

## 7. Прогнозування динаміки за трендовими моделями

Прогнозування економічних показників за трендовими моделями засновано на ідеї екстраполяції. Тобто вважається, що вія зв'язків і закономірностей, діючих в сучасному періоді, розповсюджується і на наступні періоди. Застосування екстраполяції доцільне при виконанні таких умов:

- початковий часовий ряд повинен бути довгим;
- часовий ряд не повинен мати стрибків і тенденція ряду описується плавною кривою;
- екстраполяція за допомогою кривих тренду дасть прийнятні результати, якщо границя насичення буде визначена досить точно.

Прогноз на основі трендових моделей включає в собі два моменти: визначення точкового і інтервального прогнозів.

Точковий прогноз - це прогноз, що отримується підкладанням у рівняння тенденції величини часу  $t$ , що відповідає відповідному періоду випередження:  $t = n + 1, n + 2, \dots$

Зрозуміло, що співпадіння фактичних даних в майбутньому і прогнозних точкових малоімовірне. Тому доводиться розраховувати нижню і верхню межі зміни прогнозної величини. Цей інтервал називають прогнозним інтервалом. Більш точно: прогнозний інтервал – це інтервал з випадковими межами, в якому з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  можна очікувати фактичне значення прогнозного показника.

Розрахунок прогнозних інтервалів при прогнозуванні за допомогою трендових моделей спирається на формули теорії регресій. Але слід пам'ятати, що динамічні ряди відрізняються від статистичних сукупностей і тому необхідно обережно підходити до оцінки прогнозних інтервалів.

Далі розглянемо різні види трендових моделей оцінки їх параметрів і вкажемо на алгоритми розрахунків прогнозних інтервалів.

### 1. Лінійний тренд

У цьому випадку функція тенденції має вигляд

$$y_t = a_0 + a_1 t.$$

Розрахунок параметрів  $a_0$  і  $a_1$  здійснюється методом найменших квадратів, який дає таку систему рівнянь для розрахунку цих параметрів:

$$a_0 n + a_1 \sum_{t=1}^n t = \sum_{t=1}^n y_t,$$

$$a_0 \sum_{t=1}^n t + a_1 \sum_{t=1}^n t^2 = \sum_{t=1}^n t \cdot y_t$$

У випадку лінійного тренду межі прогнозного інтервалу мають вигляд:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - t(\alpha, n-2) \cdot S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sum t^2} t_L^2}$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + t(\alpha, n-2) \cdot S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sum t^2} t_L^2}$$

де  $L$  – період випередження,  $\hat{y}_{n+L}$  – точковий прогноз за трендовою моделлю в момент  $(n+L)$ ,  $n$  – кількість спостережень в часовому ряді,  $S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n-2}}$ ,  $t(\alpha, n-2)$  – табличне значення критерія Стюдента для рівня значущості  $\alpha$  і кількості ступенів свободи –  $(n-2)$ ,  $\hat{y}_t$  – розраховані за лінійною функцією.

Для різних значень  $n$ ,  $\alpha$  і  $L$  є таблиці, в яких протабульовано вираз  $K^* = t(\alpha, n-2) \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sum t^2} t_L^2}$ . Тоді межі прогнозного інтервалу будуть такі:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - S_{\hat{y}} \cdot K^*,$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + S_{\hat{y}} \cdot K^*.$$

## 2. Многочлен другого ступеня

Функція тенденції має вигляд:  $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ .

Система рівнянь для визначення параметрів  $a_0, a_1$  і  $a_2$  має вигляд:

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum_{t=1}^n t + a_2 \sum_{t=1}^n t^2 &= \sum_{t=1}^n y_t, \\ a_0 \sum_{t=1}^n t + a_1 \sum_{t=1}^n t^2 + a_2 \sum_{t=1}^n t^3 &= \sum_{t=1}^n t \cdot y_t, \\ a_0 \sum_{t=1}^n t^2 + a_1 \sum_{t=1}^n t^3 + a_2 \sum_{t=1}^n t^4 &= \sum_{t=1}^n t^2 y_t. \end{aligned}$$

Прогнозний інтервал має такі межі:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - t(\alpha; n-3) S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{t_L^2}{\sum_{t=1}^n t^2} + \frac{\sum_{t=1}^n t^4 - 2t_L^2 \sum_{t=1}^n t^2 + nt_L^4}{n \sum_{t=1}^n t^4 - (\sum_{t=1}^n t^2)^2}},$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + t(\alpha; n-3) S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{t_L^2}{\sum_{t=1}^n t^2} + \frac{\sum_{t=1}^n t^4 - 2t_L^2 \sum_{t=1}^n t^2 + nt_L^4}{n \sum_{t=1}^n t^4 - (\sum_{t=1}^n t^2)^2}},$$

де  $S_{\hat{y}}$  розраховується так як і для лінійного тренду, тільки у знаменнику кількість відностей –  $(n-3)$ .

Позначимо вираз

$$t(\alpha; n-3) \sqrt{1 + \dots + \frac{t_L^2}{\sum_{t=1}^n t^2} + \frac{\sum_{t=1}^n t^4 - 2t_L^2 \sum_{t=1}^n t^2 + nt_L^4}{n \sum_{t=1}^n t^4 - (\sum_{t=1}^n t^2)^2}}$$

через  $K^*$ . Існують таблиці табульованих значень  $K^*$  для різних  $n, \alpha$  і  $L$ . Тоді прогнозний інтервал має вигляд:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - S_{\hat{y}} \cdot K^*,$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + S_{\hat{y}} \cdot K^*.$$

### 3. Многочлен третьего ступеня

Функція тенденція має вигляд:  $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ .

Для визначення параметрів  $a_0, a_1, a_2$  і  $a_3$  маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum_{t=1}^n t + a_2 \sum_{t=1}^n t^2 + a_3 \sum_{t=1}^n t^3 &= \sum_{t=1}^n y_t, \\ a_0 \sum_{t=1}^n t + a_1 \sum_{t=1}^n t^2 + a_2 \sum_{t=1}^n t^3 + a_3 \sum_{t=1}^n t^4 &= \sum_{t=1}^n t y_t, \\ a_0 \sum_{t=1}^n t^2 + a_1 \sum_{t=1}^n t^3 + a_2 \sum_{t=1}^n t^4 + a_3 \sum_{t=1}^n t^5 &= \sum_{t=1}^n t^2 y_t, \\ a_0 \sum_{t=1}^n t^3 + a_1 \sum_{t=1}^n t^4 + a_2 \sum_{t=1}^n t^5 + a_3 \sum_{t=1}^n t^6 &= \sum_{t=1}^n t^3 y_t. \end{aligned}$$

Межі прогнозного інтервалу такі:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - t(\alpha; n-4) S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sum_{t=1}^n t^2} t_L^2 + \frac{\sum_{t=1}^n t^4 - 2t_L^2 \sum_{t=1}^n t^2 + nt_L^4}{n \sum_{t=1}^n t^4 - (\sum_{t=1}^n t^2)^2} + \frac{(\sum_{t=1}^n t^6 - 2 \sum_{t=1}^n t^4) t_L^2 + (\sum_{t=1}^n t^2) t_L^6}{\sum_{t=1}^n t^2 \sum_{t=1}^n t^6 - (\sum_{t=1}^n t^4)^2}},$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + t(\alpha; n-4) S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sum_{t=1}^n t^2} t_L^2 + \frac{\sum_{t=1}^n t^4 - 2t_L^2 \sum_{t=1}^n t^2 + nt_L^4}{n \sum_{t=1}^n t^4 - (\sum_{t=1}^n t^2)^2} + \frac{(\sum_{t=1}^n t^6 - 2 \sum_{t=1}^n t^4) t_L^2 + (\sum_{t=1}^n t^2) t_L^6}{\sum_{t=1}^n t^2 \sum_{t=1}^n t^6 - (\sum_{t=1}^n t^4)^2}},$$

де  $S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n-4}}$ ,  $\hat{y}_t$  – розраховані за многочленом третього ступеня.

Позначимо вираз

$$t(\alpha; n-4) \sqrt{1 + \frac{1}{\sum_{t=1}^n t^2} t_L^2 + \frac{\sum_{t=1}^n t^4 - 2t_L^2 \sum_{t=1}^n t^2 + nt_L^4}{n \sum_{t=1}^n t^4 - (\sum_{t=1}^n t^2)^2} + \frac{(\sum_{t=1}^n t^6 - 2 \sum_{t=1}^n t^4) t_L^2 + (\sum_{t=1}^n t^2) t_L^6}{\sum_{t=1}^n t^2 \sum_{t=1}^n t^6 - (\sum_{t=1}^n t^4)^2}}$$

через  $K^*$ .

Існує таблиця табульованих значень  $K^*$  для різних  $n, \alpha$  і  $L$ . Тоді прогнозний інтервал буде таким:

$$\text{Н.М.: } \hat{y}_{n+L} - S_{\hat{y}} \cdot K^*,$$

$$\text{В.М.: } \hat{y}_{n+L} + S_{\hat{y}} \cdot K^*.$$