MuS8

Tanja Hunsinger und Jana Förderreuther

6 Dezember 2017

Problem 8.1: Birth-death processes

Given is a queuing system with two Markov service units and two waiting slots. The service rate is μ. The arrival rate is λ if no customer is waiting, $\frac{\lambda}{2}$ otherwise. In the following, the offered load is denoted by a $= \frac{\lambda}{\mu}$ and the relative offered load is $p = \frac{a}{n}$.

1. Give the states and briefly describe their meaning!

siehe VL 9.3

Zustand 0: leere Bedieneinheit, kein Kunde wartet

Zustand 1: eine Bedieneinheit ist aktiv, aber noch kein Kunde wartet

Zustand 2: zwei Bedieneinheiten sind aktiv, aber noch kein Kunde wartet

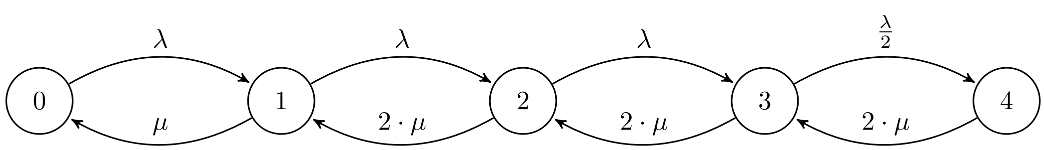
Zustand 3: beide Bedieneinheiten sind aktiv und ein Kunde wartet

Zustand 4: beide Bedieneinheiten sind aktiv und zwei Kunden warten

Kommen nun weitere Kunden so müssen sie sich in die Warteschlange einreihen und können noch nicht bedient werden

2. Give the state transition diagram including transition rates!

(siehe Skript 9.3)



3. Formally derive the stationary state probabilities! Define appropriate macro states for this purpose!

(Siehe Skript 9.3)

$$x(0) = (1 + \sum_{0<i<=n} \frac{\Pi_{0<k<=i}\lambda_{k-1}}{\Pi_{0<k<=i}\mu_k})^{-1}$$
$$x(i) = x(0) \cdot \frac{\Pi_{0<k<=i}\lambda_{k-1}}{\Pi_{0<k<=i}\mu_k})$$

Aus der Formel im Skript lässt sich nun die state probabilities berechnen:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= (1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda}{2 \cdot \mu \cdot \mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda}{2 \cdot 2 \cdot \mu \cdot \mu \cdot \mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\lambda}{2}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mu \cdot \mu \cdot \mu \cdot \mu})^{-1} \\
&= (1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} + \frac{\frac{\lambda^4}{2}}{8 \cdot \mu^4})^{-1} \\
x(1) &= x(0) \cdot \frac{\lambda}{\mu} \\
x(2) &= x(0) \cdot \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} \\
x(3) &= x(0) \cdot \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} \\
x(4) &= x(0) \cdot \frac{\frac{\lambda^4}{2}}{8 \cdot \mu^4}
\end{aligned}
$$

Makro states sind:

Makro state 0: Zustand 0

Makro state 1: Zustand 0 und Zustand 1

Makro state 2: Zustand 0, Zustand 1 und Zustand 2

Makro state 3: Zustand 0, Zustand 1, Zustand 2 und Zustand 3

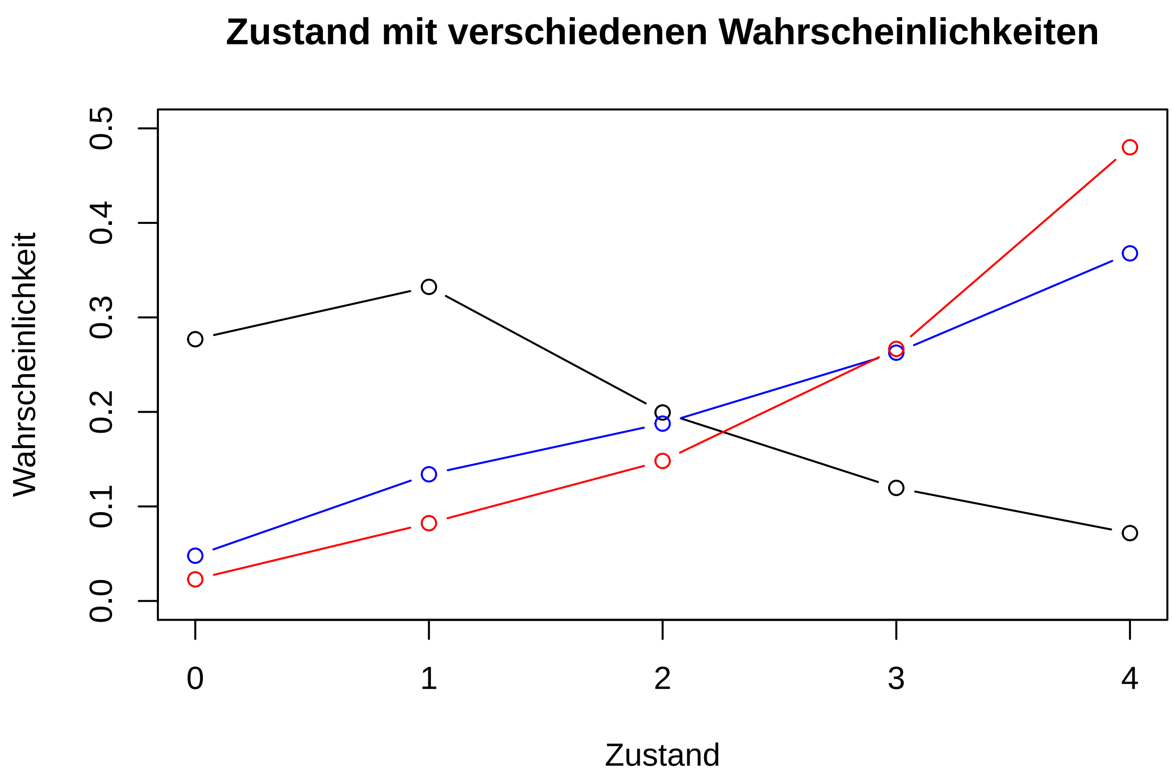
Makro state 4: Zustand 0, Zustand 1, Zustand 2, Zustand 3 und Zustand 4

4. Plot diagrams with states on the x-axis and corresponding probabilities on the y-axis! Connect the points belonging to the same $p \in$ {0.3, 0.7, 0.9} with an interpolating line and scale the diagram appropriately!

(siehe Skript 9.4)

```
#Anzahl an zustaende
n<-4

#probability
p1<-0.3
p2<-0.7
p3<-0.9

#formel: p = a/n
a1<-p1*n
a2<-p2*n
a3<-p3*n

#berechnung x0 bis x4
hilfsfunktion<-function(a){
    x0<-(1+a+(a^2)/2 +(a^3)/4 + (a^4)/8)^(-1)
    x1<-x0*a
    x2<-x0* (a^2)/2
    x3<-x0* (a^3)/4
    x4<-x0* (a^4)/8
```

```r
    x<-c(x0,x1,x2,x3,x4)
    return(x)
}

#berechnungen mit a1-a3
result1<-hilfsfunktion(a1)
result2<-hilfsfunktion(a2)
result3<-hilfsfunktion(a3)

#zustände
x<-c(0,1,2,3,4)
#plot mit p1
plot(x, result1, type = "b", main = "Zustand mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten", xlab = "Zustand",
#plot mit p2
lines(x, result2, type = "b", col="blue")
#plot mit p3
lines(x, result3, type = "b", col="red")
```




```r
werteMatrix <- matrix( c(result1,
                        result2,
                        result3),
                      nrow=3, ncol=5, byrow=TRUE)
werteMatrix
```

```
##             [,1]       [,2]      [,3]      [,4]       [,5]
## [1,] 0.27691626 0.33229951 0.1993797 0.1196278 0.07177669
```

```
## [2,] 0.04786704 0.13402772 0.1876388 0.2626943 0.36777208
## [3,] 0.02286279 0.08230603 0.1481509 0.2666715 0.48000878
```

Hinweis: die schwarze linie gibt die Wahrscheinlichkeit 0.3, die blaue für 0.7 und die rote Linie für die Wahrscheinlichkeit 0.9 an.

5. Calculate the time-average probabilities that new customers need to wait or are blocked!

Überlegung: Das Kunden warten bzw geblocked werden kann nur in Zustand 2,3 und 4 vorkommen (vergeliche Aufgabe 8.1.1). Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich also aus der Summe aus x(2), x(3) und x(4). Wobei hier wb= waiting oder blocking bedeutet.

$$\begin{aligned}
P(wb) &= x(2) + x(3) + x(4) \\
&= x(0) \cdot \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + x(0) \cdot \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} + x(0) \cdot \frac{\frac{\lambda^4}{2}}{8 \cdot \mu^4} \\
&= x(0) \cdot (\frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} + \frac{\frac{\lambda^4}{2}}{8 \cdot \mu^4})
\end{aligned}$$

6. Calculate the waiting and blocking probability for new customers! Take into account that the arrival rate depends on the system state!

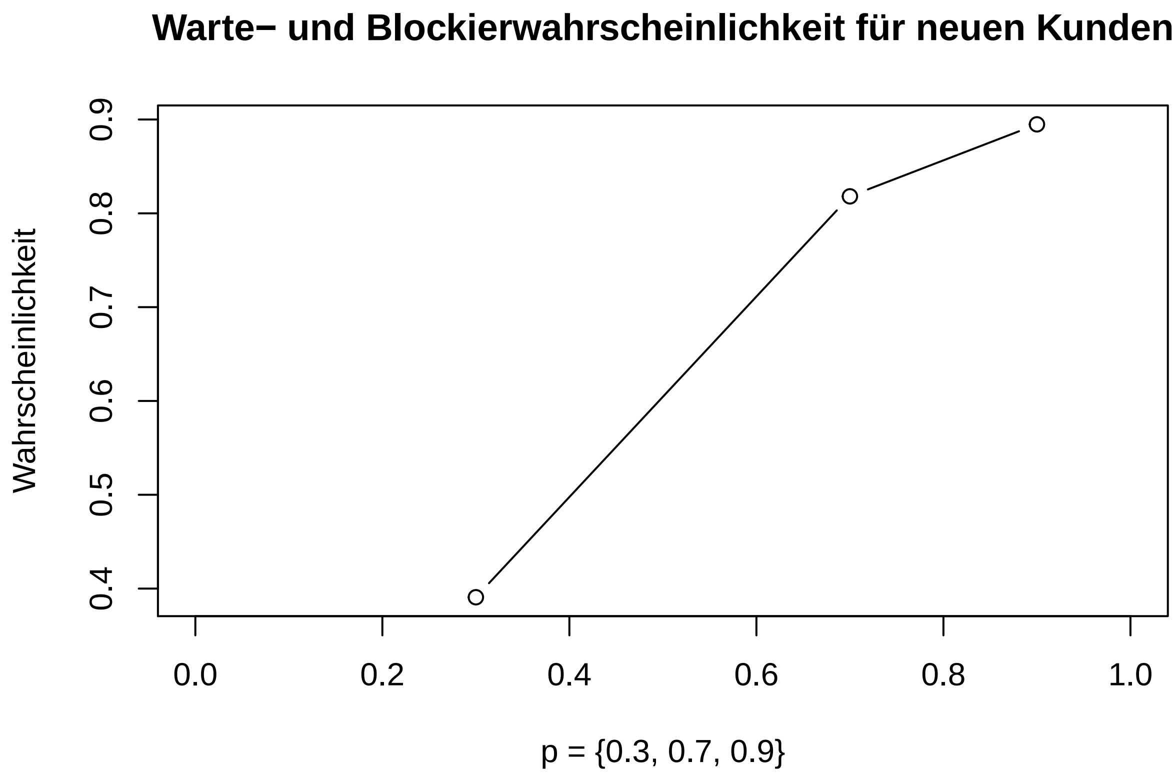
Überlegung: In Zustand 2 und 3 warten die Kunden, in Zustand 4 werden sie blockiert. Die Wahrscheinlichkeit zu warten wird mit P(w) berechnet und setzt sich aus der Summe von x(2) und x(3) zusammen. P(b) gibt die Wahrscheinlichkeit blockiert zu sein an und ist x(4).

$$\begin{aligned}
P(w) &= x(2) + x(3) \\
&= x(0) \cdot \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + x(0) \cdot \frac{\frac{\lambda^3}{2}}{4 \cdot \mu^3} \\
&= x(0) \cdot (\frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + \frac{\frac{\lambda^3}{2}}{4 \cdot \mu^3}) \\
P(b) &= x(4) \\
&= x(0) \cdot \frac{\frac{\lambda^4}{2}}{8 \cdot \mu^4}
\end{aligned}$$

7. Plot the waiting and blocking probability for new customers in the interval $p \in$ (0, 1)!

```
#Anzahl an zustaende
n2<-4

#probability
p21<-0.3
p22<-0.7
p23<-0.9
```

```
#formel: p = a/n
a21<-p21*n2
a22<-p22*n2
a23<-p23*n2

hilfsfunktion2<-function(a){
    x0<-(1+a+(a^2)/2 +(a^3)/4 + (a^4)/8)^(-1)
    x1<-x0*a
    x2<-x0* (a^2)/2
    x3<-x0* (a^3)/4
    x4<-x0* (a^4)/8
    x<-c(x2,x3,x4)
    return(x)
}

#berechnungen mit a1-a3
result21<-hilfsfunktion2(a21)
result22<-hilfsfunktion2(a22)
result23<-hilfsfunktion2(a23)


pw<-c(sum(result21),sum(result22),sum(result23))
pAll<-c(p21, p22, p23)


#plot
plot(pAll, pw, type="b", main = "Warte- und Blockierwahrscheinlichkeit für neuen Kunden"
     , xlab = "p = {0.3, 0.7, 0.9}", ylab = "Wahrscheinlichkeit", xlim=c(0.0,1.0))
```



Alternative zum langen, obrigen Code:

temp03 <- sum(werteMatrix[1,3:5])

temp07 <- sum(werteMatrix[2,3:5])

temp09 <- sum(werteMatrix[3,3:5])

pwAll <- c(temp03,temp07,temp09) }

plot(pAll, pwAll, type="b", main = "Warte- und Blockierwahrscheinlichkeit für neuen Kunden", xlab = "p = 0.3, 0.7, 0.9", ylab = "Wahrscheinlichkeit", xlim=c(0.0,1.0))

8. Calculate the mean server utilization and the mean waiting queue length!

Mean Server Utilization:

```
a<-c(a1,a2,a3)
su <- a*(1-werteMatrix[,5])/2

su
```

```
## [1] 0.5569340 0.8851191 0.9359842
```

Main waiting queue length:

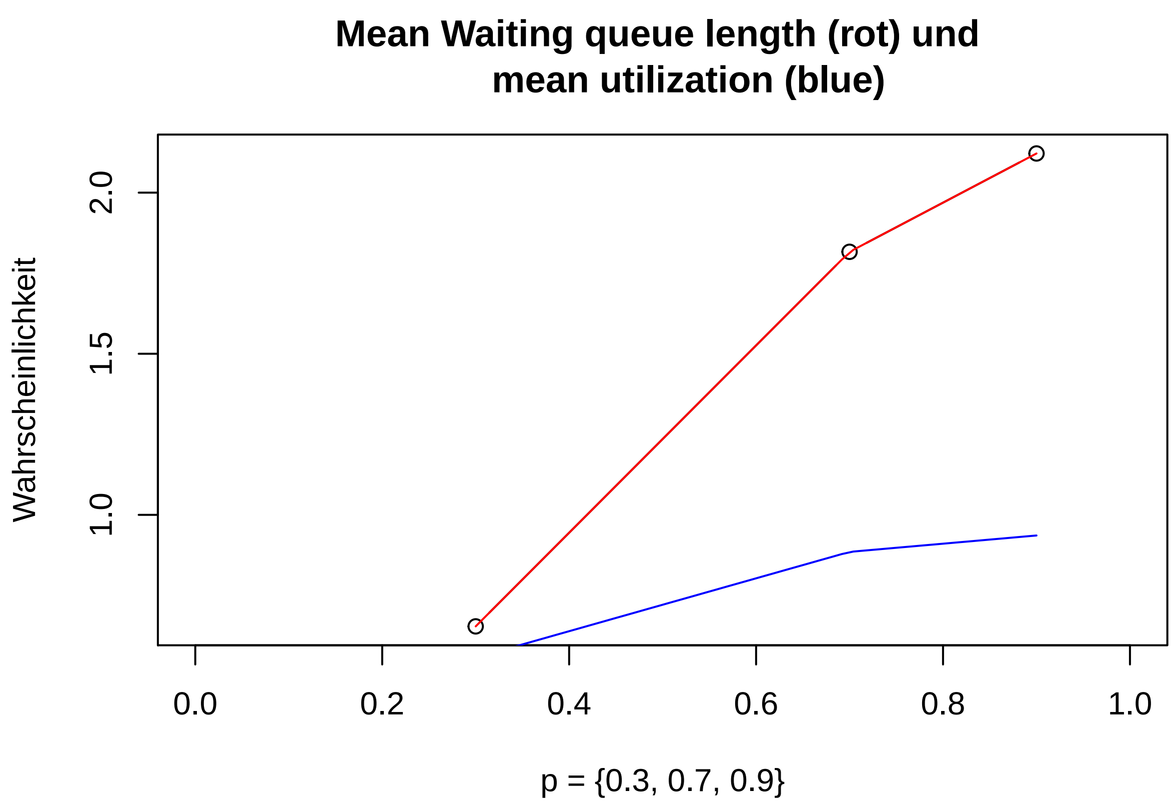
```
mwQueueLength <-c(0,0,0)
mwQueueLength <- mwQueueLength + werteMatrix[,3]
mwQueueLength <- mwQueueLength + 2*werteMatrix[,4]
mwQueueLength <- mwQueueLength + 3*werteMatrix[,5]
```

```
mwQueueLength
```

```
## [1] 0.6539654 1.8163437 2.1215203
```

9. Plot the mean utilization and the mean waiting queue length (as multiple of $\frac{1}{\mu}$) in the interval $p \in (0, 1)$!

```
plot(pAll,mwQueueLength, type = "b", main="Mean Waiting queue length (rot) und
     mean utilization (blue)",
     xlab = "p = {0.3, 0.7, 0.9}", ylab = "Wahrscheinlichkeit", xlim=c(0.0,1.0))
lines(approx(pAll,mwQueueLength), col ="red")
lines(approx(pAll,su), col ="blue")
```



10. Formally derive the distribution function of the waiting time for all waiting and for all non-rejected customers, respectively!

$P(W_W \leq t) = 1 - e^{-(1-p)*n*\mu*t}$ $P(W \leq t)$
$= (1 - p_W) * P(W_W \leq t) + p_W * P(W_W \leq t)$
$= (1 - p_W) * 1) + p_W * (1 - e^{-(1-p)*n*\mu*t})$
$= 1 - p_W * e^{-(1-p)*n*\mu*t}$

11. Plot the complementary distribution function of the waiting time for all waiting and for all non-rejected customers for $p = 0.9$ in one diagram! Plot the waiting time as a multiple of $\frac{1}{\mu}$ on the x-axis and the corresponding probabilities on the y-axis!