

Université de Pierre et Marie Curie

# Multilevel Monte Carlo

par

BABA AHMED Elmokhtar

et

RAKOTOARIJAONA Andrianarivo Tantelitiana



MASTER 2  
INGÉNIERIE FINANCIÈRE ET MODÈLES ALÉATOIRES

Faculté des sciences

27 février 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Approximation Euler Monte Carlo</b>	<b>2</b>
2.1	Description du problème . . . . .	2
2.2	Méthode de Monte Carlo. . . . .	3
2.3	Schéma de discrétisation d'EDS . . . . .	4
2.3.1	Schéma d'Euler . . . . .	4
2.3.2	Erreur forte et erreur faible . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Le multilevel Monte Carlo</b>	<b>6</b>
3.1	Préliminaire . . . . .	6
3.1.1	Choix du Mouvement Brownien : . . . . .	6
3.2	Coup de Calcul , variance et nombre d'échantillon optimal : . . . . .	7
3.3	Théorème lié à la complexité et variance dans le cadre générale : . . . . .	9
3.3.1	Optimisation au niveau du choix de M : . . . . .	13
3.3.2	Algorithme Numérique pour le Multilevel Monte Carlo : . . . . .	15
3.3.2.1	Estimateur de biais : . . . . .	15
3.3.2.2	Algorithme : . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Application du Multilevel Monte Carlo</b>	<b>17</b>
4.1	Option européennes . . . . .	17
4.2	Option Asiatique : . . . . .	18
4.3	Option lookback : . . . . .	19
4.4	Option Digital : . . . . .	21
4.5	Option européennes avec sous-jacent à volatilité stochastique :(Heston) . .	22
4.6	Conclusion . . . . .	24
	<b>Bibliographie</b>	<b>25</b>

# Chapitre 1

## Introduction

L'évaluation des espérances de fonctions de diffusions de la forme  $\mathbb{E}[f(X_T)]$ , ne cesse d'être d'un grand intérêt dans différents domaines. En particulier, lorsque l'on s'intéresse au pricing des produits dérivés en finance, on se ramène à calculer de quantités moyennes sous forme d'espérances.

Plusieurs méthodes existent pour calculer ces quantités numériquement. La complexité et le coût de calcul, sont des critères essentiels, pour évaluer l'efficacité, et comparer les différentes méthodes.

Parmi les méthodes les plus fréquentes, la méthode de Monte Carlo. l'idée de cette méthode est de simuler des trajectoires indépendantes du processus  $X_T$ .

Dans notre projet, on va présenter la méthode du **multivel Monte Carlo**, introduite par *Michael B. Gilles*. Cette méthode est une amélioration de la méthode de Monte Carlo. Elle consiste à réduire le coût de calcul dû à la discrétisation d'Euler et à l'approximation de Monte Carlo.

En effet, comme l'erreur quadratique dans la méthode de l'approche Monte Carlo vaut  $MSE \equiv c_1 N^{-1} + c_2 h$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes,  $N$  est la taille de l'échantillon Monte Carlo,  $h$  le pas de discrétisation d'Euler. Pour avoir l'erreur quadratique de l'ordre de  $O(\epsilon^2)$ , il faut que  $h$  soit de l'ordre de  $O(\epsilon)$ , et que  $N$  soit de l'ordre de  $O(\epsilon^{-2})$ . Or la complexité de calcul vaut  $Nh^{-1}$ , donc on a une complexité de l'ordre de  $O(\epsilon^{-3})$ . Dans la méthode d'approche Multilevel Monte Carlo, on va voir que cette complexité de calcul peut être réduite jusqu'à un ordre de  $O(\epsilon^{-2}(\ln(\epsilon))^2)$ . Nous vous invitons alors à lire la suite de ce rapport pour plus de détails sur ce sujet.

## Chapitre 2

# Approximation Euler Monte Carlo

Dans ce chapitre, nous rappelons les principales éléments de bases qui sont nécessaires pour une bonne compréhension de notre sujet. On va commencer par une description du problème. Ensuite on va faire un bref rappel sur la méthode de Monte Carlo. Enfin nous introduisons le schéma d'Euler qui est un ingrédient de base dans le multilevel Monte Carlo.

### 2.1 Description du problème

En général, lorsqu'on s'intéresse au pricing des produits dérivés, on se ramène à évaluer la quantité  $\mathbb{E}[f(X_T)]$ , pour les produits vanilles, et  $\mathbb{E}[f(X_t), 0 \leq t \leq T]$  pour les produits exotiques. Le processus aléatoire  $(X_t)_{t \geq 0}$  est la solution de l'équation différentielle stochastique associée au problème étudié.

soit  $b$  et  $\sigma$  deux fonctions réelles, continues et lipschitziennes (*i.e.*), il existe une constante  $C$  telle que :

$$|b(U) - b(V)| \leq C \|U - V\| \quad \forall \quad U, V. \quad (2.1)$$

On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.2)$$

avec  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard défini dans l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On munit cet espace de la filtration canonique  $((\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, T > 0)$  qui est la filtration

bornienne naturelle.

Les hypothèses ci dessus assurent l'existence et l'unicité d'un processus aléatoire  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  solution de l'EDS (2.2), et qui verifie :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] < +\infty. \quad (2.3)$$

## 2.2 Méthode de Monte Carlo.

La méthode de Monte Carlo, désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes<sup>1</sup>.

Dans ce cadre on utilise cette méthode pour calculer (approcher numériquement) une quantité de la forme  $\mathbb{E}[f(X_t)]$ , avec  $X_t$  une variable aléatoire mesurable, et  $f$  une fonction continue réelles.

**Théorème 2.1. (*Loi forte des grands nombres*)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées telle que,  $\mathbb{E}(X_1) < +\infty$ , alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P.S} \mathbb{E}(X_1). \quad (2.4)$$

□

Le théorème (2.1) est le théorème principale qui permet de justifier la méthode de Monte Carlo. On suppose ainsi, qu'on peut simuler des réalisations des variables aléatoires  $X_k$  afin d'appliquer la méthode.

La question la plus importante est bien sûr d'avoir une idée de l'erreur commise,

$$\varepsilon_n = \mathbb{E}(X_1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k. \quad (2.5)$$

La force de la méthode de Monte Carlo est grâce au théorème centrale limite, qui nous donne une idée précise de cette erreur.

**Théorème 2.2. (*TCL*)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées telle que,

---

1. Définition prise du Wikipédia

$\mathbb{E}(|X_1|^2) < +\infty$ , alors :

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}(X_1) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2) \quad (2.6)$$

avec  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$

□

La vitesse de convergence de la méthode de Monte Carlo est  $\sqrt{n}$ . Cette vitesse est considérée très lente par rapport aux autres méthodes classiques d'analyse numériques. Mais le principal avantage est que la vitesse ne dépend pas de la dimension du problème. La variance du problème  $\sigma^2$  mesure l'étalement de l'erreur. Plus  $\sigma^2$  est petit plus l'erreur est centrée en 0.

## 2.3 Schéma de discrétisation d'EDS

Dans cette section on s'intéresse à l'EDS (2.2). Soit le processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  l'unique solution de l'EDS. Afin d'évaluer la quantité  $\mathbb{E}[f(X_T)]$ , la méthode de Monte Carlo suppose que l'on sait simuler la loi de la variable aléatoire  $X_T$ . Or, en général, on ne peut pas résoudre explicitement l'équation différentielle stochastique (2.2), donc on se ramène souvent à utiliser un schéma numérique qui approche cette solution.

### 2.3.1 Schéma d'Euler

Le schéma d'Euler consiste à subdiviser l'intervalle  $[0, T]$  en  $n$  intervalles de longueur  $h = \frac{T}{n}$ . Soit,  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T$  une partition de l'intervalle  $[0, T]$ , avec  $t_k = kh$ .

La solution  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$  vérifie :

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(X_s) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(X_s) dW_s \quad (2.7)$$

En utilisant la méthode des rectangles on peut approximer les différentes quantités de (2.7) par :

$$\begin{cases} \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(X_s) ds = b(X_{t_k})(t_{k+1} - t_k) & (1) \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(X_s) dW_s = \sigma(X_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). & (2) \end{cases} \quad (2.8)$$

**Rappel :**

**Definition 2.3.** On appelle mouvement brownien le processus  $(W_t)_{t \geq 0}$  à trajectoires continues, tel que  $W_0 = 0$  et pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,

1.  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ .
2.  $W_t - W_s$  est indépendant de  $W_r$ ,  $r \leq s$ .

Étant donné des instants  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , on obtient une trajectoire par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} W_{t_{k+1}} - W_{t_k} = \sqrt{t_{k+1} - t_k} G_{k+1} \\ W_0 = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $G_k$  est une suite de variables aléatoires i.i.d,  $G_1 \sim N(0, 1)$ .

Donc, d'après les approximations ci dessus, on définit le schéma d'Euler de la façon suivante :

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + b(\bar{X}_{t_k})h + \sigma(\bar{X}_{t_k})\sqrt{h}G_{k+1} \\ \bar{X}_0 = x_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

### 2.3.2 Erreur forte et erreur faible

On définit l'erreur forte  $L^2$  du schéma d'Euler par :

$$\varepsilon_2^{forte} = \sqrt{\mathbb{E} \left[ \sup_{k=0 \dots n} |X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}|^2 \right]} \quad (2.11)$$

**Théorème 2.4.** Pour le schéma d'Euler de pas  $h$ , l'erreur forte est d'ordre  $\frac{1}{2}$ .

Pour une fonction  $f$  régulière, on définit l'erreur faible du schéma d'Euler par :

$$\varepsilon^{faible} = | \mathbb{E}[f(X_T)] - \mathbb{E}(f(\bar{X}_T)) | \quad (2.12)$$

**Théorème 2.5.** Pour le schéma d'Euler de pas  $h$ , l'erreur faible est d'ordre 1.

## Chapitre 3

# Le multilevel Monte Carlo

### 3.1 Préliminaire

Soit  $T$  la maturité d'un option financière et  $M$  un entier supérieur à 2. Notons  $P_l = f(S_T)$  avec  $f$  qui est la fonction de Payoff, et on suppose la fonction  $f$  Lipschitzienne. Considérons maintenant une simulation Monte Carlo avec un pas de discrétisation défini par  $h_l = \frac{T}{M^l}$  pour tout  $l \geq 0$ . Soit  $\hat{P}_l$  l'approximation de  $P_l$  et  $\hat{S}_{l,M}$  celui de  $S_T$ . Cette approche numérique utilise comme pas de discrétisation  $h_l$ .

L'idée élémentaire de la méthode multilevel Monte Carlo, est d'utiliser l'écriture suivante :

$$\mathbb{E}(\hat{P}_L) = \mathbb{E}(\hat{P}_0) + \sum_{l=1}^L \mathbb{E}(\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1}) \quad (3.1)$$

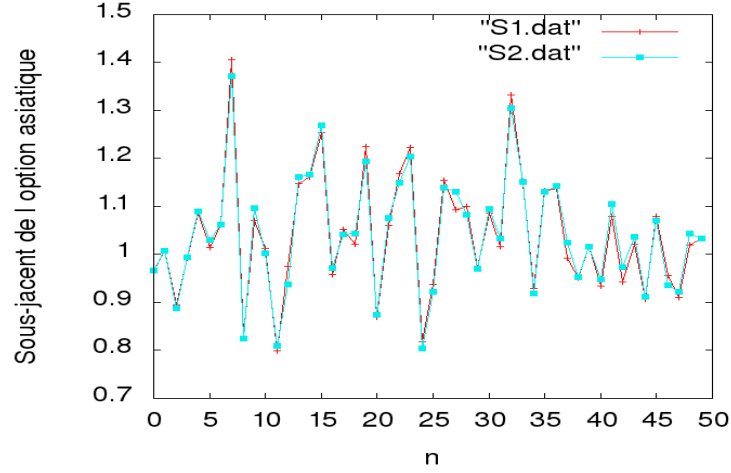
Le but est un peu similaire à celui de la méthode de réduction de la variance. En effet, l'objectif de la méthode est de réduire le coût de calcul en utilisant la partie droite de la décomposition, et en faisant des évaluation indépendante pour chaque niveau  $l$ . Maintenant, posons  $\hat{Y}_0$  l'estimateur de  $\mathbb{E}(\hat{P}_0)$  avec un échantillon de taille  $N_0$ , et posons  $\hat{Y}_l$  l'estimateur de  $\mathbb{E}(\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1})$  avec un échantillon de taille  $N_l$  pour tout  $l > 0$ . Donc à partir de cela, on peut définir cet estimateur en utilisant Monte Carlo pour un niveau  $l$  par :

$$\begin{cases} \hat{Y}_l = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} (\hat{P}_l^{(i)} - \hat{P}_{l-1}^{(i)}) & \text{si } l > 0, \\ \hat{Y}_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} P_0^i & \text{si } l = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

#### 3.1.1 Choix du Mouvement Brownien :

On utilise comme choix du mouvement Brownien pour  $f(S_T^l)$  et  $f(S_T^{l-1})$  avec  $f$  une fonction lipschitzienne , comme ce qu'on peut observer sur la courbe suivante :





Ici, on a pris comme exemple le sous-jacent de l'option asiatique où la courbe en bleu représente  $S_T^{l-1}$  et la courbe rouge représente  $S_T^l$ . On a utilisé les mêmes mouvements Browniens pour  $S_T^{l-1}$  et  $S_T^l$  comme on peut l'observer sur cette graphe. Ce qui fait que les deux courbes ne soient pas confondues est le fait qu'on utilise des différents pas de temps au niveau du terme de drift. Pour faire ce choix, il faut d'abord simuler tout les mouvements Browniens de  $S_T^l$  de pas de discrétisation  $h_l = TM^{-l}$ . Après, on regroupe ces Browniens par paquet de  $M$ , et pour chaque groupe on somme les  $M$  Browniens et on utilise cette somme dans chaque itération pour la simulation de  $S_T^{l-1}$  de pas de discrétisation  $h_{l-1} = TM^{l-1}$ .

### 3.2 Coup de Calcul , variance et nombre d'échantillon optimal :

Notons  $C_0$  et  $V_0$  respectivement, le coût du calcul et la variance de  $\hat{P}_0$ , et soit  $C_l$  et  $V_l$  le coût du calcul et la variance de  $\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1}$ . De ce fait le coût total de calcul vaut  $\sum_{l=0}^L N_L C_l$  et celui de la variance total vaut  $\sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l$ .

#### Variance Fixé :

En fixant la variance pour minimiser le coût de calcul, on va choisir  $N_l$  comme suite :

$$\frac{\partial}{\partial N_l} \left( \sum_{l=0}^L N_l C_l + N_l^{-1} V_l \right) = 0, \quad (3.3)$$

cela nous donne dans ce cas  $N_l = \sqrt{\frac{V_l}{C_l}}$ . Comme  $C_l = O(h_l^{-1})$  (Car on a comme pas de discrétisation  $h_l$ )  $\implies N_l \approx \sqrt{V_l h_l}$ . On a donc à partir de cela le nombre optimal d'échantillon  $N_l$  pour une variance fixe.

### Variance non fixé

On sait que la fonction  $f$  est lipschitzienne et que les coefficients de drift et de volatilité respecte la condition 2.1, avec la convergence d'Euler, on peut alors avoir :

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |\hat{S}_{l,M^l} - S_T|^2) = O(h_l) \quad \forall l > 0 \quad (3.4)$$

Cela nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} Var(\hat{P}_l - P) &= \mathbb{E}((\hat{P}_l - P)^2) - (\mathbb{E}(\hat{P}_l - P))^2 \\ &\leq \mathbb{E}((\hat{P}_l - P)^2) \\ &\leq \lambda^2 \mathbb{E}((\hat{S}_{l,M^l} - S_T)^2) \\ &\leq \lambda^2 \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |\hat{S}_{l,M^l} - S_T|^2) \\ &= O(h_l) \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec un  $\lambda \in ]0; 1[$ .

Ce qui nous donne alors :

$$\begin{aligned} Var(P_l - P_{l-1}) &= Var(P_l - P + P - P_{l-1}) \\ &\leq \left( \sqrt{Var(P_l - P)} + \sqrt{Var(P - P_{l-1})} \right)^2 \\ &= O(h_l). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Comme  $\hat{Y}_l = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} (\hat{P}_l^{(i)} - \hat{P}_{l-1}^{(i)})$ , donc  $Y_l$  a une variance de l'ordre de  $O\left(\frac{h_l}{N_l}\right)$ . En notant  $\hat{Y} = \sum_{l=0}^L Y_l$  et en choisissant  $N_l = O(\epsilon^{-2} L h_l) \forall \epsilon > 0$ , on a bien que :

$$\begin{aligned} Var(\hat{Y}) &= Var(Y_0 + \sum_{l=1}^L Y_l) \\ &= Var(Y_0) + \sum_{l=1}^L O\left(\frac{h_l}{N_l}\right) \\ &= O(\epsilon^2) + \sum_{l=1}^L O\left(\frac{\epsilon^2}{L}\right) \\ &= O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour ce choix de  $N_l$  qu'on a fait, on a vu que  $C_l = O(h_l^{-1})$  donc le coût de calcul vaut alors

$$\sum_{l=0}^L N_l C_l \simeq \sum_{l=0}^L \frac{N_l}{h_l} \simeq \sum_{l=0}^L \epsilon^{-2} L h_l h_l^{-1} = L^2 \epsilon^{-2}$$

Donc si on choisit  $L = \frac{\ln(\epsilon^{-1})}{\ln(M)}$ , on a un coût de calcul de l'ordre de  $O(\epsilon^{-2}(\ln(\epsilon))^2)$ .

### 3.3 Théorème lié à la complexité et variance dans le cadre générale :

Dans cette partie , on va introduire le théorème principale de ce projet de façon générale à fin de bien l'appliqué pour n'importe quel modèle financier.

**Théorème 3.1.** *Soit  $P$  la solution de l'équation différentielle (2.2). Et soit  $\hat{P}$  une approximation de  $P$  en utilisant le pas de discrétisation  $h_l = TM^{-l}$ . Supposons qu'il existe des estimateurs indépendants  $\hat{Y}_l$  simulé par Monte Carlo avec un échantillon de taille  $N_l$ , ainsi que des constantes  $\alpha > \frac{1}{2}$ ,  $\beta$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  de sorte que :*

- (i)  $\mathbb{E}[\hat{P}_l - P] \leq c_1 h_l^\alpha$
- (ii)  $\mathbb{E}[\hat{Y}_l] = \begin{cases} \mathbb{E}[\hat{P}_0] & \text{si } l = 0 \\ \mathbb{E}[\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1}] & \text{si } l > 0. \end{cases}$
- (iii)  $V[\hat{Y}_l] \leq c_2 N_l^{-1} h_l^\beta$
- (iv)  $C_l$  soit la complexité de calcul de  $\hat{Y}_l$  qui est borné par  $C_l \leq C_3 N_l h_l^{-1}$

alors, il existe une constante  $c_4 > 0$  et  $0 < \epsilon < e^{-1}$ , et il existe aussi  $L$  et  $N_l$  tel que l'estimateur Monte Carlo :

$$\hat{Y} = \sum_{l=0}^L \hat{Y}_l \quad (3.8)$$

a comme erreur quadratique borné par  $\epsilon^2$  :

$$MSE \equiv E \left[ (\hat{Y} - \mathbb{E}(P))^2 \right] < \epsilon^2 \quad (3.9)$$

avec une complexité  $C$  borné :

$$C \leq \begin{cases} c_4 \epsilon^{-2} & \text{si } \beta > 1, \\ c_4 \epsilon^{-2} \ln(\epsilon)^2 & \text{si } \beta = 1, \\ c_4 \epsilon^{-2 - \frac{(1-\beta)}{\alpha}} & \text{si } \beta < 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

**Preuve :**

Pour ce preuve et dans toute la suite, on va utiliser la partie entière supérieur  $\lceil x \rceil = n$  avec  $n$  l'unique entier tel que  $x \leq n < x + 1$ .

Dans ce preuve, on va d'abord commencer par choisir un  $L$  comme suite :

$$L = \left\lceil \frac{\ln(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1})}{\alpha \ln(M)} \right\rceil \quad (3.11)$$

cela implique que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} M^{-\alpha} \epsilon < c_1 h_L^\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon \quad (3.12)$$

En combinant  $i$  et  $ii$ , cela nous donne :

$$\left( \mathbb{E}[\hat{Y}] - \mathbb{E}[P] \right)^2 \leq \frac{1}{2} \epsilon^2 \quad (3.13)$$

Avec cette inégalité combiné avec celui de la borne supérieur de la variance de  $\hat{Y}$  qui vaut  $\frac{1}{2} \epsilon^2$  qu'on va déterminer dans la suite, on va avoir le fait que l'MSE soit borné par  $\epsilon^2$ .

On peut aussi remarquer que :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^L h_l^{-1} &= h_L^{-1} \sum_{l=0}^L M^{-l} \\ &< \frac{M}{M-1} h_L^{-1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Par 3.12 , on a que :

$$h_L^{-1} < M \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{2}c_1} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (3.15)$$

En combinant ces deux inégalité, on obtient de ce fait :

$$\sum_{l=0}^L h_l^{-1} < \frac{M^2}{M-1} \left( \sqrt{2}c_1 \right)^{\frac{1}{\alpha}} \epsilon^{-2} \quad (3.16)$$

Maintenant on va considérer tout les valeurs possibles que  $\beta$  peut prendre :

a) Si  $\beta = 1$ , on choisit  $N_l = \lceil 2\epsilon^{-2}(L-1)c_2 h_l \rceil$  dans ce cas, on obtient que

$$\begin{aligned} Var[\hat{Y}] &= \sum_{l=0}^L V[\hat{Y}_l] \\ &\leq \sum_{l=0}^L L c_2 N_l^{-1} h_l \\ &\leq \frac{1}{2} \epsilon^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Par combinaison de 3.13 et de ce dernier inégalité, on a bien que l'MSE est borné par  $\epsilon^2$ . Pour la complexité de calcul, on va prendre la borne supérieur de  $L$  qu'on a défini ci-dessus, ie :

$$L \leq \frac{\ln(\epsilon^{-1})}{\alpha \ln(M)} + \frac{\ln(\sqrt{2}c_1 T^\alpha)}{\alpha \ln(M)} + 1 \quad (3.18)$$

Comme  $1 < \ln(\epsilon^{-1})$  pour  $\epsilon < e^{-1}$ , on a dans ce cas que :

$$L + 1 \leq c_5 \ln(\epsilon^{-1}) \quad (3.19)$$

où

$$c_5 = \frac{1}{\alpha \ln(M)} + \max \left( 0, \frac{\ln(\sqrt{2}c_1 T^\alpha)}{\alpha \ln(M)} \right) + 2. \quad (3.20)$$

En prenant la borne supérieur pour  $N_l$  qu'on a choisit, ie :

$$N_l \leq 2\epsilon^{-2}(L+1)c_2 h_l + 1 \quad (3.21)$$

De ce fait, le cout de calcul est borné par :

$$C \leq c_3 \sum_{l=0}^L N_l h_l^{-1} \leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2}(L+1)^2 + \sum_{l=0}^L L h_l^{-1} \right). \quad (3.22)$$

Cette inégalité vient de la, combinaison de la majoration de  $L+1$ , et de l'inégalité 3.16. Plus le fait que,  $1 < \ln(\epsilon^{-1})$  pour  $\epsilon < e^{-1}$ , et cela nous permet d'avoir que :

$$C \leq c_4 \epsilon^{-2} (\ln(\epsilon))^2 \quad (3.23)$$

avec :

$$c_4 = 2c_3 c_5^2 c_2 + c_3 \frac{M^2}{M-1} \left( \sqrt{2}c_1 \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (3.24)$$

b) Si  $\beta > 1$ , On choisit alors  $N_l = \left\lceil 2\epsilon^{-2} c_2 T^{\frac{\beta-1}{2}} \left( 1 - M^{-\frac{(\beta-1)}{2}} \right) h_l^{\frac{\beta+1}{2}} \right\rceil$ , Donc pour la variance de  $\hat{Y}$ , on a que :

$$\sum_{l=0}^L V[\hat{Y}_l] \leq \frac{1}{2} \epsilon^2 T^{-\frac{(\beta-1)}{2}} \left( 1 - M^{-\frac{(\beta-1)}{2}} \right)^{-1} h_l^{\frac{\beta+1}{2}} \quad (3.25)$$

par l'utilisation des résultats des séries géométriques, on a que :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^L h_l^{\frac{(\beta-1)}{2}} &= T^{\frac{(\beta-1)}{2}} \sum_{l=0}^L \left( M^{-\frac{(\beta-1)}{2}} \right)^l \\ &< T^{\frac{(\beta-1)}{2}} \left( 1 - M^{-\frac{(\beta-1)}{2}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cela nous permet d'avoir que  $Var[\hat{Y}] \leq \frac{1}{2}\epsilon^2$ , et en combinant cela avec l'inégalité 3.13, on obtient bien la majoration de l'MSE qu'on veut.

Pour la complexité de calcul, on va refaire la même chose qu'on a fait avant, c'est à dire, en utilisant la borne supérieur de la taille de l'échantillon qu'on a choisit, ie :

$$N_l < 2\epsilon^{-2}c_2T^{\frac{\beta-1}{2}} \left(1 - M^{-\frac{(\beta-1)}{2}}\right)^{-1} h_l^{\frac{\beta+1}{2}} + 1, \quad (3.27)$$

Ce qui nous donne pour la complexité de calcul :

$$C \leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2}c_2T^{\frac{(\beta-1)}{2}} \left(1 - M^{-\frac{(\beta-1)}{2}}\right)^{-1} \sum_{l=0}^L h_l^{\frac{(\beta-1)}{2}} + \sum_{l=0}^L h_l^{-1} \right). \quad (3.28)$$

En utilisant l'inégalité 3.16 et 3.26, on a que :  $C \leq c_4\epsilon^{-2}$  où

$$c_4 = 2c_3c_2T^{\beta-1} \left(1 - M^{-\frac{(\beta-1)}{2}}\right)^{-2} + c_3 \frac{M^2}{M-1} \left(\sqrt{2}c_1\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

- c) Si  $\beta < 1$ , on choisit  $N_l = \left\lceil 2\epsilon^{-2}c_2h_L^{-\frac{(1-\beta)}{2}} \left(1 - M^{-\frac{(1-\beta)}{2}}\right) h_l^{\frac{(\beta+1)}{2}} \right\rceil$ ,  
cela nous donne alors pour la majoration de la variance de  $\hat{Y}$  :

$$\sum_{l=0}^L V[\hat{Y}_l] < \frac{1}{2}\epsilon^2 h_L^{\frac{(1-\beta)}{2}} \left(1 - M^{-\frac{(1-\beta)}{2}}\right) \sum_{l=0}^L h_l^{-\frac{(1-\beta)}{2}}. \quad (3.29)$$

Avec la propriété des séries géométriques on a que :

$$\sum_{l=0}^L h_l^{-\frac{(1-\beta)}{2}} = h_L^{-\frac{(1-\beta)}{2}} \sum_{l=0}^L \left(M^{-\frac{(1-\beta)}{2}}\right)^l \quad (3.30)$$

En mettant cette dernière inégalité dans l'avant dernière inégalité, on obtient bien que  $Var[\hat{Y}] < \frac{1}{2}\epsilon^2$ , et en combinant cela par 3.13 on a bien la majoration de l'MSE qu'on veut.

Comme on fait au part avant, c'est à dire, en utilisant la borne supérieur de la taille de l'échantillon  $n_l$  qu'on a choisit, ie :

$$N_l < 2\epsilon^{-2}c_2h_L^{-\frac{(1-\beta)}{2}} \left(1 - M^{-\frac{(1-\beta)}{2}}\right)^{-1} h_l^{\frac{(\beta+1)}{2}} + 1 \quad (3.31)$$

le coût de calcul sera alors majoré par :

$$C \leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2}c_2h_L^{-\frac{(1-\beta)}{2}} \left(1 - M^{-\frac{(1-\beta)}{2}}\right)^{-1} \sum_{l=0}^L h_l^{-\frac{(1-\beta)}{2}} + \sum_{l=0}^L h_l^{-1} \right). \quad (3.32)$$

Et l'inégalité (3.30) nous donne que :

$$h_L^{-\frac{(1-\beta)}{2}} \left(1 - M^{-\frac{(1-\beta)}{2}}\right)^{-1} \sum_{l=0}^L h_l^{-\frac{(1-\beta)}{2}} < h_L^{-(1-\beta)} \left(1 - M^{-\frac{(1-\beta)}{2}}\right)^{-2}. \quad (3.33)$$

avec l'inégalité (3.12) on obtient :

$$h_L^{-(1-\beta)} < \left(\sqrt{2}c_1\right)^{\frac{(1-\beta)}{\alpha}} M^{1-\beta} \epsilon^{-\frac{1-\beta}{\alpha}}. \quad (3.34)$$

En combinant ces deux dernières inégalités qu'on a, plus l'inégalité (3.16), et le fait que  $\epsilon^{-2} < \epsilon^{-2-\frac{(1-\beta)}{\alpha}}$  pour  $\epsilon < e^{-1}$ , on obtient dans ce cas que

$$C \leq c_4 \epsilon^{-2} - \frac{(1-\beta)}{\alpha} \quad (3.35)$$

où

$$c_4 = \left(\sqrt{2}c_1\right)^{\frac{(1-\beta)}{\alpha}} M^{1-\beta} \left(1 - M^{-\frac{(1-\beta)}{2}}\right)^{-2} + c_3 \frac{M^2}{M-1} \left(\sqrt{2}c_1\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (3.36)$$

□

### Remarque :

La constante  $\alpha$  peut être obtenue en considérant l'ordre de convergence faible de la méthode d'approximation numérique. Dans le cadre de ce rapport, on utilise la discrétisation d'Euler avec une fonction de Payoff qui soit lipschitzienne. Cela nous ramène à prendre  $\beta = 1$  au vu du fait de la convergence faible qui est de l'ordre de  $O(h_l)$  et pour la convergence forte de l'ordre de  $O(h_l)$ . Et pour ce valeur de  $\beta = 1$ , on a une complexité de calcul qui a une répartition assez uniforme sur chaque niveau pour le multilevel Monte Carlo.

#### 3.3.1 Optimisation au niveau du choix de M :

Dans la plupart des applications du multilevel Monte Carlo, on choisit toujours  $M = 2$ . Mais dans cette partie, on peut montrer que cela n'est pas le cas le plus optimal dans notre cas où  $\beta = 1$ . En effet, pour une discrétisation d'Euler avec une fonction de Payoff lipschitzienne, on a que  $Var(\hat{P}_l - P) \simeq c_0 h_l$  asymptotiquement, et cela nous donne grâce à l'inégalité de Minkowski et en remarquant que  $\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1} = (\hat{P}_l - P) - (\hat{P}_{l-1} - P)$ , on a l'inégalité suivante :

$$\left(\sqrt{M} - 1\right)^2 c_0 h_l \leq Var[\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1}] \leq \left(\sqrt{M} + 1\right)^2 c_0 h_l$$

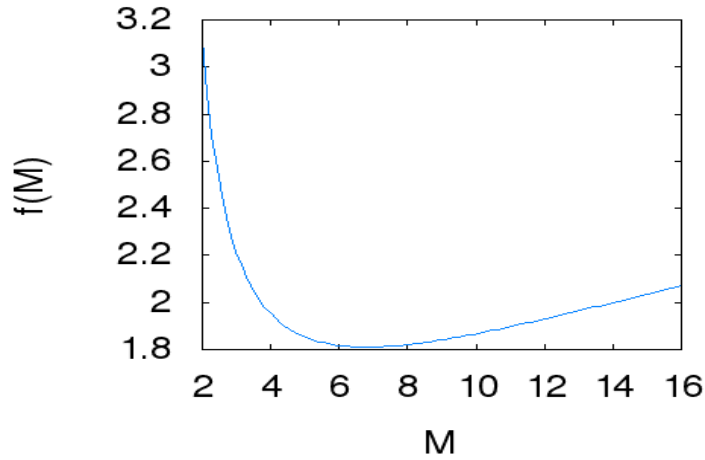
En supposant maintenant que l'on peut approcher cette variance par une moyenne géométrique, cela nous donne dans ce cas :

$$Var[\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1}] \approx (M-1)c_0 h_l$$

De ce fait, on prend  $c_2 = (M-1)c_0$  qui est lié au condition (iii) du théorème et comme dans la preuve pour  $\beta = 1$  on a pris  $N_l \approx 2\epsilon^{-2}(M-1)c_0(L+1)h_l$ . On peut alors à partir de tout cela avoir comme complexité de calcul pour un échantillon de taille  $N_l$  :

$$N_l(h_l + h_{l-1}) = N_l h_l^{-1}(1 + M^{-1}) \approx 2\epsilon^{-2}(M - M^{-1})c_0(L+1)h_l$$

En faisant la somme sur tout les niveaux et en remarquant que  $L = O(\frac{\ln(\epsilon^{-1})}{\ln(M)})$ , asymptotiquement, pour  $\epsilon \rightarrow 0$  la complexité de calcul total est proportionnel à  $2\epsilon^{-2}f(M)$  où  $f(M) = \frac{M - M^{-1}}{\ln(M)}$



On constate que  $f(M)$  est convexe et atteint son minimum pour un  $M = 7$ . Ce qui nous permet de dire que  $M = 2$  n'est pas le cas optimal mais juste un choix qui simplifie les calculs qu'il faut faire. Comme par exemple,  $M = 2$  est très pratique lorsqu'on doit choisir les mêmes mouvements browniens pour  $P_l$  et  $P_{l-1}$  dans notre cas. Mais dans toute la suite, on va choisir  $M = 4$  qui est plus proche du minimum de  $f(M)$  mais qui est aussi un cas assez simple à manipuler.



### 3.3.2 Algorithme Numérique pour le Multilevel Monte Carlo :

#### 3.3.2.1 Estimateur de biais :

A partir de la condition (i) du théorème, plus le fait que l'on travail avec une discrétisation d'Euler avec un pas de discrétisation  $h_l$  et une fonction de Payoff  $f$  qui est supposé lipschitzienne, asymptotiquement on a quand  $l \rightarrow +\infty$  que :

$$\mathbb{E}(P - \hat{P}_l) \approx c_1 h_l \Rightarrow \mathbb{E}(\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1}) = \mathbb{E}(P - \hat{P}_{l-1}) - \mathbb{E}(P - \hat{P}_l) \approx (M-1)c_1 h_l \approx (M-1)\mathbb{E}(P - \hat{P}_l)$$

Comme  $P_L$  est une estimateur de biais de  $P$ , et en constatant que  $|\mathbb{E}(P - P_l)| < \frac{\epsilon}{2}$  pour la convergence du biais, cela nous donne alors :

$$|\hat{Y}_L| = |\mathbb{E}[\hat{P}_L - \hat{P}_{L-1}]| < \frac{\epsilon}{2}(M-1)$$

Dans la partie algorithmique, cette inégalité nous permet de définir une condition d'arrêt, et tant que cette inégalité n'est pas respecté, on incrémente  $L$ .

Pour plus de sûreté, on va prendre comme condition d'arrêt optimale la condition suivante :

$$\max(|\hat{Y}_{L-1}|M^{-1}, |\hat{Y}_L|) < \frac{\epsilon}{2}(M-1) \quad (3.37)$$

On va aussi choisir  $N_l$  comme suite :

$$N_l = \left\lceil 2\epsilon^{-2} \sqrt{V_l h_l} \left( \sum_{l=0}^L \sqrt{V_l h_l} \right) \right\rceil. \quad (3.38)$$

Cela nous permet d'avoir l'estimateur de la variance du multilevel qui sera inférieur à  $\frac{\epsilon^2}{2}$ , et  $N_l$  pour  $l = 0, \dots, L$  sera recalculer tant que la condition 3.37 ne soit pas vérifier.

#### 3.3.2.2 Algorithme :

Pour la partie algorithmique, voici un pseudo-code qui va nous permettre dans la partie application d'exploiter le Multilevel Monte Carlo :

1. On initialise  $L = 0$  au début.
2. On simule la variance  $V_L$  avec un échantillon de taille  $N = 10^4$ .
3. On calcul chaque  $N_l$  pour  $l = 0, 1, \dots, L$  à partir de l'égalité 3.38
4. Avec les échantillons  $N_l$ , on évalue  $\hat{Y}_l$  et si  $N_l > N$  on réévalue les variances ( $V_l$ ) pour  $l = 1 \dots L$ .
5. Si  $L \geq 2$ , on vérifie si la condition 3.37 est vérifiée, si c'est le cas on s'arrête et on fini. Sinon on incrémente  $L$  de 1 et on revient sur (2).
6. Si  $L < 2$  on incrémente  $L$  et on revient sur (2).

Pour avoir le prix avec le multilevel, il suffit juste de faire la somme des  $\hat{Y}_l$ , c'est à dire calculer la valeur de  $\hat{Y}$ .

### Complexité de calcul résultant de l'algorithme :

En considérant les résultats numériques qu'on va avoir à partir de l'algorithme, on va avoir comme coût de calcul la somme total du nombre de pas de temps qu'on a utilisé sur chaque niveau :

$$C = N_0 + \sum_{l=1}^L N_l (M^l + M^{l-1})$$

où  $M^l$  représente le nombre de pas de temps qui est utilisé pour simuler  $P_l$ , et  $M^{l-1}$  représente le nombre de pas de temps qu'on utilise pour simuler  $P_{l-1}$  pour le Multilevel Monte Carlo. Pour celui du Monte Carlo simple, la complexité de calcul va être égale à :

$$C^* = \sum_{l=0}^L N_l^* M^l$$

où  $N_l^* = 2\epsilon^{-2} \text{Var}[P_l]$ .

Dans les représentations graphiques qu'on va faire, on va plutôt afficher dans les plots,  $\epsilon^2 \hat{C}$  au lieu de  $\hat{C}$  où  $\hat{C} \in \{C, C^*\}$ . C'est tout simplement pour avoir une échelle de représentation plus simpliste.

## Chapitre 4

# Application du Multilevel Monte Carlo

Dans ce chapitre, on va appliquer la méthode de multilevel Monte Carlo sur plusieurs options différentes. On va commenter les résultats obtenus, et les comparer avec les résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo usuelle.

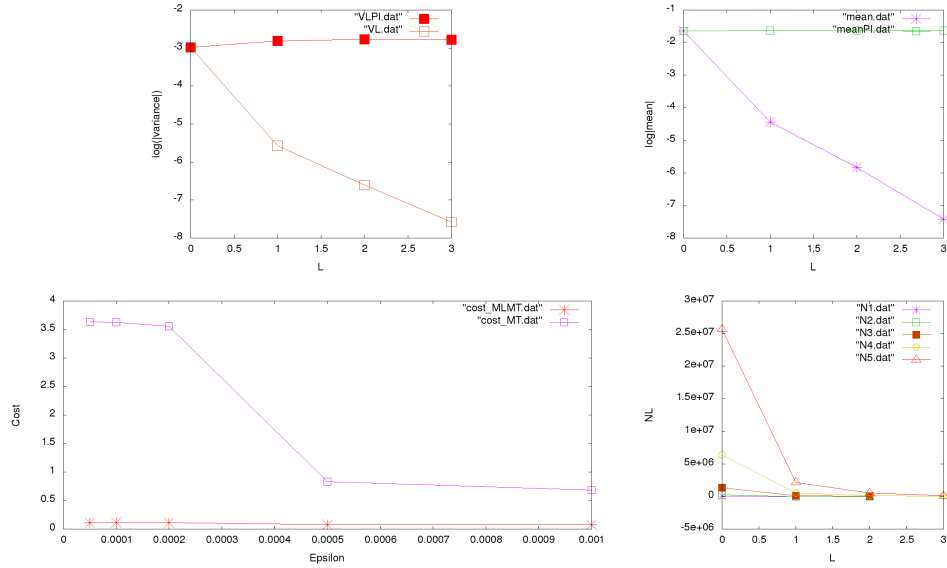
Dans la suite on présentera quatre options, tels que : les options européennes, les options asiatiques, lookback et les options digitales. En fin on présentera rapidement une application du multilevel sur un modèle à volatilité stochastique.

### 4.1 Option européennes

Pour l'option Call, on va utiliser l'équation (2.2) pour définir le sous-jacent à maturité, et la discrétisation 2.10, avec  $t_n = n$ ,  $\hat{X}_n = \hat{S}_n$ ,  $b(\hat{S}_n) = r\hat{S}_n$ , et  $\sigma(\hat{S}_n) = \sigma\hat{S}_n$ . On va prendre comme valeur numérique des paramètres  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $S(0) = 1$ . On a comme Payoff de cette option :  $P = e^{-rT} \max(S_T - K, 0)$ , avec  $T = 1$  et  $K = 1$  pour l'application numérique.

En regardant le premier graphe, qui représente la variation de la variance en fonction du niveau  $L$ . On remarque que la variance reste constante pour la méthode de Monte Carlo. Par contre, on observe une réduction de variance pour la méthode du multilevel. Plus le pas devient plus petit, plus la variance diminue.

Pour le deuxième graphe en bas, on représente le coût de calcul, pour le multilevel Monte Carlo, et pour la méthode de Monte Carlo, en fonction de différentes valeurs de epsilon.

FIGURE 4.1 – Option Call avec un prix  $\approx 0.10$ .

Ce graphe montre l'efficacité de la méthode du multilevel en terme de coût de calcul. On constate, que le coût de calcul du multilevel est beaucoup meilleur que celui du Monte carlo. Pour un epsilon = 0.0001, le coût de calcul pour le multilevel est  $\approx 0.11$ . Par contre, pour la méthode de Monte Carlo, et avec le même epsilon, on a un coût de calcul  $\approx 3.6$ . En plus, le coût de calcul est encore meilleur si on choisit des epsilons de plus en plus petits.

## 4.2 Option Asiatique :

Pour l'option asiatique, on va réutiliser les mêmes equations que dans l'option call pour la valeur du sous-jacent à maturité et les mêmes valeur numérique pour la partie application. Sauf qu'ici, la fonction de Payoff sera de la forme :

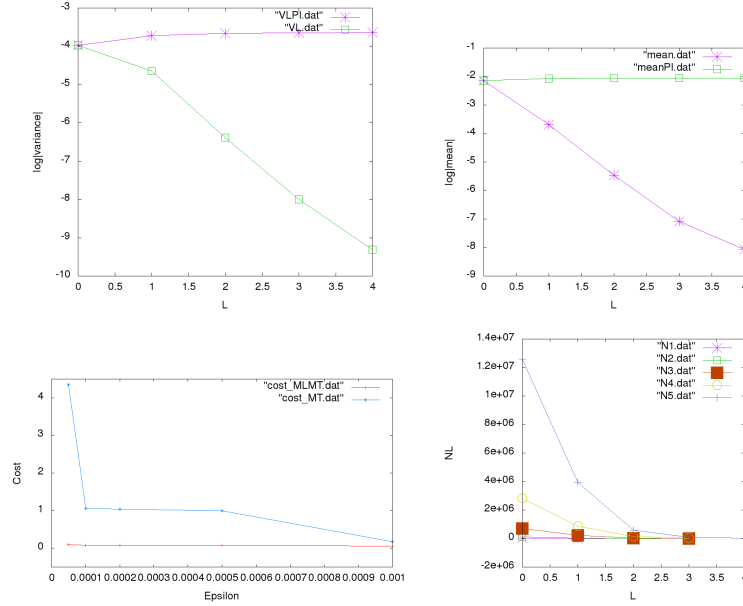
$$P = e^{-rT} \max(\bar{S}_T - K, 0) \quad (4.1)$$

où

$$\bar{S}_T = \int_0^T S_t dt \quad (4.2)$$

que l'on va approximer numériquement par

$$\bar{S}_l = \sum_{n=1}^{N_l} \frac{1}{2} (\hat{S}_n - \hat{S}_{n-1}) h_l. \quad (4.3)$$

FIGURE 4.2 – Option Asiatique avec un prix  $\approx 0.058$ 

La figure (4.2) représente respectivement, la variation de la variance en fonction du niveau  $L$ , la variation de la moyenne en fonction de  $L$ , la variation du coût de calcul en fonction des epsilons et enfin, la variation du nombres de simulation en fonction du niveau  $L$ .

À partir du premier graphe, on constate que la variance reste quasiment constante pour la méthode de Monte Carlo. Par contre, on observe une réduction de la variance, à chaque fois qu'on ajoute un level  $L$ , pour le multilevel. Ceci montre que le multilevel est plus efficace que la méthode de Monte Carlo, en terme de réduction de la variance.

Pour la variation du coût de calcul en fonction de epsilon, on remarque que le ma méthode de Monte Carlo à une complexité beaucoup plus élevé que celle de multilevel. Plus l'epsilon est petit, plus la complexité est meilleure.

Dans le graphe (4), on observe que, plus epsilon est petit, plus les échantillons  $N_l$  sont grands. Ceci donne une précision plus importante pour la méthode du multilevel.

### 4.3 Option lookback :

Pour calculer le sous-jacent à maturité, on reprend les mêmes méthodes qu'on a vu dans l'option call. Mais pour le Payoff de l'option lookback, on a que

$$P = e^{-rT} \left( S_T - \min_{0 < t < T} (S_t) \right) \quad (4.4)$$

On va approximer le minimum du sous-jacent  $\min_{0 < t < T} (S_t)$ , numériquement par :

$$\hat{S}_{min}^l = \min_n (S_n) (1 - \beta^* \sigma \sqrt{h_l}). \quad (4.5)$$

Au niveau de l'application numérique, on a comme valeur de  $\beta^* \approx 0.5826$ .

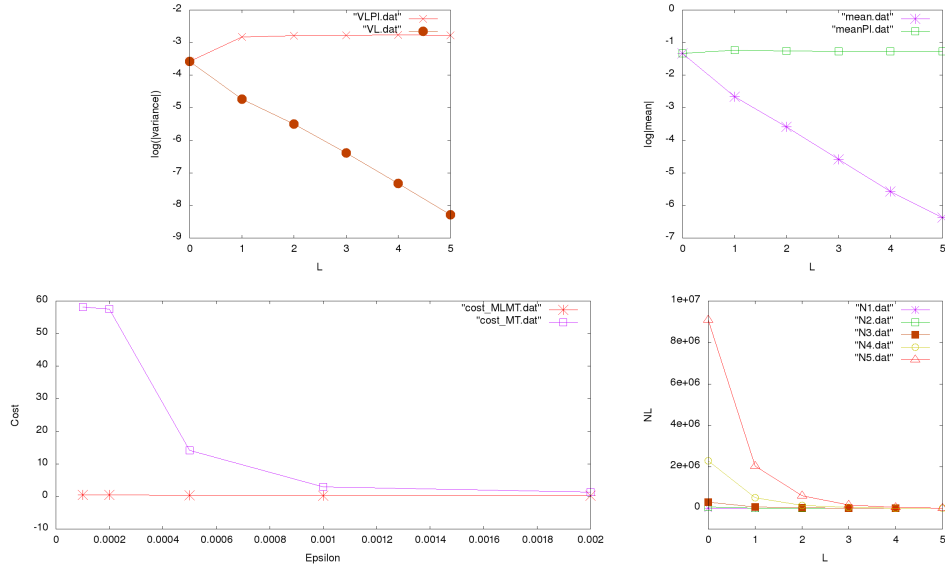


FIGURE 4.3 – Option Lookback avec un prix  $\approx 0.12$

Ici, avec le Monte Carlo simple, on a un prix qui vaut approximativement 0.17. On a pas pu trouver le souci qui fait que les prix soient approximativement égale avec le Multilevel pour l'option Lookback mais après les autres valeurs qu'on a obtenu semble être assez correcte. Comme on peut constater sur le graphe en haut à gauche pour la variance, celui du Monte Carlo simple bouge un peu et garde sensiblement la même allure après, et pour le Multilevel, on a bien une réduction de la variance à chaque niveau. Et il en est de même pour la moyenne. Pour le coût de calcul, on remarque que pour le Monte Carlo Standard est toujours supérieur à celui du Multilevel Monte Carlo et quand  $\epsilon$  tend vers 0, on peut conclure par rapport au graphe que la complexité du Monte Carlo simple à une tendance à limite divergé, et celui du Multilevel reste quand même proche de 0. Pour la courbe du nombre d'échantillon. Pour un epsilon assez petit,  $N_0$  est assez grand, mais au fur et à mesure où on monte de niveau la taille de l'échantillon diminue. On peut même voire que pour  $L = 5$ , pour tout valeur de  $\epsilon$  qu'on a choisit, les  $N_L$  sont assez proches.

## 4.4 Option Digital :

L'option digital est caractérisé par son Payoff qui est défini par :  $P = e^{-rT}H(S_T - K)$

$$\text{où } H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ici, on utilise le même sous-jacent que celui de l'option européenne et les mêmes valeurs pour l'application numérique.

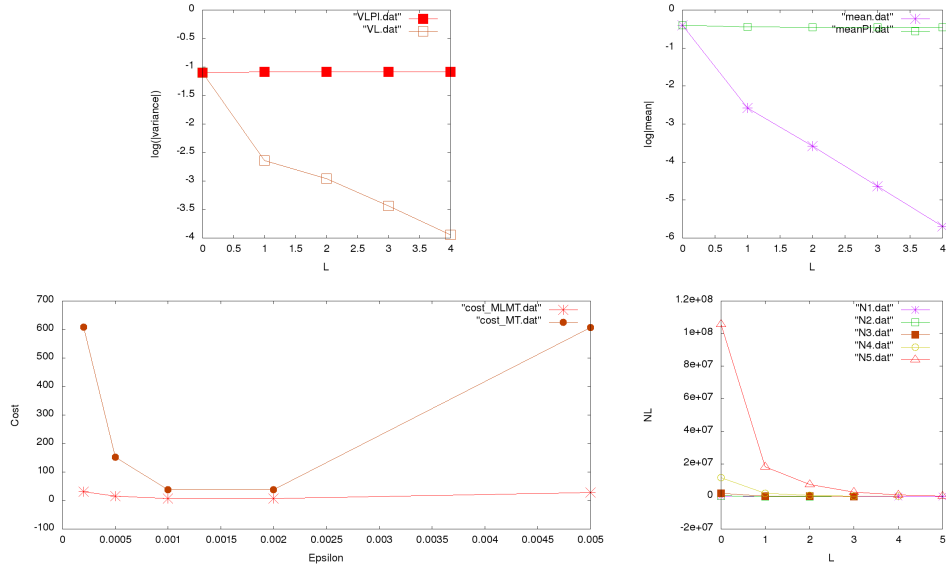


FIGURE 4.4 – Option digital avec un prix  $\approx 0.53$

Ce que l'on constate au niveau de la variance pour la méthode du Multilevel Monte Carlo, en commençant notre observation à  $L = 1$ , la courbe en violet qui représente la variance suit une droite de pente négative. Tandis que la méthode d'approximation Monte carlo Standard reste approximativement constante pour chaque valeur de  $L$  qu'on fait. Et pour la moyenne qu'on a obtenu grâce au Multilevel Monte Carlo représenté par la courbe coloré en violet, en commençant nos études à  $L = 1$ , on a bien une moyenne qui décroît et qui est inférieur à celui du Monte Carlo standard.

Ce qui nous intéresse le plus ici c'est la courbe de la complexité de calcul qui nous donne des informations assez instructives. En premier lieu, on peut dire que la courbe coloré en marron qui représente le coût de calcul de la méthode Monte Carlo simple est strictement au dessus de la courbe en rose qui représente le coût de calcul du Multilevel. Ce qui correspond largement à nos attente. En deuxième lieu, on constate que pour les deux cas, le choix de  $\epsilon$  doit se faire judicieusement. Comme on peut le voire sur la courbe, quand  $\epsilon$  est entre 0.001 et 0.002, le coût de calcul est moins élevé, mais quand  $\epsilon$  tend vers 0.0001 le coût du calcul est grand car on peut voire que  $N_0$  est de l'ordre de  $10^8$  pour une telle valeur de  $\epsilon$ . Et comme dans les 2 méthodes, on utilise  $N_0$  pour le calcul

de la complexité de calcul, cela explique ce résultat qu'on a.

## 4.5 Option européennes avec sous-jacent à volatilité stochastique :(Heston)

Dans cette partie, on va évaluer le prix d'une option européenne, mais cette fois ci, c'est avec un modèle à volatilité qui est le modèle de Heston défini par :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1 \\ dV_t = \lambda(\sigma^2 - V_t)dt + \kappa\sqrt{V_t}dW_t^2. \end{cases} \quad 0 < t < T$$

où  $S$  est le sous-jacent,  $r$  est le taux constante,  $V$  la volatilité stochastique, et  $W^1$  et  $W^2$  sont des mouvement browniens avec un corrélation vaut  $d\langle W^1, W^2 \rangle = \rho dt$ .  $\lambda$  est le paramètre de retour à la moyenne, et  $\kappa$  est la volatilité de la volatilité  $V$ . En appliquant la discrétisation d'Euler sur le modèle d'Heston, on obtient :

$$\begin{cases} \hat{S}_{n+1} = \hat{S}_n r \hat{S}_n h + \sqrt{\hat{V}_n^+} \hat{S}_n \Delta W_n^1 \\ V_{n+1} = \sigma^2 + e^{-\lambda h} \left( (\hat{V}_n - \sigma^2) + \kappa \sqrt{\hat{V}_n^+} \Delta W_n^2 \right). \end{cases}$$

Ici,  $\hat{V}_n^+ = \max(\hat{V}_n, 0)$ , et en application numérique, on a pris comme valeur,  $S(0) = 1$ ,  $V(0) = 0.04$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\lambda = 5$  et  $\kappa = 0.25$ .

Comme on a spécifié avant que la volatilité sera une fonction lipschitzienne pour avoir la condition de convergence faible et fort d'Euler, dans ce modèle ce n'est pas du tout le cas, mais quand même on peut observer sur la graphe que la variance qui se trouve en haut à gauche est plus petit pour  $L = 1$  et garde à peu près la même allure quand  $L = 2$ . Pour  $L = 3$  on observe une petite chute. Pour les moyennes, on a que la moyenne obtenue par Monte Carlo coloré en vert garde la même allure pour chaque niveau  $L$  tandis que pour le Multilevel coloré en violet, la courbe de la moyenne décroît à chaque niveau  $L$ . Et au niveau de la complexité de calcul, on voit bien que le Multilevel Monte Carlo a un coût plus bas que la méthode Monte Carlo standard. En dépit du fait que l'on a pas une volatilité lipschitzienne, en utilisant le modèle de Heston, on a encore la méthode du Multilevel Carlo qui est satisfaisant au niveau de nos attentes.



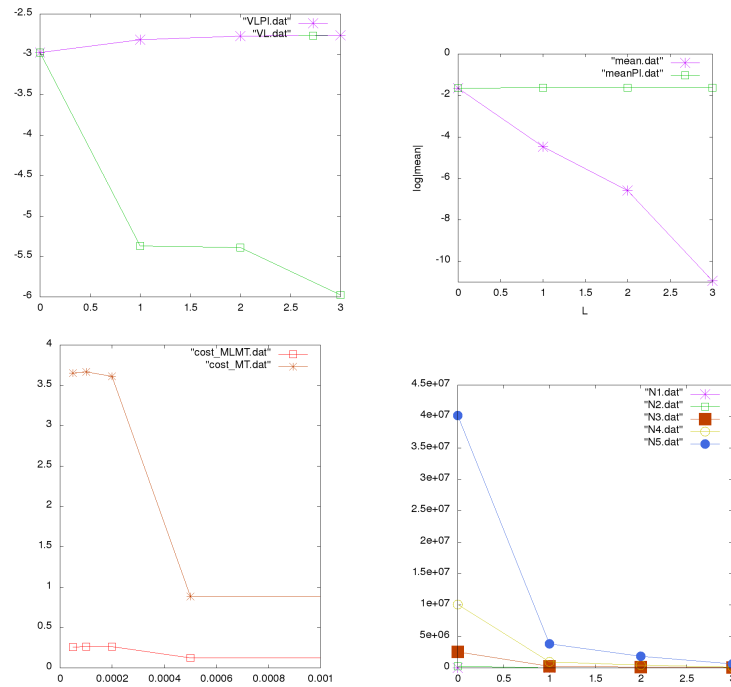


FIGURE 4.5 – Option Call simuler avec le modèle d'Heston avec un prix  $\approx 0.10$ .

### Remarque :

Pour un epsilon assez petit, on a les mêmes prix à un certain nombre après la virgule. Et on juge que cela est cohérent.

## 4.6 Conclusion

On peut alors conclure que soit au point de vu théorique, ou au point de vu pratique, les résultats qu'on a obtenue montre bien l'efficacité de la méthode Multilevel Monte Carlo pour la réduction de la complexité de calcul, et même pour la réduction de variance. On a eu des problèmes comme au niveau du prix du LookBack qui n'était pas similaire à celui du Méthode Monte Carlo standard. Mais on a quand même réussi à obtenir des résultats assez significatif et bien cohérent pour les autres options.

Si on aurait pu avoir le temps et l'occasion de continuer, on aurait bien voulu faire l'extrapolation de Richardson ainsi que l'étude du Multilevel quasi Monte Carlo qui serait un bon complément avec le cours de quasi-Monte Carlo qu'on a suivi durant cette année.

[1, 2]

# Bibliographie

- [1] Michael B.Gilles. *Multilevel Monte Carlo Path Simulation*. 2006. URL [https://people.maths.ox.ac.uk/gilesm/files/OPRE\\_2008.pdf](https://people.maths.ox.ac.uk/gilesm/files/OPRE_2008.pdf).
- [2] Kaouther HAJJI. *Accélération de la méthode de Monte Carlo pour des processus de diffusions et applications en Finance*. 2014. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01288425/document>.