기말고사 문제 풀이

1. 항아리에 2n개의 공이 들어 있는데, 그 중 r개의 붉은 공이 존재한다. n번에 걸쳐 무작위로 한 쌍씩의 공을 꺼낼 때, X를 두 개가 모두 붉은 공인 쌍의 수라고 하자. E[X] 를 구하시오.

(Hint) $X = \Sigma_i^n X_i$ 로 나타낼 수 있다.

$$(X_i = \begin{matrix} 1 : i \text{ 번째 시행에서 붉은 공 두 개를 뽑는 경우} \\ 0 : otherwise \end{matrix})$$

Sol) 각 X_i의 평균의 합으로 나타낼 수 있다. 이 때 각각의 X_i의 평균값은 동일하므로, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(r-1)}{2n(2n-1)} = \frac{r(r-1)}{2(2n-1)}$$

2. 모든 눈이 나올 확률이 동일한 주사위를 100번 던진다고 가정하자. 매 시행마다 나온 눈의 값을 모두 더한 값을 X라고 할 때, 다음을 구하시오.

(a) E[X]

(b) Var(X)

(c) Pr(X≥500) (Markov Bound를 사용하시오)

(d) Pr((X≥500) U (X≤ 200) (Chebyshev Bound를 사용하시오)

Sol) (a) 주사위를 한 번 던질 때 나오는 눈을 X_1이라고 하자. 이 때 X_1의 평균값은 1/2 * (1+6) = 3.5 이므로, 100번 던지는 시행에 대해 X의 평균은 3.5*100 = 350이다.

(b) (a)와 마찬가지로 주사위를 한 번 던졌을 때의 분산을 구하면,

$Var(X_1) = E[X_1^2] - E[X_1]^2 = \frac{1}{6} * (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$ 이다.

$\mathrm{Var(X)} = 100 * \mathrm{Var}(X_1) = \frac{3500}{12} = \frac{875}{3}$

(c) Markov's Bound : $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$ 에서,

$$P(X \geq 500) \leq \frac{E[X]}{500} = \frac{7}{10}$$

(d) Chebyshev Bound: $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$ 에서, 주어진 식

$$P(X \geq 500) \ \cup P(X \leq 200) = \ P(|X - 350| \geq 150)$$

$$P(|X - E(X)| \geq 150|) \leq \frac{Var(X)}{150^2} = \frac{875}{3 * 150^2}$$

3. 앞면이 나올 확률이 p인 동전을 적어도 한 번의 앞면과 뒷면 한 번이 나올 때까지 계속 던진다.

(a) 필요한 던지기 횟수의 기댓값을 구하라.

(b) 앞면이 나온 횟수의 기댓값을 구하라.

(c) 뒷면이 나온 횟수의 기댓값을 구하라.

Sol) (a) 처음에 앞면이 나온 경우, 본 문제는 뒷면이 나올 때까지 던지는 기하 분포 문제가 된다. 이 경우 기대값은 $1+\left(\frac{1}{1-p}\right)$가 된다.

처음에 뒷면이 나온 경우, 본 문제는 마찬가지로 앞면이 나올 때까지 던지는 기하 분포 문제로 변경하게 되므로. 기대값은 $1+\left(\frac{1}{p}\right)$. 두 경우의 기대값을 합치면

$$p*\left(1+\left(\frac{1}{1-p}\right)\right)+\ (1-p)*\left(1+\left(\frac{1}{p}\right)\right)=$$

(b) 앞면이 나온 횟수의 기대값도 같은 방법으로 나누어 구할 수 있다.

처음에 뒷면이 나온 경우, 앞면이 나올 횟수의 기대값은 1이다. (앞면이 나오는 순간 종료되므로

처음에 앞면이 나온 경우, 추가로 시행할 던지기의 기대값은 $\frac{1}{1-p}$ 인데, 이 중 마지막 던지기는 뒷면이 나왔을 것이므로 1을 제거하면 $1+\left(\frac{1}{1-p}\right)-1=\left(\frac{1}{1-p}\right)$ 이다.

따라서, 앞면이 나온 횟수의 기대값은 $(1-p)*1\ +p*\left(\frac{1}{1-p}\right)$ 이다.

(c) 뒷면이 나온 횟수의 기대값은 (b)와 같은 방식으로 구하면

$$p*1+(1-p)*\left(\frac{1}{p}\right)$$

이 되는데, 간단하게는 (a)의 결과에서 (b)를 빼서 구할 수 있다.

4. 5시 정각에 버스 정류장에 도착하여 버스를 기다린 지 2분이 지났다고 하자. 버스가 도착하는 inter-arrival time 이 expectation 이 5분인 Exponential distribution 을 따른다고 가정하자. 즉, inter-arrival time 의 random variable 을 X 라고 하면 X~Exp(0.2) 이다. 버스가 세 대 도착하기까지 평균적으로 몇 분을 기다려야 하겠는가?

Sol) Memoryless Property에 의해, 5*3 = 15분을 더 기다려야 한다.

5. 어느 날의 날씨를 맑음/비 두 개의 상태로 나타낼 수 있다고 가정하자. 이 때 그 날의 날씨는 그 전 이틀간의 날씨(맑음/비)에 의해 좌우되는 상황을 상상할 수 있다.

(a) 해당 시스템을 마르코프 체인으로 나타내어 보시오. 나타낸 마르코프 체인에서, 각 상태 간의 이동(Transition) 간에 memoryless property가 성립함을 설명하시오.

(Hint) 이틀 간의 날씨를 하나의 State로 표현할 수 있다.

(b) 만약 이틀 연속 비가 왔다면, 그 다음 날은 0.8의 확률로 비가 오고, 이틀 연속으로 맑은 날씨였다면 그 다음 날은 0.2의 확률로 비가 온다고 하자. 이외의 경우, 0.6의 확률로 그 전날의 날씨와 같다고 한다. 이를 (a)에서 구한 상태 간의 Transition matrix로 나타내시오.

(a) 4개의 State를 정의하여 주어진 상황을 M.C로 표현할 수 있다.

편의상 Not Rainy = Sunny 라고 하자.

1) RR : Rainy Yesterday- Rainy Today

2) RS : Rainy Yesterday- Sunny Today

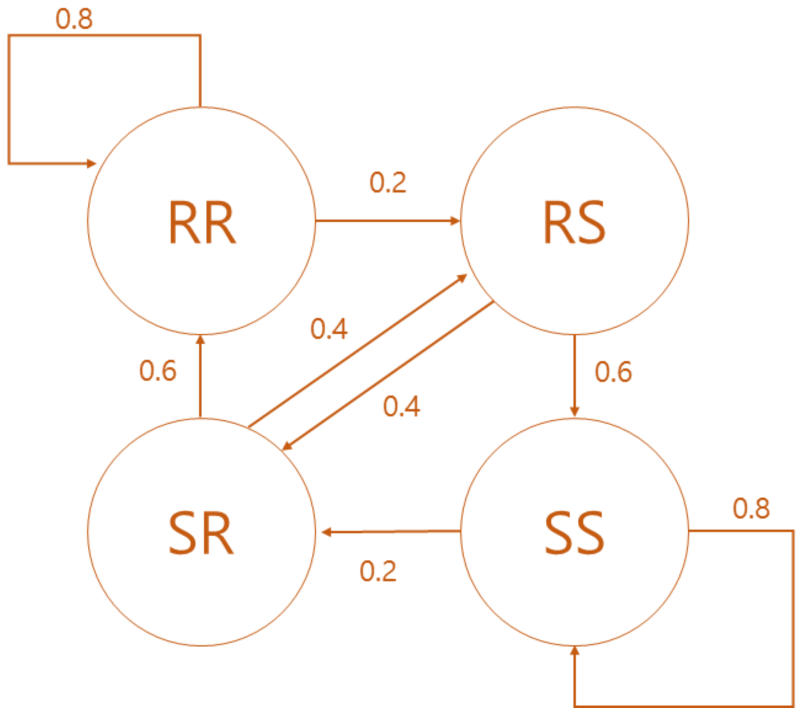
3) SR : Sunny Yesterday- Rainy Today

4) SS : Sunny Yesterday – Sunny Today

Memoryless property 는 다음과 같이 설명할 수 있다.

$W_t = t$번째와 $t-1$번째 날씨 $\in [R,S]^2$

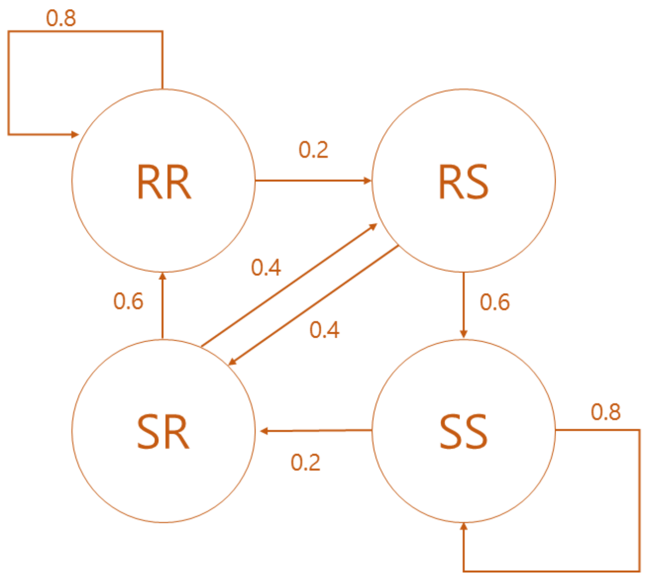
$P(W_t = RR \mid W_{t-1}, W_{t-2}, W_{t-3}, \dots) = P(W_t = RR \mid W_{t-1})$



(b) Transition matrix는 다음과 같다..

	RR	RS	SR	SS
RR	0.8	0.2	0	0
RS	0	0	0.4	0.6
SR	0.6	0.4	0	0
SS	0	0	0.2	0.8

(c) 위 Markov chain 의 stationary distribution을 구할 수 있는 linear equation systems 을 표현하시오.



(c) i state 의 stationary distribution 을 π_i 라고 하면,

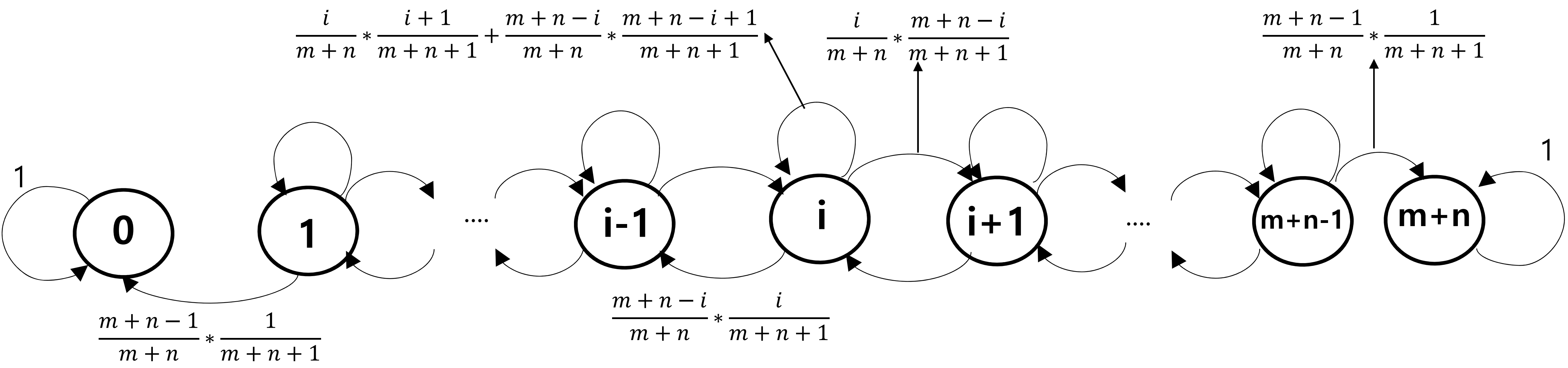
$$\pi_{RR} + \pi_{RS} + \pi_{SR} + \pi_{SS} = 1$$

$$0.2 \times \pi_{RR} + 0.8 \times \pi_{RR} = 0.8 \times \pi_{RR} + 0.6 \times \pi_{SR}$$
$$0.2 \times \pi_{RR} + 0.4 \times \pi_{SR} = 0.4 \times \pi_{RS} + 0.6 \times \pi_{RS}$$
$$0.2 \times \pi_{SS} + 0.4 \times \pi_{RS} = 0.4 \times \pi_{SR} + 0.6 \times \pi_{SR}$$
$$0.2 \times \pi_{SS} + 0.8 \times \pi_{SS} = 0.8 \times \pi_{SS} + 0.6 \times \pi_{RS}$$

6. m개의 빨간 공과 n개의 파란 공이 있는 바구니를 생각하자. 매 시행마다 바구니 안에서 공 한 개를 꺼내고, 공의 색깔을 확인한 후 같은 색깔의 공을 꺼낸 공과 함께 바구니에 집어넣는다. 그리고 공을 한 개 제거하여 바구니 안의 공의 개수는 항상 일정하게 유지된다고 하자.

(a) 문제의 시행을 마르코프 체인으로 나타내기 위해, 바구니 안의 빨간 공의 개수로 State를 정의한다고 하자. 해당 정의를 활용하여 마르코프 체인을 나타내고, Transition Diagram을 나타내시오.

(b) 위에서 구한 Markov Chain 에서 Transient state 및 recurrent state 들은 무엇인가?



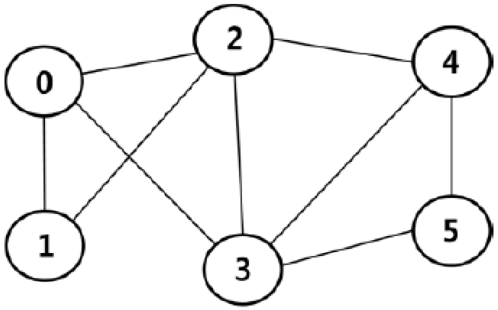
(a) State는 0~m+n 까지 존재할 수 있다. 임의의 상태 i에서 이동 가능한 Transition은 i+1 과 i-1 State로의 이동에 해당하며, 각 Transition의 확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다. m+n(모든 공이 빨간 공인 상태)와 0(모든 공이 파란 공인 상태)에 도달하면 더 이상 다른 State로의 Transition이 일어나지 않는 상태가 된다.

(b) 위에서 구한 Markov Chain 에서 Transient state 및 recurrent state 들은 무엇인가?

(b) 각 State는 0과 m+n State에 도달하면 원래 State로 돌아오지 못하므로, 두 State를 제외한 모든 State는 Transient state가 된다.

따라서, Recurrent State는 {0,m+n}이다..

7. 다음 그래프에서 Random Walk를 수행한다고 하자. 이 때의 Stationary Distribution을 구하시오.



$$\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3$$

$$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_2$$

$$\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4$$

$$\pi_3 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_5$$

$$\pi_4 = \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_5$$

$$\pi_5 = \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{6}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{9}$$

$$\pi_2 = \frac{2}{9}$$

$$\pi_3 = \frac{2}{9}$$

$$\pi_4 = \frac{1}{6}$$

$$\pi_5 = \frac{1}{9}$$