teo: $\mathbb{R}$ é completo $\to$ Insieme lim. sup. ha un solo estremo superiore $\downarrow$ Minimo maggiorante

"dimm"

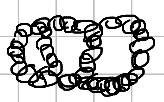
$\hookrightarrow$ Sia A lim. superiormente, $A \subseteq \mathbb{R}$

costruisco il sup. ricorsivamente

- Le parti intere sono tutte limitate sup. (perché se ho un maggiorante per A, allora é $\geq$ tutti gli elementi di A)
  Deve esserci un massimo (M)
- Guardo tutti i numeri per cui la parte intera é $\equiv M$
  A_0 $(\underline{a} \equiv M)$
- Guardo le prime cifre decimali di A_0. Prendo la cifra massima
- in A_0, Guardo i numeri $\{M, C_0 \ldots\} = A_1$
- Guardo la seconda cifra decimale $\overset{A_1}{\text{e}}$ scelgo la massima C_1
  ripeto lo stesso passaggio di prima

Questa procedura costituisce il sup A

thomas Limachi



$\mathbb{Q}$ non é completo perché $\sqrt{2}$ non é razionale

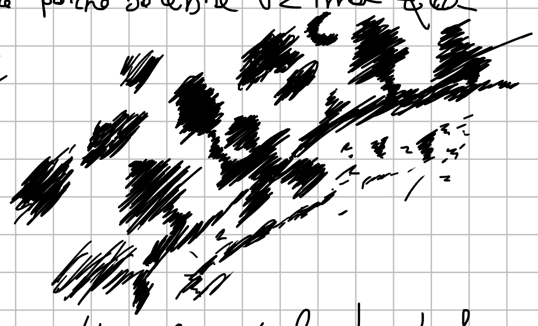
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, suppongo che sia razionale, quindi $\exists a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 : \frac{a}{b} = \sqrt{2}$
  posso supporre che l'mcd$(a,b) = 1$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$
  allora $a^2 = \underbrace{b^2 \cdot 2}_{\text{pari}}$ $= a$ é pari $\to a = 2q \to 2q^2 = 2b^2 = 4q^2 = 2b^2$
  $= 2q^2 = b^2 \to b$ é pari, quindi il MCD $\neq 1$, é almeno 2
  la dimostrazione si contraddice

  Nessun numero tale $\square^2 = 2 \in \mathbb{Q}$

- $\sqrt{2} = 1,4 \ldots$ allora $\mathbb{Q}$ non é completo perché i troncamenti di $\sqrt{2}$ formano un insieme limitato superiormente (2 é maggiorante), fatto di numeri razionali ma esso non ha estremo superiore perché sarebbe $\sqrt{2}$ ma $\notin \mathbb{Q}$

Def chiamo irrazionale ogni numero $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

problema $\to \sqrt{2} + \sqrt{3}$



Es troncamento $1{,}001 \times 10^3 \simeq 1 \cdot 10^3 = 1000$
costo x approssimazione

non esiste un teorema per cui se voglio $x \cdot y$ corretti alla N cifra basta fare $(x)_k \cdot (y)_k$

teorema Principio Continuità operazioni

Dato $\{x \in \mathbb{R} : x = M, c_0 c_1 \ldots, M \in \mathbb{N}\}$ sia $(x)_N = M, c_0 c_1 c_N$ il suo troncamento n-esimo

$x, y \in \mathbb{R}$ $\forall n$ $\exists N$: $\begin{cases} ((x)_k + (y)_k)_N = (x)_N + (y)_N \\ ((x)_k \cdot (y)_k)_N = (x)_N \cdot (y)_N \end{cases}$ $\forall k \geq N$
$k \geq N$

$+ N = M + 2$ $\quad x = N \geq M + \log(x+y)$

il numero ricavato costruito mediante troncamenti successivi si chiama somma di x e y / prodotti di x e y

tutte le proprietà algebriche di somma e prodotto valgono nei $\mathbb{R}$

N.B.: per sapere le prime n cifre giuste di

- $x + y$ basta fare $x_N + y_N$ $N \geq M + 2$
- $x \cdot y$ $\quad x_N \cdot y_N$, $N > M + \log_{10}(x + y)$

teorema Data $b > 0$, $\exists$ unica la funzione esponenziale di base b con le seguenti proprietà

$\to b^0 = 1$; $b^1 = b$ $\qquad \to b^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\to b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\qquad \to (b^x)^y = b^{x \cdot y}$

N.B.: $b^N = (b)^N$ $\quad 2^2 = 4 \to 2^1 \cdot 2^1 = 4 \to 2 \cdot 2 = 4$ $\quad 4 = 4$

$x \geq y \iff x - y \geq 0$ → ordinamento reale

Caratterizzazione del $\sup A$ / $\inf$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ lim sup sono equivalenti

1. $S = \sup A$
2. 1) $S \geq a \ \forall a \in A$

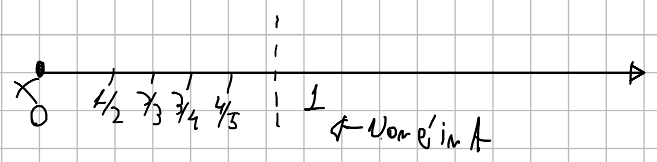
   2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a > S - \varepsilon$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ lim inf ...

1. $I = \inf A$
2. 1) $I < a \ \forall a \in A$

   2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a < I + \varepsilon$

Es Det estremo inf e sup di $A = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$



$\inf A = 0$

$\sup A = 1$

$0 \in A$, $0 \leq \frac{n-1}{n}$ 0 è minorante
$n > 0$

$0 = \min A$ (appartiene ad A) $= \inf A$

$1 \geq \frac{n-1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ si dimostra facendo la diseq.

1 non appartiene a A

A non ha massimo

La 1ª proprietà è soddisfatta

$1 \geq \ \forall a \in A$

sia $\varepsilon > 0$, $\exists ? \ a > 1 - \varepsilon$

$\frac{n-1}{n} > 1 - \varepsilon$

$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$

$-\frac{1}{n} > -\varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$ basta prendere $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 = n$

1. Es

Si dia la definizione di estremo superiore di un $A \subseteq \mathbb{R}$ e si fornisca poi un esempio di un insieme A non limitato con $\sup A$ finito ma privo di massimo

→ $\{x < 0\}$

2. Dare la definizione di maggiorante di un $X \subseteq \mathbb{R}$ e fornire se possibile un esempio di $X \subset \mathbb{R}$:

   a) X ha come maggiorante $\inf X$ → $X = \{0\}$

   b) X non ha maggiorante → $X > 0$

   c) X ha un solo maggiorante → Non esiste perché se M è maggiorante esiste $M+1$

Teorema: Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$ esiste un $q \in \mathbb{Q}$: $a < q < b$

dimostrazione

visto che $a \neq b$, ci sarà una co di b ≠ a e quella di b sarà maggiore

$a = 1{,}123456$

$b = 1{,}123457$

se b è 1,1234567 5 → a non ha un q

quindi c'è un k t.c. c_k di $a < q$

pongo $q = (a)_{k-1}(c_k + 1)$

Altrimenti c'è una cifra di b dopo il 7 che non è nulla