作业一: 洛必达 (L'Hospital) 法则的证明

郯许和
数学与应用数学
3190105342

2022 年 6 月 27 日

洛必达法则是在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限确定不定式值的一种方法，有着广泛的应用。

1 问题描述

Theorem. 假设 f 和 g 在 (a,b) 上可导，并且 $g(x) \neq 0$ 对 $\forall x \in (a,b)$ 成立，其中 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$，假设:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A, x \to a^+. \tag{1}$$

当 $x \to a^+$ 时, 如果有 $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ 或者 $g(x) \to \infty$.
那么就有

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{2}$$

2 证明

考虑如下两种情况:
1. 当 $x \to a^+$ 时，有 $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ 时:
补充定义

$$f(a) = g(a) = 0 \tag{3}$$

以保持 f, g 在 $[a, b)$ 上的连续性，由 (3)，利用 Cauchy 中值定理，对 $\forall x \in (a, b)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{4}$$

这里 $a < \xi < x$，由此可见，当 $x \to a^+$ 时，有 $\xi \to a^+$. 因此有

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{5}$$

2. 当 $x \to a^+$ 时，有 $g(x) \to \infty$ 时:

现在只考虑 A 为有限数的情况，而当 $A = \pm\infty$ 时，可以类似证明. 由 (1)，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，当 $x \in (a, a + \delta)$ 时，

$$A - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \varepsilon \tag{6}$$

因此, 对 $(x, c) \subset (a, a+\delta)$, 根据 Cauchy 中值定理, 必定存在 $\xi \in (x, c)$, 使得

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < A + \varepsilon \tag{7}$$

但是因为

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = (\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(x)})(1 - \frac{g(c)}{g(x)})^{-1} \tag{8}$$

固定 c ，对 $x \to a^+$ 取上极限得到

$$\lim_{x \to a^+} \sup \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + \varepsilon \tag{9}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 有

$$\lim_{x \to a^+} \sup \frac{f(x)}{g(x)} \leq A \tag{10}$$

利用同样的技巧，还可以得出

$$\lim_{x \to a^+} \inf \frac{f(x)}{g(x)} \geq A \tag{11}$$

结合 (10),(11) 我们可以证明结论成立，即

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{12}$$