1)

а) $\operatorname{plim} \frac{X_1}{\overline{X}_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

По ЗБЧ: $\overline{X}_n \to \mathbb{E}(X_n) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, тогда $E(X_1) = \frac{1}{2}$

б) $\operatorname{plim} \frac{1}{1+\overline{X}_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

в) $\operatorname{plim} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln X_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot n(-1) = -1$

$E(\ln X) = \int_0^1 \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{bmatrix} = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x}\,dx = x\ln x - x\Big|_0^1 = -1$

г) $\operatorname{plim} \sqrt[n]{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n} = \operatorname{plim} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} = e^{-1}$

д) $\operatorname{plim} (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = \operatorname{plim} e^{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} = \operatorname{plim} e^{-n} = 0$ (n – большое число)

е) $\operatorname{plim} \max\{X_1, \ldots, X_n\} = 1$ или 0

$\mathbb{P}(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le x) = \mathbb{P}(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x) = x^n$

Если $x = 1$, то $\operatorname{plim} \max\{X_1, \ldots, X_n\} = 1$

Иначе $= 0$

ё) $\operatorname{plim} \min\{X_1, \ldots, X_n\} = 1$ или 0

$P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > x) = 1 - (1-x)^n$

Если $x = 0$, то вероятность стремится к 0

Иначе вероятность стремится к 1

ж) $\text{plim} \frac{\sum(X_i - \bar{X}_n)^2}{n} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$

$\frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 - \bar{X}_n^2$ (стандартное разложение суммы квадратов отклонений)

$\frac{1}{n}\sum X_i^2 \xrightarrow{p} \mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

2) $E(X) = 10$ $\quad \mathbb{P}(X<20)$?

По неравенству Маркова:

$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$

$(\varepsilon = 20) \to \mathbb{P}(X \geq 20) \leq \frac{E(X)}{20} \leq \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X<20) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 20) \geq 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

, т.е нижняя граница 0,5, а верхняя граница = 1, в случае, когда почти все распределение сосредоточено ниже 20

Ответ: $0{,}5 \leq \mathbb{P}(X<20) \leq 1$

3) а) $\mathbb{P}(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma)$, если $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

Неравенство Чебышева: $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var}{\varepsilon^2}$

$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq 2\sigma)$, т.е $\varepsilon = 2\sigma \Rightarrow$

$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

б) $\mathbb{P}(8 < Y < 12)$?, $E(Y) = 10$, $Var(Y) = \frac{400}{12}$

$$\begin{cases} E(Y) + \varepsilon = 12 \Rightarrow \varepsilon = 2 \\ E(Y) - \varepsilon = 8 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(|Y - E(X)| \geq 2) \leq \frac{Var(X)}{4} = \frac{100}{12} > 1 \Rightarrow$ нельзя применить

в) $\mathbb{P}(-2 < Z - E(Z) < 2)$ $E(Z) = 1$, $Var(Z) = 1$

$\mathbb{P}(|Z - E(Z)| \geq 2) \leq \frac{Var(Z)}{4} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(|Z - E(Z)| < 2) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

г) $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, $Y \sim U[0; 20]$, $Z \sim Exp(1)$

1) Из нормального распределения:

$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = \mathbb{P}(-2 < Z < 2)$,

где $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ из таблицы $\approx 0{,}9545$

2) $Y \sim U[0; 20] \Rightarrow f(y) = \frac{1}{20}$, $0 \leq y \leq 20 \Rightarrow$

$\mathbb{P}(8 < Y < 12) = \frac{12 - 8}{20} = \frac{4}{20} = 0{,}2$

3) $Z \sim Exp(1) \Rightarrow \lambda = 1$, $E(Z) = 1$, $\sigma = 1$

$\mathbb{P}(-2 < Z - 1 < 2) \Rightarrow \mathbb{P}(-1 < Z < 3)$, т.к.

экспоненциальное распределение принимает

только ≥ 0 значений, то $\mathbb{P}(0 < Z < 3) \Rightarrow$

$\mathbb{P}(Z < 3) = 1 - e^{-3} \approx 1 - 0{,}0498 \approx 0{,}9502$