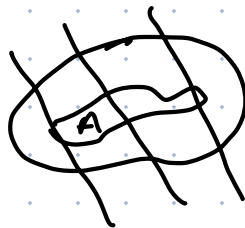# Комбинаторика

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

$$\omega_i \longmapsto P_i \qquad \sum P_i = 1$$

Важная мысль : Надо уметь считать

аккуратно

① Правила сложения и умножения

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

хотим взять 1 объект из A или из B

$$\Rightarrow n + k \text{ способов}$$

правило сложения

хотим взять сначала 1 объект из A, потом ещё один из B

$$\Rightarrow n \cdot k$$

правило умножения

$$\boxed{A \; *** \; YE}$$

12 · 10·10·10 · 12·12

$$\mathbb{P}(AYE) = \frac{m}{n} = \frac{10^3}{12^3 \cdot 10^3} = \frac{1}{12^3}$$

$$n = 12^3 \cdot 10^3$$

$$m = 10^3$$

Упражнение

Сколько $\exists$ пятизначных чисел?

$$\underset{9}{\underline{9}}^{10} \; \underline{10} \; \underline{10} \; \underline{10} \qquad 9 \cdot 10^4$$

② Принцип Дирихле

Если у нас есть n ящиков и n+1 объект
=> хотя бы в 1 ящике будет 2 объекта

Упражнение

12 носков

6 белых
6 черных

сколько надо достать

→ гарантир. была пара 1 цвета

б ч $^{2/б}$
ч б $^{2/б}$

ч ч
б б

3 шт.

→ разных цветов

7 шт.

Ящик   101 пуговица   из 11 цветов

Доказать:

Найдется либо 11 пуговиц 1 цвета
либо 11 пуговиц разных цветов

Пусть нет ни того ни второго

10 пуг. каждого => 100

(10 красок)

③ Размещения

$B = \{ 6_1, \ldots, 6_n \}$ важен порядок отбора

без повторений k из n $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-(k-1))$

с повторениями $\overline{A}_n^k = \hat{A}_n^k = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots n = n^k$

Все объекты разные

16 команд

3 приза

$A_{16}^3 = 16 \cdot 15 \cdot 14$

$$4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$B = \{ 1, 2, 3, 5 \}$$

Сколько $\exists$ 3-х зн. чисел?

$$\hat{A}_4^3 = 4^3$$

④ Перестановки

$$A_n^n = P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

перестановки без повторений

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \quad - \text{ с повторениями}$$

$n_\triangle !$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!}$$

$n_\blacksquare !$

40 книг, все разные

а) 3 тома Пушкина

| I | II | III |

$$37 + 1 \quad \square\square\square \quad 38!$$

б) в порядок

$$\underbrace{\square\square\square \ldots \square}_{38!} \underbrace{\square\square\square}_{3!}$$

$$38! \cdot 3!$$

в) 40 книг   3 П   10 Ⓓ   27 Т
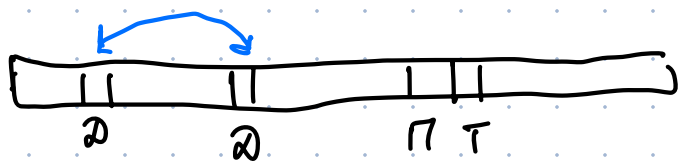
$$3! \cdot 10! \cdot 27!$$

$$\frac{40!}{3! \cdot 10! \cdot 27!}$$

⑤ Сочетания   Порядок не важен

без повторений

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \, (n-k)!} = \frac{n!}{k! \, (n-k)!}$$

$$\binom{k}{n}$$

с повторениями $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

$$\hat{C}_n^k$$

Упражнение

2 друга   1-ый   9 монет (разные)   2 мон.
             2-ой   7 монет (разные) $\updownarrow$
                                             2 мон.

сколько способов обмена?

$$C_9^2 \cdot C_7^2$$

Упражнение

рахат лукум

эклер

медовик

плесковица

7 вкусностей

$$\hat{C}_4^7 = C_{7+4-1}^7$$

Закодируем покупки:

1 1 0 1 1 1 0 0 1 1

1 1 ~~0~~ 1 ~~0~~ 1 1 ~~0~~ 1 1

Считаем число кодировок

$$\frac{10!}{7! \cdot 3!} = C_{10}^7 = C_{n+k-1}^k = C_{10}^3$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Упражнение

Остановка   Поезд
  10 человек   10 вагонов

$$\mathbb{P}(1 \text{ вагон пустой}) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$n = 10 \cdot 10 \cdot 10 \ldots \cdot 10 = 10^{10} = \bar{A}_{10}^{10}$$

$$m = 10 \cdot 9 \cdot C_{10}^2 \cdot 8! = 10! \cdot C_{10}^2$$

1 1 1 1 1 1 1 1 2 | 0

8!   f
           C_{10}^2

$$\underbrace{1}_{4}\ \underbrace{1}_{4}\ \underbrace{2}_{4}\ \underbrace{8}_{4}\ \underbrace{1}_{4}\ \underbrace{8}_{4}\ \underbrace{1}_{4}\ \underbrace{3}_{\substack{4\\2}}\ \Bigg|\ \underbrace{0}_{4}\ \underbrace{0}_{4}$$

$$10! \cdot C_{10}^{3} +$$
$$+ 10! \cdot C_{10}^{2} \cdot C_{8}^{2}$$

Упражнение

$$\left.\begin{array}{l}5 \text{ львов}\\ 4 \text{ волки}\end{array}\right] \longrightarrow \text{ арена}$$

нельзя чтобы 2 волка или рядом

$$\text{Ц}\ \overset{\downarrow}{B}\ \llcorner A \lrcorner\ \overset{\downarrow}{B}\ \llcorner\ B\ \lrcorner\ \overset{\downarrow}{B}\ \lrcorner$$

$$4! \cdot 5$$

$$\_\ \overset{\wedge}{\underset{\uparrow}{}}\ \_\ \overset{\wedge}{\underset{\uparrow}{}}\ \_\ \overset{\wedge}{\underset{\uparrow}{}}\ \_\ \overset{\wedge}{\underset{\uparrow}{}}\ \_\ \wedge\ \_$$
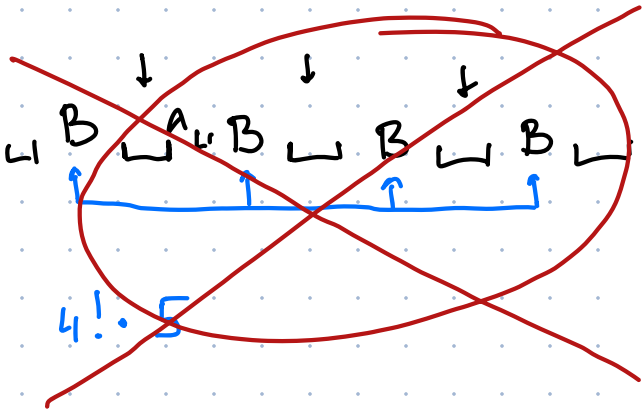
$$5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$
$$P(5) \cdot A_{6}^{4}$$

Упражнение

Домино   4 игрока

28 костей   ∀ игрок 7 костей

Сколько способов раздать?

$$C_{28}^{7} \cdot C_{21}^{7} \cdot C_{14}^{7} \cdot C_{7}^{7} = \frac{28!}{7! \, 21!} \cdot \frac{21!}{7! \, 14!} \cdot \frac{14!}{7! \cdot 7!} \cdot 1 = \frac{28!}{(7!)^{4}}$$
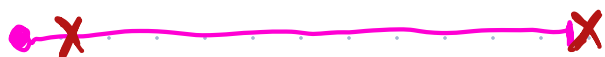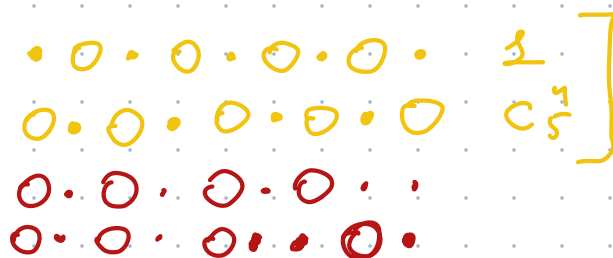
Упражнение

Витамий

Артур + рыцари   12 человек

Надо освободить принцессу.

5 человек в поход

9 человек

4 надо

$\dfrac{1}{C_5^4}$ C_6^4