Задачи к лабораторной работе №1

Островская Татьяна

17.03.16

1

Задание (a):

Если в определении O упустить условие про N (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли получено определение эквивалентно исходному?

Решение:

По определению O:

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c, N > 0 \, \forall n > N \;\; \mathbf{f(n) \leq cg(n)}$$

Условие про N означает, что, начиная с этого N при $n > N$ значение $f(n)$ меньше или равно значению $cg(n)$. Это условие можно упустить, т.к. если условие $f(n) \leq cg(n)$ будет выполняться только начиная с какого-то N, то мы сможем заменить константу с таким образом, чтобы условие выполнялось для $\forall n$.

Эта константа находится следующим образом: предположим, в точке $kf(k) > g(k)$. Чтобы $g(n)$ стала больше или равна $f(n)$, ее нужно умножить на отношение значений функций. В итоге нужно на всем промежутке, на котором не выполняется условие, найти такое максимальное отношение, оно и будет искомой константой. Математически это запишется так:

$$c = \max \{sup_{n<k} \frac{f(n)}{g(n)}, c\}$$

Задание(b):

Если в определении o упустить условие про N (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли получено определение эквивалентно исходному?

Решение:

По определению o:

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \exists N > 0 \, \forall c > 0 \, \forall n > N \;\; \mathbf{f(n) \leq cg(n)}$$

Условие про N означает,что, начиная с этого N при $n > N$ значение $f(n)$ меньше или равно значению $cg(n)$, причем константа перед g может быть любым числом, больше 0. На графике, начиная с этого N, f будет ограничена cg сверху.

Это условие нельзя упускать, т.к. если условие $f(n) \leq cg(n)$ не выполняется при каких-то n до определенного значения N, то не получится аналогично с O подобрать константу, такую чтобы условие выполнялось, т.к. $f(n) \leq cg(n)$ должно быть верным при $\forall c > 0$.

2

Задание:

Заполнить таблицу.

Решение: Таблица была заполнена исходя из общих правил асимптотического анализа:

- Анализируя асимптотическое поведение функций, можно выстроить их в следующий ряд :

$$c \leq \lg n \leq n \leq n \lg n \leq n^2 \leq a^n \leq n!$$

  Эта зависимость хорошо проследуется из графиков функций, построенных в одной системе координат.

- Константы можно опускать, т.к. они не влияют на поведение функций при больших n.

- Для того, чтобы выполнялось условие $A = \Theta(B)$, необходимо одновременное выполнение условий $A = \Omega(B)$ и $A = O(B)$

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
$\lg^k n$	n^ϵ	+	+			
n^k	c^n	+	+			
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$				+	+
$n^{\lg m}$	$m^{\lg n}$	+		+		+
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	+		+		+

3 строка: отношение функций не определено, т.к. при рассмотрении разных интервалов аргументов функции ведут себя по-разному.
4 строка: 2^n асимптотически растет гораздо быстрее $2^{n/2}$ ($\lim_{x\to\infty}(\frac{2^n}{2^{n/2}}) = \infty$), поэтому справедливо соотношние $A = \Omega(B)$ и $A = \omega(B)$
6 строка: $\lg(n!)$ и $\lg(n^n)$ имеют одинаковую скорость роста, т.к $\lim_{x\to\infty}(\frac{\lg(n!)}{\lg(n^n)}) = 1$