\exists$ - существует

$\exists!$

■

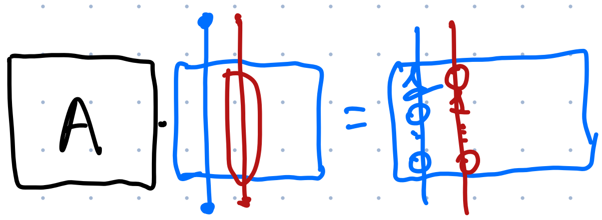
B' и B обратные к A

$$B' = \underbrace{(BA)}_{I} \cdot B' = B \underbrace{(AB')}_{I} = B \quad ■$$

Важные св-ва:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$$



Поиск обратных матриц:

$$\underset{[n\times n]}{A} \cdot \underset{[n\times 1]}{x} = \underset{[n\times 1]}{b}$$

$$A^{-1}A \cdot x = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

$$(A \mid b) \rightsquigarrow (I_n \mid \underset{x^*}{*})$$

$$\underset{[n\times n]}{A} \cdot \underset{[n\times n]}{X} = \underset{[n\times n]}{I_n}$$

$$(A \mid I_n) \rightsquigarrow (I_n \mid \underset{A^{-1}}{*})$$

$$AX = I_n$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}I_n$$

$$X = A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{ступенчатый вид} & \\ 0\;0\ldots 0 & * \end{array}\right) \text{ — необратимая } A$$

Упражнение

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{(1)}{3}}{\overset{(1)+(2)}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)-(2)}{\overset{(2)-(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Иначе!

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots$ 1 столбик A^{-1}

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots$ 2 столбик A^{-1}

② Блочные формулы

$$\begin{array}{c|c|c|} & k & s \\ m & A & B \\ n & C & D \end{array} \cdot \begin{array}{c|c|c|} & u & v \\ k & X & Y \\ s & Z & R \end{array} = \begin{array}{c|c|c|} & u & v \\ m & AX+BZ & AY+BR \\ n & CX+DZ & CY+DR \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 A_1 & \lambda_2 A_2 & \lambda_n A_n \end{array}\right)$$

$$A \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \dots & AB_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ n \end{array}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} \cdot \overset{n}{\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_n \end{pmatrix}} = A_1 \cdot B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n$$

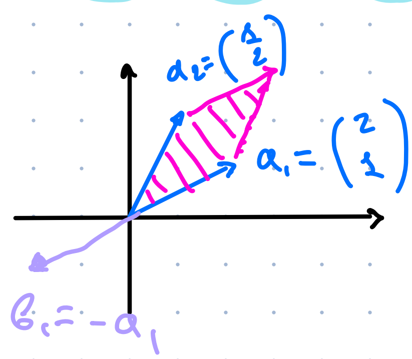
Упражнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \left(\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \overset{B_1}{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}} ; \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \overset{B_2}{\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 & 2 \cdot 8 \\ 4 \cdot 7 & 4 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

3 Определитель

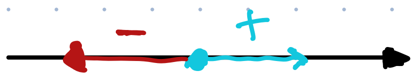


$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

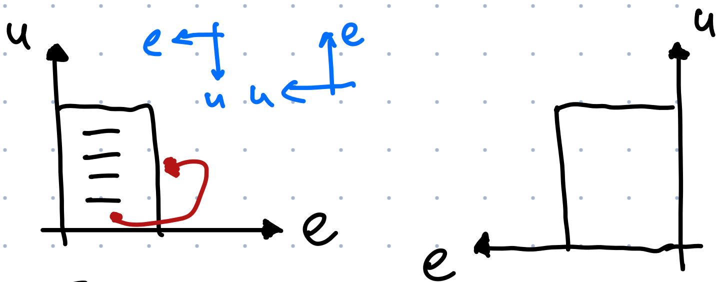
$$\begin{pmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$\mathbb{R}$



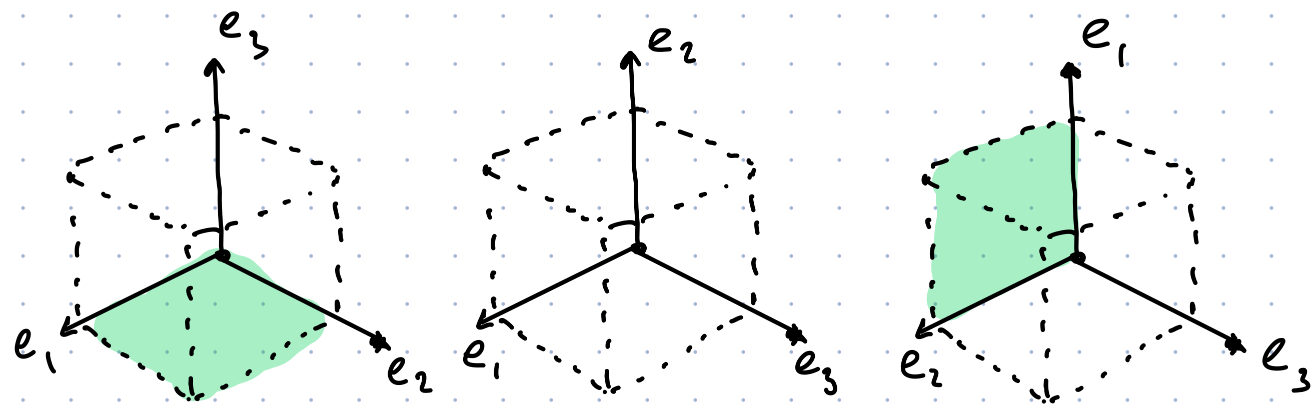
$\mathbb{R}^2$



бумага

и е   е и

$\mathbb{R}^3$



наш мир.   изнанка   Наш мир

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

$\mathbb{R}^4$ – Филипп вернётся

Опр.

Перестановка – все послед. из чисел, где каждое встр. 1 раз.

1 2 3 4

$\sigma_1 = 1\ 3\ 4\ 2$

$1\ 3\ 2\ 4$

$1\ 2\ 3\ 4$

$\text{sign}(\sigma_1) = 1$

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$\sigma_2 = 2\ 1\ 3\ 4$

$\text{sign}(\sigma_2) = -1$

$\sigma_2(1) = 2$

$\sigma_2(2) = 1$

$\sigma_2(3) = 3$

$\sigma_2(4) = 4$

Три определения определителя

(I) Явная формула

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$n!$ слагаемых

(II) Через полилинейные кососим. ф.
(через три прикольных св-ва):

$$\varphi : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \end{array}\right] \qquad \varphi(A_1, \ldots, A_n)$$

а) $\varphi(I) = 1$

б) $\varphi(A_1, \ldots, A_i + A_j', \ldots A_n) = \varphi(A_1, \ldots A_i, \ldots A_n) +$
$+ \varphi(A_1, \ldots A_j', \ldots A_n)$

$$\varphi(A_1, \ldots \lambda A_i, \ldots, A_n) = \lambda \cdot \varphi(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$$

в) $\varphi(\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots) = -\varphi(\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots)$

$$\varphi(A_1, \ldots A', A', \ldots A_n) = 0$$

$\exists$ только 1 ф. с такими св-вами – определитель

(III) Через умножение

$$\varphi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

а) $\varphi(A\cdot B) = \varphi(A)\cdot\varphi(B)$

б) $\varphi\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & 1 & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda$

Св-ва:

а) $\boxed{A} = \boxed{A'}$ $\qquad \det A = \det A'$

$(i) + \lambda(j)$

б) $\boxed{A} = \boxed{A'}$ $\qquad \det A' = -1\cdot\det(A)$

$(i)\ (j)$

в) $\boxed{A} = \boxed{A'}$ $\qquad \det A' = \lambda\cdot\det A$

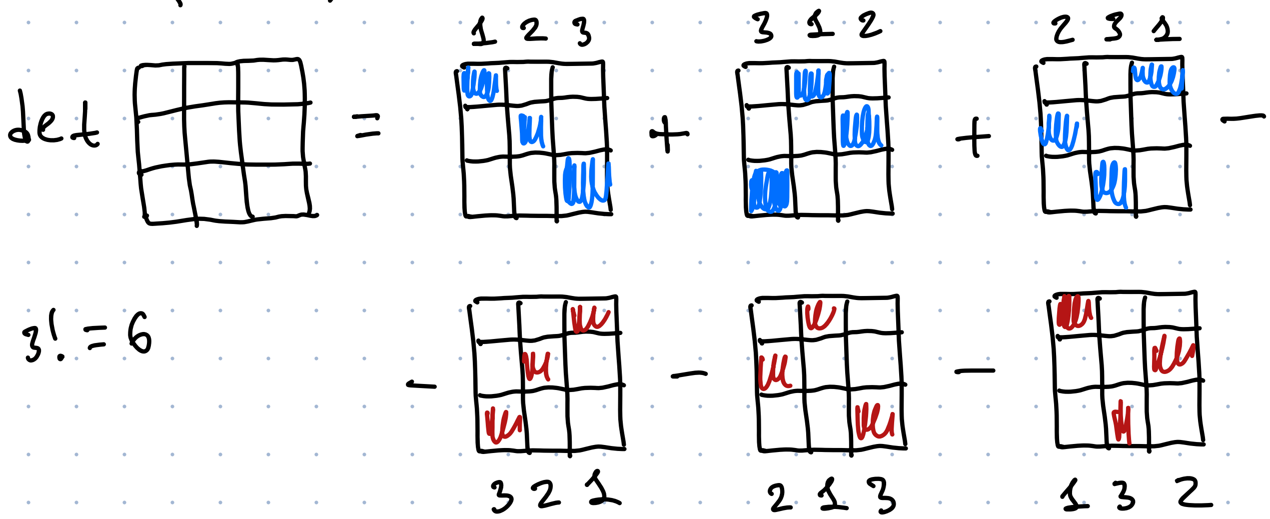
$\lambda\cdot(i)$

г) $\det(AB) = \det A\cdot\det B$

д) $\det A^T = \det A$

Табличные случаи:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$



$3! = 6$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

верхне-Δ матрица

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

нижне-Δ матрица

$$\boxed{A} \rightsquigarrow \lambda_1 \ldots \lambda_n \quad \begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

$$\det\begin{pmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix} = 0$$

$$A A^{-1} = I_n$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Упражнение

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 1\cdot4 - 3\cdot2 = -2$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix} = -1\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix} = (-1)\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 9 & -10\end{pmatrix} =$$

$$= -1\cdot1\cdot\det\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -10\end{pmatrix} = -1\cdot3\cdot(-10) - (-1)\cdot9\cdot(-1) = 30 - 9 = 21$$

$$\det(\lambda\cdot I) = \det\begin{pmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{pmatrix} = \lambda^n$$

1 2 3   2 3 1   3 1 2

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{23}\end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{4}a_{32}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{23}$$

3 2 1   1 3 2   2 1 3