Повна проблема власних значень симетричних матриць

Виконала: студентка 3 курса
спеціальності "Прикладна математика"
Корнилова Тетяна Юріївна
Науковий керівник: Таірова Марія Сергіївна

Зміст

Основні відомості про власні значення

Означення. Комплексне число $\lambda \in \mathbb{C}$ називаеться власним значенням матриці A, якщо існує ненульовий вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з комплексними компонентами $x_i \in \mathbb{C}$, що задоволняє рівнянню

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \tag{1}$$

вектор x будемо власним вектором матриці A, що відповідає власному значенню λ.

Основні відомості про власні значення

Теорема Гершгоріна: усі власні значення матриці A лежать в об'єднанні кіл $S_1, S_2, \dots, S_n$, де

$$S_i = z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i, r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

- сума модулів внедіагональних елементів i-ої строки матриці A; якщо k кругів утворюють замкнену область, ізольовану від інших кіл, то в цій області знаходиться рівно k власних значень з урахуванням їх кратності.

Матриці обертань

В тривимірному просторі можна говорити про обертання в площнах $(x, y), (x, z)$, и (y, z), тобто про обертання на кут ϕ навколо вісей Z, X і Y відповідно. Цим трьом випадкам відповідають такі матриці плоских обертань:

$$U_{xy} = \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_{xz} = \begin{pmatrix} cos\phi & 0 & -sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\phi & 0 & cos\phi \end{pmatrix},$$

$$U_{yz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & -sin\phi \\ 0 & sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}.$$

Матриці обертання

В загальному випадку n-мірного векторного простору визначимо матрицю обертання $U_{i_0 j_0}$ у площині (i_0, j_0) наступним чином:

$$U_{i_0 j_0} = \begin{pmatrix} 1 & & | & & & | & & \\ & \ddots & | & & & | & & \\ & & 1| & & & | & & \\ - & - & (cos\phi) & - & - & (-sin\phi) & - & - \\ & & |1 & & & | & & \\ & & | & \ddots & & | & & \\ & & | & & & 1| & & \\ - & - & (sin\phi) & - & - & (cos\phi) & - & - \\ & & | & & & |1 & & \\ & & | & & & | & \ddots & \\ & & | & & & | & & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Метод Гівенса

Матричне множення виду: $G_{ij}^T A G_{ij}$,

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & \dots & -sin\phi & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & sin\phi & \dots & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нехай дана квадратна симетрична матриця A размірності n. На кожному кроці методу, щоб сформувати матрицю Хаусхолдера необхідно визначити α і r:

$$\alpha = -sgn(a_{21})\sqrt{\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^{1}};$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 - a_{21}\alpha)};$$

З α і r визначаємо вектор v :

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

де $v_1 = 0, v_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r}$, и $v_k = \frac{a_{k1}}{2r}$ для кажного $k = 3, 4, \ldots, n$

Потім вважаємо:

$$P^1 = I - 2v^{(1)}(v^{(1)})^T$$

$$A^{(2)} = P^1AP^1$$

Отримавши матриці A і P^1 продовжуємо процес для $k = 2, 3, \ldots, n-1:$

$$\alpha = -sgn(a^k_{k+1,k})\sqrt{\sum_{j=k+1}^{n}(a^k_{jk})^2}; \quad r = \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 - a^k_{k+1,k}\alpha)};$$

$$v^k_1 = v^k_2 = \cdots = v^k_k = 0; \quad v^k_{k+1} = \frac{a^k_{k+1,k} - \alpha}{2r}$$

$$v^k_j = \frac{a^k_{jk}}{2r} \quad \text{для} \quad j = k+2; k+3, \ldots, n$$

$$P^k = I - 2v^{(k)}(v^{(k)})^T; \quad A^{(k+1)} = P^kA^{(k)}P^k$$

Табл.: Порівняння методів

Метод Гівенса	Метод Хаусхолдера
$\frac{4}{3}n^3$ множень	$\frac{2}{3}n^3$ множень
$\frac{1}{2}n^2$ квадратних коренів	n квадратних коренів