

# MuS8

Tanja Hunsinger und Jana Förderreuther

6 Dezember 2017

## Problem 8.1: Birth-death processes

Given is a queuing system with two Markov service units and two waiting slots. The service rate is  $\mu$ . The arrival rate is  $\lambda$  if no customer is waiting,  $\frac{\lambda}{2}$  otherwise. In the following, the offered load is denoted by  $a = \frac{\lambda}{\mu}$  and the relative offered load is  $p = \frac{a}{n}$ .

### 1. Give the states and briefly describe their meaning!

siehe VL 9.3

Zustand 0: leere Bedieneinheit, kein Kunde wartet

Zustand 1: eine Bedieneinheit ist aktiv, aber noch kein Kunde wartet

Zustand 2: zwei Bedieneinheiten sind aktiv, aber noch kein Kunde wartet

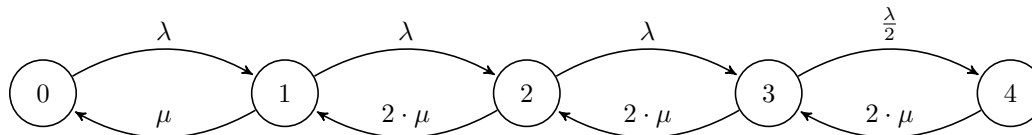
Zustand 3: beide Bedieneinheiten sind aktiv und ein Kunde wartet

Zustand 4: beide Bedieneinheiten sind aktiv und zwei Kunden warten

Kommen nun weitere Kunden so müssen sie sich in die Warteschlange einreihen und können noch nicht bedient werden

### 2. Give the state transition diagram including transition rates!

(siehe Skript 9.3)



### 3. Formally derive the stationary state probabilities! Define appropriate macro states for this purpose!

(Siehe Skript 9.3)

$$x(0) = \left(1 + \sum_{0 < i \leq n} \frac{\prod_{0 < k \leq i} \lambda_{k-1}}{\prod_{0 < k \leq i} \mu_k}\right)^{-1}$$
$$x(i) = x(0) \cdot \frac{\prod_{0 < k \leq i} \lambda_{k-1}}{\prod_{0 < k \leq i} \mu_k}$$

Aus der Formel im Skript lässt sich nun die state probabilities berechnen:

$$\begin{aligned}
x(0) &= \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda}{2 \cdot \mu \cdot \mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda}{2 \cdot 2 \cdot \mu \cdot \mu \cdot \mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\lambda}{2}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mu \cdot \mu \cdot \mu \cdot \mu}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} + \frac{\frac{\lambda^4}{2}}{8 \cdot \mu^4}\right)^{-1} \\
x(1) &= x(0) \cdot \frac{\lambda}{\mu} \\
x(2) &= x(0) \cdot \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} \\
x(3) &= x(0) \cdot \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} \\
x(4) &= x(0) \cdot \frac{\frac{\lambda^4}{2}}{8 \cdot \mu^4}
\end{aligned}$$

Makro states sind:

Makro state 0: Zustand 0

Makro state 1: Zustand 0 und Zustand 1

Makro state 2: Zustand 0, Zustand 1 und Zustand 2

Makro state 3: Zustand 0, Zustand 1, Zustand 2 und Zustand 3

Makro state 4: Zustand 0, Zustand 1, Zustand 2, Zustand 3 und Zustand 4

**4. Plot diagrams with states on the x-axis and corresponding probabilities on the y-axis! Connect the points belonging to the same  $p \in \{0.3, 0.7, 0.9\}$  with an interpolating line and scale the diagram appropriately!**

(siehe Skript 9.4)

```

#Anzahl an zustaende
n<-4

#probability
p1<-0.3
p2<-0.7
p3<-0.9

#formel: p = a/n
a1<-p1*n
a2<-p2*n
a3<-p3*n

#berechnung x0 bis x4
hilfsfunktion<-function(a){
  x0<-(1+a*(a^2)/2 +(a^3)/4 + (a^4)/8)^(-1)
  x1<-x0*a
  x2<-x0* (a^2)/2
  x3<-x0* (a^3)/4
  x4<-x0* (a^4)/8
}

```

```

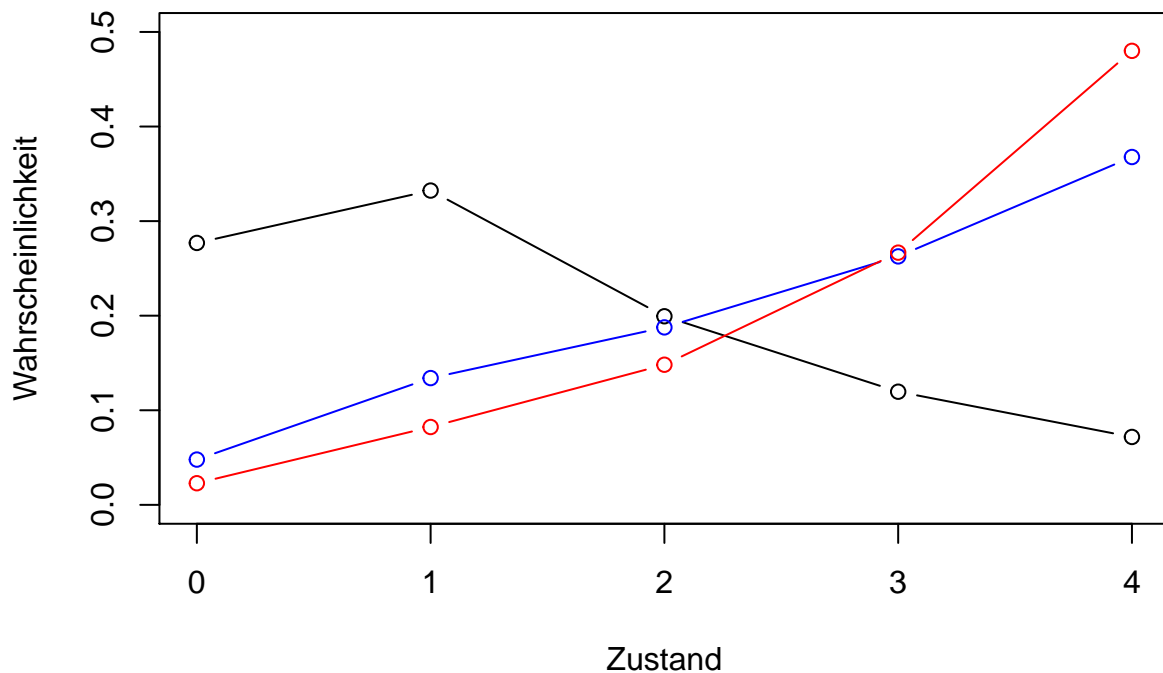
x<-c(x0,x1,x2,x3,x4)
return(x)
}

#berechnungen mit a1-a3
result1<-hilfsfunktion(a1)
result2<-hilfsfunktion(a2)
result3<-hilfsfunktion(a3)

#zustände
x<-c(0,1,2,3,4)
#plot mit p1
plot(x, result1, type = "b", main = "Zustand mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten", xlab = "Zustand",
#plot mit p2
lines(x, result2, type = "b", col="blue")
#plot mit p3
lines(x, result3, type = "b", col="red")

```

## Zustand mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten



```

werteMatrix <- matrix( c(result1,
                           result2,
                           result3),
                        nrow=3, ncol=5, byrow=TRUE)
werteMatrix

##           [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
## [1,] 0.27691626 0.33229951 0.1993797 0.1196278 0.07177669

```

```
## [2,] 0.04786704 0.13402772 0.1876388 0.2626943 0.36777208
## [3,] 0.02286279 0.08230603 0.1481509 0.2666715 0.48000878
```

Hinweis: die schwarze linie gibt die Wahrscheinlichkeit 0.3, die blaue für 0.7 und die rote Linie für die Wahrscheinlichkeit 0.9 an.

## 5. Calculate the time-average probabilities that new customers need to wait or are blocked!

Überlegung: Das Kunden warten bzw geblocked werden kann nur in Zustand 2,3 und 4 vorkommen (vergeliche Aufgabe 8.1.1). Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich also aus der Summe aus  $x(2)$ ,  $x(3)$  und  $x(4)$ . Wobei hier wb= waiting oder blocking bedeutet.

$$\begin{aligned} P(wb) &= x(2) + x(3) + x(4) \\ &= x(0) \cdot \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + x(0) \cdot \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} + x(0) \cdot \frac{\lambda^4}{8 \cdot \mu^4} \\ &= x(0) \cdot \left( \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} + \frac{\lambda^4}{8 \cdot \mu^4} \right) \end{aligned}$$

## 6. Calculate the waiting and blocking probability for new customers! Take into account that the arrival rate depends on the system state!

Überlegung: In Zustand 2 und 3 warten die Kunden, in Zustand 4 werden sie blockiert. Die Wahrscheinlichkeit zu warten wird mit  $P(w)$  berechnet und setzt sich aus der Summe von  $x(2)$  und  $x(3)$  zusammen.  $P(b)$  gibt die Wahrscheinlichkeit blockiert zu sein an und ist  $x(4)$ .

$$\begin{aligned} P(w) &= x(2) + x(3) \\ &= x(0) \cdot \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + x(0) \cdot \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} \\ &= x(0) \cdot \left( \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2} + \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} \right) \\ P(b) &= x(4) \\ &= x(0) \cdot \frac{\lambda^4}{8 \cdot \mu^4} \end{aligned}$$

## 7. Plot the waiting and blocking probability for new customers in the interval $p \in (0, 1)$ !

```
#Anzahl an zustaende
n2<-4

#probability
p21<-0.3
p22<-0.7
p23<-0.9
```

```

#formel:  $p = a/n$ 
a21<-p21*n2
a22<-p22*n2
a23<-p23*n2

hilfsfunktion2<-function(a){
  x0<-(1+a+(a^2)/2 +(a^3)/4 + (a^4)/8)^(-1)
  x1<-x0*a
  x2<-x0* (a^2)/2
  x3<-x0* (a^3)/4
  x4<-x0* (a^4)/8
  x<-c(x2,x3,x4)
  return(x)
}

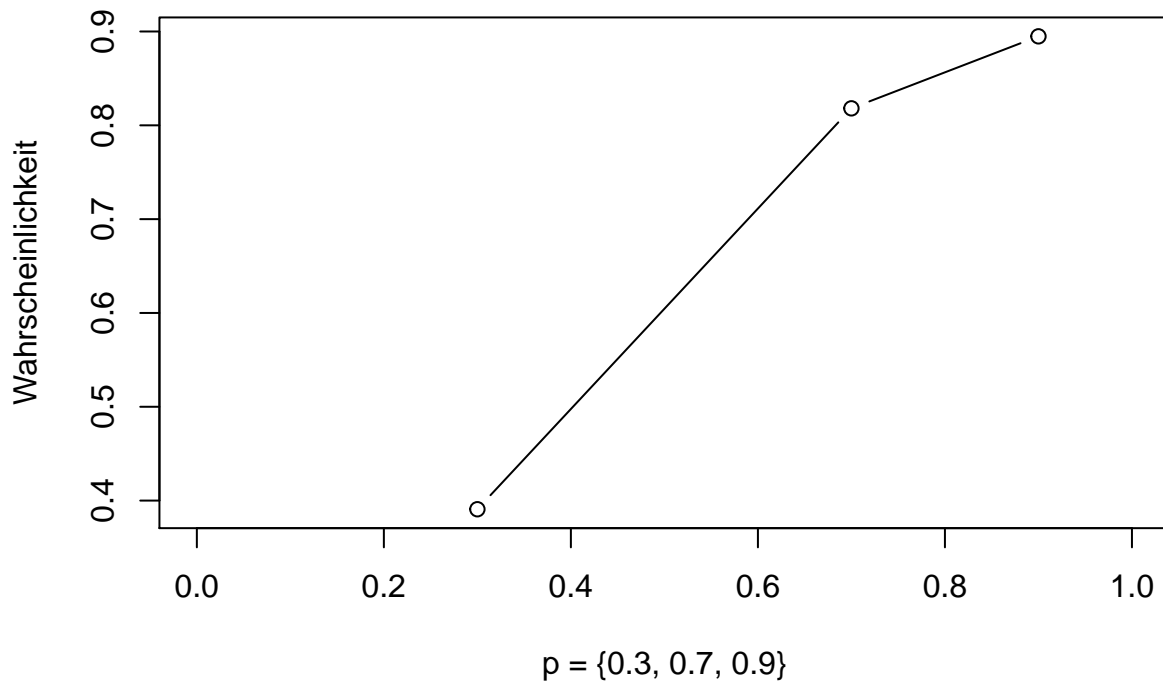
#berechnungen mit a1-a3
result21<-hilfsfunktion2(a21)
result22<-hilfsfunktion2(a22)
result23<-hilfsfunktion2(a23)

pw<-c(sum(result21),sum(result22),sum(result23))
pAll<-c(p21, p22, p23)

#plot
plot(pAll, pw, type="b", main = "Warte- und Blockierwahrscheinlichkeit für neuen Kunden"
, xlab = "p = {0.3, 0.7, 0.9}", ylab = "Wahrscheinlichkeit", xlim=c(0.0,1.0))

```

## Warte- und Blockierwahrscheinlichkeit für neuen Kunden



Alternative zum langen, obigen Code:

```
temp03 <- sum(werteMatrix[1,3:5])
temp07 <- sum(werteMatrix[2,3:5])
temp09 <- sum(werteMatrix[3,3:5])
pwAll <- c(temp03,temp07,temp09) }

plot(pAll, pwAll, type="b", main = "Warte- und Blockierwahrscheinlichkeit für neuen Kunden", xlab = "p = 0.3, 0.7, 0.9", ylab = "Wahrscheinlichkeit", xlim=c(0.0,1.0))
```

## 8. Calculate the mean server utilization and the mean waiting queue length!

Mean Server Utilization:

```
a<-c(a1,a2,a3)
su <- a*(1-werteMatrix[,5])/2

su

## [1] 0.5569340 0.8851191 0.9359842
```

Main waiting queue length:

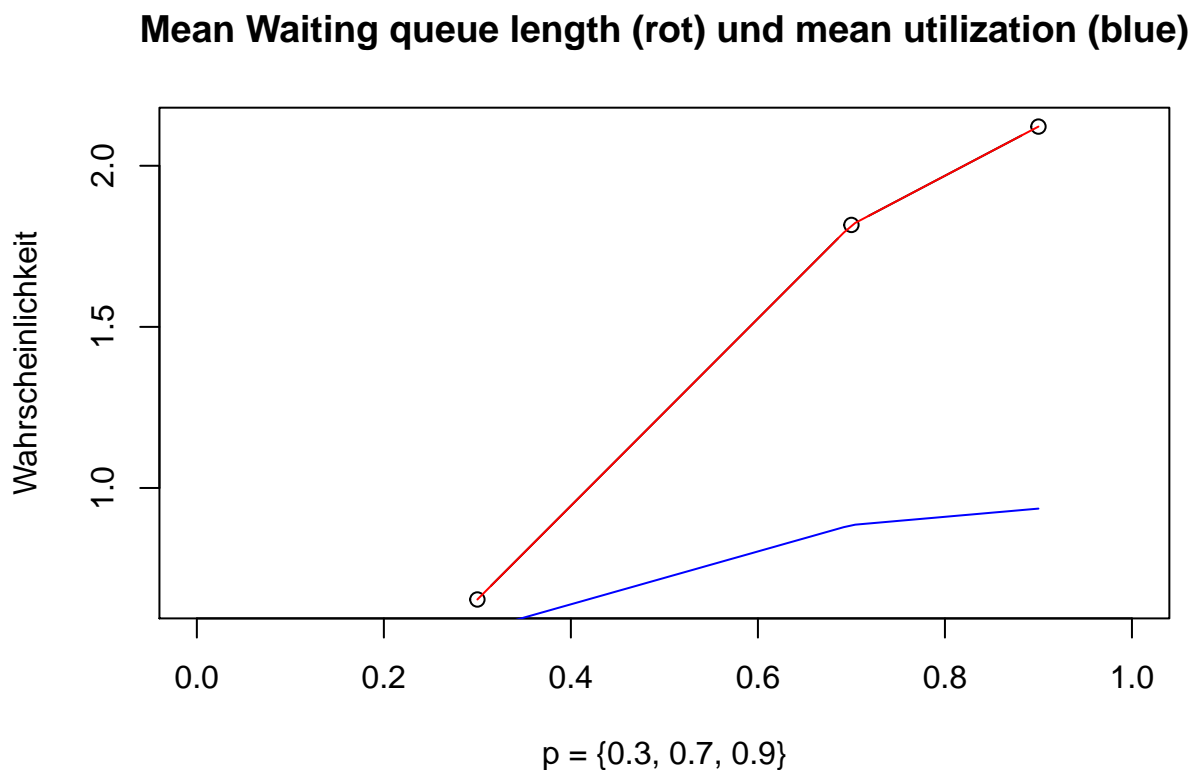
```
mwQueueLength <-c(0,0,0)
mwQueueLength <- mwQueueLength + wertMatrix[,3]
mwQueueLength <- mwQueueLength + 2*wertMatrix[,4]
mwQueueLength <- mwQueueLength + 3*wertMatrix[,5]
```

```
mwQueueLength
```

```
## [1] 0.6539654 1.8163437 2.1215203
```

9. Plot the mean utilization and the mean waiting queue length (as multiple of  $\frac{1}{\mu}$ ) in the interval  $p \in (0, 1)$ !

```
plot(pAll,mwQueueLength, type = "b", main="Mean Waiting queue length (rot) und mean utilization (blue)"  
     xlab = "p = {0.3, 0.7, 0.9}", ylab = "Wahrscheinlichkeit", xlim=c(0.0,1.0))  
lines(approx(pAll,mwQueueLength), col ="red")  
lines(approx(pAll,su), col ="blue")
```



10. Formally derive the distribution function of the waiting time for all waiting and for all non-rejected customers, respectively!

$$\begin{aligned} P(W_W \leq t) &= 1 - e^{-(1-p)*n*\mu*t} P(W \leq t) \\ &= (1 - p_W) * P(W_W \leq t) + p_W * P(W_W \leq t) \\ &= (1 - p_W) * 1 + p_W * (1 - e^{-(1-p)*n*\mu*t}) \\ &= 1 - p_W * e^{-(1-p)*n*\mu*t} \end{aligned}$$

11. Plot the complementary distribution function of the waiting time for all waiting and for all non-rejected customers for  $p = 0.9$  in one diagram! Plot the waiting time as a multiple of  $\frac{1}{\mu}$  on the x-axis and the corresponding probabilities on the y-axis!