Continuité

George Alexandru Uzunov

Table des matières

1 Notion de continuité

Définition Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$. f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$$\begin{cases} \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \end{cases}$$

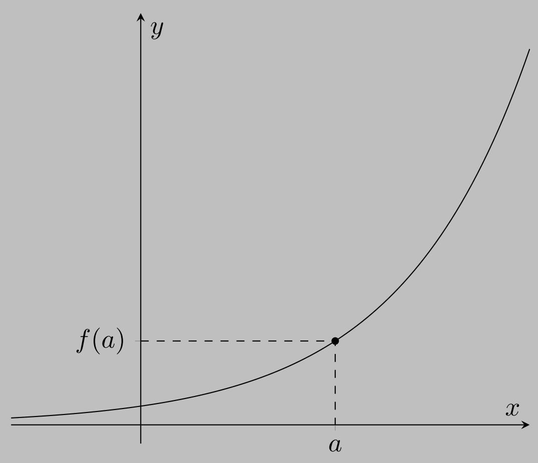

FIGURE 1 – f est continue sur D_f

Exemple

1. La fonction valeur absolue ($f : x \mapsto |x|$) :
   - Continue
   - Non derivable en 0
2. La fonction racine carree ($f : x \mapsto \sqrt{x}$)
   - $D_f = \mathbb{R}^* \quad D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$
   - Continue en 0
   - Non derivable en 0
3. La fonction exponentielle ($f : x \mapsto e^x$)
   - Continue
   - Derivable
4. La fonction partie entiere ($f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$)
   - Non continue
   - Non derivable

2 Continuite des fonctions usuelles

Fonction	Intervalle de continuite
x^n (avec $n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\|x\|$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

FIGURE 2 – Tableau de continuite des fonctions de reference

Toute fonction construite par somme, produit, quotient ou composition à partir des fonctions de reference herite de la continuite des fonctions de reference utilisees.

Exemple

$$f : x \mapsto x^2 + 1 \mapsto \cos(x^2+1) \mapsto e^{\cos(x^2+1)}$$

Par theoreme de continuite des fonctions des fonctions de reference, par somme et par composition, on peut conclure que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice type

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 \text{ pour } x < 3 \\ x-4 \text{ pour } 3 \leq x < 5 \\ -2x+13 \text{ pour } x \geq 5 \end{cases}$$

La fonction est elle continue ?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} -x+2 = -1 \\ \lim_{x\to 3^+} x-4 = -1 \end{array}\right\} \text{continue en 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 5^-} x-4 = 1 \\ \lim_{x\to 5^+} -2x+13 = 3 \end{array}\right\} \text{pas continue en 5}$$

3 Continuite et derivabilite

Theoreme *(admis)*

- Si f est derivable en a alors la fonction f est continue en a.
- Si f est derivable sur I, alors elle est continue sur cet intervalle.

4 Continuite et equations

Theoreme *(admis)* Soit une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$, pour tout k tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$, l'equation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans I.

Remarque Le theoreme permet de prouver qu'il existe au moins une solution.

Corrolaire du theoreme Soit une fonction f continue et strictement monotone sur I. Soit $f(a) \leq k \leq f(b)$, l'equation $f(x) = k$ admet une unique solution en I.

Exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1 \end{cases}$$

Quel est le nombre de solutions a l'equation $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$?

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

On cherche les racines de la derivee.

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$\Delta = 36$$

D'où : $x_1 = 2$ et $x_2 = 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f		$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	

FIGURE 3 – Tableau de signes de $f'(x)$ et tableau de variations de f.

Sur $]-\infty;0]$ 0 solutions
Sur $[0;2]$ 0 solutions
Sur $[2;+\infty]$ 1 solution.

5 Continuite et suites

Theoreme (du point fixe) Soit une suite (U_n) definie par la relation $U_{n+1} = f(U_n)$ convergente vers l. Si la fonction associee f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la limite de la suite en N est solution de l'equation $f(x) = x$.

Sachant que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in I$ fermé
- f continue en l, $l \in I$ ou f a valeur dans I ou I contient tous les termes de (U_n) ou $f(I) \subset I$ ou sachant que $x \in I, \quad f(x) \in I$.

Exemple Soit

$$(U_n) = \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3}{U_n+1} \end{cases}$$

Determinez la limite de (U_n).

1. Posons $U_{n+1} = f(U_n)$ où $f(x) = \frac{3}{x+1}$ sur $I = [0;3]$. On admet que(U_n) converge et que ses valeurs sont contenues dans l'intervalle $[0;3]$

2. Continuité f est continue sur I car elle est la fonction inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas sur I.

3. Verifions que toutes les images de x par f appartiennent à I.

$$\begin{aligned} & 0 \leq x \leq 3 \\ \iff & 1 \leq x+1 \leq 4 \\ \iff & 1 \geq \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{4} \\ \iff & 3 \geq \frac{3}{x+1} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

4. (U_n) converge vers l, f est continue et à valeur dans I donc d'après le theoreme du point fixe on a $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff \frac{3}{x+1} = x \iff x^2 + x - 3 = 0 \quad \Delta = 13$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \text{ or } x_2 \notin I \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} (U_n) = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

a

$$2^{\frac{3x-2}{x-1}} + 3^{\frac{2x-1}{x-1}} = 43$$