Chapitre 3 : Compléments sur la dérivation et convéxité

George Alexandru Uzunov

Table des matières

1 Complément sur la dérivation

1.1 Etudier la dérivabilité en un point

Exemple Soit une fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 \text{ si } x \leq 1 \\ \frac{x-4}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

- *Etude de la continuité en 1 :* $\lim_{x \to 1^-}(x^2 - 2x - 2) = -3$ et $\lim_{x \to 1^+} \frac{x-4}{x} = -3$
  Les limites sont égales, il y a continuité.
- Pour $x \leq 1$, $f'(1^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = 0$
- Pour $x > 1$, $f(1^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4}{1+h} = 4$

Les limites sont différentes. Donc f n'est pas dérivable en 1.
Pour 1^-, la tangente horizontale est $y = -3$.
Pour 1^+, la tangente horizontale est $y = 4x + 7$.

1.2 Dérivée d'une fonction composée

Propriété Soit une fonction f telle que $x \mapsto u(x) \mapsto v[u(x)]$. Soit une fonction u définie et dérivable en I, avec ses valeurs en J. Soit une fonction v définie et dérivable en en K tel que $J \subset K$, avec ses valeurs en $\mathbb{R}$. $f(x) = v \circ u(x)$ dérivable sur I. Sa dérivée est $f'(x) = v' \circ u \times u'$.

1.3 Dérivées usuelles de fonctions composées

- Soit u une fonction dérivable et strictement positive, avec $D_f \neq D_{f'}$:

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \text{ et } f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

- Soit u une fonction dérivable sur I, alors la fonction $f(x) = (u(x))^n$
  1. est dérivable sur I $\forall n \in \mathbb{N}^*$
  2. est dérivable sur I si $u(x) \neq 0$ lorsque $n \in \mathbb{Z}^*$

  La dérivée de f est alors $f'(x) = n \times u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$
- Soit u dérivable sur I, alors la fonction $f(x) = exp(u(x))$, sa dérivée est $f'(x) = u'(x) \times exp(u(x))$.

1.4 Rappel de l'application de la dérivation

La dérivée f' sert à :

- Étudier la variation de la fonction f
- Étudier des extrema
  — Lorsque $f'(x)$ est nulle
  — Lorsqu'il y a changement de signe de la dérivée

1.5 Dérivée seconde

<u>Définition</u> Soit f une fonction dérivable sur I telle que sa dérivée f' soit aussi dérivable sur I. On apelle dérivée seconde la fonction $f''(x) = (f'(x))'$.

2 Convéxité

2.1 Lecture Graphique

<u>Définition</u> f est convexe sur I si et seulement si pour tout points a et b distincts de C_f, la corde $[AB]$ est au dessus de C_f. Elle est concave si et seulement si la corde $[AB]$ est en dessous de C_f.

<u>Définition *Point d'inflexion*</u> Le point A de coordonées $(a; f(a))$ est un point d'inflexion de C_f si et seulement si la tangente traverse la courbe au point A.

2.2 Convéxité et sens de variation de f'

Propriété

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

2.3 Convéxité et signe de f''

Propriété 1

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

Propriété 2 Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, $\forall x \in I$ on a :

- si $f''(x) \geq 0$, alors C_f est au dessus de ses tangentes.
- si $f''(x) \leq 0$, alors C_f est en dessous de ses tangentes.

Démonstration On cherche à prouver que si $f'' > 0$ alors C_f est au dessus de ses tangentes. (Méthode de la différence)

$$d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$
$$d'(x) = f'(x) - f'(a)$$
$$d''(x) = f''(x)$$

Or par hypothèse $f''(x) \geq 0$.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Signe de $d''(x)$		$+$		$+$	
Variation de d'		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Figure 1 – Tableau de signes de $d''(x)$ et tableau de variations de d'.

D'après ce tableau de signes on a :

- $\forall x \in]-\infty; a[$, $d'(x) < 0$.
- $\forall x \in [a; +\infty[$, $d'(x) \geq 0$.

On a donc :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Signe de $d'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de d		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Figure 2 – Tableau de signes de $d'(x)$ et tableau de variations de d.

L'extremum est 0 pour d. Donc $d(x) \geq 0$. C_f est donc toujours au dessus de ses tangentes.

2.4 Point d'inflexion et dérivée seconde

Propriété Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en a tout en changeant de signe.

2.5 Synthèse

1. Les trois propositions suivantes sont équivalentes. f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur $I \iff f'' \geq 0$.
2. Les trois propositions suivantes sont équivalentes. f est concave sur $I \iff f'$ est décroissante sur $I \iff f'' \leq 0$.

3 Annexe

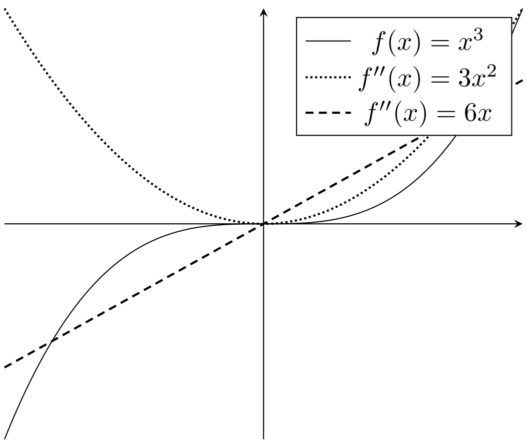

FIGURE 3 – Courbe d'une fonction, sa dérivée et sa derivée seconde

Dans cette représentation on peut clairement observer le signe de $f''(x)$, la variation de f' et la convéxité de f. Cette figure illustre les propriétés exposées dans les subsections 2.2 et 2.3.