7. Прогнозування динаміки за трендовими моделями

Прогнозування економічних показників за трендовими моделями засновано на ідеї екстраполяції. Тобто вважається, що вія зв'язків і закономірностей, діючих в сучасному періоді, розповсюджується і на наступні періоди. Застосування екстраполяції доцільне при виконанні таких умов:

- початковий часовий ряд повинен бути довгим;
- часовий ряд не повинен мати стрибків і тенденція ряду описується плавною кривою;
- екстраполяція за допомогою кривих тренду дасть прийнятні результати, якщо границя насичення буде визначена досить точно.

Прогноз на основі трендових моделей включає в собі два моменти: визначення точкового і інтервального прогнозів.

Точковий прогноз - це прогноз, що отримується підкладанням у рівняння тенденції величини часу t, що відповідає відповідному періоду випередження: $t = n+1, n+2, \ldots$
Зрозуміло, що співпадіння фактичних даних в майбутньому і прогнознох точкових малоймовірне. Тому доводиться розраховувати нижню і верхню межі зміни прогнозної величини. Цей інтервал називають прогнозним інтервалом. Більш точно: прогнозний інтервал – це інтервал з випадковими межами, в якому з ймовірністю $(1-\alpha)100\%$ можно очікувати фактичне значення прогнозного показника.

Розрахунок прогнозних інтервалів при прогнозіванні за допомогою трендових моделей спирається на формули теорії регресій. Але слід пам'ятати, що динамічні ряди відрізняються від статистичних сукупностей і тому необхідно обережно підходити до оцінки прогнозних інтервалів.

Далі розглянемо різні види трендових моделей оцінки їх параметрів і вкажемо на алгоритми розрахунків прогнозних інтервалів.

1. Лінійний тренд

У цьому випадку функція тенденції має вигляд

$$y_t = a_0 + a_1 t.$$

Розрахунок параметрів a_0 і a_1 здійснюється методом найменших квадратів, який дає таку систему рівнянь для розрахунку цих параметрів:

$$a_0 n + a_1 \sum_{t=1}^{n} t = \sum_{t=1}^{n} y_t,$$

$$a_0 \sum_{t=1}^{n} t + a_1 \sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} t \cdot y_t$$

У випадку лінійного тренду межі прогнозного інтервалу мають вигляд:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - t(\alpha, n-2) \cdot S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sum t^2} t_L^2}$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + t(\alpha, n-2) \cdot S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sum t^2} t_L^2}$$

де L – період випередження, $\hat{y}_{n+L}$ – точковий прогноз за трендовою моделлю в момент $(n+L)$, n – кількість спостережень в часовому ряді, $S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum(y_t - \hat{y}_t)^2}{n-2}}$, $t(\alpha, n-2)$ – табличне значення критерія Стюдента для рівня значущості α і кількість ступенів свободи – $(n-2)$, $\hat{y}_t$ – розраховані за лінійною функцією.

Для різних значень n, α і L є таблиці, в яких протабульовано вираз $K^* = t(\alpha, n-2)\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sum t^2} t_L^2}$. Тоді межі прогноного інтервалу будуть такі:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - S_{\hat{y}} \cdot K^*,$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + S_{\hat{y}} \cdot K^*.$$

2. Многочлен другого ступеня

Функція тенденції має вигляд: $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

Система рівнянь для визначення параметрів a_0, a_1 і a_2 має вигляд:

$$a_0 n + a_1 \sum_{t=1}^{n} t + a_2 \sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} y_t,$$

$$a_0 \sum_{t=1}^{n} t + a_1 \sum_{t=1}^{n} t^2 + a_2 \sum_{t=1}^{n} t^3 = \sum_{t=1}^{n} t \cdot y_t,$$

$$a_0 \sum_{t=1}^{n} t^2 + a_1 \sum_{t=1}^{n} t^3 + a_2 \sum_{t=1}^{n} t^4 = \sum_{t=1}^{n} t^2 y_t.$$

Прогнозний інтервал має такі межі:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - t(\alpha; n-3) S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{t_L^2}{\sum_{t=1}^{n} t^2} + \frac{\sum_{t=1}^{n} t^4 - 2t_L^2 \sum_{t=1}^{n} t^2 + n t_L^4}{n \sum_{t=1}^{n} t^4 - (\sum_{t=1}^{n} t^2)^2}},$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + t(\alpha; n-3) S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{t_L^2}{\sum_{t=1}^{n} t^2} + \frac{\sum_{t=1}^{n} t^4 - 2t_L^2 \sum_{t=1}^{n} t^2 + n t_L^4}{n \sum_{t=1}^{n} t^4 - (\sum_{t=1}^{n} t^2)^2}},$$

де $S_{\hat{y}}$ розраховується так як і для лінійного тренду, тільки у знаменнику кількість відностей - $(n-3)$.

Позначимо вираз

$$t(\alpha; n-3)\sqrt{1+\dots+\frac{t_L^2}{\sum_{t=1}^n t^2}+\frac{\sum_{t=1}^n t^4-2t_L^2\sum_{t=1}^n t^2+nt_L^n}{n\sum_{t=1}^n t^4-(\sum_{t=1}^n t^2)^2}}$$

через K^*. Існують таблиці табульованих значень K^* для різних n, α і L. Тоді прогнозний інтервал має вигляд:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L}-S_{\hat{y}}\cdot K^*,$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L}+S_{\hat{y}}\cdot K^*.$$

3. Многочлен третього ступеня

Функція тенденція має вигляд: $y=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$.

Для визначення параметрів a_0, a_1, a_2 і a_3 маємо таку систему рівнянь:

$$a_0n+a_1\sum_{t=1}^n t+a_2\sum_{t=1}^n t^2+a_3\sum_{t=1}^n t^3=\sum_{t=1}^n y_t,$$

$$a_0\sum_{t=1}^n t+a_1\sum_{t=1}^n t^2+a_2\sum_{t=1}^n t^3+a_3\sum_{t=1}^n t^4=\sum_{t=1}^n ty_t,$$

$$a_0\sum_{t=1}^n t^2+a_1\sum_{t=1}^n t^3+a_2\sum_{t=1}^n t^4+a_3\sum_{t=1}^n t^5=\sum_{t=1}^n t^2y_t,$$

$$a_0\sum_{t=1}^n t^3+a_1\sum_{t=1}^n t^4+a_2\sum_{t=1}^n t^5+a_3\sum_{t=1}^n t^6=\sum_{t=1}^n t^3y_t.$$

Межі прогнозного інтервалу такі:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L}-t(\alpha;n-4)S_{\hat{y}}\sqrt{1+\frac{1}{\sum_1^n t^2}t_L^2+\frac{\sum t^4-2t_L^2\sum t^2+nt_L^4}{n\sum t^4-(\sum t^2)^2}+\frac{(\sum t^6-2\sum t^4)t_L^2+(\sum t^2)t_L^6}{\sum t^2\sum t^6-(\sum t^4)^2}},$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L}+t(\alpha;n-4)S_{\hat{y}}\sqrt{1+\frac{1}{\sum_1^n t^2}t_L^2+\frac{\sum t^4-2t_L^2\sum t^2+nt_L^4}{n\sum t^4-(\sum t^2)^2}+\frac{(\sum t^6-2\sum t^4)t_L^2+(\sum t^2)t_L^6}{\sum t^2\sum t^6-(\sum t^4)^2}},$$

де $S_{\hat{y}}=\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n(y_t-\hat{y}_t)}{n-4}}$, $\hat{y}_t$ – розраховані за многочленом третього ступеня.

Позначимо вираз

$$t(\alpha;n-4)\sqrt{1+\frac{1}{\sum t^2}t_L^2+\frac{\sum t^4-2t_L^2\sum t^2+nt_L^4}{n\sum t^4-(\sum t^2)^2}+\frac{(\sum t^6-2\sum t^4)t_L^2+(\sum t^2)t_L^6}{\sum t^2\sum t^6-(\sum t^4)^2}}$$

через K^*.

Існує таблиця табульованих значень K^* для різних n, α і L. Тоді прогнозний інтервал буде таким:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - S_{\hat{y}} \cdot K^*,$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + S_{\hat{y}} \cdot K^*.$$