# Chapitre 2 : Limites de fonctions

# George Alexandru Uzunov

# Table des matières

1	Limite d'une fonction en l'infini	<b>2</b>				
	1.1 Limite finie	2				
	1.2 Limite Infinie					
<b>2</b>	Limite d'une fonction en une valeur réelle	4				
	2.1 Limite finie	4				
	2.2 Limite infinie	4				
3	Limites de fonctions de référence	4				
	3.1 Limites en l'infini	4				
	3.2 Limites en 0	4				
4 Théorème sur les limites						
5	Limites d'une fonction composée	5				
6	Limites et comparaison	5				
	6.1 Théorème de comparaison	5				
	6.2 Théorème d'encadrement					
7	Synthèse	5				
8	Limites d'éxponentielles et croissances comparées	5				

### 1 Limite d'une fonction en l'infini

#### 1.1 Limite finie

<u>Définition</u> On dit que f(x) admet pour limite  $l \in \mathbb{R}$  lorsque x tend vers  $+\infty *$  quand tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand. On note :  $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$ .

**Remarque** On définit de la même façon  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ .

**Exemple** La fonction définie par  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$  a pour limite 2 lorsque x tend vers  $+\infty$ . En effet, les valeurs de la fonction se resserentautour de 2 dès que x est suffisamment grand. Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

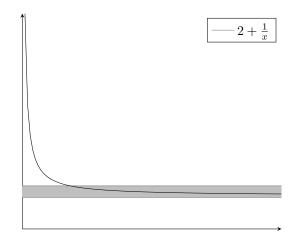


FIGURE 1 – Courbe représentative de la fonction f et intervalle ouvert

<u>Définition Interprétation graphique</u> Si  $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$ , alors on dit que la droite d'équation y = l est asymptote horizontale en  $+\infty$  à la courbe représentative de la fonction f. On définit de même l'asymptote horizontale en  $-\infty$ .

**Exemple** Dans l'exemple précédent, la droite y=2 est asymptote horizontale à  $C_f$ .

## 1.2 Limite Infinie

<u>Définition</u> On dit que f(x) admet pour limite  $+\infty$  lorsque x tend vers  $+\infty$  quand tout intervalle du type A;  $+\infty$  (avec  $A \in \mathbb{R}$ ) contient toutes les valeurs de A pour A assez grand. On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

**Remarque** On définit de la même façon  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm \infty$ .

**Exemple** La fonction définie par  $f(x) = x^2$  a pour limite  $+\infty$  quand x tend vers  $+\infty$ . En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand. Si on prend un réel B quelconque, l'intervalle B;  $+\infty$  contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

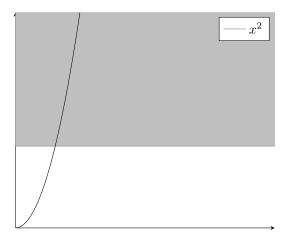
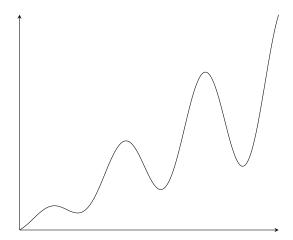


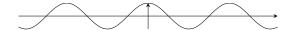
FIGURE 2 – Courbe représentative de la fonction f et intervalle ouvert contenant toutes les valeurs de f

**Remarque** Une fonction qui tend vers  $+\infty$  n'est pas nécéssairement croissante.



 $\label{eq:figure 3-course} Figure \ 3-Courbe\ représentative\ d'une\ fonction\ qui\ tend\ vers\ l'infini\ mais\ n'est\ pas\ croissante$ 

Il existe des fonctions qui n'ont pas de limites infinies. C'est le cas des fonction sinusoidales.



 $\label{eq:figure 4-Courbe} Figure \ 4-Courbe représentative d'une fonction qui ne possède pas de limite infinie$ 

## 2 Limite d'une fonction en une valeur réelle

#### 2.1 Limite finie

**<u>Définition</u>** On dit que f(x) admet pour limite l (l réel) lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez voisin de a. On note :  $\lim_{x\to a} f(x) = l$ 

**Propriété** Si f est une fonction de référence (fonction carré, inverse, polynôme, fraction rationelle, racine carrée, fonction exponentielle ...) alors  $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$  où a est un réel de l'ensemble de définition de f.

#### 2.2 Limite infinie

**Remarque** On définit de la même façon  $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ 

<u>Définition Interprétation graphique</u> Si  $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ , alors on dit que la droite d'équation x = a est asymptote verticale en a à la courbe représentative de la fonction f. On définit de même l'asymptote verticale lorsque la limite est  $-\infty$ .

Remarque Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel a selon x > a ou x < a.

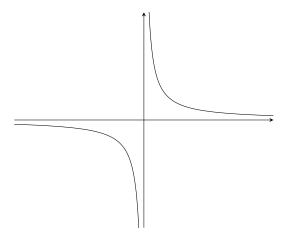


FIGURE 5 – Courbe représentative d'une fonction avec des limites différentes en 0<sup>+</sup> et en 0<sup>-</sup>

## 3 Limites de fonctions de référence

#### 3.1 Limites en l'infini

ſ	f(x)	$x^n$	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$e^x$
ſ	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$
ſ	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si $n$ pair	0	non défini pour $x \in \mathbb{R}$	idem	0
		$-\infty$ si $n$ impair				

#### 3.2 Limites en 0

f(x)	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$		
$\lim_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$		
$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$ si $n$ pair	Non défini pour $x \in \mathbb{R}$		
	$-\infty$ si $n$ impair			

## 4 Théorème sur les limites

La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite en l'infini de son terme de plus haut degré (monome prépondérant).

## 5 Limites d'une fonction composée

**Exemple**  $x \xrightarrow{u} x - 3 \xrightarrow{v} \sqrt{x - 3}$  c'est à dire :  $v(u(x)) = v[u(x)] = v \circ u$ 

**Définition** Soit une fonction u définie sur un intervalle I, et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit une fonction v définie sur un intervalle K telle que  $J \subset K$ . On apelle fonction composée de u par v ou composée de v "rond" u la fonction f définie sur I telle que  $f(x) = v(u(x)) = v \circ u$ .

Propriété (Limite d'une fonction composée)  $a,b,c\in\mathbb{R}$  (éventuellement  $\pm\infty$ ). Si on a  $\begin{cases} \lim_{x\to a} u(x)=b \\ \lim_{X\to b} v(X)=c \end{cases}$  Alors,  $\lim_{x\to a} v\circ u(x)=c$ 

## 6 Limites et comparaison

## 6.1 Théorème de comparaison

Si 
$$\begin{cases} \text{Pour } x \to a, \ f(x) \ge g(x) \\ \lim_{x \to a} g(x) = \pm \infty \end{cases}$$
 Alors  $\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty$ .

## 6.2 Théorème d'encadrement

Soit  $l \in \mathbb{R}$ . Si

1. Pour 
$$x \to a$$
 ,  $g(x) \le f(x) \le h(x)$ 

2. 
$$\begin{cases} \lim_{x \to a} g(x) = l \\ \lim_{x \to a} h(x) = l \end{cases}$$

Alors:  $\lim_{x\to a} f(x) = l$ 

# 7 Synthèse

4 formes indéterminées :

- 1.  $-\infty + \infty$
- $2. \frac{0}{0}$
- 3.  $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$
- $4. \ 0 \times \infty$

Plusieurs formes de lever l'indétermination :

- 1. Factorisation par le mônome prépondérant.
- 2. Expression conjugée.
- 3. Décomposer la fonction.
- 4. Théorème de comparaison ou encadrement.

# 8 Limites d'éxponentielles et croissances comparées

5

Propriétés

1. 
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$2. \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

3. 
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

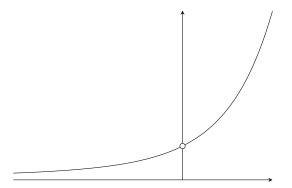


FIGURE 6 – Cas d'une fonction non définie en 0 mais qui a une limite.

Le théorème des croissances comparées est constitué de quelques résultats de limites de fonctions qui seraient qualifiées de formes indéterminées par les méthodes usuelles.

**Démonstration de**  $\lim_{x\to+\infty} e^x$  On pose :  $f(x)=e^x-x$  et  $f'(x)=e^x-1$ 

x	$-\infty$	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	_	0	+	
Variation de $f$	+∞	→ 1 <i>-</i>		$+\infty$

FIGURE 7 – Tableau de signes de f'(x) et tableau de variations de f.

f est croissante sur  $\mathbb{R}^*$  et

$$f(x) \ge 1 \iff e^x - x \ge 1$$
  
 $\iff e^x \ge 1 + x \text{ (Lemme)}$   
 $\lim_{x \to \infty} 1 + x = +\infty$ 

Par théorème de comparaison :  $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ 

#### Propriété de croissance comparée

 $\forall n \in \mathbb{N}$ :

1. 
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$2. \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

**Démonstration** D'après le Lemme :  $e^X \ge 1 + X$ .

On pose :  $X = \frac{x}{n+1}$ 

$$e^{X} \ge 1 + X \iff e^{\frac{x}{n+1}} \ge 1 + \frac{x}{n+1}$$
  
 $\implies e^{\frac{x}{n+1}} \ge \frac{x}{n+1}$ 

Comme la fonction  $x^{n+1}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  :  $(e^{\frac{x}{n+1}})^{n+1} \geq (\frac{x}{n+1})^{n+1} \iff e^x \geq kx^{n+1}$  avec  $k = (\frac{1}{n+1})^{n+1}$ .  $(x^n)$  positif, donc :  $\frac{e^x}{x^n} \geq kx$ , et  $\lim_{x \to +\infty} kx = 0$  Par théorème de comparaison :  $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ .