

译

解析近似区域光实时着色

专业班级：	软件工程 3 班
姓 名：	廖 添
指导教师：	李 志 淮

信息科学技术学院

摘 要

我们引入解析近似,以便对由非封闭区域光源照亮的表面进行准确的实时渲染。我们的解决方案利用了由 Arvo 开发的用于多边形光源照射的冯氏光照表面着色的辐照度张量。利用一维边界积分的重新构造,我们设计并开发了一个通用型结构框架,用于在一定常数时间内通过若干简单峰形函数对积分进行近似求解和评估。为突破冯氏光照的限制,我们提出一个低成本边缘分割策略,引入了半矢量参数化方法解释球经。由于这一新颖的扩展,我们准确地近似求解了常见的若干微面元双向反射分布函数,提供了一种实际方法来保证能与实际数据匹配的实时镜面延伸。最后,使用该解析近似框架,通过支持非均匀缩放操作和水平面裁剪的基于原创的多边形纺丝的方法,我们引入对球面以及圆盘面区域光源的运算支持。在实际的图形处理器上,我们提出的方法成功实现了无需任何对区域光源形状和表面粗糙度进行预先假设的实时渲染功能。

关键词: 区域光源, 着色, 解析近似, 微面元, 轴向弯矩, 实时

1 引言

考虑到区域光源的照明问题，准确地进行镜面表面的实时渲染是一件具有挑战性的任务。其难度在于二维镜面辐照积分的估算没有实际的公式解，除非使用高成本的基于蒙特卡洛算法的采样技术。多数引人注目的解决方案都采用计算最具代表性点(MRP)方法^{[1],[2]}，降低着色积分的成本至廉价的点光照计算。然而，这些方法都在保留次表面双反射分布函数(BRDF)的高光形状问题上失败，并且难以处理部分水平面的可视性。Arvo^[3]提供了一个分析解决方案，用于对被非封闭多边形光源照亮的光滑表面进行着色。不过它的实现依赖于高成本的边缘积分方法，同时也受限于冯氏表面。最近一个并发方法使用线性余弦分布(LTC)^[4]来解决这个问题。然而，该解决方案要求为每一个 BRDF 提供使用高成本的最小化技术构建的预计算表。

寻找一个结合了精确性、灵活性和实时性能的解决方案是一个具有挑战性的问题，其包含了许多对高品质渲染需求应用程序（如预先照明工具、游戏引擎或工业渲染器）的期望。

在本论文当中，我们通过利用 Arvo 开发的辐照度张量进行准确的解析近似来解决这些缺点（图 1）。同时，进一步将该方法扩展至处理多轴取向余弦波问题，突破冯氏光照的限制，支持微面元 BRDF。最终，我们将介绍一种原创的多边形旋转方法，以支持通过相同的数学框架对球形或圆盘形区域光照亮的表面进行着色。

我们所作的工作有：

- 一个泛型框架，使用简单的可积分峰形函数，在 $O(1)$ 时间而不是 $O(n)$ 时间近似和评估边缘积分。
- 轴取向余弦波多重乘积的解析近似，使得能够在更复杂的球面多边形上进行 BRDFs 的积分。
- 一种低成本的边缘分割策略，用于处理通过半矢量参数化引入造成的扭曲失真，从而实现微面元 BRDF 的支持。
- 一个原创的旋转算法，利用我们的近似方法，实现球形和圆盘形区域光的照明，支持不均匀缩放操作。

2 相关工作

在过去几十年中，区域光源的直接照明问题已经以各种方式解决了。在本节我们回顾我们认为与我们的方法最相关的工作，重点是解决实时渲染约束下积分的镜面反射项。

蒙特卡洛积分。蒙特卡洛积分技术是基于概率抽样策略对复杂积分进行数值计算的常用方法。对于直接区域光照问题，绘制采样需要考虑到有区域光形状所

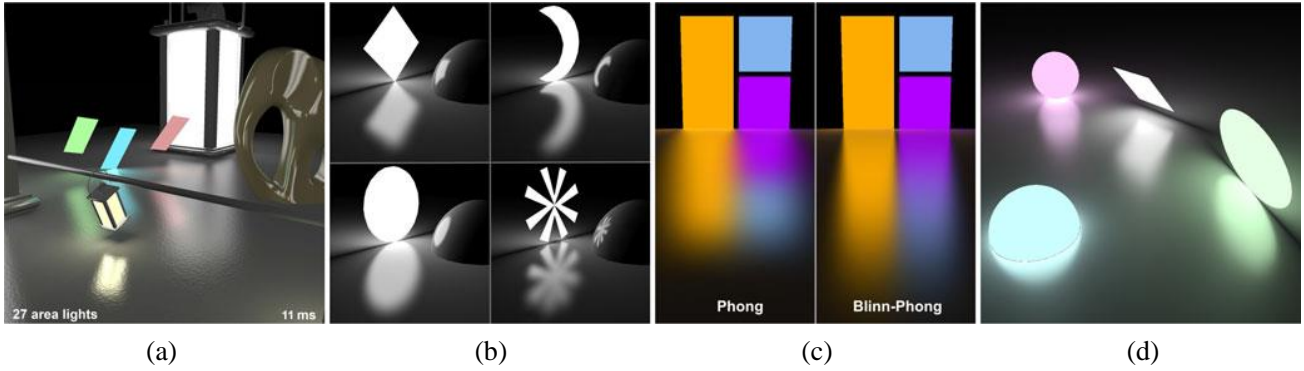


图 1：我们的解析近似为接近真实数据的质量提供了镜面区域光照的实时性能（a，在 NVIDIA GTX 980Ti GPU 上测量的时间）。我们支持任何类型的多边形光源形状（甚至是动画类型）（b），和由冯氏光照或 BRDFs 描述的表面（c）。我们提出的方法也容易扩展到支持非均匀缩放的球形和圆盘形区域光源（d，这里由微面元分布演示）。

维持的立体角^{[5],[6]}、表面 BRDF 的重要性采样，或者使用两者的组合来减少镜面反射计算的方差。尽管采用这种抽样方法，但是这些方法需要大量样本才能收敛到无噪声的结果，几乎无法兼容实时渲染的约束。

另外一个常用于解析近似区域光源的方法是使用虚拟点光源(VPLs)^[7]集合，将积分当中的镜面反射项的计算降低至对于多个点光源的计算。分类归并聚集方法^[8]已被提出以进一步降低 VPLs 的算法复杂度，并成功地在实时渲染中得到了应用^{[9],[10]}。然而，这些方案往往限于解决低频光照问题，例如漫反射或弱光滑表面等，以限制采样量并保持良好的实时性能。使用这些方法进行高频光照仍然是一个具有挑战性的问题，仅使用大量采样或昂贵的集成技术只能远离实时渲染的考量。

最具代表性点。MRP 方法通过识别最有助于光照的区域光上的代表点来降低采样技术的昂贵计算成本。该方法将着色积分问题减少到单点照明计算，为实时渲染提供了实用的解决方案。该方法的早期工作可以在[11]的冯氏区域光照部分中找到。这里的 MRP 被定义为距离观察反射方向最近的点。相反，Drobot^[1]考虑了区域光和具有由表面粗糙度参数化的孔径的锥体之间的交叉区域中的一个点。Karis^[2]解决了能量守恒问题，并且通过改进镜面分布来更好地匹配镜面微面元模型的强烈高光。然而，这些方法都有缺点。冯氏 BRDF 的高光形状能够很好地近似，但在使用微面元 BRDF 时则变得不准确。水平面处理同时是另外一个问题。MRP 在近似简单的几何形状光源时效果良好，但当光源在水平面处被裁剪时计算将变得更加复杂。

解析方法。另有方法尝试推导出着色积分的近似解，或者至少是一个能够让人接受的近似。Bao 和 Peng^[12]使用低度泰勒级数展开的二维多项式的双积分进行近似，将它们的方法限制在低指数冯氏表面。田中和高桥^[13]扩展了 Poulin 的线性区域光法^[14]，并将立体角分解为沿着大圆的一维有符号积分。然后使用切

比雪夫多项式近似来评估每个一维积分，将该方法限制到低频冯氏表面。Arvo^[3]开发的辐照度张量方法为被多边形光源点照亮的光滑表面的直接照明提供了准确的分析解决方案。使用张量理论和斯托克斯边缘积分，着色积分沿着多边形光的球形边界边缘被分解为一维有符号积分的和。然后使用绑定到冯氏光滑度 n 的线性时间算法来解析每个边缘积分。实时图形的实际实现，包括水平裁剪，可以在[15]中找到。尽管它拥有很好的准确性，但该方法只适用于冯氏表面，因为它 $O(n)$ 的时间复杂度，导致其在实时渲染应用程序中的使用仅限于弱光滑面。

球形高斯函数(SGs)。SG 是应用于许多环境照明问题的球面函数，例如环境照明或全局照明，随后用于实时区域光照明。Wang 等人^[16]利用 SG 为 SG 近似 BRDF 的积分产物提供了闭合形式表达式来近似球面光。为了处理微面元 BRDF，通过半矢量变换引入的球形翘曲使用单个各向同性的 SG 进行近似。然而，这种方法无法表现出掠射角的细长镜面延伸。Xu 等人^[17]使用各向异性球形高斯(ASG)近似球形翘曲。球面光源照明的实际实现可以在[18]中找到。这些方法有两个主要的局限性。首先，球形翘曲近似假设的光源是各向同性的。第二，由于区域光近似作为 SG，高光滑度表面倾向于显示出高斯形状。与我们方法相似的是，Wang 等人^[19]使用 SG 的分段线性近似来进行多边形可见度评估，将一维边缘积分减少到解析表达式。相反，Xu 等人^[20]在平行平面上使用边缘参数化来导出使用分段线性逼近评估的一维边界积分表达式。两种方法都需要分段解析积分域。此外，它们仅限于各向同性 SG，并且不能处理微面元分布的各向异性。

线性变换余弦。Heitz^[4]等人最近提出的并发的方法 使用夹余弦分布（以下称为 LTC）的线性变换来近似各向同性 BRDF，包括微面元。作为结果，通过对多边形应用逆变换，将着色操作减少到分析形状因子计算。LTC 的确比我们的方案更准确，更简单。然而，匹配 BRDF 需要对入射方向集合和粗糙度值的变换矩阵进行预计算和存储。存储和存储器访问的需求并不总是必要的，特别是在低端 GPU 上。我们的解决方案是完全接卸的，不需要任何预计算步骤或存储。此外，我们的方法可以集成在半矢量空间中，具有更高的自由度。在这个意义上，这两种方法是互补的。

3 我们的方法

我们的方法建立在辐照度张量和 Arvo^[3]开发的边缘积分方法的基础上，我们将在第 4 节简要回顾一下。这种方法代表了几个挑战。

第一个挑战是摆脱 $O(n)$ 时间瓶颈的实时渲染效率。我们通过以更简洁的方式（第 5 节）重写一维积分来解决这个问题，使用合理的峰形积分框架（第 6 节）来确定准确的 $O(1)$ 时间近似。与切比雪夫和傅里叶近似不同，我们的方法仅限于 1 或 2 个有理函数，并且不会受到任何边缘振荡效应的影响。

其次，组合几个轴向余弦波的球形多边形上更复杂的分布的积分是另一个挑战。通过从球面高斯借用算子，我们得到简单的解析表达式（第 7 节），准确地逼近余弦波的多个乘积。最后，最后一个挑战就是克服冯氏光照的 BRDF 的限制，并支持更可信的 BRDF。在微面元理论中发现的半矢量参数化引入了使用非各向同性多边形光源难以预测的球面变形。基于大圆形畸变的观察，我们可以使用多边形方法（第 8 节）以比以前的方法更灵活的方式真实地近似该球形翘曲。

4 辐照度张量和边缘积分

Arvo^[21]开发的辐照度张量为球面 S^2 上多项式的解析积分提供了有用的框架。这些多项式对应于由轴取向余弦波分布描述的 n 阶单项式。该表达式在球面区域 $\Omega_A \subset S^2$ 上的积分产生了关于 \mathbf{r} 轴的 n 阶轴向弯矩的定义：

$$M^n(\Omega_A, \mathbf{r}) = \int_{\Omega_A} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})^n d\mathbf{u} \quad (1)$$

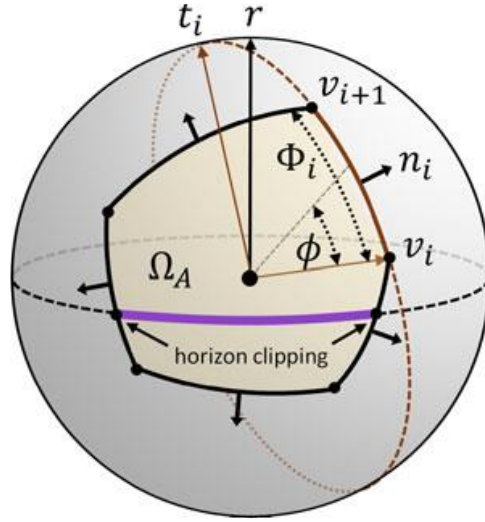


图 2：在球面区域 Ω_A 上朝向 \mathbf{r} 的余弦分布轴的积分在 Ω_A 的边界上减小到一维轮廓积分。给定多边形光源的封闭形式表达式，使用局部基底 $\mathbf{v}_i, \mathbf{t}_i$ 中第 i 个球形边缘的参数化（红色虚线表示此处支持边缘 $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})$ 的大圆）。

使用张量积和斯托克斯定理，Arvo 将轴向弯矩表达式引申为投影面积光边界 Ω_A 处的一维边缘积分。考虑到多边形光源，可以在沿着大圆的球形边缘的参数化之后获得一维积分的闭合形式表达式（参见图 2）。让我们考虑一个 m 边界的多边形。遵循图 2 所示的符号，闭合表达式如下：

$$(n+1)M^n(\Omega_A, \mathbf{r}) = z_n \Omega_A - \sum_{i=0}^m (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}) F(\Phi_i, c_i, \delta_i, n-1) \quad (2)$$

其中：

$$c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad \delta_i = \tan^{-1} \left(\frac{b_i}{a_i} \right)$$

$$a_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}; \quad b_i = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{r},$$

且

$$F(\Phi, c, \delta, n) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1+z_n}{2}} c^{2k+1-z_n} \int_{-\delta}^{\Phi_i-\delta} (\cos \varphi)^{2k+1-z_n} d\varphi \quad (3)$$

其中： $z_n = 1 - (n \bmod 2)$

有关辐照度张量的完整说明以及如何达成这一表达方式，读者应参考[21]和[3]。需要注意的是，与 Arvo 相比，我们使用略微不同的符号来缓解下一节进一步开发的数学推导。在函数 F 上的一维积分的总和和使用复杂度 $O(n)$ 每边缘时间的复现算法以闭合形式进行评估， n 为冯氏指数。在 GPU 上实现，该方法对于弱光滑表面 ($n < 40$) 有效，但是随着冯氏指数的增加，性能下降，并且对于高光滑表面 ($n > 1000$) 而言变得不切实际。为了降低高冯氏指数的评估成本，Arvo 建议一旦达到所需的相对精度，提早终止迭代循环。但是，根据我们的经验，我们观察到严重的性能下降，特别是在表面的掠射视角，是因为达到所需精度而需的大量迭代次数。预测性能的难度使其成为实时渲染考虑的不可行解决方案。在实际的 GPU 实现中，无论冯氏指数如何，边缘积分 F 应理想地在 $O(1)$ 中进行评估。

表 1
本论文中使用的符号

符号	描述
$L(x, \mathbf{v})$	以点 x 为原点向量 \mathbf{v} 为方向散射的辐射
Ω_A	由区域光源 A 维持的区域 \parallel 的立体角
\mathbf{n}	面法线
\mathbf{v}	视线的单位向量
\mathbf{r}	视线折射线的单位向量
\mathbf{h}	由 $(\mathbf{i} + \mathbf{v})/ \mathbf{i} + \mathbf{v} $ 得出的单位半角向量
m	多边形光源的边的数量
\mathbf{v}_i	多边形光源的第 i 个顶点的球面投影
n	余弦指数
\mathbf{n}_i	由 $(\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1})/ \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1} $ 得出的边的向外法线
\mathbf{t}_i	由 $\mathbf{t}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{n}_i$ 得出的边的切线向量
Φ_i	边弧长度
F	球面边缘积分
\tilde{F}	近似球面边缘积分

5 边缘积分的再推导

我们建议通过低成本和准确的解析近似来代替方程（3）的昂贵的边缘积分评估，其允许在任何冯氏光滑度 n 下都能够进行常数时间的评估计算。设置精确的近似要求至少有知道内在特征的被积函数。通常的方法是探测边缘被积函数来提取这些特征。然而，以目前的形式，这需要评估被积函数的总和。我们建议以不同的形式重写边缘积分，以获得更简单和更紧凑的表达。为此，我们首先引入一个函数 f 和一个临时项 q ：

$$f(\varphi, c, n) = \begin{cases} c \cos \varphi & q = \begin{cases} (n-1)/2 & \text{if } n \text{ is odd} \\ n/2 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \end{cases}$$

通过切换和与积分算子，并通过使用上面引入的术语，等式（3）中定义的边积分 F 可以重新写成如下：

$$F(\Phi, c, \delta, n) = \int_{-\delta}^{\Phi-\delta} f(\varphi, c, n) \sum_{k=0}^q (c \cos \varphi)^{2k} d\varphi \quad (4)$$

其和表现为具有通用公式的 x^{2k} 形式的几何级数：

$$\sum_{k=0}^q x^{2k} = (x^{2(q+1)} - 1) / (x^2 - 1)$$

这允许我们在替换临时变量 q 之后消去总和并获得单个函数进行积分：

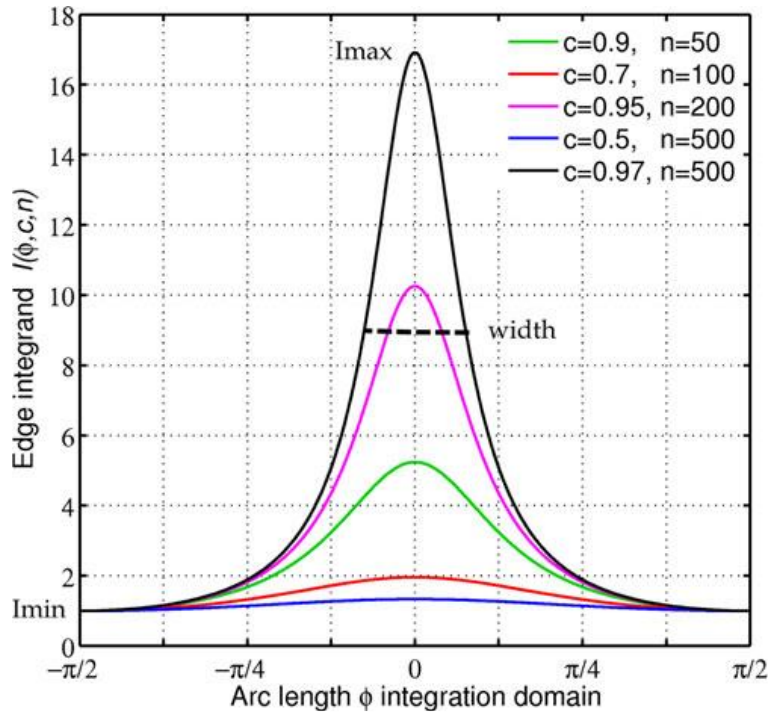


图 3：边缘被积函数 I 展现各种高度和宽度的峰形函数。核心思想是使用具有相同特征的简单且可积分的峰形函数去近似 I 。

$$F(\Phi, c, \delta, n) = \int_{-\delta}^{\Phi-\delta} \frac{(c \cos \varphi)^{n+2} - f(\varphi, c, n)}{(c \cos \varphi)^2 - 1} d\varphi \quad (5)$$

这种重新推导允许在常数时间内评估被积函数。另一个优点是能够平滑地表示非整数值的 n ，特别是对于低与 n 的指数。虽然不存在无限积分，但可以从我们的重新推导中获得准确的分析近似。

6 精确解析近似

让我们考量等式 (5) 中边缘积分的积分项：

$$I(\Phi, c, n) = \frac{(c \cos \varphi)^{n+2} - f(\varphi, c, n)}{(c \cos \varphi)^2 - 1} \quad (6)$$

根据图 3，我们观察到 I 的形状对应于各种高度和宽度的对称峰形函数，这取决于参数 c 和 n ，有最小值为 $\varphi = \pm\pi/2$ ，最大值为 $\varphi = 0$ 。我们的方法的核心思想是使用具有已知解析积分的简单有理表达式描述的峰形函数来近似 I 。近似依赖于将峰形函数映射到被积函数 I 的特征（如最小值，最大值和宽度）的简单拟合过程。

根据等式 (6)，给出最小值和最大值的闭合公式：

$$I_{min}(c, n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad I_{max}(c, n) = \begin{cases} \frac{c^{n+2} - c}{c^2 - 1} & n \text{ odd} \\ \frac{c^{n+2} - 1}{c^2 - 1} & n \text{ even} \end{cases}$$

半宽度估计。宽度被定义为对应于横坐标 x_w 的半最大值上的半宽度 (HWHM)，例如：

$$I(x_w, c, n) = \frac{(I_{max} - I_{min})}{2} - I_{min}$$

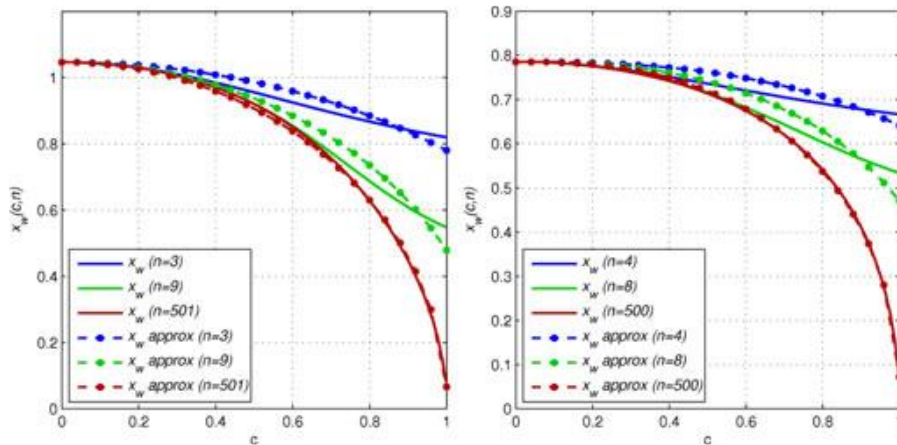


图 4：对于 n 为奇（左）和 n 为偶（右）的各种值，被积函数 I 的半宽度 x_w 近似。

然而，为 x_w 找到一个封闭形式的表达式有点困难。一种方法是将 x_w 的预计算值存储在离散条目 (c, n) 的二维表中。另一种方法是进行解析近似。在实验测量研究之后，我们发现 x_w 可以经验近似如下：

$$x_w(c, n) \approx \begin{cases} \frac{\pi}{3} \sqrt{1 - \left(c - \frac{c}{n}\right)^2} & n \text{ odd} \\ \frac{\pi}{4} \left(1 - \left(c - \frac{c}{n-1}\right)^{2.5}\right)^{0.45} & n \text{ even} \end{cases} \quad (7)$$

即使这是一个粗略估计（图 4），下一节描述的拟合处理将保证我们的近似值将通过点 $(x_w, I(x_w, c, n))$ 。

6.1 泛型积分框架

我们通过一般的峰形函数得出一个用于近似和评估方程（3）的一般框架。为此，我们首先考虑由最小 P_{\min} ，最大 P_{\max} 和宽度 P_w 定义的通用峰形函数 P 。通过调整 P 与 I 的相同特性可以获得 I 的精确近似。拟合过程包括如下定义的缩放，偏移和宽度调整：

$$\tilde{I}(\varphi, c, n) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{P_{\max} - P_{\min}} (P(\varphi, x_w) - P_{\min}) + I_{\min}$$

需要注意的是，为简洁起见，省略了功能参数。我们可以通过将所有常数项合并在一起进一步减少此表达式：

$$\tilde{I}(\varphi, c, n) = s P(\varphi, x_w) + t \quad (8)$$

其中， $s = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{P_{\max} - P_{\min}}$ ， $t = I_{\min} - s P_{\min}$ 。

从而得到对于方程（3）的泛型积分：

$$F(\Phi, c, \delta, n) = s \int_{-\delta}^{\Phi - \delta} P(\varphi, x_w) d\varphi + t \Phi \quad (9)$$

6.2 峰形函数的近似

筛选出具有不确定积分的几个峰形函数 P ，其简单到足以避免耗时的评估运算，并提供对于方程（6）的准确估计。我们通过使用单轴弯矩评估来实现能量守恒的单轴冯氏模型，验证了我们近似值的准确性，并用真实数据比较：

$$L(x, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_A} f_{\text{Phong}}(\mathbf{i}, \mathbf{v})(\mathbf{n}, \mathbf{i}) d\mathbf{i} = \rho_s \frac{n+1}{2\pi} M^n(\Omega_A, r) \quad (10)$$

水平裁剪。水平裁剪考虑到当地区光源有一部分在水平线以下时的能量损失。虽然[3]没有明确地解决裁剪过程，但在[15]中可以找到可行的实现。我们在我们的实现中采用相同的过程。

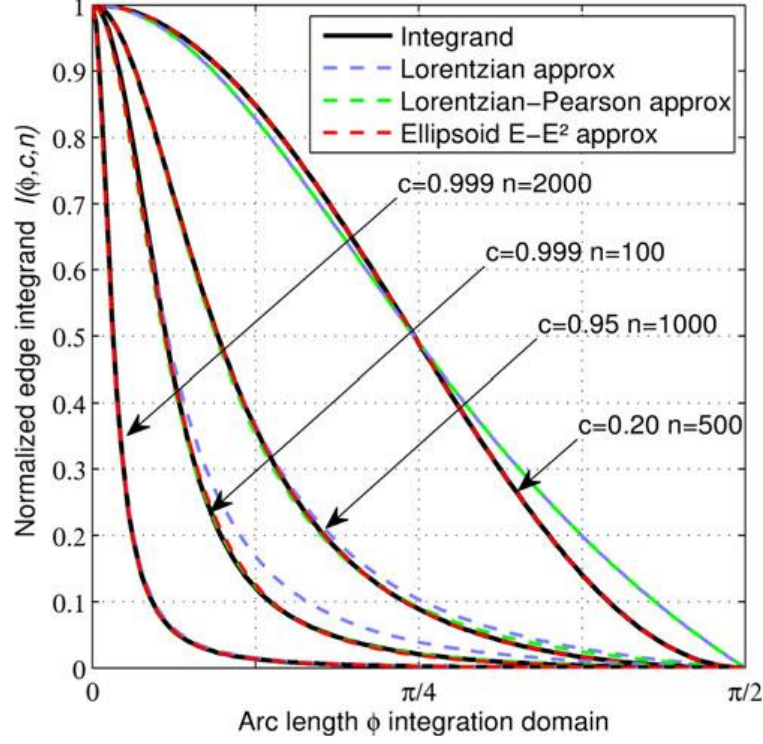


图 5: 使用 c 和 n 的各种值的峰形函数近似边缘被积函数 I 。洛伦兹函数相当好地逼近边缘被积函数 I ，但是在尾部的精度不足。Lorentzian-Pearson 更接近于 I ，但是对于较大的宽度值，它仍然不准确。相比之下，无论函数的宽度如何，椭圆近似都能提供最佳的准确度。

6.2.1 洛伦兹近似

最简单的近似可以通过洛伦兹峰形函数得到：

$$P(\varphi, c, n) = \frac{1}{1 + a\varphi^2} \quad (11)$$

其中， $\int P = \frac{1}{\sqrt{a}} \tan^{-1}(\sqrt{a}\varphi)$ 。

我们使用公式 (7) 来计算大致对应于 I 的最大值的拟合点 $I(x_w, c, n)$ 。求解方程 $I(x_w, c, n) = \tilde{I}(x_w, c, n)$ 产生未知参数 a 的分辨率：

$$a = \frac{1 - y_w - \frac{4x_w^2}{\pi^2}}{y_w x_w^2}$$

其中， $y_w = \frac{I(x_w) - I_{\min}}{I_{\max} - I_{\min}}$ 。

通过将公式 (9) 中的积分项替换为等式 (11) 中定义的积分项，我们获得

了在常数时间内评估的 F 的解析近似。

$$\tilde{F} = \frac{s}{\sqrt{a}} \left(\tan^{-1}(\sqrt{a}(\Phi - \delta)) - \tan^{-1}(-\delta\sqrt{a}) \right) + t\Phi$$

值得注意的是 $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \bmod \pi$ 这个表达式可以进一步减少为单个反正切评估以节省 GPU 指令。

$$\tilde{F} = \frac{s}{\sqrt{a}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{a}\Phi}{1 + a(-\delta)(\Phi - \delta)} \right) \bmod \pi + t\Phi$$

(12)

误差分析。图 6 表明，无论表面的粗糙度如何，洛伦兹近似值都相当准确，接近真实参照情况。然而，当增加整体亮度时，我们可以观察到突出形状周围的轻微漏光最为显着。仔细观察图 5 中的洛伦兹近似结果，可以得知误差是由于对函数 I 尾部的过高估计而产生的。

6.2.2 洛伦兹-皮尔森 VII 方法

通过将洛伦兹函数与具有较短尾部的第二峰值函数组合可以找到尾部周围的更好的近似。这个想法是通过这两个近似来包含尾部区域中的被积函数，并从尾部挑选的值中找到混合因子。第二峰函数由对应于提高到功率 m 的洛伦兹函数的 Pearson VII 函数定义。我们选择 $m=2$ ，其具有不确定的积分，足以避免耗时的计算。

$$P = \left(\frac{1}{1 + b\varphi^2} \right)^2$$

且

$$\int P = \frac{\varphi}{2(b + \varphi^2)} + \frac{\tan^{-1}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{b}}\right)}{2\sqrt{b}}$$

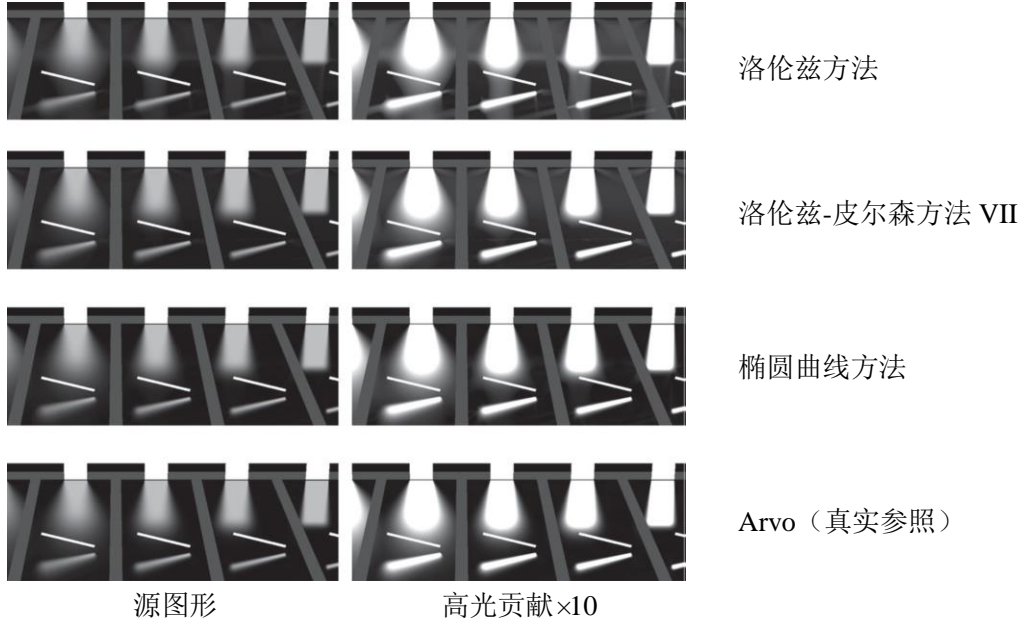


图 6: 我们的近似值与真实参考图像的比较。右列描绘了左侧图像的缩放版本, 以使差异可见。虽然洛伦兹方法的泛光溢出清晰可见、洛伦兹皮尔森方法几乎不可见, 但椭圆近似的缩放版本的泛光溢出几乎不显眼, 难以被察觉。

Pearson VII 功能的顶部部分完全类似于洛伦兹功能, 而且底部部的分尾部较短。然而, 找到一个 b 参数, 如 $\tilde{I}(x_w) = I(x_w)$, 需要分辨率为涉及复杂计算的四度多项式方程。幸运的是, 通过重新使用为洛伦兹近似计算的参数, 可以大大简化 b 的计算并节省 GPU 计算时间。在我们的实验结果当中, 我们发现 $b \approx \frac{a}{2}$ 总是包含目标被积函数 I 。

线性调和。将 I_p 调整到与 I 相同的宽度给出了另一个近似值, 其低估了尾部中的 I , 同时保留了其上的拟合。然后, 最佳近似值位于两个函数之间, 可以使用简单的线性混合操作找到:

$$\tilde{I}_{LP}(\varphi) = \alpha \tilde{I}_L(\varphi) + (1 - \alpha) \tilde{I}_p(\varphi) \quad (13)$$

其中:

$$\alpha = \frac{\tilde{I}_p(x_{tail}) - I(x_{tail})}{\tilde{I}_p(x_{tail}) - \tilde{I}_L(x_{tail})}$$

线性调和运算需要在位于函数尾部的位置 x_{tail} 处评估被积函数 I 。然而, 为 I 找到闭合表达式表示与半宽度估计的困难相同。因此, 我们再次使用经验方法进行近似:

$$x_{tail} \approx x_w + 0.3946 x_w(0) \left(1 - \left(1 - \frac{x_w}{x_w(0)} \right)^{12} \right) \quad (14)$$

进一步精确近似。洛伦兹-皮尔森近似极大地提高了镜面高光的总体精度，并抑制了大多数可观察到的伪影。尽管如图 6 所示，我们仍然在镜面高光区域以外的区域存在微弱的泛光溢出。当峰形 I 非常大时，即当值 c 小时，会发生这些溢出。仔细看看图中的细节，图 5 显示了在集成域边界处的近似值被高估了。特别是，当 $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 时，一阶导数为零，则洛伦兹-皮尔逊近似则为零。

6.2.3 椭球近似

使用基于椭球的峰形函数可以获得更好的精确度，特别是在边界上。这些函数就像洛伦兹方法具有令人感兴趣的特性，但在 $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 时存在一个零一阶导数。

$$\text{椭球形式: } P_E = \frac{a}{1+(a-1)\cos^2(\varphi)} \quad (15)$$

$$\text{不定积分: } \int P_E = \sqrt{a} \tan^{-1} \left(\frac{\tan \varphi}{\sqrt{a}} \right). \quad (16)$$

椭球平方函数式:

$$P_{E^2} = \left(\frac{b}{1 + (b-1)\cos^2(\varphi)} \right)^2$$

$$\int P_{E^2} = \frac{\sqrt{b}}{2} (b+1) \tan^{-1} \left(\frac{\tan \varphi}{\sqrt{b}} \right) - \frac{b}{2c} (b-1) \sin(2\varphi)$$

我们遵循与 6.2.1 节和 6.2.2 节中描述的完全相同的步骤，以将 I_E 和 I_{E^2} 拟合为 I ，并使用线性调和找到最佳近似值。第一个近似项 I_E 的参数 a 对应于:

$$a = \frac{y_w(1 - \cos^2(\varphi))}{\cos^2(\varphi)(1 - y_w)} \quad (18)$$

对于 I_{E^2} ，参数 b 大致如下:

$$b \approx a \left(2.1 + 1.28 \frac{x_w}{x_w(0)} \right)$$

近似精确度。如图 6 所示，无论的不明显伪像的功能的宽度如何，椭球近似都能提供最佳的精度。

表 2

在 NVIDIA GTX 580 和 GTX 980Ti 上，每个边缘的渲染时间以毫秒为单位，具有三峰形状近似的呈现精度

方法	指数	时间/边 (ms)		RMSE
Arvo（参照）	$n=100$	13.6	0.41	n/a
	$n=500$	49	1.57	n/a
	$n=5000$	476	9.8	n/a
洛伦兹方法	$n=100$	0.25	0.12	0.004354
	$n=500$	0.25	0.12	0.005506
	$n=5000$	0.25	0.12	0.004128
洛伦兹-皮尔森方法	$n=100$	0.40	0.125	0.003641
	$n=500$	0.40	0.125	0.003094
	$n=5000$	0.40	0.125	0.002551
椭球方法	$n=100$	0.47	0.127	0.001500
	$n=500$	0.47	0.127	0.001652
	$n=5000$	0.47	0.127	0.001014

6.3 性能与精确度分析

我们在 GPU NVIDIA GTX 580 上实现和测试了我们的近似结果。表 2 提供了每个边缘的渲染时间（以毫秒为单位）以及使用归一化 RMSE 的渲染精度测量。考虑到以 720p 分辨率为代表最的情况处理，对所有屏幕像素的渲染进行了测量。需要注意的是，时间也包括了 \mathbf{n} 周围和 \mathbf{r} 周围的双水平裁剪的处理。

正如所预期的那样，使用 Arvo 解决方案获得的渲染时间随着指数 n 而增加，而我们的近似值则保持不变。洛伦兹逼近实现了最佳性能，而椭球方法是最准确的，与真实参考数据无明显差异，并且 GPU 耗时切线评估引入了较小的计算开销。大多数情况的洛伦兹近似可以满足诸如游戏等高性能要求的应用。对于高质量要求苛刻的应用，如生产渲染前景照明，洛伦兹-皮尔森或椭球近似是最好的选择。

7 多轴评估

辐照度张量允许使用张量产物的分解来评估多个轴。Arvo^[3]提出了由 \mathbf{n} 和 \mathbf{l} 的两个余弦波的乘积描述的双轴力矩的闭合形式表达式。然而，组合几个轴的任意次序的泛化是相当困难的，涉及复杂的数学表达式并且需要每轴时刻评估。为了减少问题的数学复杂性，我们证明了余弦波的乘积可以通过单独的余弦波精确近似，为多轴力矩评估提供了可行而有效的方法。

$$\int_{\Omega_A} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1)^{n_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2)^{n_2} \dots (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_l)^{n_l} \approx \int_{\Omega_A} \mu (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})^n \quad (19)$$

Meunier 等人^[22]首先提出了这样的数学降解近似方法。他们的方法使用耗时的 L_2 最小化技术来确定逼近两个余弦波的乘积的参数 (μ, r, n) 。将结果预先计算并存储在表 $(n_1, n_2, \angle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))$ 样本的大集合中。在内存占用和缓存效率方面, 处理表并不总是令人满意的, 特别是在低端 GPU 移动设备上。为了避免这个问题, 我们提出一种快速的分析方法, 不需要任何预计算步骤或存储器。

7.1 余弦叶积近似方法

我们的方法是从简单的观察结果构建的, 即余弦叶和球形高斯在形状和卷积代数项方面有许多相似之处。SG 是用于近似许多照明问题的实用数学工具。简单回顾一下, SG 是一个具有以下形式的球面函数:

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \lambda, \mu) = \mu e^{\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - 1)}$$

SG 的一个有趣的属性是两个 SG 的积是另一个 SG, 使用简单的分析公式计算。对于与 SG 的一致符号, 我们引入球面函数 C 来表示具有幅度 μ 的余弦波。

$$C(\mathbf{u}, \mathbf{r}, n, \mu) = \mu (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})^n \quad (20)$$

事实证明, 在大多数情况下, 余弦叶可以非常接近于 SG。

$$C(\mathbf{u}, \mathbf{r}, n, \mu) \approx G(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \lambda, \mu) \quad (21)$$

我们还观察到, 由于形状相似, 两个余弦波的乘积与两个 SG 的乘积密切相关。我们的想法是从 SGs 借用乘积运算符, 从两个余弦波的积中得出一个单独的余弦叶近似值。我们的方法在于映射每个余弦叶上的 SG, 并评估 SG 域中积的参数。然后, 我们通过将得到的 SG 上映射余弦叶来将结果反演到余弦叶段。

余弦波从(到)SG 的映射是通过求解诸如 C 和 G 的等式具有相同的半高宽度来实现的。这些参数的计算精确如下:

$$\lambda = \frac{-\ln 2}{\sqrt[n]{2} - 1}; \quad n = \frac{-\ln 2}{\ln \frac{-\ln 2 + \lambda}{\lambda}} \quad (22)$$

然后将两个余弦叶 C1 和 C2 的乘积近似如下:

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{r}_1, n_1, \mu_1) C_2(\mathbf{r}_2, n_2, \mu_2) &\approx G_1(\mathbf{r}_1, \lambda_1, \mu_1) G_2(\mathbf{r}_2, \lambda_2, \mu_2) \\ &\approx G(\mathbf{r}_p, \lambda_p, \mu_p) \end{aligned}$$

$$\approx C(\mathbf{r}_p, n_p, \mu_p)$$

其中：

$$\mathbf{r}_p = \frac{\mathbf{p}_m}{\|\mathbf{p}_m\|}; \quad \mathbf{p}_m = \frac{\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\lambda_p = (\lambda_1 + \lambda_2) \|\mathbf{p}_m\|$$

$$\mu_p = C_1(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_1, n_1, \mu_1) C_2(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_2, n_2, \mu_2)$$

请注意，我们不对 SG 进行明确评估，只能借用它的乘积运算符来推导出我们的近似值。唯一的区别在于计算与 μ_p 上的两个余弦叶的乘积完全一致的幅值 \mathbf{r}_p 。注意，可以采用相同的推理来通过借由[17]中导出的算子近似各向异性余弦叶的乘积。我们把这个推论的工作留在以后进行。

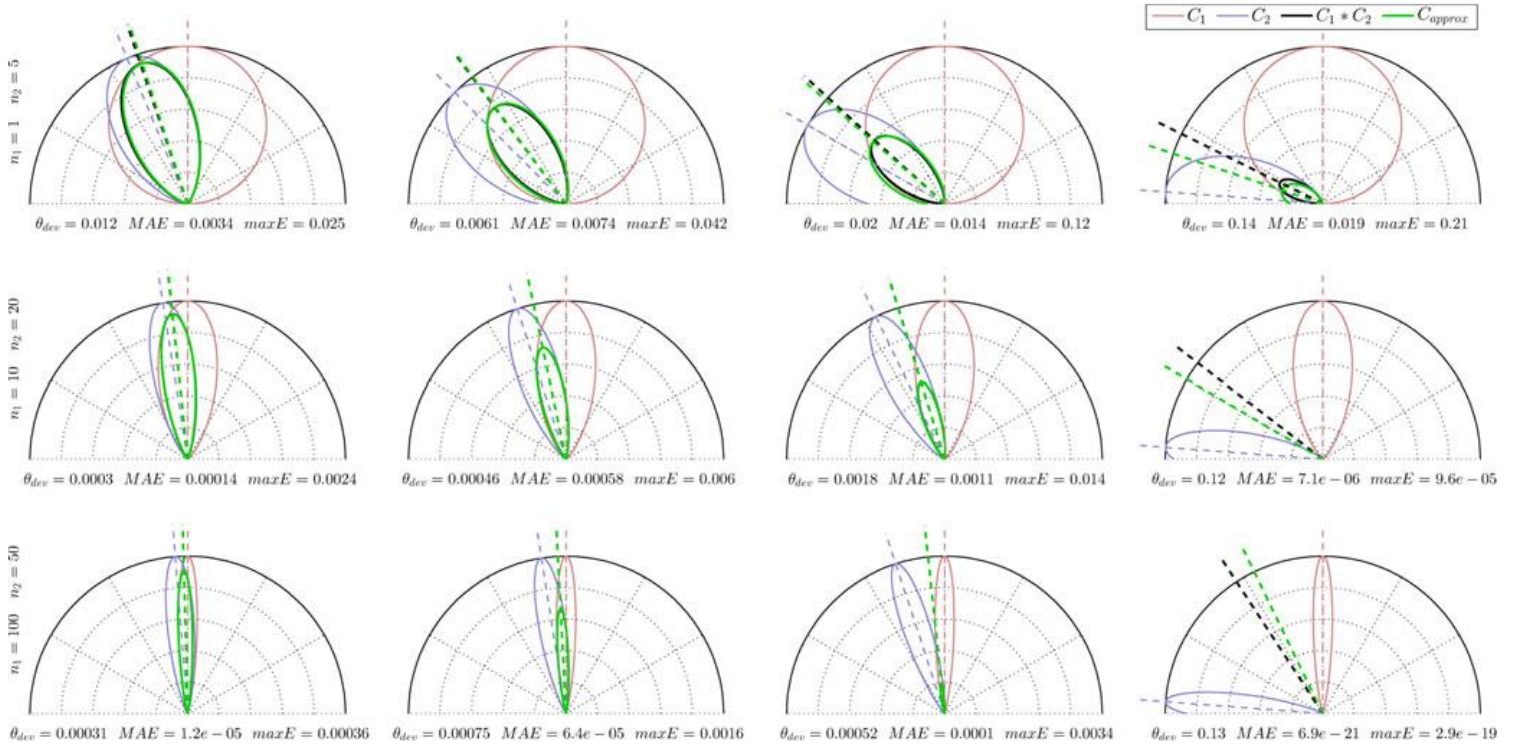


图 7：按照 7.1 节中给出的各种偏心和角度配置的公式，我们的分析近似（绿色）的两个余弦波（红色和蓝色）的乘积（黑色）的极地图。在大多数情况下，我们的单瓣近似与两个波瓣的乘积密切相关。当两个裂片相隔较远时，出现关键情况。在这种情况下，我们观察到两个波瓣的不对准，但是由于产品的幅度较低，故误差仍然不明显，如图所示。

7.2 结果和误差分析

我们比较了我们的叶积近似 C 与 C_1 和 C_2 的精确乘积，用于极坐标中的各种指数和角度（见图 7）。在大多数情况下，我们的单余弦叶近似与两个余弦波的乘积相匹配。然而，当两个波瓣之间的角度非常大时，我们观察到理论乘积与近似值

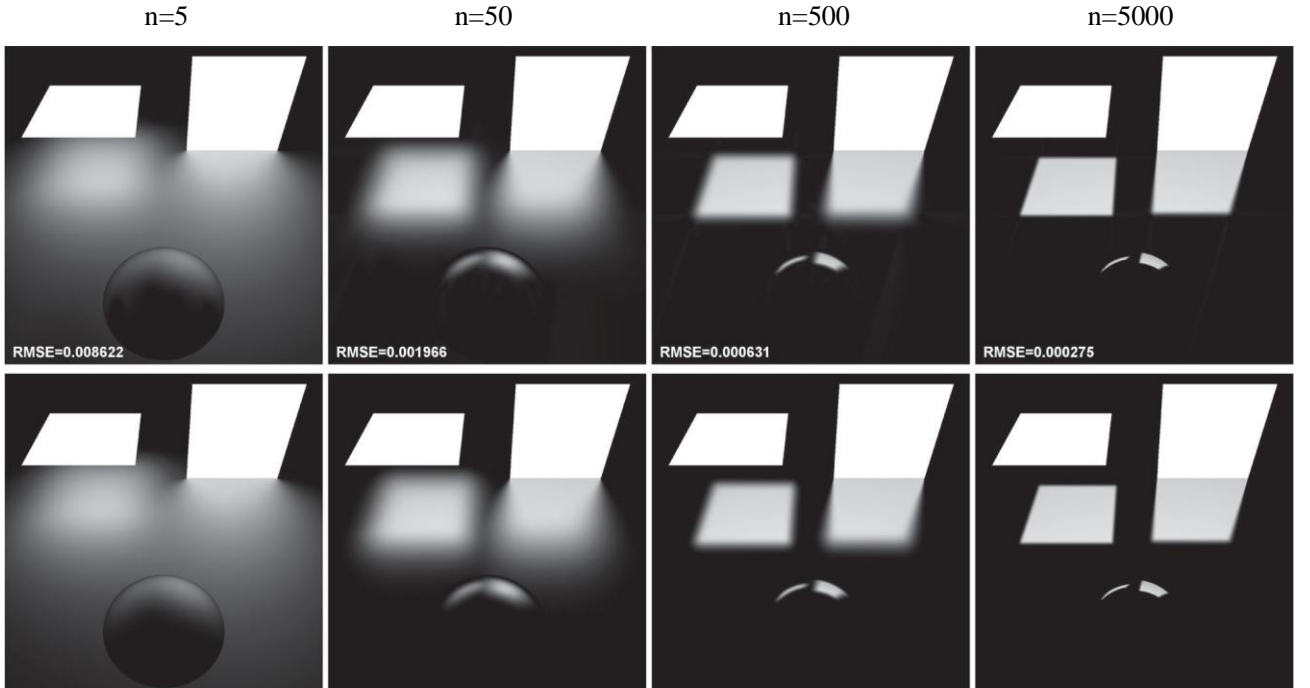
之间的偏差。尽管在这种情况下，由产品的极小值平衡误差，接近 0，除非两个波瓣的指数低。

双轴冯氏实现。我们通过实现能量守恒的双轴冯氏模型进一步验证了我们的方法。根据 7.1 节给出的公式，模型可以通过单轴向弯矩近似如下：

$$\begin{aligned}
 L(x, \mathbf{v}) &= \rho_s \frac{n+2}{2\pi} \int_{\Omega_A} (\mathbf{i}, \mathbf{r})^n (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) d\mathbf{i} \\
 &= \rho_s \frac{n+2}{2\pi} \int_{\Omega_A} C_1(\mathbf{i}, \mathbf{r}, n, 1) C_2(\mathbf{i}, \mathbf{n}, 1, 1) d\mathbf{i} \\
 &\approx \rho_s \frac{n+2}{2\pi} \int_{\Omega_A} C(\mathbf{i}, \mathbf{r}_p, n_p, \mu_p) d\mathbf{i} \\
 &\approx \rho_s \mu_p \frac{n+2}{2\pi} M^{n_p}(\Omega_A, \mathbf{r}_p)
 \end{aligned}$$

由于由余弦乘积参数化和轴向弯矩归一化引起的新的归一化因子，所以这种近似值是能量守恒的。

如图 8 的图像，示出了双轴冯氏近似与真实值的比较。无论表面的冯氏指数或角度配置如何，视觉差异都是不明显的。如预测的那样，当两个叶片的角度较大时出现的错误被产品的低劣度视觉上消除。



（上排：我们的结果；下排：对照数据）

图 8：比较双轴冯氏近似（上排）与光线跟踪的真实数据（下排）。

8 扩展至微表面 BRDF

对冯氏镜面 BRDF 计算的限制是辐照度张量的一个严格限制。大多数生产渲染器和现代实时渲染引擎利用基于微面元理论的物理基础的 BRDF。用微面元 BRDF 渲染的粗糙表面呈现更长的镜面延伸，更能代表真实现象。理论的核心依赖于将微观几何变化与入射辐射和观察方向联系起来的半矢量 \mathbf{h} 的定义。另一个关键方面是正态分布函数 $D(\mathbf{h})$ 的定义，负责镜面高光的形状和亮度。在本节中，我们展示了使用辐照度张量理论可以很好地近似微面元的 BRDF。结合我们的近似，我们提出了一种方法，可以准确地表示突出形状，特别是在掠角观察到的细长镜面延伸，如通过微面元理论预测的，并且接近真实的质量。

为此，我们考虑在半矢量空间中表示的轴向弯矩。按照等式 (1)，并且在适当归一化之后，这对应于众所周知的 Blinn-Phong 分布： D_{Blinn} 。

$$\frac{n+2}{2\pi} M^n(\Omega'_A, \mathbf{n}) = \int_{\Omega'_A} \frac{n+2}{2\pi} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{n})^n d\mathbf{h} = \int_{\Omega'_A} D_{\text{Blinn}}(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \quad (23)$$

给定 $d\mathbf{h} = d\mathbf{i} / (4(\mathbf{h} \cdot \mathbf{v}))$ ，这相当于积分：

$$\int_{\Omega'_A} \frac{D_{\text{Blinn}}(\mathbf{h})}{4(\mathbf{h} \cdot \mathbf{v})} d\mathbf{i} \quad (24)$$

将半矢量空间中的轴向弯矩积分需要变换球面区域 Ω'_A 的先验知识。一个天真的方法是在执行上边界边缘的顶点的半向量变换，并评估 1D 积分上新转换的边缘。但是如图 9 所示，由半矢量参数化引入的翘曲变形引起的镜面高光变形。另一种可能性是对每个边缘进行采样，但是它需要耗时的每边缘评估。以前的方

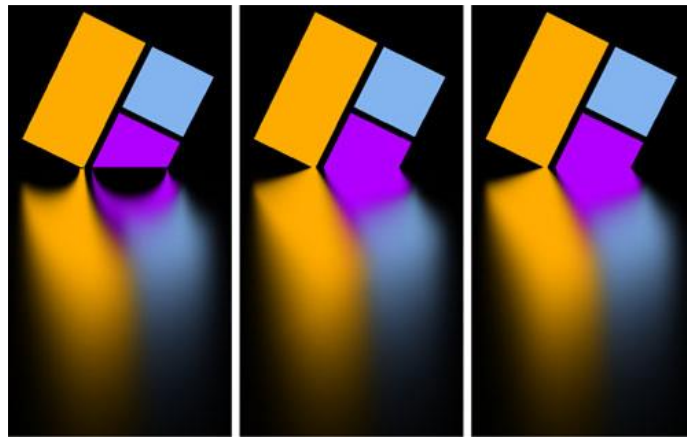


图 9：左：投影在半矢量空间中的区域光的顶点引入失真。中间：我们的边缘分割策略通过最好地近似每个阴影像素的球面翘曲来克服变形，仅使用一个分割。右：参考图像。

法，如[16]尝试使用各向异性内核近似这种失真，但它假设完全各向同性的光发射器只适合球面光。在我们的方案的情况下，多边形区域灯不限于特定的形状。

8.1 近似半矢量扭曲变形

在可以应用轴向力矩计算的半矢量空间中寻找合适的边缘参数化并不简单。然而，可以找到很好的近似值。直观地，我们观察到，在正常 \mathbf{n}_i 接近表面法线 \mathbf{n} 的情况下，变形在掠角处达到最大值。

边缘分割策略。为了给出我们的方法的直觉，让我们考虑由球形边缘维持的大圈 gc ， gc' 是一个向量变换的一半。如果我们看到图 10 中半矢量变换引入的失真，我们观察到 gc' 朝向 gc 的法线弯曲，最大高度位于 p' 处，并与观察向量 \mathbf{v} 对齐。一个简单的解释是， gc 与观察向量 \mathbf{v} 产生的最广角度见于 p 。换句话说，就是在 \mathbf{r} 的方向。这个简单的观察是我们边缘分割策略的核心思想。在 p 处选择分割位置将始终确保在半矢量空间中获得边缘的最大失真。这种方法的优点是只需要单次拆分。此外，如果位置 p 位于球形边缘之外，则不需要分割，并且我们的解决方案的计算开销大大降低。算法 1 描述了全缘分割过程。

算法 1: 边缘分割处理

```

for 每个阴影点和每个球形边缘 $v_i, v_{i+1}$  do
    直接将 $\mathbf{r}$ 投影到边缘平面
    其中，法向量 $\mathbf{n}_i$ ，点 $\mathbf{p}$ 
    将 $\mathbf{p}$ 归一化
    处理顶点的半变换
     $v_i, v_{i+1} \rightarrow v'_i, v'_{i+1}$ 
    if  $\mathbf{p} \in v_i, v_{i+1}$  then
        在点 $\mathbf{p}$ 处分割边缘
        处理 $\mathbf{p}$ 的半变换 $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$ 
        为 $v'_i, \mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}, v'_{i+1}$ 进行边界积分的评估
    else
        /* 不进行分割 */
        为 $v'_i, v'_{i+1}$ 进行边界积分的评估

```

8.2 微面元镜面分布近似

在文献中发现的广泛的微量分布函数可以通过在球形区域上的轴向力矩相当好地近似和集成。

Beckmann 近似。 Beckmann 分布是一个峰值形状，大致对应于粗糙度值 $m < 0.5$ 的 Blinn-Phong 分布。通过将 Beckmann 粗糙度 m 映射到余弦幂指数 n ，可

以获得使用单个轴向力矩的体积分近似。注意， $m \approx \frac{2}{m^2} - 2$ ，我们观察到：

$$\int_{\Omega'_A} D_{\text{Beckmann}}(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \approx \frac{1}{\pi m^2} M^n(\Omega'_A, \mathbf{n}) \quad (25)$$

GGX 近似。 GGX / Towbridge-Reitz 分布[23]对应于椭圆峰形状函数，产生更平滑的镜面高光，更好地匹配实际材料的实验测量。在与 Blinn-Phong 的区别中，分布具有更平滑的衰减，当 $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = 0$ 时，在域绑定处收敛到 c_2 。为了模拟这种行为，我们将分布分为一个常数项 $c_0 = c^2 c_0$ ，一个对应于 GGX 分布的一个叶项被向下移动到 0。恒定项的积分回复到半矢量域中由面积光持续的立体角的计算。第二项的积分由 \mathbf{n}_1 和 \mathbf{n}_2 的两个轴向力矩的加权和近似，其中 \mathbf{n}_2 与 \mathbf{n}_1 相比具有更宽的偏心率，以再现 GGX 平滑度。

$$\int_{\Omega'_A} D_{\text{GGX}}(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \approx \frac{1}{\pi} \left(c_0 \Omega'_A + c_1 \frac{n_1 + 2}{2} M^{n_1}(\Omega'_A, \mathbf{n}) + c_2 \frac{n_2 + 2}{2} M^{n_2}(\Omega'_A, \mathbf{n}) \right) \quad (26)$$

所得到的积分被归一化，使得 $\int D \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = 1$ ，因此相应地选择权重 c_1 和 c_2 ，例如 $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ 。使用最小二乘法，我们发现：

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{2}{c^2} - 2 \\ n_2 &= n_1 / 10 \end{aligned} \quad \text{其中权重: } \begin{aligned} c_1 &= 0.7(1 - c^2) \\ c_2 &= 0.3(1 - c^2) \end{aligned}$$

提供一个体面的近似，无论偏心参数 c 。

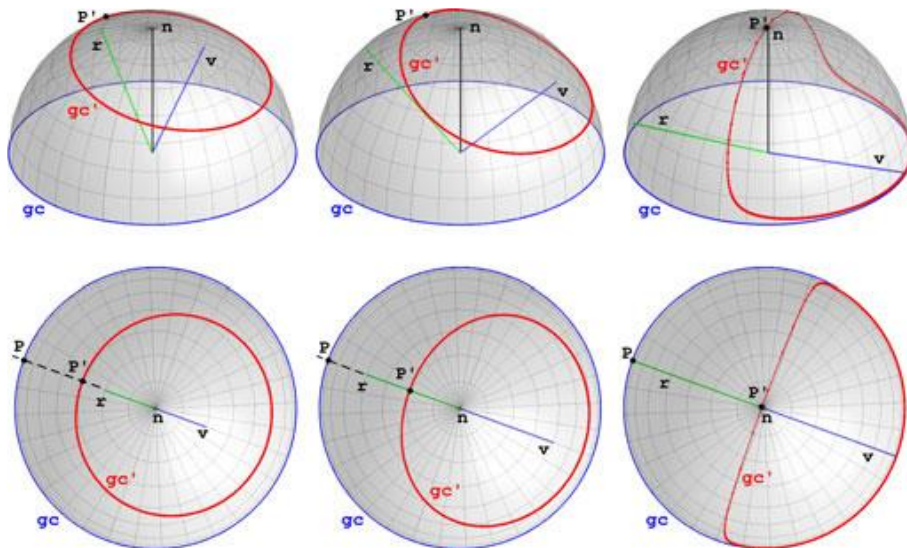


图 10: 通过半矢量变换产生的大圆 gc 的球面失真 gc' 的图示。在 \mathbf{p}' 处，对应于点 \mathbf{p} 的变换，与观察反射 \mathbf{r} 对准，失真获得其放牧视角的最大值。

表 3

每条边的计算时间（720p，全覆盖+裁剪）

测冯氏光照和微面元分布的对比

高光分布	GTX 580	GTX 980Ti
冯氏光照	$\times 1$	$\times 1$
Blinn 冯氏光照	$\times 1.26$	$\times 1.36$
GGX	$\times 2.25$	$\times 1.92$

建模更复杂的分布。直接集成在半矢量空间中可以使各向异性特性的微弧面的阴影得以实现。这种各向异性分布[24] [25]可以通过沿着所需轴缩放/拉伸多边形来获得。通过最佳拟合 LTC 矩阵[4]或分析结合几个轴可以在数值上建模更复杂的分布，如我们在第 7.1 节中所述。

8.3 结果和改进提升

我们在 GPU NVIDIA GTX 580 和 GTX 980Ti 上实现和测试了我们的解决方案。表 3 给出了与 Phong 分布相比的时间开销。与 Phong 相反，在 n 周围仅执行一次地平线剪辑。因此，结合我们的低成本边缘分割方法，我们的解决方案具有有限的计算开销。

我们还将我们的解决方案与使用光线追踪解决方案获得的参考图像进行了比较。如图 11 所示，在大多数情况下，通过微面元理论预测的细长镜面延伸线以接近参考的精度被忠实地再现。然而，在某些粗糙度和几何结构下，我们可以注意到缺乏亮度，特别是当观察反射接近边缘边界时，以及当表面粗糙时（见图 13）。随着粗糙度达到 0 ($n \rightarrow \infty$)，这种现象趋于消失。这些伪影是由于半对角空间中的理论立体角的低估导致的。如图 12 所示，我们的边缘分割策略不能捕获由边缘维持的大圆的重要失真。

平衡边缘分割策略。为了减少视觉伪影，我们提出了一个简单的平衡策略，捕获半转大圆的拐点。这个想法是平衡 v_i, v_{i+1} 的中点 \mathbf{p}_m 和半变换之前的分割位置 \mathbf{p} 之间的分割位置。平衡启发式取决于表面粗糙度和 \mathbf{v} 与正常 \mathbf{t}_i 的边缘平面之间的角度。平衡策略总结在算法 2 中。

算法 2: 平衡边缘分割处理

$$m = \sqrt{2.0/(n+2)}$$

$$k = 2|\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{v}|$$

$$\mathbf{p}_m = (v_i, v_{i+1})/\|v_i, v_{i+1}\|$$

$$\mathbf{p} = (1 - k m)\mathbf{p} + k m \mathbf{p}_m$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}/\|\mathbf{p}\|$$

如图 13 所示，平衡策略克服了大多数视觉伪像。主要优点是不需要额外的分割。然而，在某些极端的情况下，单分割方法在极端掠角时仍然显示出一些差异，或者当光源非常大时仍然显示出一些差异。

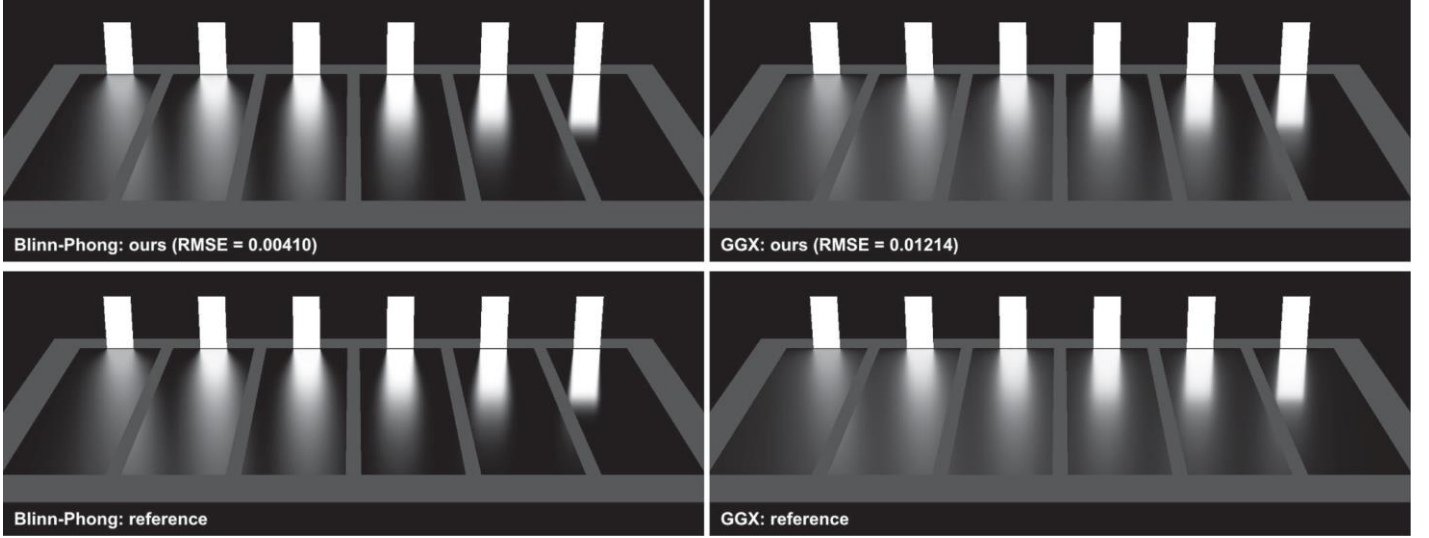


图 11：使用我们的分析近似与参考光线追踪解决方案相比，使用 Blinn-Phong 和 GGX 微面元分布进行表面点亮。

9 对球形和圆盘形光源的支持

我们迄今为止开发的分析近似仅限于多边形发光体。基于分析形状（如球形和光盘）的发光体，代表了一类有趣的区域光，可以扩展发光体的表示。注意，Arvo^[21]提出了另一种封闭形式表达式来评估球面光轴上的轴向弯矩。然而，解决方案是基于在 $O(n)$ 时间内解决的另一个参数化和复现评估。此外，该方法不能处理不均匀的缩放操作。

我们提出一种简单的方法来通过球面和光盘区域灯遮挡镜面。我们的方法利用我们近似的多边形方法，支持部分可见光和非均匀缩放操作。

9.1 旋转多边形策略

我们的方法灵感来自高速旋转产生的光学错觉。图 14 所示的想法是通过考虑围绕单位圆盘法线轴线的 k 边多边形的旋转来评估球体或圆盘的幻觉，并评估所得多边形上的轴向力矩。在每个阴影点计算多边形的方向 θ_m ，理论上应该如此选择：

$$\theta_m = \arg_{\theta} \max M^n(P(\theta), \mathbf{r})$$

圆盘形区域光源。确定最佳方向 θ_m 是一个非常重要的最大化问题，这取决于几个难以实时解决的参数。然而，根据实验测量，我们注意到，当粗糙度达到 $0(n \rightarrow \infty)$ 时，发现朝向 \mathbf{r}' 的 (p, \mathbf{r}) 线与圆盘平面的交点的最佳取向。相反，当粗糙

度变为1($n \rightarrow 1$)时, p' 的最佳取向朝向 p' 在 p 平面上的垂直投影。通过在由粗糙度 m 驱动的两个位置之间建立线性混合, 我们可以获得最佳取向的体面近似。另一个问题是多边形和圆盘之间的面积差异导致当表面粗糙时亮度低估。由余弦偏心度开始, 当表面高度镜面时, 差异减小。为了减少所有情况的差异, 我们线性缩放多边形, 如粗糙度为 0 的 $\text{area}(P) = \text{area}(D)$ 。

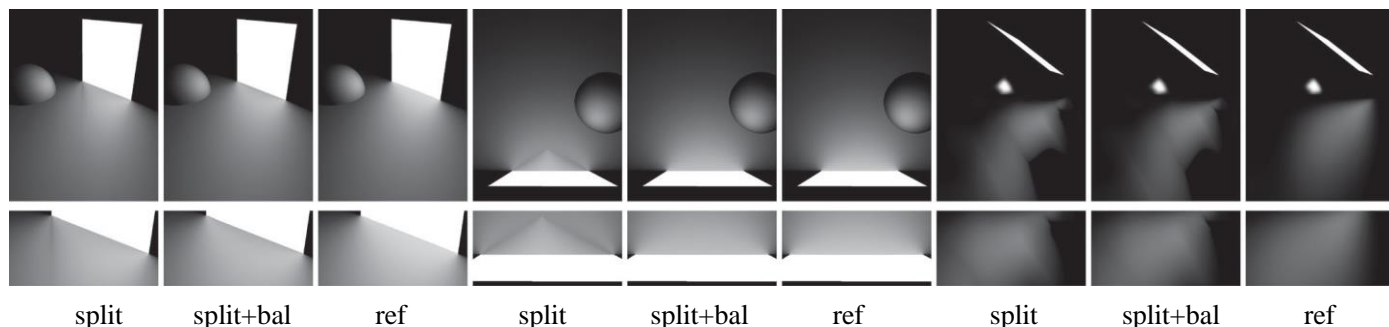


图 13: 在某些粗糙度和几何构型下, 边缘分割策略可能会出现一些视觉伪像(分裂)。由于简单的平衡启发式(split+bal), 这些工件大大减少(左+中间)。然而, 在某些极端的配置中, 一些视觉差异仍然是可以察觉的(右)。

球形区域光源。对于球体光, 该过程与光盘大致相同。主要区别在于光盘的方向, 面对阴影点 p 。此外, 将比例因子 s 应用于单位盘以考虑由单位球维持的立体角(参见图 15)。对于这两个发光体, 在方位估计之前, 将 p 和 r 转换成区域光局部空间简单地支持非均匀缩放操作。然后将所得到的多边形反向转换为世界空间。算法 3 中描述了从光盘和球面区域灯评估阴影的完整过程。

算法 3: 圆盘和球形光源着色

```

 $m = \sqrt{2.0/(n + 2)}$ 
 $s = 1$  /* 默认圆盘大小 */
for 每一个着色点  $p$  do
    /* 处理非归一缩放 */
    对  $p$  和  $r$  进行区域光本地空间的变换
    if 是球体 then
         $\mathbf{n}_D = \text{normalize}(\mathbf{p})$ 
         $d = \text{length}(\mathbf{p})$ 
         $s = d/\sqrt{d^2 - 1}$ 

         $k = |\mathbf{n}_D \cdot \mathbf{p}|$ 
         $s = s(1 - m k + m k \sqrt{\pi/2})$ 

         $\mathbf{r}' =$  在  $r$  方向与盘平面交叉

```

$\mathbf{p}' = p$ 对光盘平面的正交投影

$\mathbf{v}_0 = s \text{ normalize}((m-1)\mathbf{r}' + \mathbf{p}')$

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 \times \mathbf{n}_d$

$\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_0$

$\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1$

反变换 $v_0 \rightarrow v_3$ 至世界空间

计算多边形上的轴向弯矩 $v_0 \rightarrow v_3$

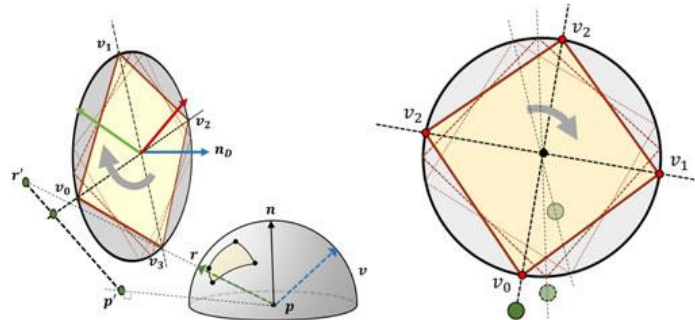


图 14: 我们纺纱方法的描述。考虑在光盘法线 \mathbf{n}_d 附近旋转 k 边多边形 P 来给出光盘的幻觉。选择单位光盘中 P (这里为四边形) 的方向为 $\arg_{\theta} \max M^n(P(\theta), \mathbf{r})$ 。然后通过评估所得多边形 P 上的轴向力矩来估计点 p 处的阴影。

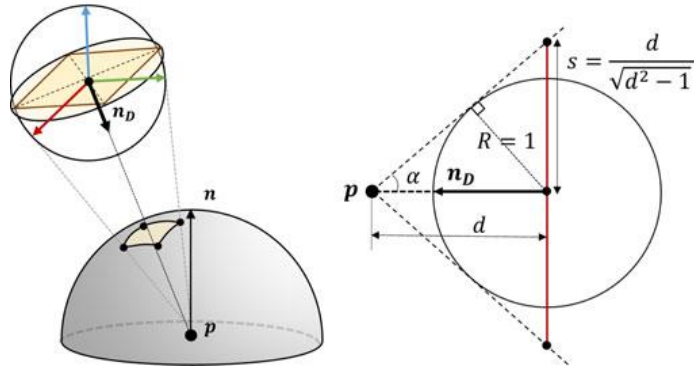
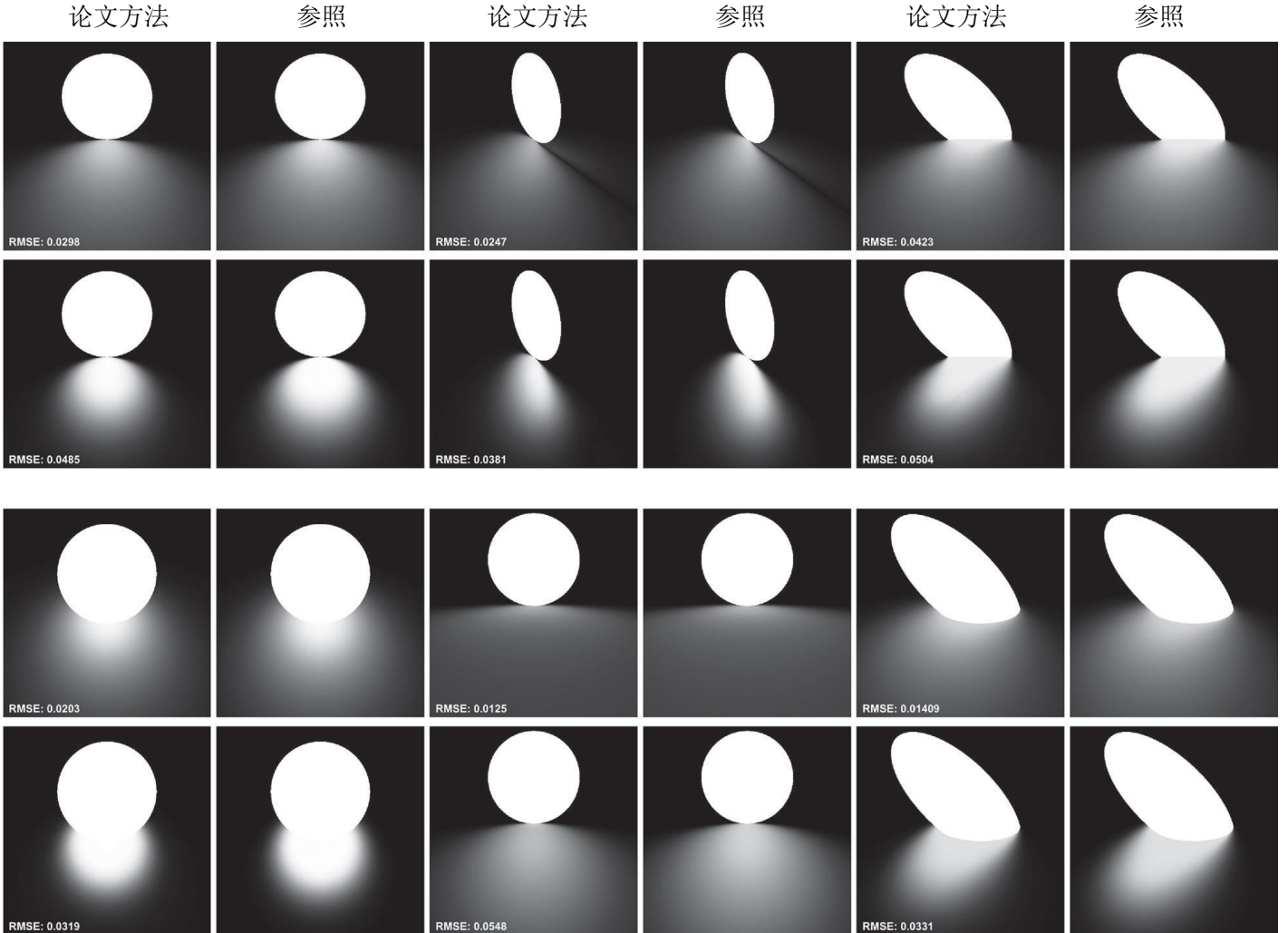


图 15: 通过面向单元盘朝向阴影点 p (左) 来估计球面光的轴向力矩。然后将光盘 (以及因此的多边形 P) 按比例缩放以考虑球体的立体角 (右)。

9.2 结果和制约

我们的旋转方法 (见图 1d) 为 $k=4$ 的球面和光盘区域光源提供了令人信服的镜面亮点。部分可视性被正确处理, 非均匀缩放操作允许椭圆形和椭球形区域光的表示。在性能方面, 我们没有注意到与四评估相比有显著差异。然而, 我们的方法有一些限制。首先, 我们补偿区域差异的方法只是一个近似值。由于我们不整合圆形, 我们观察到轻微的亮度差异, 特别是适度的光泽表面。第二, 当多

边形的预测位置太靠近光盘中心时，多边形在近像素上的过度旋转会导致可察觉的亮度变化。使用冯氏分布，当在掠角观察光盘高光时，这种变化大多是可感知的。通过微量分布，由于半矢量变换引入的失真，该现象是高度可感知的。这个变化随着 n 到无穷大而消失。



第一行 ($n=5$)；第二行 $n=50$ ；第三行 ($n=500$)；第四行 ($n=5000$)

图 16：使用我们的旋转四技术模拟的光盘（顶部）和球体（底部）区域灯。我们的方法产生令人信服的结果与真实光线跟踪参考（这里与冯氏分布），支持非均匀的尺度操作和水平裁剪。

10 结论和关于将来的工作

我们为多边形光源的表面阴影提出了有效和准确的解析近似。我们的方法灵活，足够快，可满足高质量要求的实时应用。特别地，我们展示了，Arvo 的边缘积分可以被定时近似和评估，并且可以使用 SG 运算符的推导容易地近似多个轴取向的叶的积分。我们展示了，通过使用单边缘分割策略近似半矢量扭曲失真，可以克服冯氏分布的限制。然而，在一些极端的配置中，边缘分割策略可能表现出不期望的伪像。为了克服这些缺陷，我们计划在半个矢量空间中探索大圆的替代参数化。我们的目标是避免分裂，更好地匹配由球面翘曲引入的扭曲。对于球

形和光盘区域光源，我们的旋转四边形与冯氏分布产生了令人信服的结果，与 Quad 相同的成本。但是在某些配置中，四边形的过度旋转会引起我们需要解决的不必要的亮度变化。例如，我们发现，通过考虑沿着四边形对角线的积分，发现最佳方向可以减少到一维问题。

其他挑战仍然存在，这将是值得探讨的。首先，我们的方法忽略了柔和的阴影。一个解决方案是将场景几何背景投影到区域光线上，并沿着几何轮廓执行负轮廓积分。纹理区域灯也是一个难以解决的难题，目前还没有令人满意的解决方案。我们的方法的一个可能性是用[1]和[4]中的预先整合的 mip-mapped 纹理来调制镜面项。另一种方法是寻找 Arvo^[21]引入的并由陈和 Arvo 开发的不同的引擎派生[26]。最后，一些更广泛的照明问题，如实时环境照明或互动全球照明将是有趣的。我们认为我们的近似框架可以特别适用于这些技术，并且可以克服球面高斯或 VPL 方法遇到的一些问题。

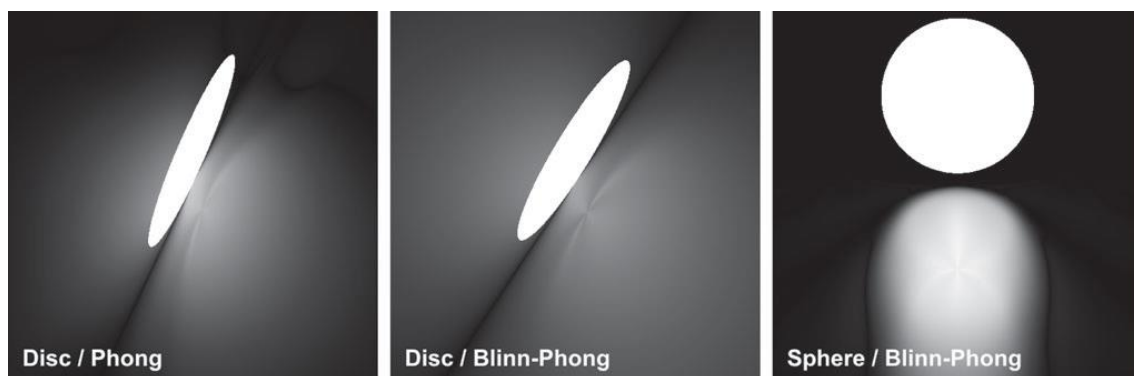


图 17：我们的多边形旋转策略的局限性。 在一些特定情况下，多边形在靠近的区域中的过度旋转引起不期望的亮度变化。 使用冯氏分布（左），当从掠角观察时，该现象仅在盘中是可察觉的。 随着微量分布（中间+右），这种现象在许多配置中是可以察觉的。

参考文献

- [1] M. Drobot, “Physically based area lights,” in Proc. GPU Pro 5, 2014, pp. 67–100.
- [2] B. Karis, “Real shading in unreal engine 4,” in Proc. ACM SIGGRAPH Courses, 2013, pp. 22:1–22:8.
- [3] J. Arvo, “Applications of irradiance tensors to the simulation of non-lambertian phenomena,” in Proc. 22nd Annu. Conf. Comput. Graph. Interactive Techn., 1995, pp. 335–342.
- [4] E. Heitz, J. Dupuy, S. Hill, and D. Neubelt, “Real-time polygonallight shading with linearly transformed cosines,” ACM Trans. Graph., vol. 35, no. 4, pp. 41:1–41:8, Jul. 2016.
- [5] J. Arvo, “Stratified sampling of spherical triangles,” in Proc. 22nd

- Annu. Conf. Comput. Graph. Interactive Techn., 1995, pp. 437–438.
- [6] C. Ureña, M. Fajardo, and A. King, “An area-preserving parametrization for spherical rectangles,” *Comput. Graph. Forum*, vol. 32, no. 4, pp. 59–66, 2013.
- [7] A. Keller, “Instant radiosity,” in *Proc. 24th Annu. Conf. Comput. Graph. Interactive Techn.*, 1997, pp. 49–56.
- [8] B. Walter, S. Fernandez, A. Arbree, K. Bala, M. Donikian, and D. P. Greenberg, “Lightcuts: A scalable approach to illumination,” in *Proc. Annu. Conf. Comput. Graph. Interactive Techn.*, 2005, pp. 1098–1107.
- [9] G. Nichols and C. Wyman, “Direct illumination from dynamic area lights,” in *Proc. Annu. Conf. Comput. Graph. Interactive Techn.*, 2009, pp. 82:1–82:1.
- [10] T. Ritschel, T. Grosch, J. Kautz, and H.-P. Seidel, “Interactive global illumination based on coherent surface shadow maps,” in *Proc. Graph. Interface*, 2008, pp. 185–192.
- [11] K. Picott, “Extensions of the linear and area lighting models,” *IEEE Comput. Graph. Appl.*, vol. 12, no. 2, pp. 31–38, Mar. 1992.
- [12] H. Bao and Q. Peng, “Shading models for linear and area light sources,” *Comput. Graph.*, vol. 17, no. 2, pp. 137–145, 1993.
- [13] T. Tanaka and T. Takahashi, “Fast analytic shading and shadowing for area light sources,” *Comput. Graph. Forum*, vol. 16, pp. C231–C240, 1997.
- [14] P. Poulin and J. Amanatides, “Shading and shadowing with linear light sources,” *Comput. Graph.*, vol. 15, no. 2, pp. 259–265, 1991.
- [15] J. M. Snyder, “Area light sources for real-time graphics,” Microsoft Research, Redmond, WA, USA, Tech. Rep. MSR-TR-96-11, 1996.
- [16] J. Wang, P. Ren, M. Gong, J. Snyder, and B. Guo, “All-frequency rendering of dynamic, spatially-varying reflectance,” in *Proc. SIGGRAPH Asia*, 2009, pp. 133:1–133:10.
- [17] K. Xu, W.-L. Sun, Z. Dong, D.-Y. Zhao, R.-D. Wu, and S.-M. Hu, “Anisotropic spherical gaussians,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 32, no. 6, pp. 209:1–209:11, Nov. 2013.
- [18] Y. Tokuyoshi, “Virtual spherical gaussian lights for real-time

- glossy indirect illumination,” in Proc. SIGGRAPH Asia Techn. Briefs, 2014, pp. 17:1–17:4.
- [19] R. Wang, et al., “Analytic double product integrals for all-frequency relighting,” IEEE Trans. Vis. Comput. Graph., vol. 19, no. 7, pp. 1133–1142, Jul. 2013.
- [20] K. Xu, Y.-P. Cao, L.-Q. Ma, Z. Dong, R. Wang, and S.-M. Hu, “A practical algorithm for rendering interreflections with all-frequency BRDFs,” ACM Trans. Graph., vol. 33, no. 1, Feb. 2014, Art. no. 10.
- [21] J. Arvo, “Analytic methods for simulated light transport,” PhD dissertation, Yale Univ., New Haven, CT, USA, 1995.
- [22] S. Meunier, R. Perrot, L. Aveneau, D. Meneveaux, and D. Ghazanfarpour, “Technical section: Cosine lobes for interactive direct lighting in dynamic scenes,” Comput. Graph., vol. 34, no. 6, pp. 767–778, Dec. 2010.
- [23] B. Walter, S. R. Marschner, H. Li, and K. E. Torrance, “Microfacet models for refraction through rough surfaces,” in Proc. 18th Eurographics Conf. Rendering Techn., 2007, pp. 195–206.
- [24] M. Ashikhmin and P. Shirley, “An anisotropic phong BRDF model,” J. Graph. Tools, vol. 5, no. 2, pp. 25–32, Feb. 2000.
- [25] E. P. F. Lafortune, S.-C. Foo, K. E. Torrance, and D. P. Greenberg, “Non-linear approximation of reflectance functions,” in Proc. 24th Annu. Conf. Comput. Graph. Interactive Techn., 1997, pp. 117–126.
- [26] M. Chen and J. Arvo, “A closed-form solution for the irradiance due to linearly-varying luminaires,” in Proc. Eurographics Workshop Rendering Techn., 2000, pp. 137–148.