

**Földvárszky Attila**  
**SZAKDOLGOZAT**

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**  
**Építésmérnöki Kar**  
**Épületenergetikai és Épületgépészeti Tanszék**

**SZAKDOLGOZAT**

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Építésmérnöki Kar  
Épületenergetikai és Épületgépészeti Tanszék**

**Földvárszky Attila**

**SZAKDOLGOZAT**

**Néhány sajátos szerkezeti kapcsolat  
hőtechnikai viszonyainak ellenőrzése 2D  
numerikus szimulációval**

Konzulens

Dr. Várfalvi János

egyetemi docens, laborvezető

Budapest, 2014

Szerzői jog © Földvárszky Attila, 2014.  
Szerzői jog © Dr. Várfalvi János, 2014

**(Feladatkirás)**

## NYILATKOZATOK

### *Beadhatósági nyilatkozat*

A jelen tervezési feladat az elvárt szakmai színvonalnak mind tartalmilag, mind formailag megfelel, beadható.

Kelt,

Konzulens részéről:

*külső konzulens, témavezető*

### *Elfogadási nyilatkozat*

Ezen tervezési feladat a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Épületenergetikai és Épületgépészeti tanszék által a Szakdolgozat feladatokra előírt valamennyi tartalmi és formai követelménynek maradéktalanul eleget tesz. E feladatot bírálatra és nyilvános előadásra alkalmasnak tartom.

A beadás időpontja:

*témavezető, belső konzulens*

### *Nyilatkozat az önálló munkáról*

Alulírott, *Hallgató Neve* (GA4WZ7), a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem hallgatója, büntetőjogi és fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem és sajátkezü aláírásommal igazolom, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, szakdolgozat feladatomban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.  
Budapest, 2014

*szigorló hallgató*

Mottó:

“A világ sötét lesz üres és hideg”

(Dávid Gyula)

# Tartalomjegyzék

Előszó.....	ii
Jelölések jegyzéke.....	iv
1. Bevezetés.....	1
1.1. Célkitűzések.....	1
1.2. Alapfogalmak.....	1
1.2.1. Hőtranszport.....	2
1.2.2. Hőátadási tényező.....	3
1.2.3. Hőhíd.....	4
2. Numerikus módszer.....	7
2.1. Matematikai modell.....	7
2.2. Numerikus modell.....	8
2.2.1. Közbenső termikus pont.....	9
2.2.2. Szélső termikus pont-peremfeltételek.....	10
2.2.3. Az egyenletrendszer megoldása.....	12
2.2.4. Jacobi iteráció.....	15
2.2.5. Egyenletek rendezése.....	16
3. A szoftver.....	20
3.1. Az eszköz használatának lehetőségei.....	20
3.2. A modell ellenőrzése.....	21
3.2.1. 1 dimenziós modell.....	21
3.2.2. 2 dimenziós modell.....	22
4. Néhány sajátos szerkezeti kapcsolat hőtechnikai ellenőrzése.....	24
4.1. Fűtött helyiségek belső-falsarok hőviszonyainak ellenőrzése.....	24
4.2. Téglafal hőátbocsátásának változása a mérettűrően belül.....	28
4.3. Belső sarok hőszigetelésének vizsgálata.....	31
4.4. Falfűtés hatékonyságának vizsgálata.....	35
4.5. Külső hőszigetelés kapcsolata az ablakpárkánnyal.....	38
4.6. Erkélyfödém vizsgálata.....	41
4.6.1. Bordahatás.....	44
5. Összefoglalás/eredmények értékelése.....	46
5.1. Eredmények.....	46
5.2. Tanulságok.....	46
6. Felhasznált szoftverek.....	47
7. Felhasznált irodalom.....	48
8. Melléklet.....	49
9. Elérhetőség.....	50
10. Summary.....	51



## Előszó

A témaválasztás elhatározása egy épületfizika órán született, melyen a hőtranszport fogalmával és épületszerkezetekben használt számítási módszerével ismerkedtünk. Itt találkoztam azzal a problémával, hogy az általunk használt zárt képletek melyek leírják a hő útját a szerkezetekben, csak egydimenziós hőmozgás ideális esetében adnak helyes eredményt. A valós szerkezetek azonban hőhidakkal terheltek, melyek 2 illetve 3 dimenziós hőmozgást gerjesztenek. Ennek számítására azonban explicit képletek nem léteznek. Bemutatásra került egy numerikus módszer megoldási lehetősége, melynek egyszerűsége és szépsége felkeltette az érdeklődésemet. Ezen kívül motivációt jelentett az is, hogy régóta szerettem volna modellezéssel foglalkozni.

Mivel hőtranszport modellező programok már régóta léteznek a piacon, magában egy ilyen szoftver elkészítése nem jelentene sem újdonságot, sem nem segítené különösképpen a szakmát, pedig ezek mind a dolgozatkiírás feltételei voltak. Nem beszélve arról, hogy egy komolyabb tervező szoftver akár több száz „ember-év” -nyi munkát egy szakdolgozat készítésénél még csak megközelíteni sem lehet. Ezeket figyelembe véve két fő feladatot tűztem ki magam elé. Először is egy, a lehetőségek által biztosított színvonalú szoftver elkészítése, másodsor pedig az elkészült szoftver segítségével néhány sajátos szerkezeti kapcsolat vizsgálatának és elemzésének elvégzése.

A szoftver elkészítésével kapcsolatban több célom is volt. Szerettem volna megmutatni, hogy még egy bonyolultnak tűnő, drága modellező szoftver mögött is a lényeg nagyon egyszerű alapelveken nyugszik, másodsorban pedig, olyan funkciókkal kívántam ellátni, melyek hiányoznak az elterjedtebb szoftverekből.

A szerkezetek kiválasztása, melyek viselkedését vizsgáltam, teljesen szubjektív volt. Nem az motivált, hogy minél összetettebb legyen, hanem az, hogy első ránézésre tudok-e valami előrejelzést adni a viselkedéséről, melyet pontos számítással ellenőrizhetek, és összevethetem az elvárt és kapott eredményeket. A végeredmények ismeretében elmondhatom, hogy egyszerűbb szerkezetek hőtranszportja is okozhat esetleges meglepetéseket a józan ész alapján kiokoskodott működéssel szemben.

Egy részről reménykedek abban, hogy a dolgozat hatására esetleg mások is kedvet kapnak majd modellező szoftverek készítésére, más részről abban, hogy az elkészült és ingyenesen letölthető szoftvert minél többen használják, végül pedig abban, hogy a segítségével modellezett esetek és az eredményekből levont következtetések segítséget nyújtanak szakemberek számára döntéshozatalukhoz.

Ezúton köszönöm belső konzulensemnek Dr. Várfalvi Jánosnak- értékes segítségét és javaslatait, mellyel lehetővé tették ennek a dolgozatnak az elkészülését.

Budapest, 2014 június

Földvárszky Attila

## Jelölések jegyzéke

A táblázatban a többször előforduló jelölések magyar és *angol* nyelvű elnevezése, valamint a fizikai mennyiségek esetén annak mértékegysége található. Az egyes mennyiségek jelölése – ahol lehetséges – megegyezik hazai és a nemzetközi szakirodalomban elfogadott jelölésekkel. A ritkán alkalmazott jelölések magyarázata első előfordulási helyüknél található.

Latin betűk		
Jelölés	Megnevezés, megjegyzés, érték	Mértékegység
$q$	Fajlagos hőáram	$W/m^2$
$Q$	Hőáram	$W$
$t$	Hőmérséklet	$^{\circ}C$
$t_i$	Belső léghőmérséklet	$^{\circ}C$
$t_e$	Külső léghőmérséklet	$^{\circ}C$
$R$	Hővezetési ellenállás	$m^2K/W$
$U$	Hőátbocsátási tényező	$W/m^2K$

Görög betűk		
Jelölés	Megnevezés, megjegyzés, érték	Mértékegység
$\alpha$	Hőátadási tényező	$W/m^2K$
$\lambda$	Hővezetési tényező	$W/mK$

## **1. Bevezetés**

### **1.1. Célkitűzések**

A tudományokban, főleg a fizikában hosszú időn keresztül tartotta magát az a nézet, hogy egy probléma akkor tekinthető megoldottnak, ha találunk rá egy zárt képletet. Behelyettesítjük a változókat és kapunk egy egzakt eredményt. Idővel azonban a leírni kívánt problémák bonyolultsága és a matematikai eszközök fejlődése megmutatta, hogy bizonyos esetekben képesek vagyunk ugyan egy adott probléma megfogalmazására (értsd: differenciál egyenletekbe való foglalás) azonban zárt képlet egyszerűen nem létezik hozzá.

Ennek a problémának a leküzdésére születtek az úgynevezett numerikus módszerek. Közös jellemzőjük a diszkretizálás, vagyis a tartományok elemi részekre való felbontása. Az elemi részek méretének csökkentésével juthatunk pontosabb eredményhez. Belátható hogy ez még kisebb kiterjedésű méretek esetén is hatalmas számítási igény támasztanak, ami miatt a számítógépek előtti világban reménytelen volt a módszer alkalmazása. Tömeges elterjedésére egészen a személyi számítógépek megjelenéséig kellett várni. Ma már szinte minden tudományterület használja, kezdve a biológiától a mérnöki tudományokig.

Az energetika területén tipikusan ilyen probléma a hő eloszlásának leírása egy anyagi keresztmetszetben. Speciális esetekben, jelesül a hőhídmentes területekre, létezik ugyan zárt képlet, azonban egy általános keresztmetszetre, csak a jelenséget leíró differenciál egyenletet vagyunk képesek megalkotni. Analitikus megoldás nem létezik, ami egy adott geometriai koordináta függvényében megadná a pont hőmérsékletét.

Dolgozatomban ezt a problémát kívánom részletesebben körbejárni, bemutatva egy numerikus módszert, a módszer alapján önállóan elkészített szoftvert, és ezen szoftver segítségével néhány sajátos szerkezeti kapcsolat hőtechnikai elemzését.

### **1.2. Alapfogalmak**

Fontos, hogy ha használunk egy eszközt, a mi esetünkben egy szoftvert, akkor ne csak a funkcióit ismerjük, hanem pontosan lássuk, milyen elveken alapul a működése. Ennek legfontosabb oka az, hogy csak így módon lehetünk tisztába a lehetőségeivel és a korlátaival. Képesek leszünk megmondani, hogy egy konkrét esetben használható-e egyáltalán vagy hogy egy eredményt elfogadhatunk-e jónak vagy sem.

Mindehhez azonban előbb meg kell értenünk az alapproblémát és tisztázni néhány

alapfogalmat.

### 1.2.1. Hőtranszport

Valójában ez a fogalom a dolgozatom központi eleme. Nézzük meg, hogy mi is az a dolog aminek a mozgását, eloszlását ismerni szeretnénk, és milyen tulajdonságokkal rendelkezik

A hőátvitel 3 formáját ismerjük.

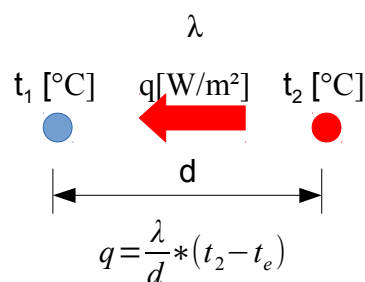
- **Hővezetés** (Kondukció) Ez a típusú hőtranszport olyan anyagokban megy végbe, melyek részecskéi közel vannak egymáshoz, így ha valamelyik részecskére jutó energia nagyobb lesz mint a mellette lévőre jutó, akkor a többlet energia miatt kialakuló hőmozgás és ennek következtében kialakuló többlet ütközés energia átadást fog eredményezni a szomszéd részére. Jellemzően ilyen anyagok a falszerkezetek, egyéb épületszerkezetek...
- **Hőáramlás** (Konvekció) Ez a típusú hőtranszport alapvetően más mint az Kondukció. Itt a részecskék maguk végzik a hő szállítását. Valamilyen más fizikai törvénynek engedelmessé a bennük tárolt energiát ők maguk viszik át egy másik helyre. Természetesen, ha ütközben, vagy éppenséggel a határolófelületen találkoznak más részecskékkel, akkor az előbb ismertetett Kondukciós folyamat is végbe megy, de alapvetően a hő fizikai szállítása történik. Jellemzően ilyen anyagok a gázok illetve folyadékok, melyek részecskéi könnyen elmozdulhatnak.
- **Hősugárzás** (Radiáció) Ez a típusú hőtranszport szintén lényegileg különbözik mind a két előzőleg felsorolttól. Itt ugyanis egyáltalán nincs szükség semmilyen közegre. Ennél a típusú hőtranszport vizsgálatánál azt a fizikai törvényt kell szem előtt tartanunk, hogy minden test, ami magasabb hőmérsékletű mint az abszolút 0 fok, elektromágneses sugárzás formájában, praktikusán fotonok közvetítésével, energiája egy részét kisugározza. Az elektromágneses sugárzás terjedéséhez nincs szükség közegre. Az épületfizikában ennek a típusú hőtranszportnak komoly szerepe van, ennek ellenére azonban hosszú időn keresztül kevés figyelmet kapott (ld. low-e réteg, bútorral takart falak penészesedése)

Az ismertetett folyamatokban azt láthatjuk, hogy elemi szinten valójában energiák átadásáról van szó. Ez a folyamat a kiegyenlítődés irányába mutat, melyet a termodinamika törvényei irányítanak. Ennek köszönhetően amit mi magasabb szinten láthatunk az egy úgynevezett hőmozgás, melynek iránya a melegebb helyről a hidegebb felé mutat, mértéke pedig arányos a két vizsgált pont hőmérsékletének különbségével. Ebben implicit módon

benne van az is, hogy egy valós szerkezetben vagy anyagban a hő útja **3 dimenziós**. A következő példákban a könnyebb megértés kedvéért 1 dimenziós, stationer, forrásmentes hőtranszportot tekintünk.

Épületszerkezetekben elsősorban a hővezetés dominál, ezért vizsgáljuk meg ezt egy kicsit részletesebben (1. ábra). Vegyünk egy tetszőleges anyagot. Tekintsük két  $d$  távolságra elhelyezkedő pontját, melyeknek a hőmérséklete  $t_1$  [°C] és  $t_2$  [°C]. A hőmérséklet különbség mint potenciálkülönbség, generálni fog a két pont között egy, a magasabb hőmérsékletű pont felől az alacsonyabb hőmérsékletű pont felé mutató  $q$  [W/m²] hőáramot. Ez az áram, mely azt mutatja meg, hogy 1 m² homlokfelületen 1m vastagság esetén 1K hőmérséklet különbség hatására hány W áram áramlik át, analóg módon a villamos modellhez, arányos lesz a vezetőképességgel, vagyis egy jobb vezetőképességű anyagon adott potenciálkülönbség és vastagság esetén nagyobb áram fog átfolyani. Hőáram esetén az anyagnak ezt a tulajdonságát nevezzük hővezető képességnek, melyet  $\lambda$ -val jelölünk és a mértékegysége [W/mK].

A képletből az is látszik, hogy két pont között, ha az homogén anyagból áll, lineáris módon alakul ki a hőmérséklet eloszlás.



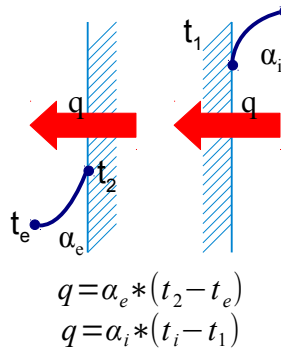
1. ábra  
Hőáram kialakulása két pont között

### 1.2.2. Hőátadási tényező

A testek, esetünkben az épületszerkezetek, rendelkeznek külső felülettel. Azt már megismertük, milyen hőátadási mechanizmusok működnek a testeken, anyagokon belül, de meg kell tudni azt is, hogy mi történik a határfelületeken.

Először tekintsük a szabad felületeket, melyek levegővel érintkeznek. Általánosságban elmondható, hogy egy anyag felülete hidegebb/melegebb a környező levegő hőmérsékleténél, függően attól, hogy az anyag másik oldalán a hőmérséklet hidegebb vagy melegebb mint az itteni közeg hőmérséklete. Csak speciális esetekben fordulhat elő, hogy egy fal felület azonos hőmérsékletű a levegő hőmérsékletével (ambiens hőmérséklet). A hőmérséklet

csökkenés/növekedés mértéke arányos egy tényezővel melynek neve hőátadási tényező, jele  $\alpha$ . mértékegysége pedig  $[W/m^2K]$ . Az ábrán (2. ábra) látható, hogy mivel 1 dimenziós, stacioner, forrásmentes állapotról van szó, ezért a belépő  $q$  áram és a kilépő  $q$  áram azonos.



2. ábra  
Hőáram a határolófelületeken

Maga a hőátadás rendkívül összetett jelenség. Befolyásolja a kialakuló konvekció, a sugárzás, a hőáramlás iránya... Azért hogy a gyakorlatban számolni tudjunk, főbb épületszerkezeti elemekre általános esetekre meghatároztak [4] egy-egy  $\alpha$  értéket (3. táblázat):

Szerkezet neve	Külső $\alpha$ [W/m <sup>2</sup> K]	Belső $\alpha$ [W/m <sup>2</sup> K]
Külső fal és nyílászáró	24	8
Belső fal és nyílászáró	8	8
Lapos tető és felülvilágító	24	10
Belső födém (felfelé hűlő)	12	10
Belső födém (lefelé hűlő)	8	6
Árkádfödém	20	6

3. táblázat  
Hőátadási tényezők

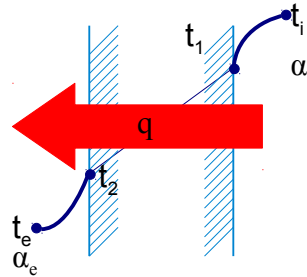
Mivel ez a módszer csak a szerkezet funkcióját és elhelyezkedését veszi figyelembe és nem törődik a geometriával valamint egyéb befolyásoló tényezőkkel, esetenként félrevezető eredményhez vezethet.

Végül nézzük a két különböző anyag határfelületén fellépő hőátadás esetét. A gyakorlatban, mivel a két felület közvetlenül kapcsolódik egymáshoz, ezért se konvekció, se sugárzás nem lép fel, így nincs szükség hőátadás számítására.

### 1.2.3. Hőhíd

Az eddig elmondottak alapján egy végtelen hosszú párhuzamos falszakasz bármelyik pontjában számíthatóak a hőáramok képletek segítségével. Ezt az esetet **egydimenziós, állandósult állapotú, forrásmentes hővezetésnek** hívjuk. Az ismertetett egyenletek egyszerű

átrendezésével megkapjuk a rétegrendi hőátbocsátási tényezőt is tartalmazó hőáram képletét (4. ábra). Ilyenkor bármely pontját is választjuk a szerkezetnek, a hőáram vektorok egymással párhuzamosak (merőlegesek a falak éleire).



$$q = \frac{(t_i - t_e)}{\frac{1}{\alpha_e} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_i}} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

4. ábra

1 dimenziós stacioner hőáram egy rétegen

A valóságban azonban az épületszerkezetek véges kiterjedésűek, melyekben a következő esetek, illetve ezek tetszőleges variációi fordulnak elő:

- Inhomogén szerkezetek (különböző hővezető képességű anyagok a rétegrendre **merőlegesen**.)
- Geometriai változások (sarkok, törések, túlnyúlások, eltérések a falak párhuzamosságától...)
- Hőátadási tényező változása a felületek mentén (berendezési tárgyak árnyékoló hatása, felületek dőlésváltozása, sarkok...)

Könnyen belátható, hogy ilyenkor nem biztosítottak a feltételek az. 1 dimenziós hőáram kialakulásához vagyis ahhoz, hogy a szerkezet keresztmetszetében lévő tetszőleges pontnak csak a kültér és a beltér irányába eső szomszédai legyenek eltérő hőmérsékletűek. Ez viszont azt eredményezi, hogy egy pontból a hőáram nem feltétlenül a legrövidebb úton igyekszik a kijutni a hidegebb tér felé, hanem megtörik az iránya és a keresztmetszetben hosszabb utat is bejárhat. Ezt a jelenséget nevezzük **hőhídnak**. A következő három ábrán (5. ábra, 6. ábra, 7. ábra) példákat láthatunk a hőhidak kialakulására. A kék vonal a szerkezet „hideg oldali”, a piros vonal pedig a „meleg oldali” élet jelöli. A zöld körök a modell számára létrehozott háló egy-egy elemi négyzetének középpontját mutatják, a pontokból húzott vektorok pedig az elemi négyzetből induló hőáramok irányát és relatív nagyságát reprezentálják.



<p>5. ábra Hőhíd geometria változás miatt</p>	<p>6. ábra Hőhíd inhomogenitás miatt</p>	<p>7. ábra Hőhíd változó hőátadási tényező miatt</p>

Az ábrákon jól látható, hogy a hőáram vektorok már korántsem párhuzamosak, vagyis a szerkezetek hőhíddal terheltek, így tehát az ismertetett (4. ábra) képlet nem alkalmazható.

## 2. Numerikus módszer

A probléma megoldására numerikus módszer adódik a legkézenfekvőbbnek. Ezt a módszert azokra az esetekre fejlesztették ki, amikor egy folytonos matematikai problémának, melyet bonyolult differenciál egyenletek írnak le, nem létezik egzakt megoldása, vagy csak nagyon nagy erőfeszítés árán lehetne eljutni hozzá.

A numerikus módszerek egyik típusa, melyre választásom esett, a **véges differencia módszere**. Itt a **fizikai modellt** leíró **matematikai modellt** diszkrétizáljuk, vagyis differenciálisan végtelen kis felbontás helyett véges nagyságú távolságokat veszünk és ezek mindegyikére egyenként állítunk fel egyenletet (melyek a **numerikus modellt** alkotják) és oldjuk meg őket

Meg kell említeni, hogy a folyamat során rengeteg feltevést, elhanyagolást, egyszerűsítést és ezeknek folyamanyaként hibát vagyunk kénytelenek a rendszerbe vinni. A hibák és azok kezelése igen fontos, de dolgozatomban nem kiemelt jelentőségű, ezért nem kívánok részletesebben foglalkozni vele. Tudomásul kell azonban vennünk a létezésüket és azt is, hogy alapvetően kevés befolyásunk van rá. Csak megemlítem, hogy 5 különböző hibaforrás létezik. Ezek a **modellhiba**, **mérési hiba**, **képlethiba**, **diszkrétizációs hiba** valamint a **kerekítési és ábrázolási hiba**. Ezek közül egyedül a diszkrétizációs hiba, melyet bizonyos határok között tetszőlegesen csökkenthetünk a terünk felbontásának növelésével (a rácspontok számának növelésével). Az elkészült szoftver lehetőséget nyújt rá, hogy ezt az értéket a felhasználó szabadon, meghatározott tartományban változtathassa. Természetesen ennek ára van. A felbontás növelése sokszorosára növeli a memória szükségletet és a végrehajtási időt.

### 2.1. Matematikai modell

Két út kínálkozott a feladat megoldására. Az első, hogy a hővezetés általános differenciálegyenletéből induljak ki, melynek stacioner, forrásmentes, kétdimenziós megoldását (8. egyenlet) diszkrétizáljuk.

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{X^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{Y^2} = 0$$

8. egyenlet  
Hőmérleg egyenlet

Én azonban a könnyebb és szemléletesebb megoldást választottam. A kiindulási differenciál egyenletem egy vizsgált térfogatrészre vonatkozó hőmérlegből indul ki (9. képlet).

$$dQ = dQ_1 + dQ_2$$

9. képlet

Hőmérleg egyenlet

$dQ$  – Belső energia megváltozása

$dQ_1$  – Időegység alatt a térfogategységben szolgáltatott hőmennyiség

$dQ_2$  – A felületen át a térrészbe belépő és kilépő hőmennyiség

Mivel forrásmentes rendszert vizsgálunk a  $dQ_1=0$

Mivel stacioner a folyamat, ezért  $dQ=0$

Így tehát az jött ki, hogy egy térfogategységbe, a mi esetünkben területegységbe belépő és kilépő hőmennyiség azonos. Ezenkívül felhasználok a hőáramra vonatkozó összefüggést (1. ábra), mely szintén a hővezetés általános differenciálegyenletéből jön ki (10. képlet). Azt láthatjuk az egyenletekből, hogy minden elemi pontba, a be és kilépő áramok előjeles összege nulla. (Csak megjegyzem, hogy racionális gondolkodással, differenciálegyenletek felírása nélkül is ugyan erre az eredményre juthatunk). Ezenkívül az áram, ha az két szomszédos pont között lép fel, akkor egyenesen arányos a két pont közötti létrejött hőmérséklet-különbséggel és a közöttük fennálló hővezető képességgel valamint fordítottan arányos a közöttük lévő távolsággal. Ha viszont szélső pontról van szó, akkor ott úgynevezett peremfeltételeket kell előírunk.

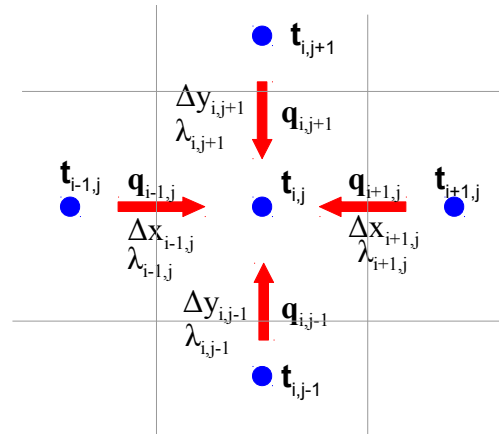
$$q_x = \lambda \frac{dT}{dX} \quad q_y = \lambda \frac{dT}{dY}$$

10. képlet

## 2.2. Numerikus modell

Egy Vertikális-Horizontális tájolású négyzethálót feszítünk a vizsgált keresztmetszetre. Vertikális értelemben az oldalhosszak azonosak ugyanúgy mint horizontális értelemben, azonban a két irányban különbözhetnek. Minden négyzet geometriai közepét megjelölöm, mint „**termikus pont**”, majd ezek a pontok által képviselt négyzetekre írom fel a differencia egyenleteket. Annyi egyenletem lesz tehát ahány négyzet adódik a négyzethálóban, azonban az ismeretlenek száma több lesz. Az egyenletek és az ismeretlenek száma közötti különbséget az úgynevezett peremfeltételekkel tudom kiegyenlíteni.

### 2.2.1. Közbenső termikus pont



11. ábra  
Közbenső termikus pont

A közbenső termikus pontok csak a 4 közvetlen szomszédjával vannak termikus kapcsolatban, tehát hőáram csak felőlük illetve feléjük folyhat. Ahogy az előző fejezetben felírtuk a befelé és a kifelé folyó hőáramok előjeles összege 0. Ennek értelmében:

$$0 = q_{i-1,j} + q_{i+1,j} + q_{i,j-1} + q_{i,j+1}$$

12. képlet

A jelölés alapján minden vizsgált termikus pontba befelé áramlik az áram. Természetesen előre nem tudhatjuk az irányokat, ezért választanom kellett egy meghatározott irányt, hogy egységesen tudjam kezelni a teljes rendszert. A választásom a befelé irányuló áramokra esett, melyek a + értéket fogják jelenteni. Ha a számítás eredményeként – érték jön ki, akkor az azt jelenti, hogy valóságban az áram az ellenkező irányba mozog.

A termikus pont és a szomszédja között lévő anyag hővezetési tényezője, homogén esetben  $\lambda$ , mely mind a 4 irányban különböző lehet ( $\lambda_{i-1,j}$ ,  $\lambda_{i+1,j}$ ,  $\lambda_{i,j-1}$ ,  $\lambda_{i,j+1}$ ). Ha pont két anyag határán vagyok akkor a két  $\lambda$  átlagát veszem.

A  $\Delta$  távolságokról annyit érdemes még megjegyezni, hogy két szomszédos pont közötti érték korrekt eljárás esetén  $1/2 \Delta_{kl} + 1/2 \Delta_{mn}$  lenne, de bátran számolhatunk a  $\Delta$  értékkel, mert a felbontás során a horizontális távolságok mindig azonosak, ugyanígy a vertikális távolságok is.

Ezeket figyelembe véve felírhatjuk minden közbenső termikus pontra a differenciaegyenletet (13. képlet)

$$0 = \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}} (T_{i,j} - T_{i,j+1}) + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} (T_{i,j} - T_{i,j-1}) + \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta y_{i+1,j}} (T_{i,j} - T_{i+1,j}) + \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta y_{i-1,j}} (T_{i,j} - T_{i-1,j})$$

$$0 = -T_{i-1,j} \left( \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} \right) - T_{i+1,j} \left( \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} \right) - T_{i,j-1} \left( \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta x_{i,j-1}} \right) - T_{i,j+1} \left( \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta x_{i,j+1}} \right) + T_{i,j} \left( \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta x_{i,j-1}} + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta x_{i,j+1}} \right)$$

13. képlet

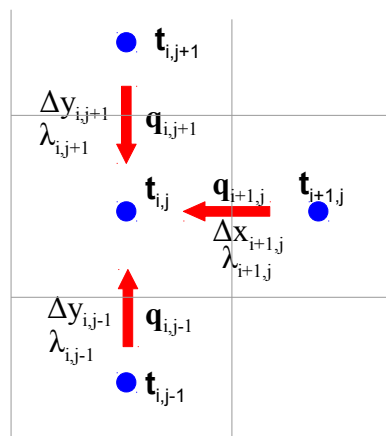
Közbenső termikus elemre vonatkozó hőmérlegegyenlet

### 2.2.2. Szélső termikus pont-peremfeltételek

Differenciál egyenletek megoldásához peremfeltételek megadása szükséges. Esetünkben 3 fajta peremfeltételt tudunk definiálni, az úgynevezett első, másod illetve harmadfajú peremfeltételeket. Ezeket a peremfeltételeket azokra a termikus pontokra kell alkalmazni, melyeknek nincs 4 közvetlen kapcsolatuk, vagyis a vizsgált terület szélén helyezkednek el. A peremfeltételekkel tulajdonképpen kipótoljuk a hiányzó ismeretleneket az egyenletből.

Az **elsőfajú peremfeltétel** az amikor a szélső termikus pontnak közvetlenül megadjuk a  $T$  hőmérsékletét. Ekkor az adott pontra semmilyen számítást nem végzünk, hiszen megvan a végeredmény, csupán a szomszédos pontok számításához használjuk fel. A számítógépes modellemben ez a fajta peremfeltétel nem szerepel. Egyszerűen kiváltható a harmadfajú peremfeltétel egy jól megválasztott  $\alpha$ -jának alkalmazásával.

A **másodfajú peremfeltétel** azt írja elő, hogy az adott irányba nem folyik hőáram: (14. ábra). Olyan élekre alkalmazzuk, melyek körül feltételezhető, hogy mentes a hőhíd hatásától, vagyis 1 dimenziós hőáram alakult ki (csak a belső és külső falra merőleges (élirányú) hőáramok jönnek létre). A szoftverben ezt a peremfeltételt „Szimmetria él”-nek neveztem el. Egy olyan könnyítés van a szerkesztésben, hogy ha a megrajzolt keresztmetszet valamelyik élére nem definiáltam peremfeltételt, akkor azt automatikusan másodfajú peremfeltételnek (Szimmetria élnék) tekinti.



14. ábra

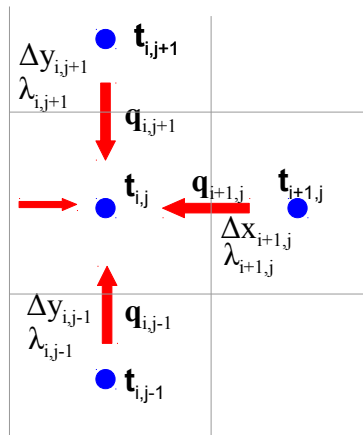
Ebben a példában egy nyugati szélén elhelyezkedő szélső pontot láthatunk melynél csak 3 irányba folyhat a hőáram.

$$0 = -T_{i+1,j} \left( \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} \right) - T_{i,j-1} \left( \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta x_{i,j-1}} \right) - T_{i,j+1} \left( \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta x_{i,j+1}} \right) + T_{i,j} \left( \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta x_{i,j-1}} + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta x_{i,j+1}} \right)$$

15. képlet

Ennek megfelelően a 15. képlet szerint alakul az erre a pontra vonatkozó hőmérleg egyenlet. Ez csak 1 eset az 8 lehetséges közül. Lehet 4 eset amikor csak 3 irányba van kapcsolat (a pont egy élen helyezkedik el) és lehet 4 db olyan eset, amikor csak 2 irányú kapcsolata van (a pont egy sarkon helyezkedik el). Ezeket az eseteket egyenként mind fel lehet írni, néhány index átírásával. Lényegi különbség nincs köztük, ezért nem is közöltem őket.

Végül maradt a **harmadfajú peremfeltétel**.



16. ábra

Ez azt a helyzetet hivatott leírni amikor egy szélső termikus pont a szabad oldalról levegővel érintkezik. Tekintsük a 16. ábra-t. Itt szintén csak egy esetet ábrázolok a lehetséges 4 közül, amikor a szélső pont a nyugati oldalon helyezkedik el. Ebben az esetben a peremfeltétel a következőképpen néz ki (17. képlet)

$$0 = \alpha_{i-1,j} (T_{i,j} - T_{i-1,j}) + \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} (T_{i,j} - T_{i+1,j}) + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} (T_{i,j} - T_{i,j-1}) + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}} (T_{i,j} - T_{i,j+1}) - T_{i+1,j} \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} - T_{i,j-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} - T_{i,j+1} \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}} + T_{i,j} \left( \alpha_{i-1,j} + \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}} \right) = \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}$$

17. képlet

Szintén egyszerűen felírható a másik három eset is, de mivel alapvető különbség nincs ezért

ezeket sem közlöm külön.

A szoftverben a harmadfajú peremfeltétel „Szabad felszín” elnevezéssel szerepel. Plusz funkcióként be van építve egy olyan lehetőség, hogy egy él mentén elhelyezendő harmadfajú peremfeltételnek ne csak egy konstans  $\alpha$ -t, hanem egy intervallumot ( -tól -ig értéket) adjunk meg. Használatára példát a 4.1 fejezetben találunk.

### 2.2.3. Az egyenletrendszer megoldása

Ha  $n$  számú csomópontunk van, akkor most rendelkezésünkre áll  $n$  db lineáris egyenlet  $n$  db ismeretlennel. Ha rendelkezünk **első-** illetve **harmadfajú** peremfeltétellel, akkor az egyenletek között szerepel olyan melynek 0-tól különböző konstansa van, így az egyenletrendszerünk **inhomogén**. Könnyen bizonyítható az is, hogy **lineárisan függetlenek** az egyenleteink vagyis nem állíthatóak elő a többi egyenlet lineáris kombinációjaként.

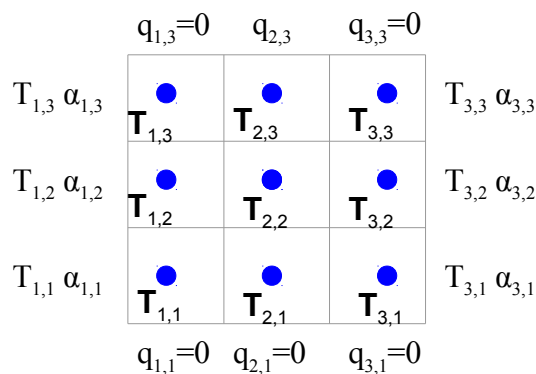
Az egyenletünket fel tudjuk írni mátrix alakban  **$\underline{L} \cdot \underline{t} = \underline{b}$** . Ahol  **$\underline{b}$**  jelenti a konstansok vektorát, a  **$\underline{t}$**  jelenti az ismeretlen hőmérsékletek vektorát végül pedig a  **$\underline{L}$**  jelenti az együtthatók mátrixát.

Egy lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának elégséges és szükséges feltétele, hogy a  **$\underline{b}$**  vektor előállítható legyen az  **$\underline{L}$**  oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, vagyis együtthatók mátrixának rangja egyenlő a konstanssal kiegészített együtthatók mátrixának rangjával.  $\text{rg}(\underline{L}) = \text{rg}(\underline{L} \cdot \underline{b})$  A rang a mátrix lineárisan független oszlopainak/sorainak maximális száma. Mivel tudjuk, hogy minden egyenlet lineárisan független ezért  $\text{rg}(\underline{L}) = n$ . De azt is tudjuk, hogy a  **$\underline{b}$**  -vel kiegészített  **$\underline{L}$**  mátrix rangja nem változik, ebből tehát az következik, hogy az egyenletrendszerünk egyértelműen megoldható.

Miután megbizonyosodtunk, hogy megoldható az egyenletrendszerünk, vizsgáljuk meg közelebbről, hogy hogyan is néz ki a mátrixegyenlet. A  **$\underline{t}$**  vektor egyértelmű, ez az ismeretlen, az egyes csomópontok hőmérsékleteit tartalmazza ( $T_1, T_2, \dots, T_n$ )

A  **$\underline{b}$**  vektor egy közbenső termikus pont illetve másodfajú peremfeltétel esetén 0-t tartalmaz, elsőfajú peremfeltétel esetén tartalmazza a hőmérséklet értékét, harmadfajú peremfeltétel esetén pedig a megfelelő  $\alpha T$  értéket.

Az  **$\underline{L}$**  mátrix leírása egy kicsit bonyolultabb, ezért a jobb megértés érdekében vegyünk egy konkrét példát, melyben legyen belső pont, és legyenek külső pontok is különböző peremfeltételekkel. Ezeknek megfelelő legkisebb felosztást egy 3X3 rácshálózat 9 db termikus ponttal ír le (18. ábra).



18. ábra

Konkrét példa a termikus pontok számítására

Azt látjuk, hogy  $T_{2,2}$  a belső pontunk, és az összes többi külső. Az első oszlopban elhelyezkedő szélső pontokra NY-i irányból és az utolsó oszlopban elhelyezkedő szélső pontokra K-i irányból harmadfajú peremfeltételeket írtunk elő. Az alsó sorban elhelyezkedő szélső pontokra D-i irányból valamint a felső sorban elhelyezkedő két szélső sarokpontra É-i irányból másodfajú peremfeltételeket határoztunk meg. Végül a  $T_{2,3}$  pontra É-i irányból elsőfajú peremfeltételt szabtuk meg. Ez alapján hozhatjuk létre a  $\underline{t}$  és  $\underline{b}$  vektorokat (19. képlet)

$$\begin{array}{ll}
 T_{1,1} & T_{1,1} \alpha_{1,1} \\
 T_{2,1} & 0 \\
 T_{3,1} & T_{3,1} \alpha_{3,1} \\
 T_{1,2} & T_{1,2} \alpha_{1,2} \\
 \underline{t} = T_{2,2} & \underline{b} = 0 \\
 T_{3,2} & T_{3,2} \alpha_{3,2} \\
 T_{1,3} & T_{1,2} \alpha_{1,3} \\
 T_{2,3} & T_{2,3} \\
 T_{3,3} & T_{3,3} \alpha_{3,3}
 \end{array}$$

19. képlet

Hőmérséklet ( $t$ ) és Konstans ( $b$ ) vektorok a példához



$\alpha_{1,1} + \frac{\lambda_{2,1/1,1}}{\Delta x_{2,1/1,1}} + \frac{\lambda_{1,2/1,1}}{\Delta y_{1,2/1,1}}$	$\frac{-\lambda_{2,1/1,1}}{\Delta x_{2,1/1,1}}$	0	$\frac{-\lambda_{1,2/1,1}}{\Delta y_{1,2/1,1}}$	0	0	0	0	0
$\frac{-\lambda_{2,1/1,1}}{\Delta x_{2,1/1,1}}$	$\frac{\lambda_{2,1/1,1}}{\Delta x_{2,1/1,1}} + \frac{\lambda_{2,1/3,1}}{\Delta x_{2,1/3,1}} + \frac{\lambda_{2,1/2,2}}{\Delta y_{2,1/2,2}}$	$\frac{-\lambda_{2,1/3,1}}{\Delta x_{2,1/3,1}}$	0	$\frac{-\lambda_{2,1/2,2}}{\Delta y_{2,1/2,2}}$	0	0	0	0
0	$\frac{-\lambda_{2,1/3,1}}{\Delta x_{2,1/3,1}}$	$\alpha_{3,1} + \frac{\lambda_{2,1/3,1}}{\Delta x_{2,1/3,1}} + \frac{\lambda_{3,1/3,2}}{\Delta y_{3,1/3,2}}$	0	0	$\frac{-\lambda_{3,1/3,2}}{\Delta y_{3,1/3,2}}$	0	0	0
$\frac{-\lambda_{1,2/1,1}}{\Delta y_{1,2/1,1}}$	0	0	$\alpha_{1,2} + \frac{\lambda_{1,2/2,2}}{\Delta x_{1,2/2,2}} + \frac{\lambda_{1,2/1,3}}{\Delta y_{1,2/1,3}} + \frac{\lambda_{1,2/1,1}}{\Delta y_{1,2/1,1}}$	$\frac{-\lambda_{1,2/2,2}}{\Delta x_{1,2/2,2}}$	0	$\frac{-\lambda_{1,2/1,3}}{\Delta y_{1,2/1,3}}$	0	0
0	$\frac{-\lambda_{2,1/2,2}}{\Delta y_{2,1/2,2}}$	0	$\frac{-\lambda_{1,2/2,2}}{\Delta x_{1,2/2,2}}$	$\frac{\lambda_{1,2/2,2}}{\Delta x_{1,2/2,2}} + \frac{\lambda_{3,2/2,2}}{\Delta x_{3,2/2,2}} + \frac{\lambda_{2,1/2,2}}{\Delta y_{2,1/2,2}} + \frac{\lambda_{2,3/2,2}}{\Delta y_{2,3/2,2}}$	$\frac{-\lambda_{3,2/2,2}}{\Delta x_{3,2/2,2}}$	0	$\frac{-\lambda_{2,3/2,2}}{\Delta y_{2,3/2,2}}$	0
0	0	$\frac{-\lambda_{3,1/3,2}}{\Delta y_{3,1/3,2}}$	0	$\frac{-\lambda_{3,2/2,2}}{\Delta x_{3,2/2,2}}$	$\alpha_{3,2} + \frac{\lambda_{3,2/2,2}}{\Delta x_{3,2/2,2}} + \frac{\lambda_{3,1/3,2}}{\Delta y_{3,1/3,2}} + \frac{\lambda_{3,2/3,3}}{\Delta y_{3,2/3,3}}$	0	0	$\frac{-\lambda_{3,2/3,3}}{\Delta y_{3,2/3,3}}$
0	0	0	$\frac{-\lambda_{1,2/1,3}}{\Delta y_{1,2/1,3}}$	0	0	$\alpha_{1,3} + \frac{\lambda_{1,3/2,3}}{\Delta x_{1,3/2,3}} + \frac{\lambda_{1,2/1,3}}{\Delta y_{1,2/1,3}}$	$\frac{-\lambda_{1,3/2,3}}{\Delta x_{1,3/2,3}}$	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	$\frac{-\lambda_{3,2/3,3}}{\Delta y_{3,2/3,3}}$	0	$\frac{-\lambda_{2,3/3,3}}{\Delta x_{2,3/3,3}}$	$\alpha_{3,3} + \frac{\lambda_{2,3/3,3}}{\Delta x_{2,3/3,3}} + \frac{\lambda_{3,2/3,3}}{\Delta y_{3,2/3,3}}$

20. képlet  
Együttható mátrix (L) a példához

Most tehát rendelkezésünkre áll az együtthatók mátrixa, a konstansok és a változók vektora. Az a feladatunk, hogy megoldjuk az egyenletet. Ehhez meg kell határozni az együttható mátrix inverzét és össze kell szorozni a konstans vektorral.  $\mathbf{t} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$

Egy konkrét példán keresztül ezt be is fogom mutatni, most azonban előtte vizsgáljuk meg az együtthatók mátrixát. Három fontos dolgot kell megállapítanunk. Az egyik, hogy gyors, egyszerű megoldást adhat, abban az esetben ha kevés számú csomópontot szeretnénk meghatározni, azonban jellemzően a csomópontjainkat, a nagyobb pontosság és részletesség miatt sok száz esetenként sok tízezer csomópontból állnak. Vegyünk például egy 1m oldalhosszúságú négyzetkeresztmetszetet ahol cm-es részletességgel szeretnénk ismerni a hőeloszlást. Ez pedig  $100 \times 100 = 10000$  egyenletet, következtetésképp egy  $10000 \times 10000$ -es mátrixot jelent. Könnyen belátható, hogy ennek az adathalmaznak a tárolása és kezelése olyan erőforrásigényeket támasztana, melyre az asztali számítógépeink nincsenek felkészülve.

Észrevehetünk azonban egy másik fontos jellemzőt is, jelesül, hogy garantáltan **ritkamátrix**-ot kapunk. Egy-egy sorában maximum 5 db 0-tól különböző érték szerepelhet, melybe a főátló minden esetben beletartozik. Végül bizonyítható ugyan, de egyszerű megfontolás alapján is könnyen belátható (az egyenletek világosan mutatják), hogy a főátlóban szereplő érték minden esetben nagyobb mint az az ő sorában szereplő értékek abszolút értékének összege.

Ezek a tulajdonságok abban segítenek minket, hogy megfelelő eljárást találjunk az egyenleteink megoldásához. Örömmel tapasztalhatjuk hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldására rendelkezésünkre álló eljárások között a **Jacobi iteráció**nak nevezett eljárás pont ezen feltételek megléte esetén tud jól és hatékonyan működni.

#### 2.2.4. Jacobi iteráció

Ezt az eljárást ritka-mátrixú egyenletrendszereken, több száz egyenlet esetén szokták alkalmazni. Működésének azonban van egy szigorú feltétele. Csak akkor konvergál az eljárás ha a mátrixunk **domináns főátlójú** rendszer (21. képlet)

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| < |a_{i,i}| \quad i=1, 2, \dots, n$$

21. képlet  
Domináns főátló feltétele

A szigorú matematikai bizonyítást nem mutatok be, azonban ha egy pillantást vetünk a

példánkat bemutató mátrixra (20. képlet), melyben szinte minden előforduló esetet számba vettem, akkor abból kitűnik, hogy minden sorában a főátlóban lévő érték abszolút értéke garantáltan nagyobb mint az adott sorban elhelyezkedő többi érték abszolút értékeinek összege.

Most nézzük a módszer lényegét:

- Fejezzük ki minden egyenletből egy változót (értelemszerűen minden egyenletből másik változót). Mi mindig azt a változót fogjuk kifejezni, ami az adott egyenlet központi eleme vagy másként megfogalmazva azt a változót melynek együtthatói a főátlóba kerülnek.
- Válasszunk egy kiindulási vektort, vagyis kezdőértéket a változók számára
- Helyettesítsük be a kezdőértékeket az egyenletekbe
- A kapott megoldásvektor lesz a következő iterációs lépés kiindulási vektora.
- Ismételjük az utolsó két lépést addig amíg megfelelő pontosságú nem lesz a megoldásvektor.

Vegyük a következő példát. Jelentse a  $t$  az ismeretlen hőmérsékletet egy adott termikus pontban, az első index az elvégzett iterációk számát, a második index pedig az azonosítóját. Legyen a legelső kiindulási vektor  $\mathbf{t}_0=[0,0,0\dots 0]$ , vagyis  $t_{0,1}=0, t_{0,2}=0 \dots t_{0,n}=0$ . (Mivel lineáris egyenletrendszerrel van szó nyugodtan választhatunk minden termikus pontnak  $0^\circ\text{C}$  kezdőértéket, garantáltan a jó érték felé fog konvergálni). A Jacobi iteráció módszerét felhasználva az első iterációban a  $\mathbf{t}_1=[0,0,0\dots 0]$  vektor lesz a bemenő paraméter minden  $t_{1,i}$  érték meghatározásához. Az iteráció végén tehát rendelkezünk egy  $\mathbf{t}_1=[t_{1,1}, t_{1,2}, t_{1,3}, \dots, t_{1,n}]$  megoldásvektorral, mely a következő iteráció kiindulási vektora lesz. A  $k$ . lépés után a megoldásvektorunk  $\mathbf{t}_k=[t_{k,1}, t_{k,2}, t_{k,3}, \dots, t_{k,n}]$ . Ha úgy találjuk, hogy a  $k-1$ . lépés és a  $k$ . lépés során kapott  $t$  hőmérsékletek különbségei közül a legnagyobb, kisebb mint egy előre meghatározott  $k$  küszöbérték, (22. képlet) akkor megállítjuk az iterációt és a  $t_k$ -t tekintjük a megoldásvektornak

$$\max(t_{k-1,j} - t_{k,j}) < \epsilon \quad j = 1 \dots n$$

22. képlet  
Kiszállási feltétel

A konvergencia sebességét jelentősen tudjuk javítani, ha a számítások során nem a kiindulási vektor értékeit helyettesítjük be, hanem az adott iterációban már kiszámított vektorkomponenseket használjuk fel. Ennek a módszernek a neve **Gauss-Siedel iteráció**. A

megvalósult szoftverben pontosan ezt a módszert alkalmaztam.

## 2.2.5. Egyenletek rendezése

A Gauss-Siedel iteráció használatának érdekében a termikus pontokra felírt egyenletekből ki kell fejezni egy-egy változót. Már említettem, hogy praktikus okokból mi azt a változót emeljük ki mindig az egyenletből mely pontra felírtuk az egyenletet.

Nézzünk tehát néhányat azok az eseteket közül, amikor a vizsgált pont közbenső vagy szélső pont, másod illetve harmad fajú peremfeltétellel (23-31. képlet). Nem mutatom be azokat az eseteket, melyekben a pontok sarkokra esnek. Itt a vizsgált pontnak 2 független peremfeltétele lehet vagyis  $4 \cdot 4 = 16$  különböző eset. Mivel ezek közlése nem jelentene plusz információt ezért ezeket nem részletezem, de az eddigiek alapján nagyon egyszerű módon meghatározhatóak, ha szükséges.

$$T_k = T_{i,j} = \frac{+T_{i+1,j} \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + T_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + T_{i,j-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + T_{i,j+1} \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}{\frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}$$

23. képlet

*Közbenső termikus pont hőmérséklete*

$$T_k = T_{i,j} = \frac{+\alpha_{i-1,j} T_{i-1,j} + T_{i+1,j} \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + T_{i,j-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + T_{i,j+1} \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}{+\alpha_{i-1,j} + \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}$$

24. képlet

*Ny-i szélső termikus pont hőmérséklete harmadfajú peremfeltétellel*

$$T_k = T_{i,j} = \frac{+\alpha_{i+1,j} T_{i+1,j} + T_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + T_{i,j-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + T_{i,j+1} \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}{+\alpha_{i+1,j} + \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}$$

25. képlet

*K-i szélső termikus pont hőmérséklete harmadfajú peremfeltétellel*

$$T_k = T_{i,j} = \frac{+\alpha_{i,j+1} T_{i,j+1} + T_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + T_{i+1,j} \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + T_{i,j-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}}}{+\alpha_{i,j+1} + \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}}}$$

26. képlet

*É-i szélső termikus pont hőmérséklete harmadfajú peremfeltétellel*

$$T_k = T_{i,j} = \frac{+\alpha_{i,j-1} T_{i,j-1} + T_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + T_{i+1,j} \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + T_{i,j+1} \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}{+\alpha_{i,j-1} + \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}$$

27. képlet

*D-i szélső termikus pont hőmérséklete harmadfajú peremfeltétellel*

$$T_k = T_{i,j} = \frac{+T_{i+1,j} \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + T_{i,j-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + T_{i,j+1} \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}{+\frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}$$

28. képlet

*Ny-i szélső termikus pont hőmérséklete másodfajú peremfeltétellel*

$$T_k = T_{i,j} = \frac{+T_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + T_{i,j-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + T_{i,j+1} \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}{+\frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + \frac{\lambda_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1}}}$$

29. képlet

*K-i szélső termikus pont hőmérséklete másodfajú peremfeltétellel*

$$T_k = T_{i,j} = \frac{+T_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + T_{i+1,j} \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + T_{i,j-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}}}{+\frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}}}$$

30. képlet

*É-i szélső termikus pont hőmérséklete másodfajú peremfeltétellel*

$$T_k = T_{i,j} = \frac{+T_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + T_{i+1,j} \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + T_{i,j-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}}}{+\frac{\lambda_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1,j}} + \frac{\lambda_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1,j}} + \frac{\lambda_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}}}$$

31. képlet

*D-i szélső termikus pont hőmérséklete másodfajú peremfeltétellel*

Azért részleteztem ezeket az egyenleteket, hogy észrevegyük a szabályosságot, és láthassuk, hogy mennyire egyszerűen automatizálható. Az algoritmus, amit használtam a következő:

1. Töltsük fel 0 értékkel minden termikus pont hőmérsékletét mint kiindulási érték.
2. Indítsunk egy k ciklust
3. Indítsunk egy t ciklust 1 -től n-ig vagyis a termikus pontok számaig

4. Vedd a következő  $t$  termikus pontot
  5. Képezzünk egy törtet, mely eredménye a termikus pont hőmérséklete lesz
  6. Indítsunk egy  $d$  ciklust mondjuk  $E$ -i irányból kezdve az óramutató járásának megfelelően körbe járva a  $t$  termikus pontot
  7. Vedd a következő  $d$  irányt és az által meghatározott pontot
  8. Ha ez termikus pont, akkor akkor a számlálóhoz add hozzá a következő törtet: A termikus pont hőmérséklete mint változót szorozd meg a két pont között található  $\lambda$ -val és oszd el a két pont közötti távolsággal. A nevezőhöz pedig add hozzá a következő törtet: A két pont között található  $\lambda$ -t oszd el a két pont közötti távolsággal.
  9. Ha ez másodfajú peremfeltétel, akkor nem nyúlunk a törthöz,
  10. Ha ez harmadfajú peremfeltétel, akkor a számlálóhoz add hozzá a peremfeltétel  $\alpha$ -jának és  $T$ -jének szorzatát, a nevezőhöz pedig add hozzá a peremfeltétel  $\alpha$ -ját.
  11. Végül pedig ha ez elsőfajú peremfeltétel, akkor a termikus pont vegye fel a peremfeltétel által meghatározott hőmérsékletet, ne vegyen tudomást az eddig összeállított törtről és szakítsa meg a  $d$  ciklust, vagyis a termikus pont körbejárását és ugorjon a 14. pontra
  12. Zárd a  $d$  ciklust, vagyis ha van még a termikus pont körül be nem járt irány akkor vissza a 7. pontra
  13. A kapott törtbe helyettesítsük be a szomszéd pontok hőmérsékletét mint ismeretlent és így megkapjuk a  $t$  termikus pont hőmérsékletét. Ezt rögzítsük.
  14. Zárd a  $t$  ciklust, vagyis ha van még ebben az iterációban nem vizsgált termikus pont, akkor vissza a 4. pontra.
  15. Ha az ebben az iterációban ( $k$  ciklusban) kapott hőmérsékletek és az előző ciklusban kapott hőmérsékletek különbségei közül a legnagyobb, kisebb mint mondjuk 1 ezrelék, akkor megállítjuk az iterációt, egyébként vissza a 3. pontra.
  16. A termikus pontok aktuális értéke az egyenletrendszerünk eredménye
- Tulajdonképpen ez a néhány sor a lelke az egész programnak és ebből is a 8-13 pontig tartó rész, ami az egyenletek összeállításáért felelős.

### 3. A szoftver

A szoftver java nyelven íródott így platform független, futtatásának egyetlen feltétele, hogy a számítógépen telepítve legyen a JRE 1.7.0\_51 vagy egy újabb verziója.

A szoftver rövid ismertetője, forráskódja és annak teljes története, a kibocsátott verziók valamint a fejlesztés egyes lépései az interneten megtalálhatóak, a pontos hozzáférésüket a 9. Elérhetőség fejezetben közlöm.

Az előző fejezetben részletesen ismertettem a numerikus modellt, mely alapja az egész szoftvernek. Minden egyéb körülötte csak szépészet a kezelésének megkönnyítése érdekében ezért a dolgozat keretében sem a struktúrájával, sem a használatával nem kívánok foglalkozni. Ezzel szemben program lehetőségeiről és a modell ellenőrzéséről ejtenék néhány szót

#### 3.1. Az eszköz használatának lehetőségei

Mire is használható a dolgozat keretében megírt szoftver? Alapvetően egy kétdimenziós stacioner hőtranszport modellező szoftverről van szó. A grafikus felülete segítségével egy tetszőleges bonyolultságú épületszerkezeti csomópont megrajzolása, az épületszerkezeti elemek beparaméterezése, valamint a peremfeltételek megadása lehetséges. A rajz elkészítése után megadhatjuk a raszter méretet, mely kijelöli a termikus pontokat, majd elindíthatjuk a számítást. A számítás a felület nagyságától és a felbontástól függően néhány másodperctől akár néhány óráig is tarthat. Ha befejeződött, akkor a felület minden termikus pontjához egy-egy hőmérséklet rendelődik.

Eddig semmi új nincs, minden 2d hőtranszport modellező szoftver rendelkezik ezekkel a funkciókkal. Ami többletet jelent azok a következő funkciók:

- Harmadfajú peremfeltétel megadása esetén az  $\alpha$  számára egy tartományt adhatunk meg egy adott hossz mentén, modellezve a geometriai változások vagy takarás miatti hőátadási tényező változását.
- A számítás végén megjeleníthetjük a termikus pontokban a hőáram vektorát
- A számítás végén megjeleníthetjük a termikus pontokban a hőáram vektorának horizontális és vertikális összetevőt.
- A számítás végén megjeleníthetjük a termikus pontokban a hőáram trajektóriáit, vagyis az izotermák érintőit.
- A számítás végén megjeleníthetjük a termikus pontokban a hőmérsékletet numerikus

alakban is

- A számítás végén a kurzor segítségével barangolhatunk a csomóponti keresztmetszet pontjaiban és státuszlistában automatikusan megjelenik a kurzorhoz legközelebb eső termikus pont hőmérséklete valamint vertikális és horizontális irányba mutató hőáram értéke.
- A számítás végén egy peremfeltételt kiválasztva megjeleníthetjük az adott élen jelentkező hőveszteséget.

Ezek a funkciók egy részről mélyebb és alaposabb elemzést tesznek lehetővé más részről a többlet információk megjelenítésével segítséget nyújthatnak az oktatásban a különböző jelenségek jobb megértésében és szemléltetésében.

### 3.2. A modell ellenőrzése

Természetesen mit sem ér az egész, ha a kapott eredményeket nem vetem össze az elvárt eredményekkel vagy azok nem egyeznek. A tesztelés érdekében két összeállítás hőveszteségét fogom ellenőrizni.

#### 3.2.1. 1 dimenziós modell

Először a legegyszerűbb esetet kívánom ellenőrizni. Egy adott hővezető képességgel rendelkező egyenes 1 m hosszúságú fal hőáramainak összegét számítom ki képlet alapján és a kapott eredményt összehasonlítom a szoftverem által szolgáltatott eredménnyel.

A csomópont amit vizsgállok:

- $dx = 10 \text{ cm}$
- $dy = 0.3 \text{ m}$  (Hőáram iránya)
- $\lambda = 0.3 \text{ W/mK}$
- $t_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- $\alpha_i = 8$
- $t_e = -5 \text{ }^\circ\text{C}$
- $\alpha_e = 24$

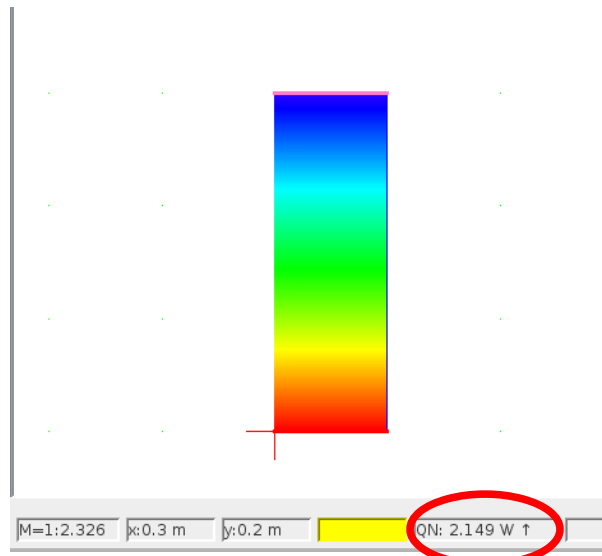
**Kézi számítás** alapján (32. képlet) a be-/kifolyó hőáram  $Q = 2.143 \text{ W}$ . (a keresztmetszetre merőlegesen 1 m hosszra vonatkoztatva)



$$Q = \frac{(t_i - t_e) * d_x}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_e} + \frac{d_y}{\lambda}} [W] = \frac{(20+5) * 0.1}{\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{0.3}{0.3}} = 2.143$$

32. képlet

A **modell** eredményeként (33. képlet) a befolyó és kifolyó áramok összege is **2.149 W**. Ez 6 ezred eltérést jelent, vagyis 0.2 %-os a hiba a számított értékhez képest, ami elfogadható.



33. képlet

### 3.2.2. 2 dimenziós modell

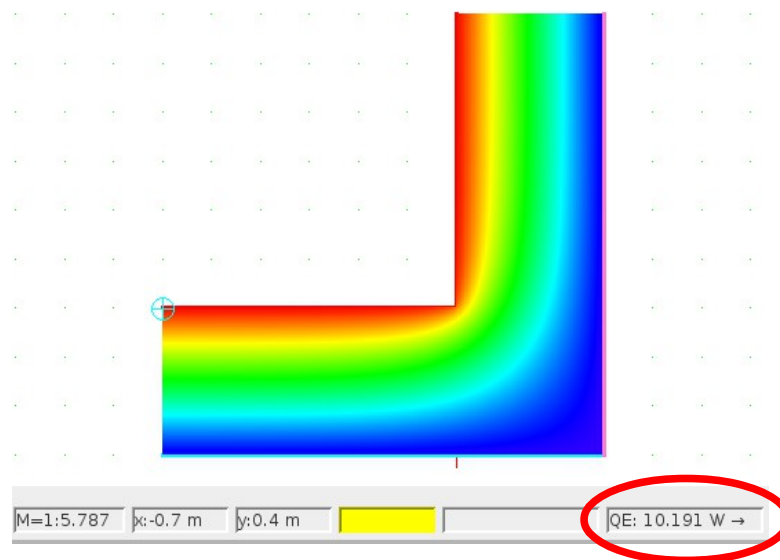
Az 1 dimenziós esetre jó eredményt adott a modellünk, most arra vagyok kíváncsi, hogy 2 dimenziós esetben is megfelelően viselkedik-e. Ennek ellenőrzésére egy falsarkot fogok vizsgálni. Itt már nem lehet összevetni a modell által számolt eredményt egy kézzel számolt eredménnyel mert ez utóbbi nem létezik. Éppen ezért azt tettem, hogy egy, a tanszék által is elismert 2D modellező szoftver (KOBRA) eredményét vetem össze a sajátoméval.

A felvett paraméterek a következők:

- falvastagság= 0.3 m
- falszélesség=0.9 m
- $\lambda=0.2$  W/mK
- $t_i=20$  °C
- $\alpha_i=8$
- $t_e=-5$  °C

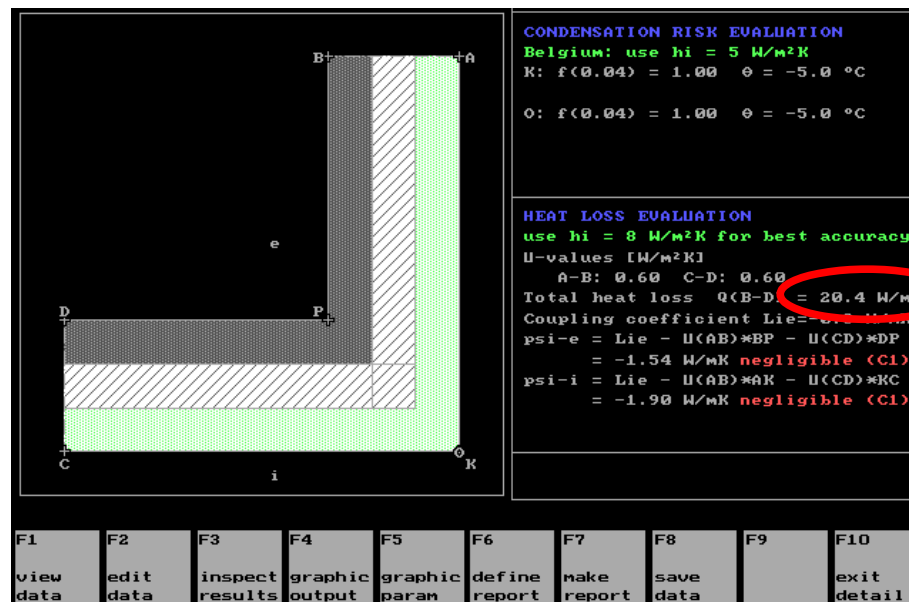
- $\alpha_e=24$

A KOBRA által szolgáltatott értéket láthatjuk a 35. ábrán. Ez 20.4 W. Az én alkalmazásom eredményét, a függőleges külső élre kiszámított veszteséget láthatjuk a 34. ábrán. Ugyan ez az érték adódik a vízszintes élre is, így tehát az én eredményem  $2 \cdot 10.191 = 20.382$  W. A különbség 18 ezred, vagyis 0.09%, ami szintén elfogadható.



34. ábra

Hővesztesség számítás eredménye egy élen az én szoftveremmel



35. ábra

Hővesztesség számítás eredménye a KOBRA szoftverrel

#### 4. Néhány sajátos szerkezeti kapcsolat hőtechnikai ellenőrzése

Ebben a fejezetben bemutatok néhány általam érdekesnek talált épületszerkezeti elrendezést, melyeket fontosnak találtam közelebbről is megvizsgálni.

Az első esetben egy kicsit többet időzök el a program lehetőségeinek bemutatásával. Itt egy olyan ismert jelenséget ismertetek, melynek modellezésére, sok más szoftverrel ellentétben, az én alkalmazásom fel lett készítve. Azt szeretném szemléltetni, hogy ezt milyen módon és milyen szabványok figyelembevételével lehet elvégezni.

A példák alapvetően 3 részből állnak. Az elsőben ismertetem magát a problémát, és a feltételezéseimet az eredményeket, vagy legalábbis a tendenciákat illetően. Ezután közlöm a szoftver által elvégzett számítások eredményeit, végül pedig összevetem eredményeket az előzetes feltevéseimmel.

A dolgozatban csak a számítások eredményei láthatók. A részletek mind megtalálhatóak a CD mellékletben illetve az Interneten a „**SzamitasokADolgozathoz.ods**” számolótábla állományban.

A vizsgálataim nem termékspecifikusak, mivel nem a katalógus adatok összehasonlítása volt a célom, ezért tulajdonságaik felvett értékek. A hőmérsékleteket illetően pedig 20 °C belső és -5 °C külső hőmérsékletet feltételeztem.

##### 4.1. Fűtött helyiségek belső-falsarok hőviszonyainak ellenőrzése

A hőátadási tényező ismertetésénél szó volt róla, hogy annak értékét jelentősen befolyásolja a sugárzásos hőátvitel. Egy közbenső falszakasz felületére a szemben lévő falszakasz sugárzással hőt közöl, ami visszafele is igaz. Így kialakul egy egyensúly ahol a két közel azonos hőmérsékletű fal azonos hőmérsékletű sugárzással bombázza egymást. Közeledve azonban a sarkokhoz a helyzet megváltozik. Az tapasztalható, hogy a hőhíd miatt amúgy is hidegebb falszakaszok egymást hűtik, a melegebb falszakaszokról azonban csekélyebb sugárzást kapnak. A helyzet még drámaibb, ha a fal mellé vagy még inkább a sarokba valamilyen tárgyat helyezünk, ami árnyékoló hatásával még jobban csökkenti az adott szakaszt érő sugárzást. Ezen esetek méretezéséről [4] Építésügyi Ágazati Szabvány: MSZ-04-140-2:1991 rendelkezik.

*„...Egyedi állagvédelmi ellenőrzés céljából végzett többdimenziós hőmérsékletmező-számítások során az éleknél és sarkoknál a hőátadási tényezők M.1.5. melléklet szerinti alapértékei az alábbi összefüggések szerint csökkenthetők vízszintes élek mentén: ahol  $\alpha_{i1}$  és*

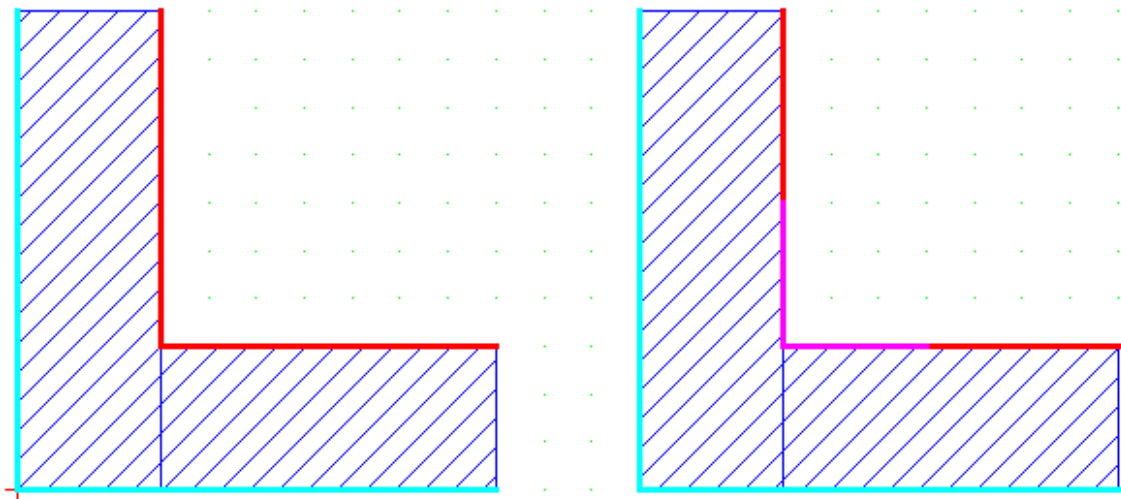
$\alpha_{i2}$  az élt képző találkozófelületekre vonatkozó hőátadási tényező...”

A szabvány azt is meghatározza, hogy a csökkenést milyen hosszan kell figyelembe venni: „...Az ehhez csatlakozó 300mm széles sávokban a hőátadási tényező értéke folyamatosan a felületre megadott értékre nő...”

Az általam készített szoftver alkalmas ennek a vizsgálatnak és számításnak az elvégzésére is. A harmadfajú peremfeltétel  $\alpha$  paramétere két részből áll, mely a meghúzott él kezdeti és vég pozíciójában értelmezett hőátadási tényezőket határozzák meg. Számítás során a két pont közé eső minden pontra a távolság függvényében interpolált értékek kerülnek.

A szabványnak megfelelően tehát a következőképpen modellezzük a jelenséget. A sarkoktól távol ( $>30\text{cm}$ ) a hőátadási tényező az előírt  $8 \text{ W/m}^2\text{K}$  értékű, a saroktól  $30 \text{ cm}$  távolságra  $8 \text{ W/m}^2\text{K}$  a sarkoknál pedig  $0.3 \cdot (8+8) = 4.8 \text{ W/m}^2\text{K}$ . A szoftver a  $30 \text{ cm}$ -es szakaszon lineáris interpolációval számolja ki az értékeket.

Felveszek egy referencia esetet is az összehasonlíthatóság kedvéért, ahol a teljes belső fal felületén konstans hőátadási tényezőt tételezünk fel. A 36. ábra mutatja a felépített két modellt. A sraffozott területek a falat, a kék élek a külső légtér felé néző, állandó  $\alpha$ -val rendelkező, a vörös élek a fűtött tér felé néző, szintén állandó  $\alpha$ -val rendelkező, valamint a lila élek pedig szintén a fűtött tér felé néző változó  $\alpha$ -val kenderező peremfeltételeket reprezentálják.



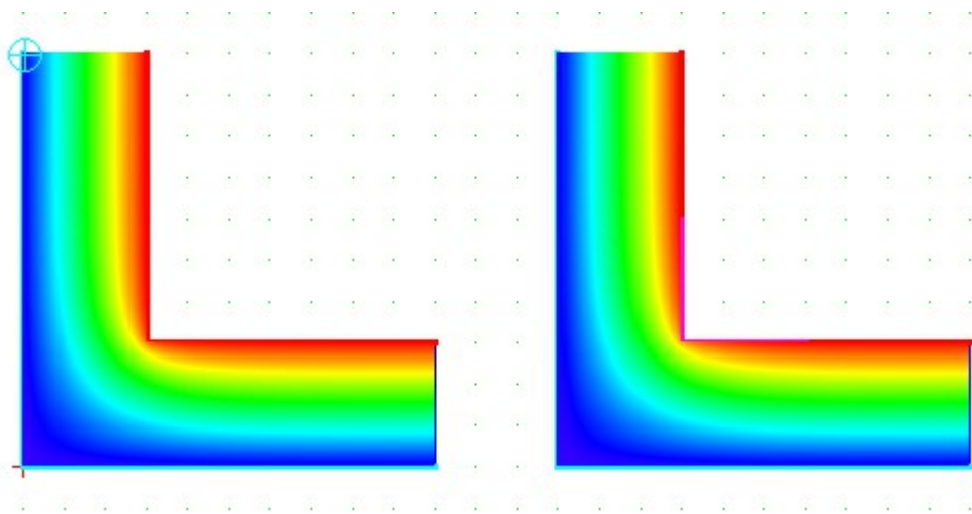
36. ábra

A megrajzolt két modell. Baloldalon hagyományos módon, jobb oldalon változó hőátadási tényezővel (lila szín) számolt falsarok

A példában a következő adatokat használtam:

- Falvastagság: **30 cm**

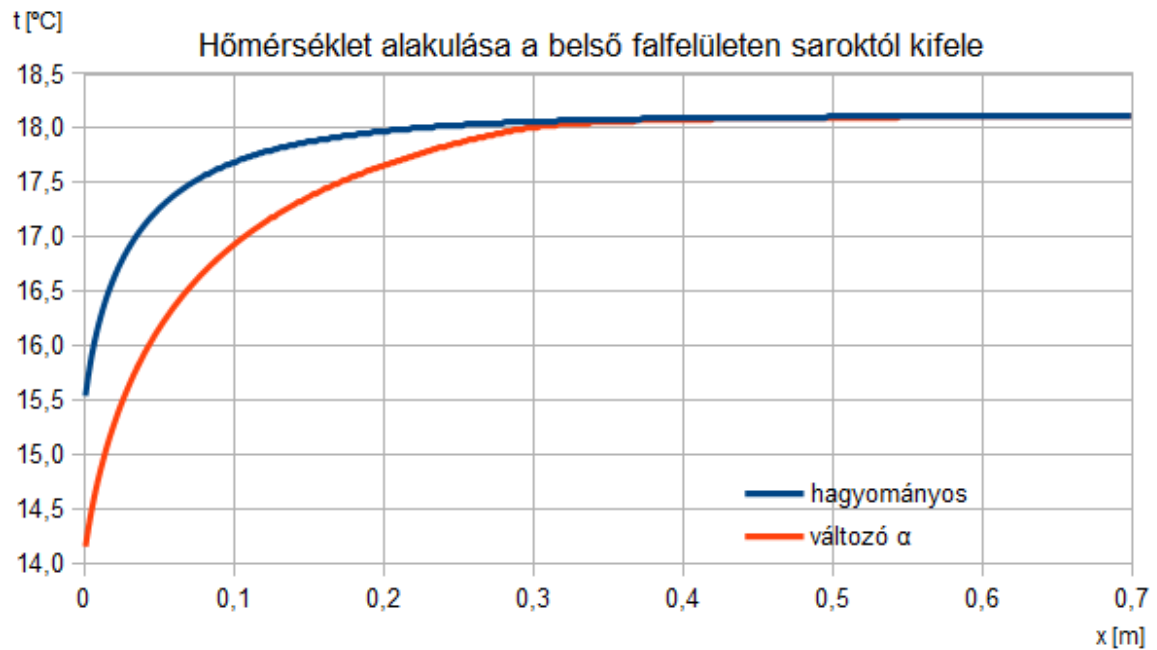
- Fal  $\lambda$ : **0.2 W/mK**
- Külső hőmérséklet: **-5 °C**
- Külső  $\alpha$ : **24 W/m²K**
- Belső  $\alpha$ , belső szakaszon: **8 W/m²K**
- Belső  $\alpha$ , sarokban: **4.8 W/m²K**
- Az  $\alpha$  csökkenés kezdetének távolsága a saroktól **30 cm**
- Horizontális/vertikális irányú felbontás: **0.2 cm**
- Megállási feltétel: **0.000001 [K]** különbség két iterációs ciklus között számolt hőmérséklet között



37. ábra

Baloldalon hagyományos módon, jobb oldalon változó hőátadási tényezővel számolt falsarok szinkódos hőképe

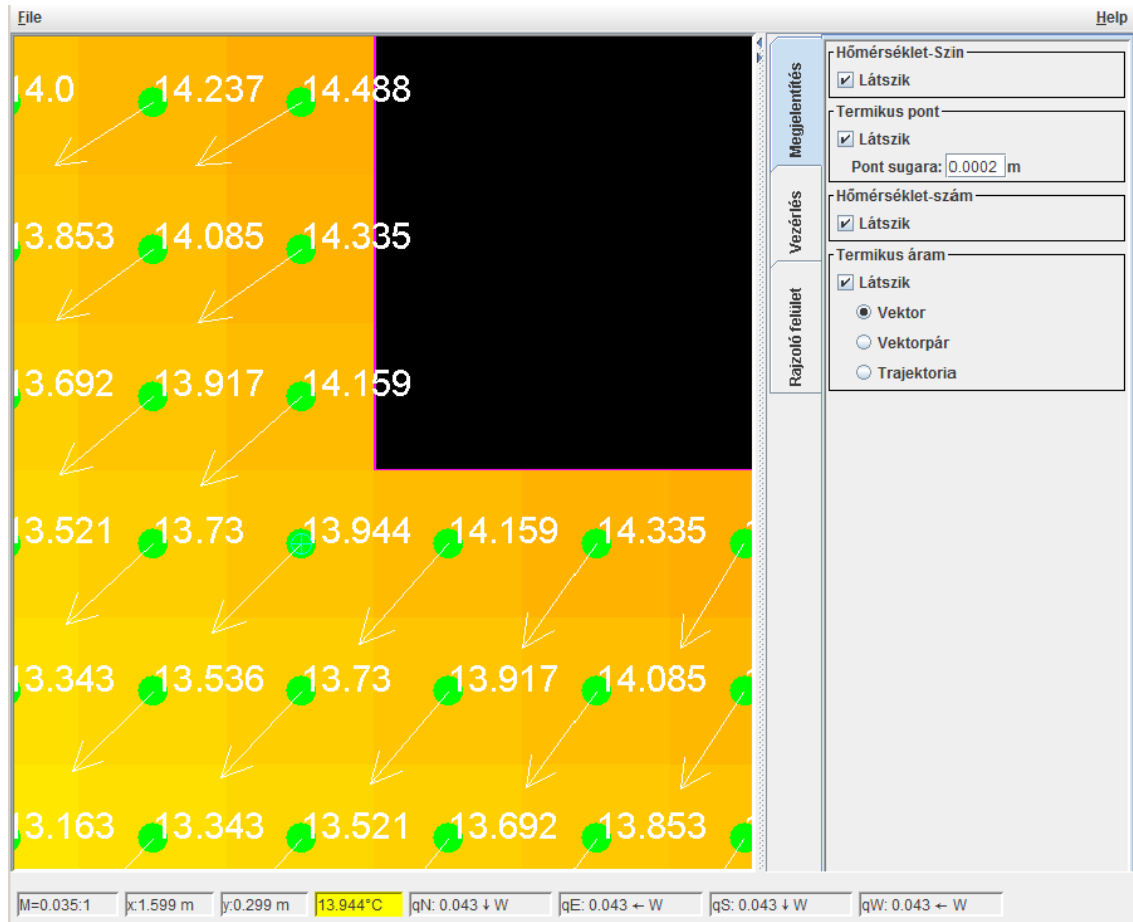
A 37. ábra szinkódolással mutatja a kialakult hőmérsékleti viszonyokat a keresztmetszetekben. Az árnyékolást figyelembe vevő modell (jobb oldal) belső sarkának környékén a sűrűbb vonalazás jelzi, hogy itt kedvezőtlenebb hőmérsékleti viszonyok alakultak ki, mint a hagyományosan számolt (bal oldal), az árnyékolást figyelmen kívül hagyó modell esetén. Kicsit talán szemléletesebb, ha a hőmérsékletek alakulását a saroktól való távolság függvényében nézzük. (38. grafikon). Itt jobban kitűnik a különbség, vagyis az, hogy a hagyományos módon számolt esetben közel másfél fokkal kedvezőbb eredmények születtek. Ez a különbség bizonyos esetekben jelentheti azt is, hogy egy falat páratechnikai szempontból megfelelőnek találunk a számítás alapján, azonban a valóságban párakicsapódás történik.



38. grafikon

*A hőmérséklet alakulása a belső falfelületen hagyományosan számolt és változó  $\alpha$  esetén*

Természetesen a számolt eredmények nem csak színkóddal, hanem numerikus értékekkel is rendelkezésünkre állnak. A hőmérsékleteket megjeleníthetjük közvetlenül a termikus ponthoz rendelve a metszetben vagy a kurzor pozíciójában található hőmérsékletet leolvashatjuk a státusz sorban. Ezt a lehetőséget mutatja a 39. ábra kiegészítve a termikus pontokba elhelyezett, a hőáramokat reprezentáló vektorokkal.



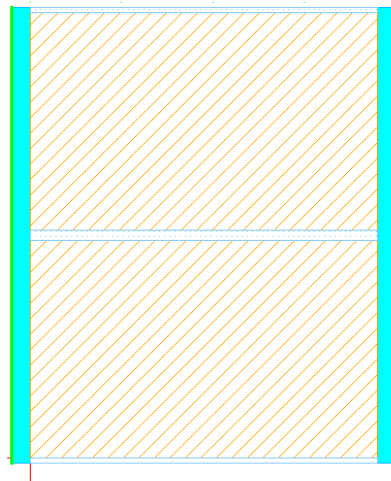
39. ábra

*A hőmérsékletek és hőáramok reprezentációja*

#### 4.2. Téglafal hőátbocsátásának változása a mérettűréseken belül

Mint minden, az ipar által gyártott termék, az égetett téglák is mérettűréssel készülnek. Ha a falazást pontosan raszterben végzi a kivitelező, akkor a pozitív irányú méreteltérés esetén kevesebb habarcs, negatív irányú méreteltérés esetén pedig több habarcs szükséges. A habarcs hővezető képessége jellemzően nagyobb mint egy falazóelemé, ezért a feltételezésem az volt, hogy az alsó tűréshatárral rendelkező elemekből épített fal kalorikus hőátbocsátási tényezője és így a veszteségárama a névleges méretű falazóelemekkel épített fal értékéhez képest alacsonyabb, míg a felső tűréshatár esetén magasabb lesz. Az elképzelésem, az hogy a kapcsolat a tűréshatáron belül közel lineáris lesz, hiszen nem nagy változásokról van szó, de ha a szélsőségeket is számításba vennénk, vagyis a 0 vastagságú és a téglá magasságú habarcsot is, akkor a függvény bal végén aszimptotikusan közelítene a minimális U-hoz, a jobb végén pedig a maximális U-hoz.

A téglák névleges magasságát úgy határozzák meg, hogy egy megadott habarcsréteggel kiegészítve egy jól definiált raszter álljon elő. A feladat során egy 23.8 cm névleges magasságú elem vizsgálatát végzem, melyeket egy 1,2 cm magas habarcsréteg egészít ki 25.0 cm magasságra. A fal modelljét ennek megfelelően úgy építettem fel (40. ábra), hogy két falazóelemet helyeztem el egymás fölé. Az alsó magasságát minden esetben 25 cm-re egészítettem ki a két elem közé helyezett habarcs magasságának változtatásával, a felső elemre eső habarcsmagasságot pedig 2 egyenlő részre osztva az alsó elem alá, illetve a felsőre helyeztem. Tegyük fel, hogy a gyár által megadott, a magasságra vonatkozó mérettűrés:  $\pm 4$  mm.



40. ábra

A téglafal modellje

A számításhoz a 41. táblázat adatait használtam, az eredményeket pedig a 42. táblázat mutatja.

Tégla: 38x25x23,8 cm

$\lambda_{\text{tégla}}$	$d_{\text{tégla}}$	$\lambda_{\text{b-vakolat}}$	$d_{\text{b-vakolat}}$	$\lambda_{\text{k-vakolat}}$	$d_{\text{k-vakolat}}$	$\lambda_{\text{habarcs}}$	$d_{\text{habarcs-lezáró}}$	$t_i$	$t_e$
[W/mk]	[m]	[W/mk]	[m]	[W/mk]	[m]	[W/mk]	[m]	[C]	[C]
0.2	0.38	0.6	0.02	0.6	0.02	0.8	0.06	20	-5

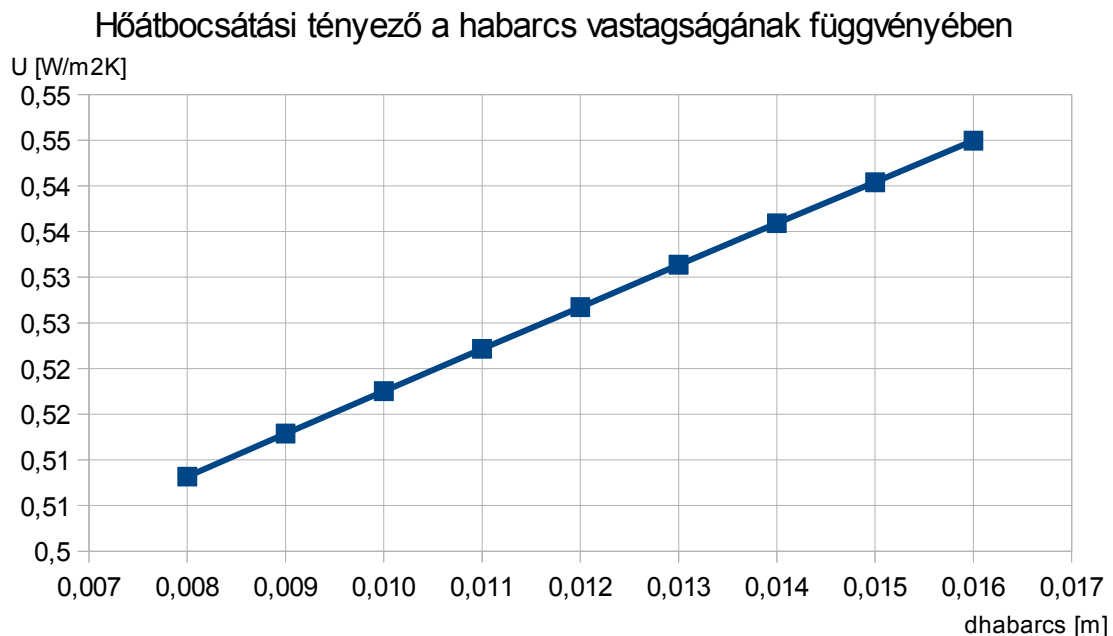
41. táblázat

A számításhoz használt adatok



$h_{\text{tégla}}$ [m]	$h_{\text{vakolat}}$ [m]	Q [W]	U [W/m <sup>2</sup> K]
0,234	0,016	13,624	0,545
0,235	0,015	13,51	0,540
0,236	0,014	13,398	0,536
0,237	0,013	13,284	0,531
0,238	0,012	13,168	0,527
0,239	0,011	13,054	0,522
0,240	0,010	12,938	0,518
0,241	0,009	12,822	0,513
0,242	0,008	12,704	0,508

42. táblázat  
A számítás eredménye



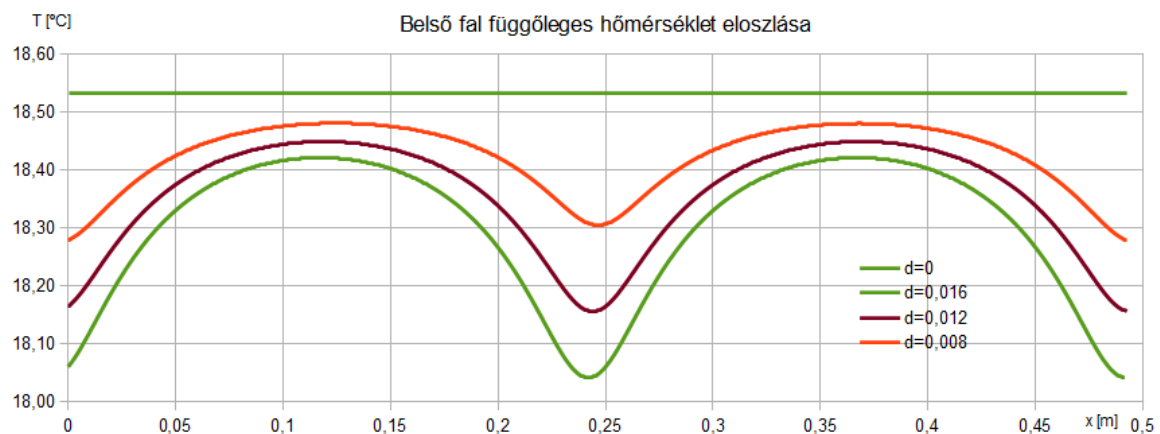
43. grafikon  
A hőátbocsátási tényező változása falban a habarcsréteg vastagságának függvényében, a mérettűrésen belül

Az eredmény alapján elkészített grafikus függvényből (43. grafikon) több dolog is leolvasható. Először is, ami az előzetes feltevés volt, hogy lineárisan változik a hőátbocsátási tényező a habarcsréteg változásával. Ha növeljük a habarcsréteget (vele párhuzamosan csökkentjük a falazóelem magasságát), akkor növekszik a hőátbocsátási tényező értéke.

Egy kis számolás után azt is megkaphatjuk, hogy a névleges értékhez képest 7% különbség adódik a két szélső érték által meghatározott hőátbocsátási tényező között. Ez meglehetősen magas érték, figyelembe véve, hogy szigeteléssel mekkora megtakarításokat érhetünk el.

Ne feledjük azonban, hogy a modellünk szélsőséges feltevésen alapul. Azt feltételeztük, hogy a falazatot a mérettűrésen belül, **azonos** méretű falazóelemek alkotják. Ez pedig egy véletlen mintavétel esetén nem állhat fenn. A téglák mérete a névleges méret körül szór normális eloszlással, ami azt jelenti, hogy lesznek közöttük pozitív és negatív irányba változó méretek is és ezek nagy számok esetén nagyjából kiegyenlítődnek.

Pusztán kíváncsiságból megnéztem a belső fal hőeloszlását a különböző habarcsvastagságok esetén és összevettem azzal az esettel, amikor egyáltalán nincsen habarcs (felső zöld vonal - 44. grafikon)



44. grafikon  
Belső fal függőleges hőmérséklet eloszlása különböző habarcsvastagságok esetén

Azt láthatjuk, hogy az téglá a teljes keresztmetszetében tiszta hőhíd. Minden egyes blokk esetén az alsó és felső szélén induló hőhíd összeér, nincs hely a kifutásának.

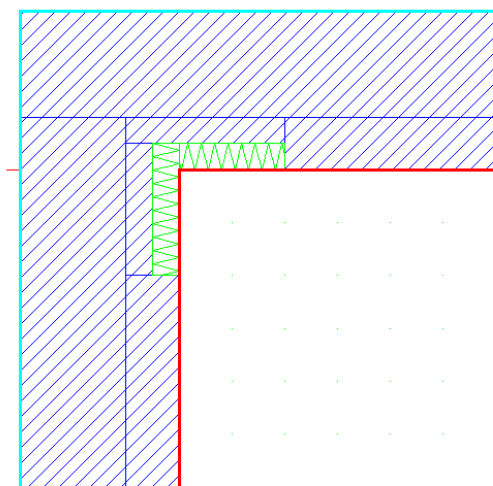
### 4.3. Belső sarok hőszigetelésének vizsgálata

A belső terek pozitív falsarkaiban és annak közelében a rossz tervezés eredményeként kedvezőtlen hőmérsékleti viszonyok állhatnak elő. Az épület külső hőszigetelését bizonyos esetekben (pl. értékes homlokzati kép) nem lehet elvégezni, ezért arra kényszerülünk hogy a sarok hőmérsékletének növelése érdekében belső hőszigetelést hozzunk létre. A feladat során csupán hőtechnikai szempontokat vizsgálók.

A feltételezésem az, hogy a a sarkokba elhelyezett, adott hosszúságban és vastagságú hőszigetelő anyag hatására a sarkok hőmérséklete megemelkedik. Minél vastagabb illetve hosszabb a szigetelőanyag annál magasabb lesz a hőmérséklete. Ezenkívül a vastagság és

hosszúság növelésével a hőveszteség is csökkenni fog.

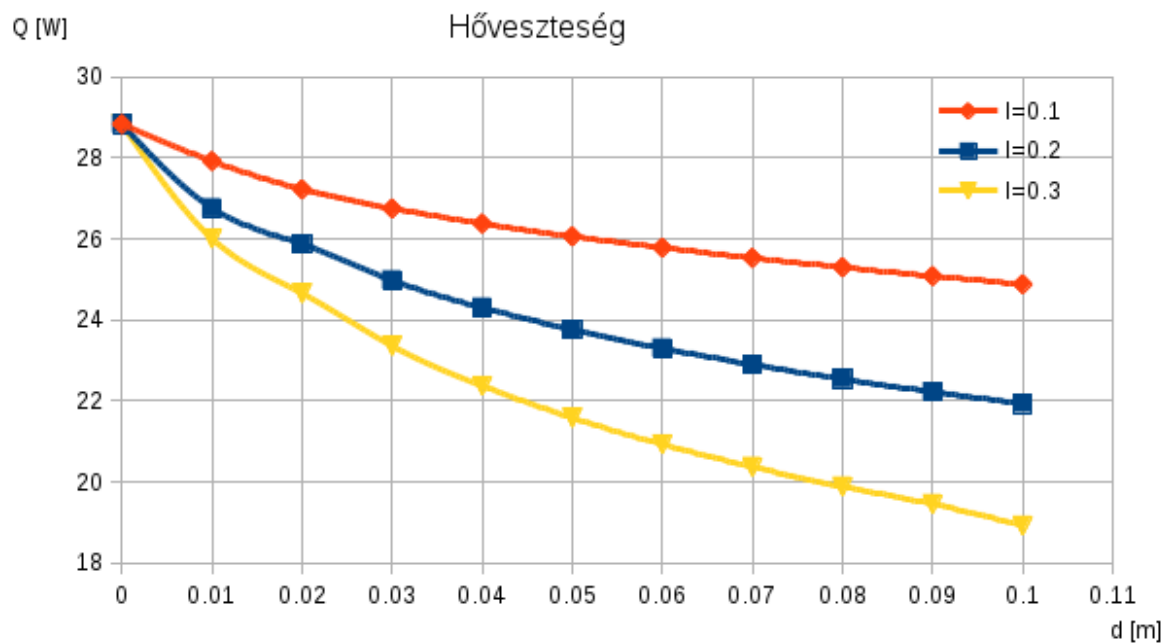
10, 20 és 30 cm hosszú szigeteléseket fogok vizsgálni, melyek vastagsága 0 cm-től 10 cm-ig változik. A szigetelőanyagot a fal síkjába helyezem. A fal hővezető képességét 0.3 W/mK-nek, a szigetelését pedig 0.04 W/mK-nek veszem (45. ábra).



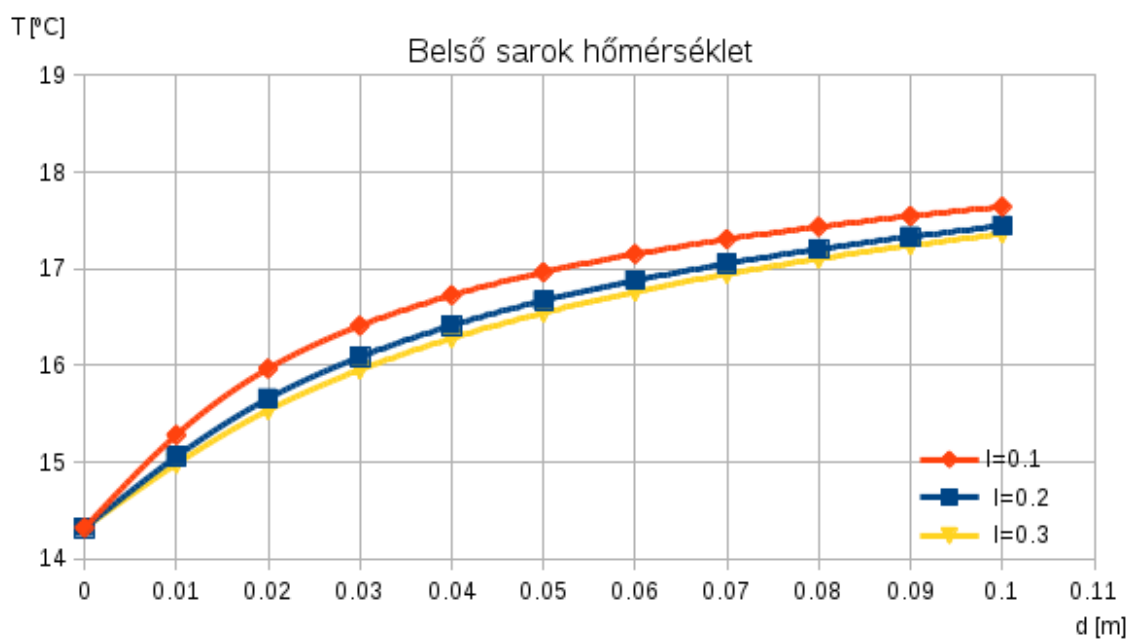
45. ábra  
A belső hőszigetelés modellje

$\lambda_{\text{fal}}$ [W/mK] 0.3		$\lambda_{\text{szigeteles}}$ [W/mK] 0.04				
$d_{\text{szigeteles}}$ [m]	$l_{\text{szigeteles}}$ [m]					
	0.1		0.2		0.3	
	$Q_i$ [W]	$T_i$ [°C]	$Q_i$ [W]	$T_i$ [°C]	$Q_i$ [W]	$T_i$ [°C]
0	28.838	14.321	28.838	14.321	28.838	14.321
0.01	27.926	15.282	26.764	15.058	26.012	14.982
0.02	27.228	15.968	25.874	15.658	24.66	15.538
0.03	26.754	16.412	24.982	16.088	23.358	15.955
0.04	26.382	16.727	24.306	16.414	22.372	16.282
0.05	26.066	16.965	23.76	16.671	21.584	16.545
0.06	25.788	17.153	23.298	16.88	20.93	16.762
0.07	25.534	17.307	22.898	17.054	20.372	16.946
0.08	25.302	17.435	22.542	17.203	19.886	17.103
0.09	25.086	17.546	22.224	17.331	19.454	17.241
0.1	24.884	17.642	21.934	17.445	18.92	17.362

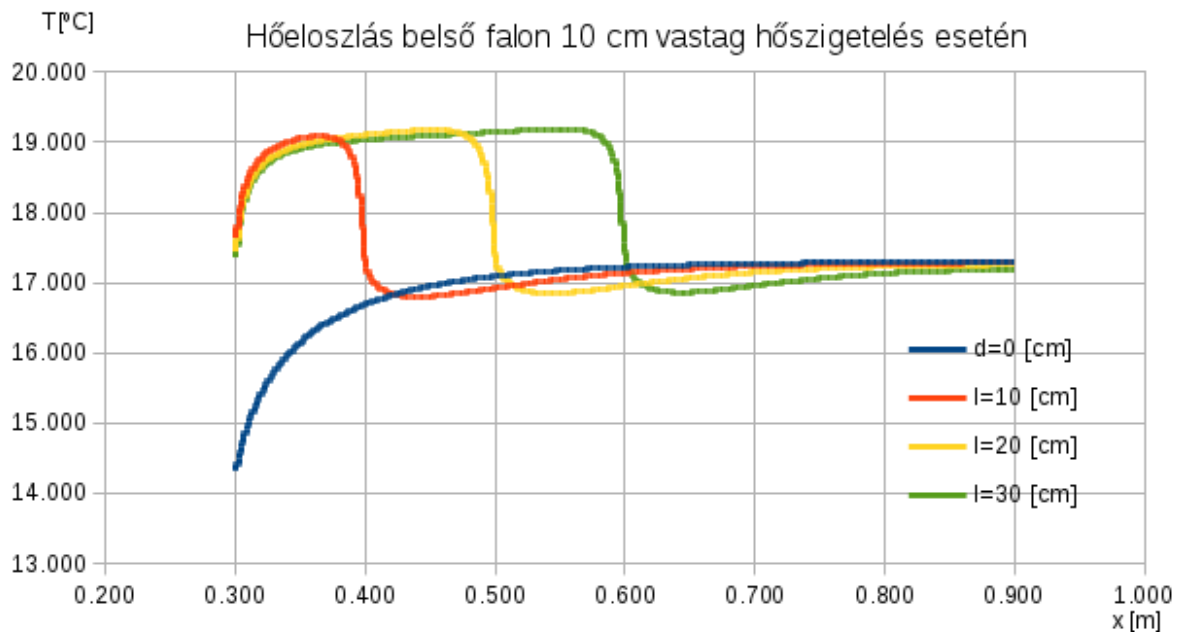
46. táblázat  
A számítás eredménye a sarok hőmérsékletének alakulásáról



47. grafikon  
Hővesztés változása a falsarokban a szigetelés méretének függvényében



48. grafikon  
A belső sarok hőmérsékletének változása a szigetelés méretének függvényében



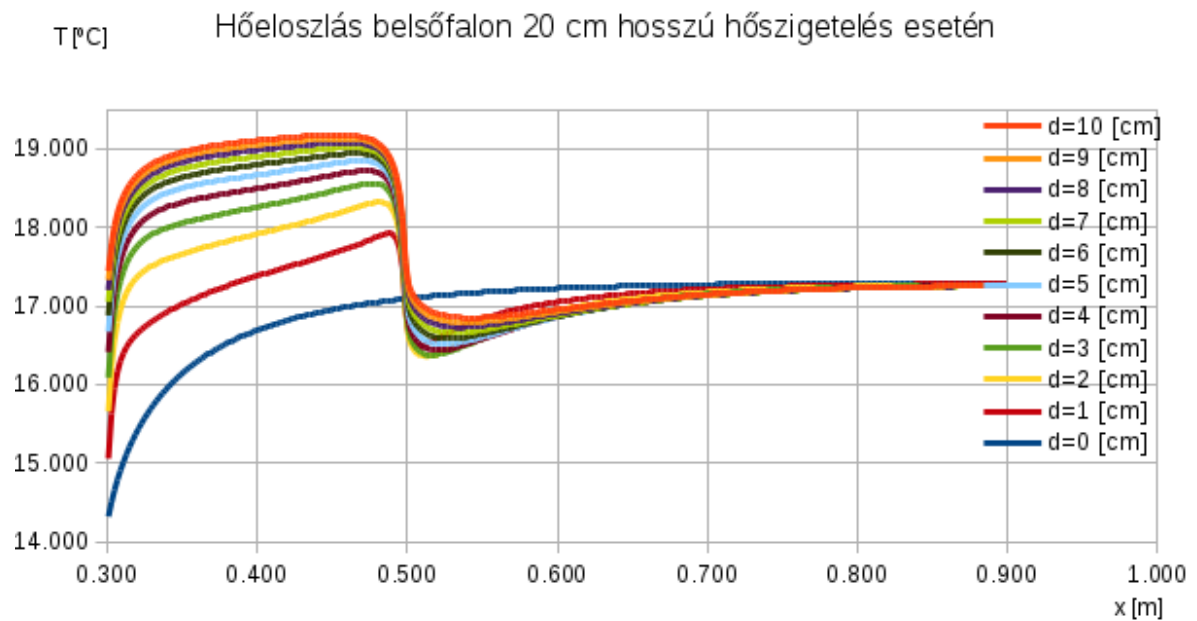
49. grafikon

A fal felületének hőeloszlása a belső saroktól kifelé, különböző hosszúságú 10cm vastag hőszigetelés esetén

A sarok hőmérsékletének alakulását táblázatba foglaltam (46. táblázat). Az ebből alkotott hőveszteség diagram (47. grafikon) nem okoz meglepetést. Láthatjuk, hogy mind a vastagság mind a hosszúság növelésével csökken a sarok hővesztesége. Az is kitűnik, hogy a csökkenés nem lineáris hanem aszimptotikus jellegű. A méretek növelésével egyre kevésbé csökken a veszteség.

A hőmérséklet alakulása (48. grafikon) azonban egy kissé meglepett. Azt láthatjuk, hogy adott hőszigetelő vastagság esetén a hossz növelésével ahelyett, hogy nőne, **csökken** a sarok hőmérséklete. Csupán néhány tized fokról van szó, mégis érdekesnek találtam, ezért megvizsgáltam, a saroktól kifelé a hőmérséklet eloszlást 10 cm vastag hőszigetelő réteg esetén 3 különböző hosszra (49. grafikon). Itt jól látható, hogy a rövidebb hőszigetelő anyag magasabb hőmérsékletet biztosít, mint a hosszabb majdnem a szigetelés teljes hosszában. A saroktól a legtávolabbi pontjában persze visszaesik a hőmérséklet, de ami tényleg meglepő, az az, hogy a visszaesés hőmérséklete **alacsonyabb**, mint a hőszigetelés nélküli fal hőmérséklete (kék vonal).

Hogy ezt szemléletesebben mutathassam be, elkészítettem egy másik ábrát (50. grafikon), melyen 20 cm hosszú és különböző vastagságú hőszigetelő rétegek esetén előálló hőeloszlás látható.



50. grafikon

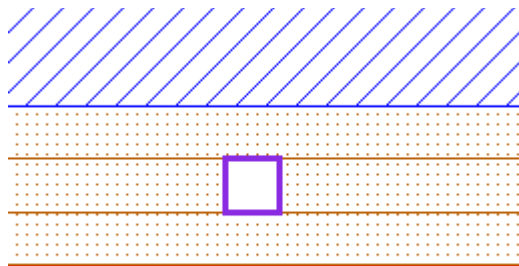
*A fal felületének hőeloszlása a belső saroktól kifelé, különböző vastagságú 20cm hosszú hőszigetelés esetén*

Itt egyértelműen kitűnik, hogy fal hőmérséklete a szigetelés hosszában ugyan magasabb az eredeti, szigetetlen értéknél (sötét kék), de közvetlenül utána egy **jelentős visszaesés** következik be, ahonnan kezdve végig alacsonyabb lesz mint a szigetetlen esetben (aszimptotikusan közelít hozzá). Másik figyelemre méltó viselkedés, hogy a visszaesés mértéke annál nagyobb minél vékonyabb a szigetelő réteg és hőmérséklet csökkenés a csúcsponton akár Celsius fok nagyságrendű is lehet.

#### 4.4. Falfűtés hatékonyságának vizsgálata

Szintén érdekes probléma a falfűtés veszteségeinek illetve hatékonyságának a kérdése. A gépészek ugyanis az általuk használt képletek és eljárások segítségével nem tudják meghatározni a veszteségáramokat. Energetikusként azonban kíváncsiak lehetünk, hogy milyen hatékonysággal dolgozik a rendszerünk vagyis a rendszerbe (falba) bejuttatott ( $Q_0$ ) és a falból a helyiség felé beáramló ( $Q_{be}$ ) hőáram hányadosára.

Egy 60 cm széles falszakaszt fogok vizsgálni (51. ábra). A fal belső oldalán 3 cm vastag adott hővezető képességű vakolat helyezkedik el, melynek középső 1 cm-es rétegébe helyeztem el a falfűtés előremenő csővezetékét. A csövek keresztmetszetét négyzet alakúnak vettem fel, egyszerűsítendő a feladatot és tudván a méretek alapján, hogy ezzel durva hibát nem követek el., A falszakaszon 5 csövet egymástól 10 cm távolságban helyeztem.



51. ábra

Vakolatba (Barna 3 x 1cm) ágyazott fűtési cső (Lila) modellezése

A vakolati rétegben elhelyezett négyzet alakú „lyukak” belső felületére elméletileg elsőfajú peremfeltéttel kellene a cső hőmérsékletét megadni, hiszen itt sem sugárzásos sem konvekciós hőátadás nem lép fel. Azonban én mégis harmadfajú peremfeltételt írok elő itt, annak okán, hogy a program megvalósítása során az elsőfajú peremfeltétel kimaradt. Az  $\alpha$  megfelelően magas értéke (999 W/m<sup>2</sup>K) szavatolja, hogy itt se vigyünk be nagy hibát a rendszerbe.

Azt fogom vizsgálni, hogy egy adott csőhőmérséklet (30 °C) és falvastagság (30 cm) mellett hogyan változik a helyiség felé áramló és a rendszerbe jutó hőáramok aránya a fal hővezetési ellenállásának függvényében. Két, nagy és egy kis hővezető képességű vakolatra fogom elvégezni a számítást.

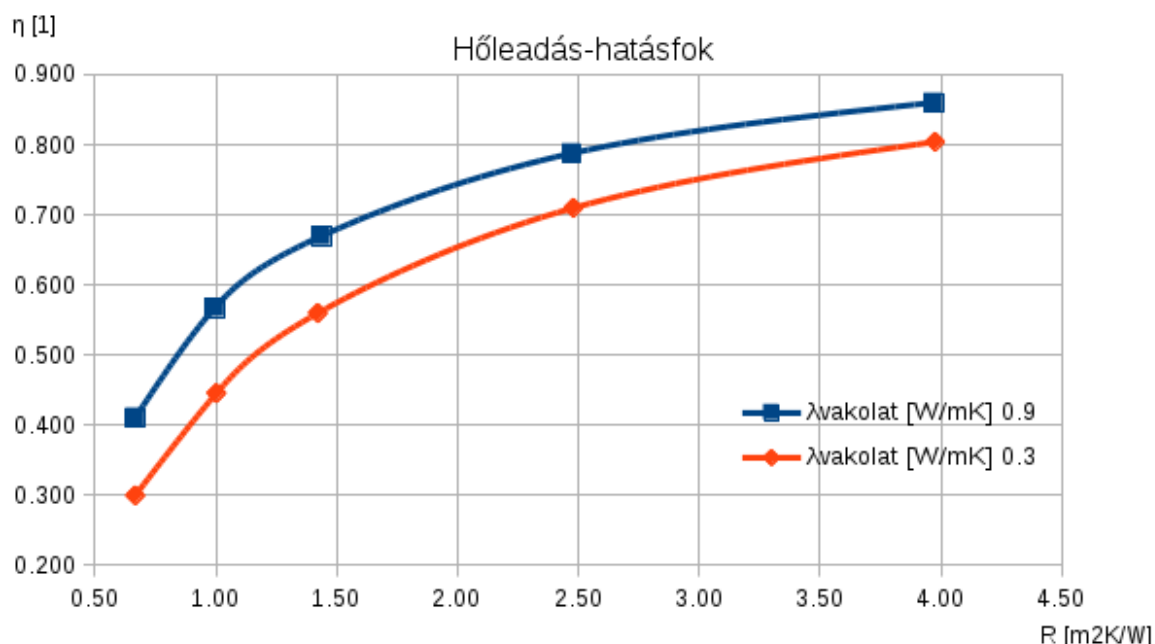
Azt gondolom, hogy a hatékonyság nőni fog a vakolat hővezető képességének növelésével ugyan úgy mint a fal ellenállásának növelésével. Mivel a hatékonyság egy véges mennyiség, ezért feltételezhető az is, hogy ez a növekedés aszimptotikus jelleggel fog az 1 érték felé tartani.

A számítás eredményét a 52. táblázat mutatja, melyet grafikusán ábrázolva szemléletesebben mutatja a változás jellegét (53. grafikon). Azt láthatjuk, hogy egy hagyományos belső vakolat esetén a 80%-os hatékonyság eléréséhez elegendő egy 0.4 W/m<sup>2</sup>K hőátbocsátási képességű fal, azonban egy jó hővezető képességű vakolat alkalmazása már 0.25 W/m<sup>2</sup>K hőátbocsátási képességű falat követel. Így tehát egy falfűtés tervezése komolyabb gazdasági elemzés igényel.

Hőleadás hatásfoka													
<div><math>\alpha_i</math> [W/m²K] 8</div>							<div><math>t_i</math> [°C] 20</div> <div><math>t_e</math> [°C] -5</div> <div><math>t_0</math> [°C] 30</div> <div><math>\alpha_e</math> [W/m²K] 24</div> <div><math>d_{falazo}</math> [m] 0.38</div> <div><math>d_{vakolat}</math> [m] 0.003</div>						
<div><math>\lambda_{vakolat}</math> [W/mK] 0.9</div>							<div><math>\lambda_{vakolat}</math> [W/mK] 0.3</div>						
$\lambda_{fal}$ [W/mK]	U [W/m²K]	R [m²K/W]	$Q_0$ [W]	$Q_i$ [W]	$Q_e$ [W]	$\eta$ [1]	$\lambda_{fal}$ [W/mK]	U [W/m²K]	R [m²K/W]	$Q_0$ [W]	$Q_i$ [W]	$Q_e$ [W]	$\eta$ [1]
0.77	1.50	0.67	64.02	26.27	37.75	0.41	0.78	1.50	0.67	42.37	12.67	29.69	0.30
0.46	1.00	1.00	49.62	28.15	21.47	0.57	0.46	1.00	1.00	34.84	15.51	19.33	0.45
0.30	0.70	1.44	43.70	29.26	14.44	0.67	0.31	0.70	1.42	30.54	17.09	13.45	0.56
0.17	0.40	2.47	38.43	30.27	8.16	0.79	0.17	0.40	2.48	26.22	18.61	7.61	0.71
0.10	0.25	3.97	35.81	30.79	5.01	0.86	0.10	0.25	3.98	24.06	19.34	4.71	0.80

52. táblázat

A számítás adatai és eredménye a falfűtés hatékonyságának vizsgálatához



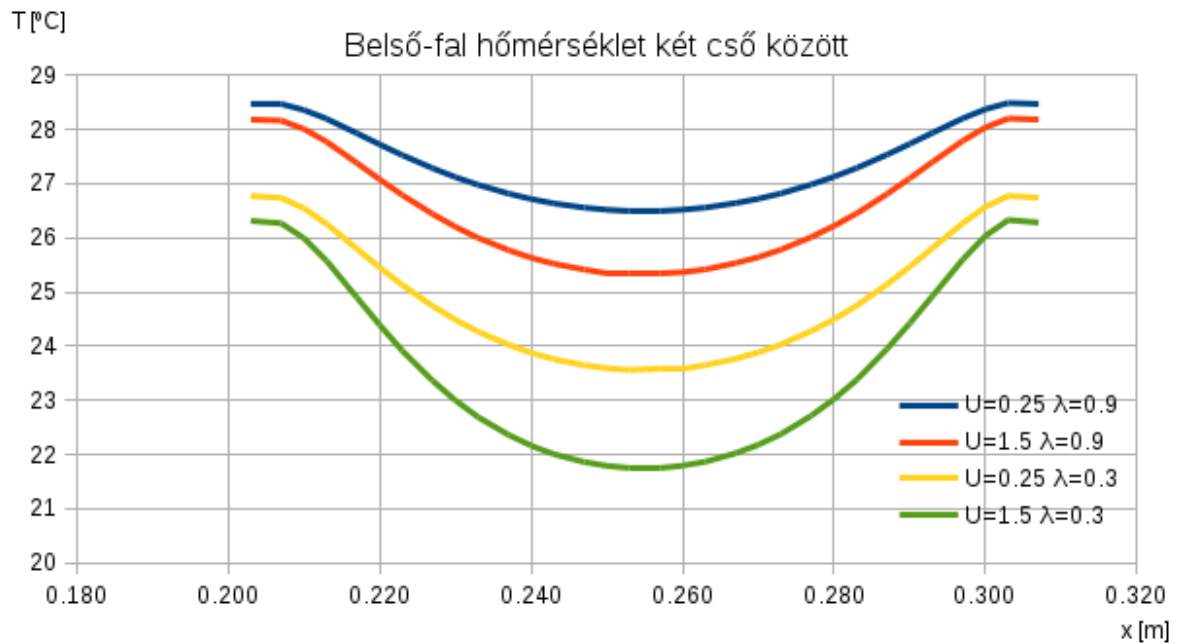
53. grafikon

A hőleadás hatásfokának változása a fal hővezetési ellenállásának függvényében

Ezen kívül megvizsgáltam a belső fal hőeloszlását két cső között két különböző  $U_{fal}=1.5$  és  $U_{fal}=0.25$  esetre az előzőleg ismertetett két vakolat alkalmazásával. Azt feltételeztem, hogy a rosszabb hővezető képességű vakolat alacsonyabb hőmérsékletet viszont egyenletesebb hőeloszlást eredményez a falon.

Az eredmények most sem igazolták egy az egyben az elképzeléseimet (54. grafikon)





54. grafikon

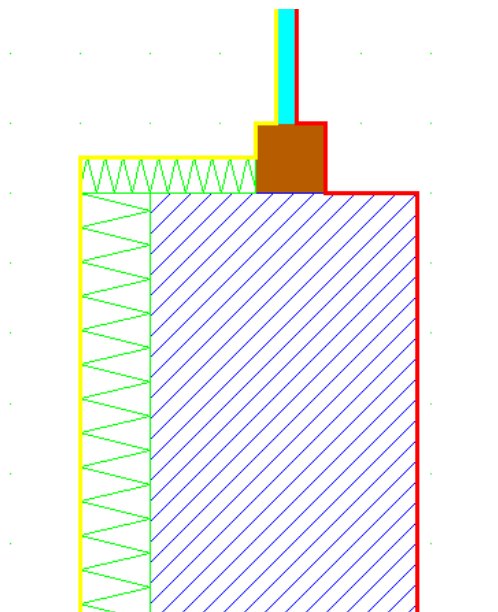
*Belső fal hőmérsékletének alakulása különböző  $\lambda$ -jú vakolatok és  $U$ -ju falazatok esetén*

A kisebb hővezető képességgel rendelkező vakolat illetve a kisebb hőátbocsátási képességgel rendelkező falazat egyenletesebb hőeloszlást biztosít a belső falfelületen.

#### 4.5. Külső hőszigetelés kapcsolata az ablakpárkánnyal

Külső hőszigetelések munkálatai során felmerül a kérdés, hogy a hőszigetelés forduljon-e be a párkányra, egészen az ablakkeretig, és ha igen akkor milyen vastagságban. Gyakran az az ellenérv hangzik el, hogy eltűnik az ablakkeret, így az ablak furcsán néz ki. Én személy szerint nem értek egyet ezzel a nézettel és az előzetes véleményem az, hogy a teljes szigetelésvastagsággal be kell fordulni.

Ennek a kérdésnek a megválaszolásához készítettem el a modellt (55. ábra) és végeztem el a számításokat különböző vastagságú szigetelés-befordulás esetére.

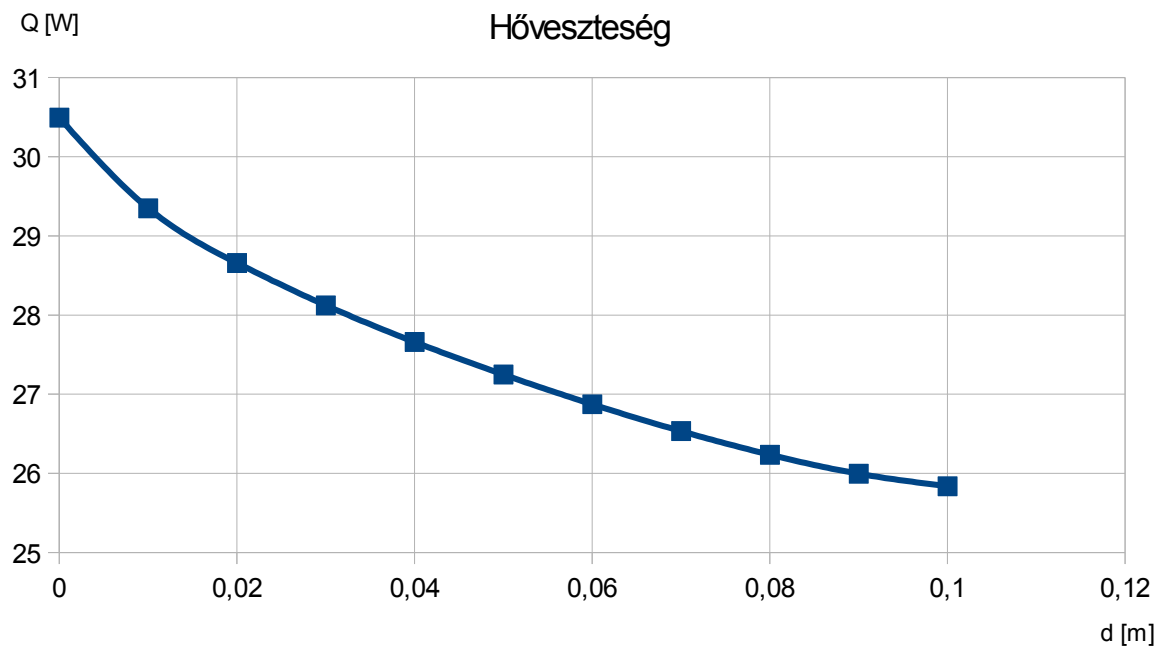


55. ábra  
Hőszigetelés befordulás az ablakkeretre modell

Az csomópont veszteségét és a párkány valamint az ablakkeret fűtött oldali találkozási pontjának hőmérséklet alakulását a befordult hőszigetelő réteg vastagságának függvényében a 56. táblázat tartalmazza. A szemléletesség kedvéért mind két eredményt grafikusán is megjelenítettem (57. grafikon, 58. grafikon)

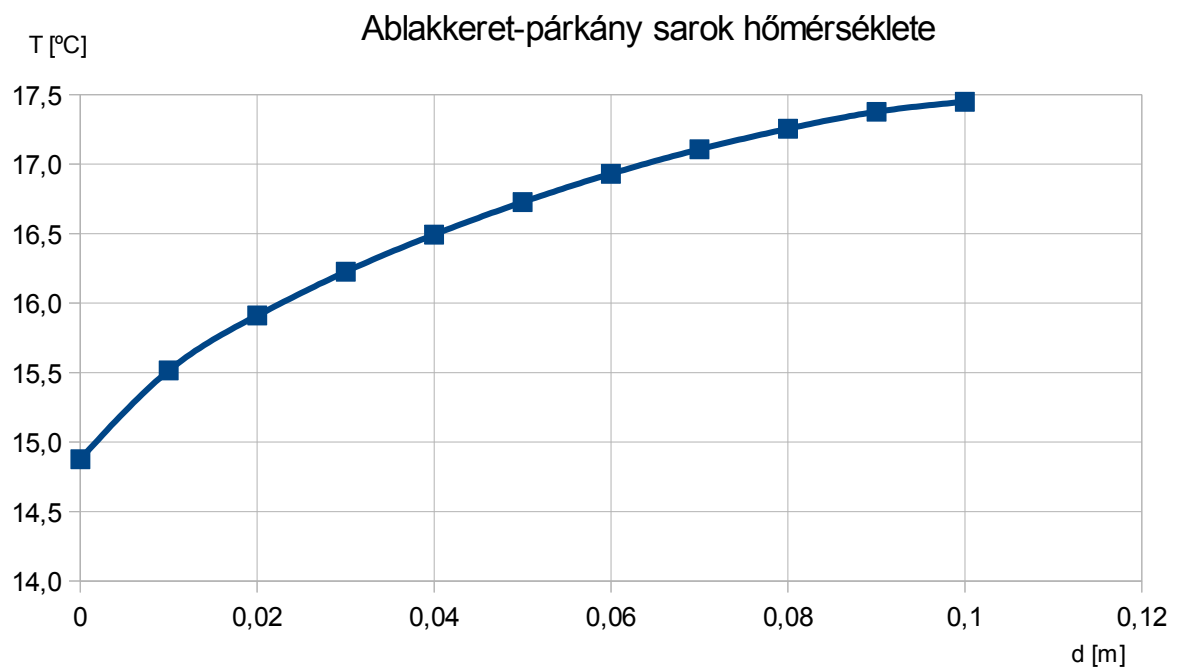
Külső hőszigetelés befordulása az ablakkeret felé				
$\lambda_{\text{fal}}$ [W/mK]	$\lambda_{\text{keret}}$ [W/mK]	$\lambda_{\text{egyen-üveg}}$ [W/mK]	$\lambda_{\text{szigetelés}}$ [W/mK]	$d_{\text{falazó}}$ [m]
0.3	0.18	0.08	0.04	0.38
Beforduló szigetelés vastagsága $d$ [m]	$Q_i$ [W]		$T_i$ [°C]	
0	30.493		14.877	
0.01	29.349		15.515	
0.02	28.657		15.911	
0.03	28.122		16.226	
0.04	27.66		16.493	
0.05	27.248		16.727	
0.06	26.873		16.931	
0.07	26.534		17.107	
0.08	26.236		17.255	

56. táblázat  
A számítás eredménye a hőszigetelés befordulásának vizsgálatához



57. grafikon

*A hővesztés alakulása a befordított hőszigetelés vastagságának függvényében*



58. grafikon

*Az ablakkeret-párkány belső sarokhőmérsékletének alakulása*

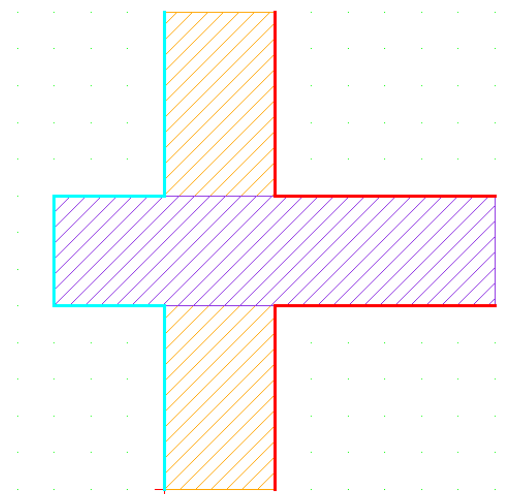
Jól kitűnik, hogy mind két függvény aszimptotikus jellegű, az elején, a vastagság növekedés kezdetén, még gyorsak a változások, a vége felé, a vastagság maximumához közeledve viszont mind a veszteség növekedése, mind a hőmérséklet növekedés mértéke csökken. Tehát

az első 4 cm-nyi hőszigetelés-befordulás akár 1,6 °C hőmérséklet emelkedést is okoz a vizsgált pontban és 2.8 W teljesítmény nyereséget a vizsgált területen, ellenben egy újabb 4 cm már csak 0.7 °C-ot és 1 W-ot.

Így tehát azt lehet mondani, hogy nincs értelme minden határon túl növelni a hőszigetelés-befordulás vastagságát, viszont a kezdeti nagy nyereségeket mindenképpen érdemes kihasználni és legalább 4-5 cm-t választani.

#### 4.6. Erkélyfödém vizsgálata

Végére hagytam a számomra legfurcsább eredménnyel záruló vizsgálatot. Kíváncsi voltam arra, hogy egy födém-túlnyúlás, melyet jellemzően erkélyek kialakításakor alkalmaznak, és számtalan esetben láthat az ember családi házak utcafrontján, mennyire növeli meg az épület energiaveszteségét. Egész pontosan azt szerettem volna megmutatni, hogy hogyan változik a hőveszteség a födém túlnyúlásának növelésével illetve csökkentésével. (59. ábra). Az egyszerűség kedvéért nem hőszigeteltem sem a födémeket, sem a felmenő falak külső síkját, sőt vakolat sem került rá.



59. ábra  
Erkélyfödém modellje

Az volt a feltételezésem, hogy a túlnyúlás növelésének függvényében a hőveszteség először gyorsan növekszik, majd egy exponenciális függvény mentén tart egy, a túlnyúlás nélküli értékéhez képest egy határozottan magasabb értékhez. Sem a hőáram növekedésében sem az exponenciális jelleg felől nem volt kétségem. Valahogy úgy éreztem, hogy a megnövekedett felületen kezdetben több áram tud kifolyni, viszont egy jó nagy távolság után a födém-túlnyúlás már teljesen átveszi a környezete hőmérsékletét, tehát megszűnik a szerepe a

hővezetést illetően.

Lefuttattam a szimulációt különböző hosszúságokra véletlenszerűen felvett adatokkal, és azt kaptam eredményül, hogy nem hogy nőtt volna, de **csökkent a hőveszteség a túlnyúlás hatására** (62. grafikon-kék vonal). Az exponenciális jelleg megvolt ugyan, gyakorlatilag a földém vastagságának megfelelő távolságra már beállt egy állandó értékre, azonban a csökkenő tendencia szöges ellentétben állt az elképzeléseimmel, ami elgondolkodtatott. Először azt hittem, hogy rossz a modell, ezért lefuttattam ugyan ezt az esetet a KOBRA nevezetű 2D hőhíd szimulációs szoftveren is, de szerencsére azonos eredményt kaptam.

Mindenképpen szerettem volna megmagyarázni a jelenséget ezért arra gondoltam, hogy kicsit jobban utána járok, hátha valamilyen ismert fizikai törvény leírja ezt a viselkedést, vagy legalábbis következtetni lehet belőle rá. Egy kis segítséggel eljutottam az úgynevezett **bordahatás** effektushoz, melynek ismertetését a következő alfejezet tartalmazza.

De még a bordahatás megismerése előtt beláttam, hogy egy olyan bonyolult kapcsolatrendszer áll fenn a hővezetési tényező, a hőátadási tényező és a geometria között, melyet egyszerű okoskodással nem lehet végig követni. Ennek ellenére ragaszkodtam ahhoz, hogy az általam várt függvénynek léteznie kell, és ha ez így van, akkor létezik egy olyan összeállításnak is, amikor a borda hosszának egyáltalán nincs hatása a hőveszteségre. Azt gondoltam, hogy ha kiválasztok egy épületfizikai paramétert, melyet széles tartományban változtatok, miközben a többi paramétert változatlanul hagyom, akkor megtalálhatom azt a pontot amikor az átfordulás megtörténik.

Belátom, hogy ez nem egy tudományos megközelítés, de az adott körülmények között nem volt a kezemen más eszköz. A választásom a külső hőátadási tényezőre esett. A szabványos  $24 \text{ W/m}^2\text{K}$ -nel felvett függvény már rendelkezésemre állt. Lecsökkentettem  $4 \text{ W/m}^2\text{K}$ -re, majd néhány próbálkozás után a két érték között kiválasztottam a  $8 \text{ W/m}^2\text{K}$  értéket. A 60. ábra adatait használva a kapott eredményeket a 61. táblázat mutatja.

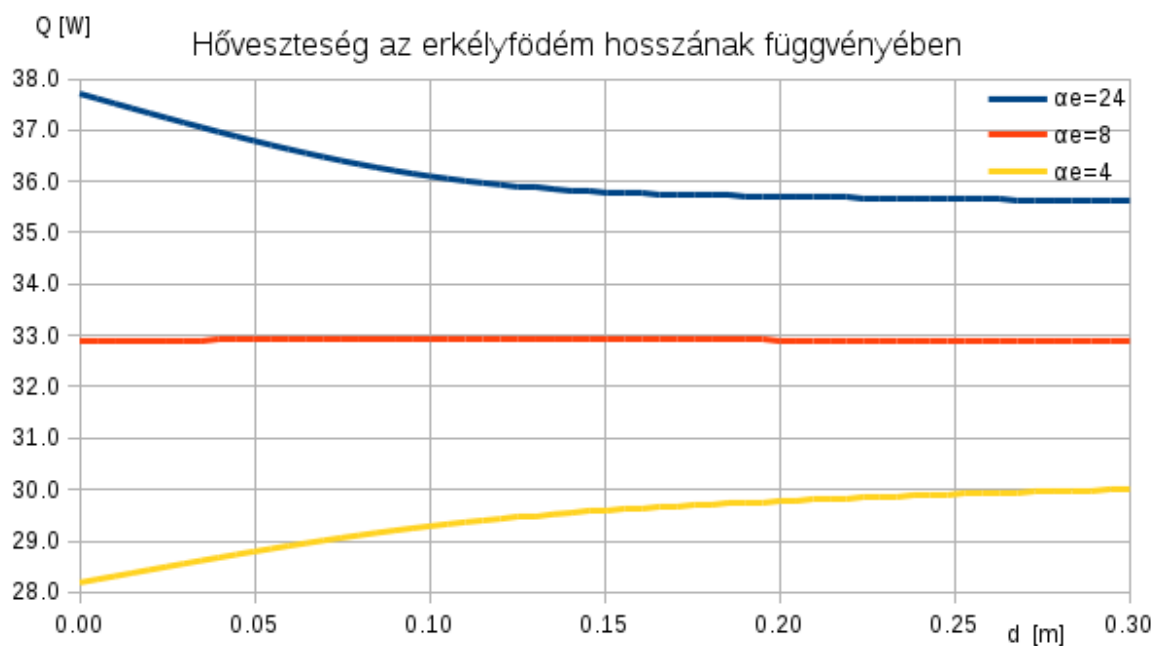
$t_i$	$\alpha_i$	$t_e$	$\lambda_{\text{tégla}}$	$\lambda_{\text{földém}}$
[°C]	[W/m <sup>2</sup> K]	[°C]	[W/mK]	[W/mK]
20	8	-5	0.2	1.55

60. ábra  
A számításhoz használt adatok

X [m]	Q [W/m <sup>2</sup> K]		
	$\alpha_e=24$	$\alpha_e=8$	$\alpha_e=4$
0.0	37.709	32.903	28.188
0.1	36.102	32.917	29.287
0.2	35.708	32.91	29.774
0.3	35.621	32.908	29.996
0.4	35.603	32.907	30.095
0.5	35.597	32.906	30.141
1.0	35.597	32.905	30.182

61. táblázat

A számítás eredménye az erkélyfödém vizsgálatához



62. grafikon

A hővesztesség alakulása különböző hőátadási tényezők esetén a túlnyúlás függvényében

Az eredményeket grafikusán is megjelenítettem (62. grafikon), melyről a következőket lehet leolvasni. Felhasznált tulajdonságú és geometriájú csomópont a külső hőátadási tényező függvényében különböző viselkedéseket mutat mind tendenciájában, mind pedig értékében. A szabvány által előírt 24 W/m<sup>2</sup>K külső hőátadási tényező alapesetben (túlnyúlás nélkül) egy magasabb hővesztést okoz, azonban a födém túlnyúlását növelve ez a veszteség fokozatosan csökkenve tart egy alacsonyabb értékhez.

Egy nagyon alacsony hőátadási tényezőt alkalmazva, a hővesztesség egy alacsonyabb értékről indul, majd a födém túlnyúlásának növelésével egyre magasabb értéket vesz fel, és szintén egy adott, azonban az előző esetnél alacsonyabb értékhez tart.

Végül megtaláltam azt a hőátadási tényezőt is melyet alkalmazva a kiindulási hőveszteség az előző kettő kiindulási értéke közé esik és szinte nem változik semmit a födém hosszának növelésével.

A következő fejezetben megpróbálok magyarázatot adni a jelenségre.

#### 4.6.1. Bordahatás

Ez a fejezet egy kis kitekintés, nem tartozik szorosan a témához, de a probléma mélyebb megértéséhez elengedhetetlen. Az itt ismertetésre kerülő effektus leírását a [5] forrás tartalmazza.

Tekintsünk egy ismert hővezető képességgel rendelkező rudat, melynek egyik végét fűtjük miközben a rúd hosszában hőmérsékletet illetve hőáramot mérünk. Egy differenciál egyenlet írja le a hőmérséklet eloszlását a rúd hossza mentén. Az egyenletnek végtelen hosszú rúd esetén egy exponenciális (63. képlet), véges hosszúság esetén pedig egy hiperbolikus függvény (64. képlet) a megoldása.

$t(x) = (t_0 - t_\infty) e^{-mx} + t_\infty$	$t(x) = (t_0 - t_\infty) \frac{\cosh(m(H-x))}{\cosh(mH)} + t_\infty$
63. képlet Állandó keresztmetszetű végtelen hosszúságú rúd hőmérsékletének alakulása	64. képlet Állandó keresztmetszetű véges hosszúságú rúd hőmérsékletének alakulása

$t_0$  -Hőmérséklet a rúd hőforrás felőli végén

$t_\infty$  -A hőforrástól végtelen távolságra lévő hőmérséklet (környezeti hőmérséklet)

$H$  -Véges hosszúságú rúd hossza

$x$  -Távolság a hőforrástól

$m$  -Bordaparaméter  $\sqrt{\frac{\alpha L}{\lambda A}}$

$A$  -Borda keresztmetszet

$L$  -Keresztmetszet kerülete

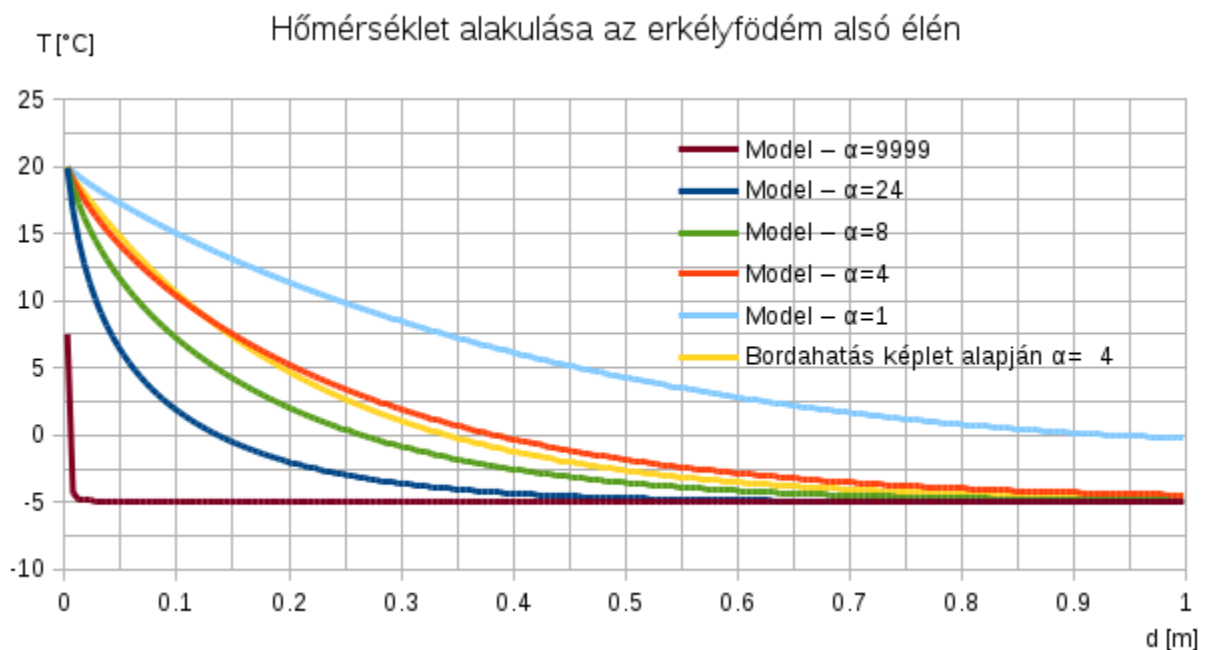
Az első lépésként ábrázolni szeretném a hőmérséklet eloszlást a borda felülete mentén különböző hőátbocsátási tényezők esetén (66. grafikon). Ehhez most egy egyszerűbb modellt készítettem, hogy egyéb tényezők ne befolyásolják az eredményt. Vettem tehát csak a födém, mint bordát, melynek egyik végére egy első fajú peremfeltétellel előírtam a  $t_i$  hőmérsékletet. (mint említettem a modellemből hiányzik az első fajú peremfeltétel, ezért

harmadfajú peremfeltétellel helyettesítettem, ahol a hőátadási tényező nagyon nagy (9999 W/m<sup>2</sup>K)), a maradék három élére pedig harmadfajú peremfeltétellel előírtam a környezeti hőmérsékletet ( $t_e$ ) valamint az egyes esetekben a hőátadási tényezőket (65. ábra).

$t_i$	$\alpha_i$	$t_e$	$\lambda_{\text{borda}}$
[°C]	[W/m <sup>2</sup> K]	[°C]	[W/mK]
20	9999	-5	1.55

65. ábra  
A számításhoz használt adatok

A feladatot két módon is megoldottam. Egyszer a szoftverem számítása, majd az ismertetett képlet alapján (64. képlet). A grafikonon megjelenő vonalak a szoftver eredményei, de, az összehasonlítás kedvéért sárga vonallal láthatóvá tettem a képlettel számolt görbét is,  $\alpha=4$  W/m<sup>2</sup>K esetetére. Elmondható, hogy tendenciájában a két számolt eredmény jól illeszkedik, de vannak kisebb eltérések. Ennek okait lehetne vizsgálni, de ez nem tárgya a dolgozatomnak, úgyhogy eltekintek tőle. Egy dolgot azért megemlítek. A modellem két dimenziós, és mint ilyen nehezen értelmezhetőek rajta az L és A paraméterek.



66. grafikon  
Hőmérséklet alakulása a borda alsó síkjában, modell számítással és képlettel

Hogyan is értelmezzük ezt az ábrát? Azt látjuk, hogy minél kisebb a hőátadási tényező, annál inkább egyenletesebben adja le a hőt a hossz mentén. Ez az ábrán úgy jelentkezik, hogy a hőmérséklet a hossz mentén csak lassan közeledik a környezeti hőmérséklethez. Sajnos egy



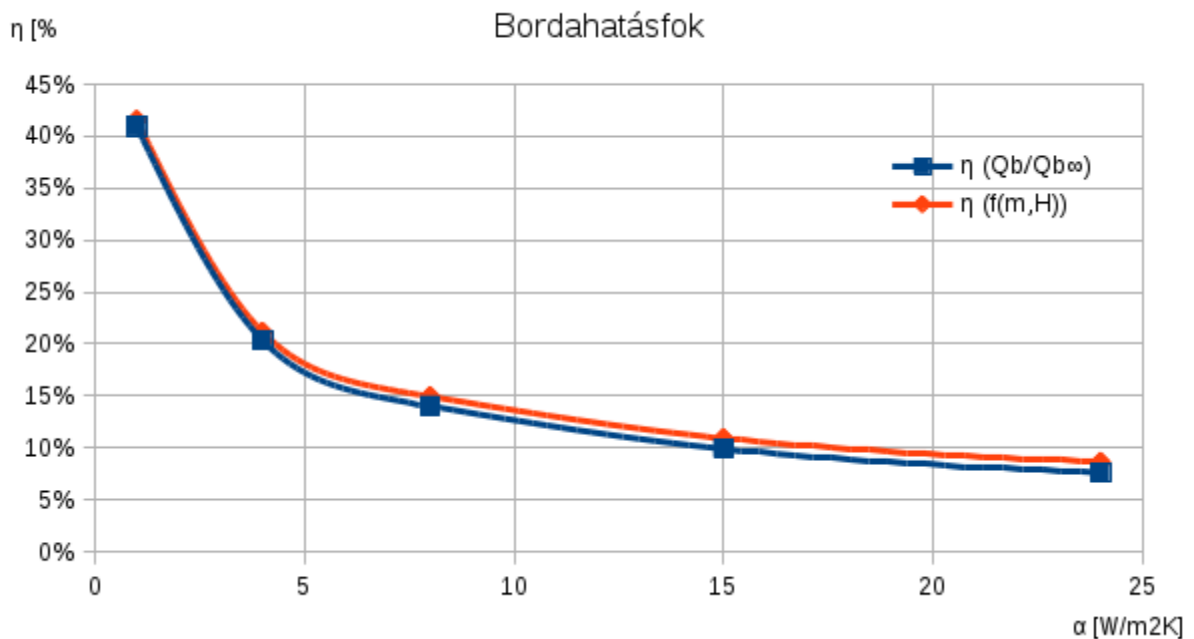
kicsit megtévesztő lehet az ábra. A különböző függvények alatti területek ugyan arányosak a hővesztéssel, de nem összehasonlíthatóak egymással, mert mindegyiknek külön arányossági tényezője van, a hőátadási tényező. Vagyis hiába van az  $\alpha=1 \text{ W/m}^2\text{K}$  görbe magasabban, mint mondjuk az  $\alpha=24 \text{ W/m}^2\text{K}$ , a hőleadása mégis alacsonyabb.

Sajnos ez az ábra nem segített az eredeti probléma megértésében. Most nézzünk egy új fogalmat az úgynevezett **bordahatásfokot**.

Definíció szerint, a bordahatásfokot úgy kapjuk egy adott jellemzőkkel rendelkező borda esetén, hogy a felületét elhagyó hőáramot hasonlítjuk ahhoz a hőáramhoz mely akkor alakulna ki, ha a borda végtelen nagy hővezetési tényezővel rendelkezne (67. képlet). Ezt a hatásfokot ki tudjuk fejezni a borda fizikai jellemzői segítségével is (68. képlet).

$\eta_b = \frac{Q_b}{Q_b^\infty}$	$\eta_b = \frac{\tanh(mH)}{mH}$
67. képlet Bordahatásfok értelmezése	68. képlet Bordahatásfok, borda jellemzőkkel

Vizsgáljuk meg egy kicsit jobban a 68. képletet. Tudjuk, hogy a  $\tanh()$  értéke mindig kisebb mint 1. Ha  $m$  vagy  $H$  nő, akkor a nevező nagyobb mértékben nő mint a számláló, vagyis a hatásfok csökken. Az  $m$  tartalmát figyelve tehát, a hőátadási tényezőnek és/vagy a keresztmetszet területének a növekedése csökkenő hatásfokot, a hővezető képesség és/vagy a keresztmetszet növelése viszont növekvő hatásfokot eredményez. A 69. grafikonon a hatásfok változását láthatjuk a hőátadási tényező függvényében.



69. grafikon

Bordahatásfok a hőátadási tényező függvényében, modell számítással és képlettel

A kék színű vonal a 67. képlet alapján, a szoftver által szolgáltatott hőáramok felhasználásával készült, a piros pedig a 68. képlet alapján. Itt is tapasztalhatóak eltérések, de ezen okok elemzésétől most is eltekintek.

Foglaljuk össze, amit itt tanultunk. A 68. képletből kiderült, hogy a hatásfok mindig csökken ha a borda hosszát növeljük. A 67. összefüggés, mely szintén a bordahatásfokot írja le, viszont biztosít minket arról, hogy a hőveszteség ( $Q_b$ ) növekedhet vagy akár csökkenhet is miközben növeljük a borda hosszát, függően attól, hogy az ideális esetre felvett hőveszteség ( $Q_{b\infty}$ ) gyorsabban vagy lassabban növekszik hozzá képest.

Most tehát matematikai igazolást kaptunk a 62. grafikon létezésére, azonban megnyugtató fizikai magyarázatot az okokra továbbra sem.

Nem magyarázatként, hanem csak az eredményekből származtatott indoklásként annyit el lehet mondani, hogy nagy hőátadási tényező esetén eleve nagy hőveszteséggel számolhatunk, a hő nagyon könnyen távozni tud a felületről, azonban a hossz növekedésével egyre jobban szigetelődik a borda, egyre inkább akadályokba ütközik a hőáram, ezért a veszteségek csökkennek.

Kisebb hőátbocsátási tényező esetén, eleve kisebb a hőveszteséggel indulunk, a hő nehezen tud távozni a szerkezetből, de minél jobban növeljük a hosszt, illetve a felületet, annál

nagyobb lehetőség van a hőátadásra, ezért a veszteségek növekednek.

Végül a megfigyeléseimből következő még egy következtetést is szeretnék itt levonni. A bordákat hőterhelések csökkentésére, a hő elvezetésére használják számtalan helyen. Itt pont az ellenkező eredményt szeretnénk elérni mint az épületszerkezetek esetében, tehát a hőt minél inkább szeretnénk elvezetni a hőforrástól. A 62. grafikon azt mondja számunkra, hogyha olyanok a körülmények, hogy nincs lehetőség a hűtőborda léghűtésére (ez alacsony  $\alpha$ -t jelent), akkor minél hosszabb bordákkal jobb eredményt tudunk elérni, viszont léghűtés esetén a hosszú bordák akadályozzák a hő elszállítását, tehát nincs is szükség a bordák kialakítására.

Az alapprobléma okához nem kerültem közelebb a bordahatás tanulmányozásával, azonban mégis tanulságosnak tartom e kitekintést, mert a természetére nagyobb rálátásom lett.

## 5. Összefoglalás/eredmények értékelése

Az eredmények értékelését két felé kell választanom. Az egyik magával a szoftverrel, a másik pedig a segítségével végzett vizsgálatokkal kapcsolatos.

Először nézzük a szoftvert. Itt is két különböző dolgot kell értékelnem. Az egyik a numerikus módszer implementálása, a másik pedig a rajzoló és kiértékelő modul. A numerikus módszer implementálásának helyességét már igazoltam a 3.2. *A modell ellenőrzése* fejezetben, így ezzel tökéletesen elégedett vagyok. Nagyon kis eltéréseket találtam a szoftverem produkálta eredmények és a sztenderdnek tekintett KOBRA eredményei között.

Azok az extra funkciók melyekkel elláttam a modellt, szintén hasznosnak bizonyultak. Láthattuk, hogy a pontos eredményekhez nélkülözhetetlen, hogy helyesen becsüljük meg a hőátadási tényezőket, és miután meghatároztuk őket, a program képes legyen ezen értékek befogadására és kezelésére, még akkor is, ha ezek folyamatosan változóak. Úgy vélem, hogy ennek a feltételnek is megfelelt a programom, hiszen képes kezelni egy adott szakaszon lineárisan változó  $\alpha$ -kat.

Élek szerinti hőáramösszegzés művelete (hővesztesség meghatározás) szintén elengedhetetlen funkció, melynek szinte minden elemzési műveletben hasznát vettük. Ehhez a művelethez kapcsolódik egy extra funkció is, mely még nincs kivezetve a kezelő-felületre, csendben a háttérben működik. Amikor egy élre kattintva szeretnénk megtudni a hővesztességet, automatikusan kinyomtatja pontról pontra az él menti hőmérsékleteket is a standard kimenetre. Ezt a funkciót is használtam szinte az összes esetben a vizsgálataim során. Segítségével sok érdekes, nem várt viselkedést tártam fel.

Az elemzés során több alkalommal is szükséges volt egy-egy pont hőmérsékletének megállapítása. Erre mind két típusú megoldás alkalmas volt, a hőmérséklet számszerű kijelzése a termikus pontban, illetve a kurzor pozíciójába kerülő termikus pont hőmérsékletének kijelzése a státus sorban.

Az egyes vizsgálatok eredményeit és tapasztalatait már láthattuk a 4. fejezetben. Most inkább azt az általános tapasztalatot osztanám meg, hogy ismeretlen szerkezetek esetén, ne a józan eszünkre, hanem hőtranszport modellekre támaszkodjunk energetikai kérdéseket illetően. A gyakorlat is azt mutatja, hogy jó szándékú de megfelelően alá nem támasztott beavatkozások akár ellentétes hatásokat is eredményezhetnek. Ahogy erre a 4.3 fejezetben láthattunk példát, egy adott pont hőmérsékletének növelése érdekében elhelyezett hőszigetelés

más, távolabbi pontokon nem várt, akár jelentős hőmérséklet csökkenést is okozhat, mely energetikai, komfort illetve állagvédelmi problémákhoz vezethetnek.

## **6. Felhasznált szoftverek**

<b>Eclipse</b>	Java fejlesztői környezet (EPL 1.0 licence)
<b>Java jdk 1.7.0_45</b>	Általános célú programnyelv (GNU licence)
<b>Libre office</b>	Irodai programcsomag (LGPL v3)
<b>kdesvn</b>	Verziókövető (GNU licence)
<b>Kobra</b>	2D-s hőhíd modellező szoftver

## 7. Felhasznált irodalom

- [1] Faragó István-Horváth Róbert – Numerikus módszerek  
Elektronikus kiadás: <http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/30.pdf>
- [2] Seppo Louhenkilpi, Felde Imre (Aalto University, Helsinki, Finland) – Anyagtudományi  
folyamatszimuláció-Hőátadás modellezése  
Elektronikus kiadás:  
[http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0036\\_AFS\\_hoatadas\\_modellezese/ada\\_tok.html](http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0036_AFS_hoatadas_modellezese/ada_tok.html)
- [3] Deák Gábor – Közelítő és szimbolikus számítások  
12. gyakorlat, Jacobi iteráció, Gauss-Siedel iteráció, Newton-módszer:  
<http://www.stud.u-szeged.hu/Deak.Gabor/menu/koszi/12.pdf>
- [4] Építésügyi Ágazati Szabvány: MSZ-04-140-2:1991  
Épületek és épülethatároló szerkezetek hőtechnikai számításai HŐTECHNIKAI  
MÉRETEZÉS:  
[ftp://ftp.energia.bme.hu/pub/Tananyagok-archivuma/Szakmernok-kepzes-zsa/epuletgepeszeti%20berendezesek%20energetikaja/szabvany/MSZ-04-140\\_2.pdf](ftp://ftp.energia.bme.hu/pub/Tananyagok-archivuma/Szakmernok-kepzes-zsa/epuletgepeszeti%20berendezesek%20energetikaja/szabvany/MSZ-04-140_2.pdf)
- [5] Kovács Viktória Barbara - Bordák és rudak hővezetése - 2009  
Elektronikus jegyzet:  
[http://energia.bme.hu/~kovacs/2008\\_2009\\_Tavaszi\\_Felel/3034\\_AEHK\\_MH-II/BORDAK\\_kidolgozva.pdf](http://energia.bme.hu/~kovacs/2008_2009_Tavaszi_Felel/3034_AEHK_MH-II/BORDAK_kidolgozva.pdf)

## **8. Melléklet**

CD, mely tartalmazza a dolgozat .doc és .pdf formátumú példányát, az irodalom jegyzékben található dokumentumokat elektronikus formában és a teljes rendszer forráskódját



## 9. Elérhetőség

A szoftver eddig kibocsátott verziói a Google által szoftverfejlesztők számára ingyenesen biztosított honlapról tölthető le a következő címen: <http://code.google.com/p/akoel-java-hetram/>

Az oldalon rövid információt találunk a program jellemzőiről, egy rövid videobemutatót a használatáról és letöltési lehetőséget.

A program Java nyelven íródott így futtatásához szükséges, hogy telepítve legyen számítógépen a jre1.7.0\_51 vagy ennél újabb verzió.

## 10. Summary

In my thesis I deal with the issue of the heat transfer. I produced a 2D heat transfer modeling software, which I examined different structural connections with. Their common characteristic is the thermal bridges which means that there is no closed formula to find out the the thermal currents, heat losses and the temperature of the point of the surfaces and/or the temperature of the cross-sections.

The software, which was created to carry out the tests, is based on a numerical method, namely the finite-difference method. The cross-section to be analyzed is divided into finite elementary squares. The result of the **heat flow equations**, which are built for those squares, represents the temperature of the squares. Using this values, the heat flow can be calculated between any two neighboring elementary squares or the heat flow which is perpendicular to any edge.

There are some lessons to be learned from the results of the studies of the structures. First of all is that if you want perform any thermal intervention in a structure, the best practice is to create a model for the specific case. Relying on the intuition or experience may causes serious surprises. A reckless and uncontrolled installed insulation on the structure may generate adverse or harmful changes in a far-off point.

Keywords: Heat transfer, Heat bridge, 2D model