Chapitre 2: Limites de fonctions

George Alexandru Uzunov

Table des matières

1 Limite d'une fonction en l'infini

1.1 Limite finie

<u>Définition</u> On dit que $f(x)$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty*$ quand tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Remarque On définit de la même façon $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Exemple La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction se resserentautour de 2 dès que x est suffisamment grand. Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

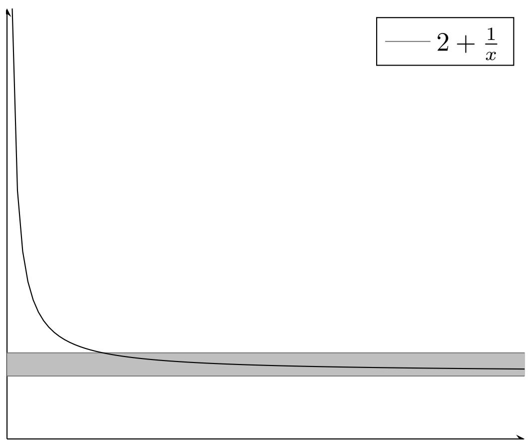

FIGURE 1 – Courbe représentative de la fonction f et intervalle ouvert

<u>Définition *Interprétation graphique*</u> Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f. On définit de même l'asymptote horizontale en $-\infty$.

Exemple Dans l'exemple précédent, la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à C_f.

1.2 Limite Infinie

<u>Définition</u> On dit que $f(x)$ admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle du type $]A; +\infty[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque On définit de la même façon $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

Exemple La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand. Si on prend un réel B quelconque, l'intervalle $]B; +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

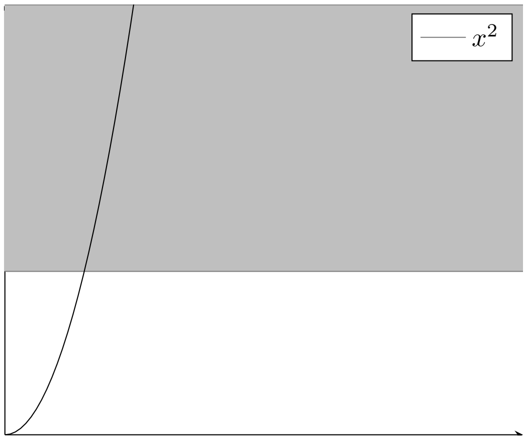

Figure 2 – Courbe représentative de la fonction f et intervalle ouvert contenant toutes les valeurs de f

Remarque Une fonction qui tend vers $+\infty$ n'est pas nécéssairement croissante.

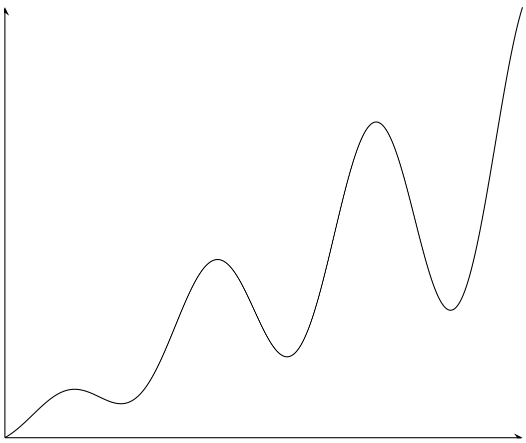

Figure 3 – Courbe représentative d'une fonction qui tend vers l'infini mais n'est pas croissante

Il existe des fonctions qui n'ont pas de limites infinies. C'est le cas des fonction sinusoidales.

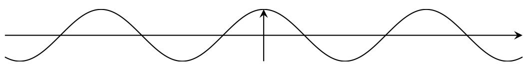

Figure 4 – Courbe représentative d'une fonction qui ne possède pas de limite infinie

2 Limite d'une fonction en une valeur réelle

2.1 Limite finie

Définition On dit que $f(x)$ admet pour limite l (l réel) lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez voisin de a. On note : $\lim_{x\to a} f(x) = l$

Propriété Si f est une fonction de référence (fonction carré, inverse, polynôme, fraction rationelle, racine carrée, fonction exponentielle ...) alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ où a est un réel de l'ensemble de définition de f.

2.2 Limite infinie

Définition On dit que $f(x)$ admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a quand tout intervalle du type $]A; +\infty[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez voisin de a. On note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Remarque On définit de la même façon $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Définition *Interprétation graphique* Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale en a à la courbe représentative de la fonction f. On définit de même l'asymptote verticale lorsque la limite est $-\infty$.

Remarque Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel a selon $x > a$ ou $x < a$.

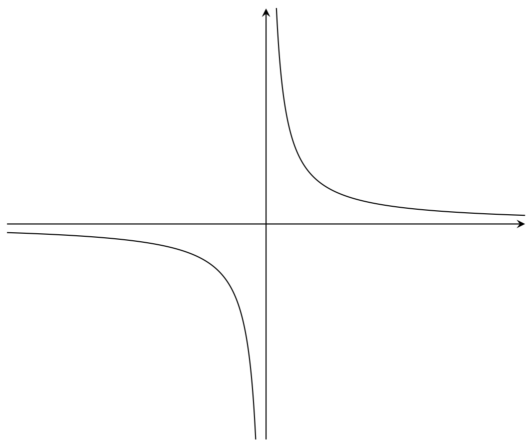

FIGURE 5 – Courbe représentative d'une fonction avec des limites différentes en 0^+ et en 0^-

3 Limites de fonctions de référence

3.1 Limites en l'infini

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^x
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini pour $x \in \mathbb{R}$	idem	0

3.2 Limites en 0

$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	Non défini pour $x \in \mathbb{R}$

4 Théorème sur les limites

La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite en l'infini de son terme de plus haut degré (monome prépondérant).

5 Limites d'une fonction composée

Exemple $x \overset{u}{\mapsto} x-3 \overset{v}{\mapsto} \sqrt{x-3}$ c'est à dire : $v(u(x)) = v[u(x)] = v \circ u$

Définition Soit une fonction u définie sur un intervalle I, et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit une fonction v définie sur un intervalle K telle que $J \subset K$. On apelle fonction composée de u par v ou composée de v "rond" u la fonction f définie sur I telle que $f(x) = v(u(x)) = v \circ u$.

Propriété (Limite d'une fonction composée) $a, b, c \in \mathbb{R}$ (éventuellement $\pm\infty$). Si on a $\begin{cases} \lim_{x\to a} u(x) = b \\ \lim_{X\to b} v(X) = c \end{cases}$
Alors, $\lim_{x\to a} v \circ u(x) = c$

6 Limites et comparaison

6.1 Théorème de comparaison

Si $\begin{cases} \text{Pour } x \to a,\ f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \end{cases}$ Alors $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

6.2 Théorème d'encadrement

Soit $l \in \mathbb{R}$. Si

1. Pour $x \to a$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
2. $\begin{cases} \lim_{x\to a} g(x) = l \\ \lim_{x\to a} h(x) = l \end{cases}$

Alors : $\lim_{x\to a} f(x) = l$

7 Synthèse

4 formes indéterminées :

1. $-\infty + \infty$
2. $\frac{0}{0}$
3. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
4. $0 \times \infty$

Plusieurs formes de lever l'indétermination :

1. Factorisation par le mônome prépondérant.
2. Expression conjugée.
3. Décomposer la fonction.
4. Théorème de comparaison ou encadrement.

8 Limites d'éxponentielles et croissances comparées

Propriétés

1. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

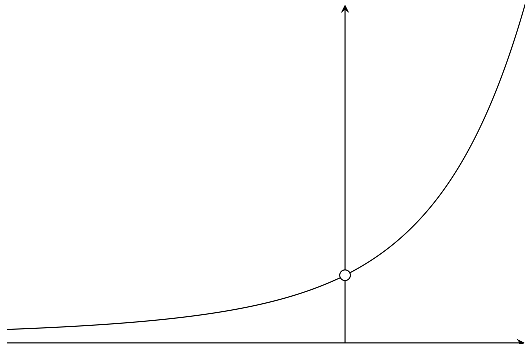

Figure 6 – Cas d'une fonction non définie en 0 mais qui a une limite.

Le théorème des croissances comparées est constitué de quelques résultats de limites de fonctions qui seraient qualifiées de formes indéterminées par les méthodes usuelles.

Démonstration de $\lim_{x\to+\infty} e^x$ On pose : $f(x) = e^x - x$ et $f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 7 – Tableau de signes de $f'(x)$ et tableau de variations de f.

f est croissante sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} f(x) \geq 1 &\iff e^x - x \geq 1 \\ &\iff e^x \geq 1 + x \text{ (Lemme)} \\ \lim_{x\to\infty} &1 + x = +\infty \end{aligned}$$

Par théorème de comparaison : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Propriété de croissance comparée
$\forall n \in \mathbb{N}$:

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration D'après le Lemme : $e^X \geq 1 + X$.
On pose : $X = \frac{x}{n+1}$

$$\begin{aligned} e^X \geq 1 + X &\iff e^{\frac{x}{n+1}} \geq 1 + \frac{x}{n+1} \\ &\implies e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} \end{aligned}$$

Comme la fonction x^{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}$: $(e^{\frac{x}{n+1}})^{n+1} \geq (\frac{x}{n+1})^{n+1} \iff e^x \geq kx^{n+1}$ avec $k = (\frac{1}{n+1})^{n+1}$. (x^n) positif, donc : $\frac{e^x}{x^n} \geq kx$, et $\lim_{x\to+\infty} kx = 0$ Par théorème de comparaison : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.