好的，同学！欢迎来到线性代数的世界。这是一门既抽象又极其强大的数学分支，是现代科学、工程、计算机科学、数据科学和人工智能的基石。别怕，我们会从最基础的概念开始，一步一个脚印，目标是让你不仅通过考试，更能深刻理解其精髓，最终在结业考试中取得“优秀”的成绩。

这篇超长教程将分为五个核心章节，每个章节都包含：

1. **核心概念讲解**：用通俗易懂的语言和直观的例子解释。
2. **关键技能**：你必须掌握的计算和操作。
3. **章节习题**：从基础到进阶，巩固你的理解。
4. **习题答案**：附带详细的解题步骤。

线性代数结业冲刺：从入门到优秀

核心理念：线性代数研究的核心是**线性空间**（向量空间）以及在这些空间上的**线性变换**。听起来很玄？别急，我们用最具体的东西——**矩阵**——来作为我们探索这个世界的工具和语言。

第一章：向量与矩阵——线性代数的基石

1.1 核心概念讲解

1. 向量 向量是什么？你可以把它想象成一个箭头。它有**大小**（长度）和**方向**。在二维平面上，一个从原点0, 0指向点3, 2的箭头，我们就可以用 `v = [3, 2]` 来表示。这个由数字组成的列表就是向量的**坐标表示**。

- **几何意义**：向量可以表示空间中的位置、位移、力、速度等。
- **代数表示**：一个 n 维向量是一个包含 n 个数字的有序列表。例如，一个三维向量 `u = [1, -5, 4]`。

2. 向量的基本运算

- **向量加法**：对应分量相加。`v + u = [3+1, 2+(-5)] = [4, -3]`。
  - **几何意义**：两个向量首尾相连，得到的向量就是它们的和（平行四边形法则）。
- **标量乘法**：一个数（标量）乘以向量的每一个分量。`2 * v = [2*3, 2*2] = [6, 4]`。
  - **几何意义**：拉伸或压缩向量。如果标量是负数，则向量方向反转。

3. 矩阵 矩阵就是一个长方形的数字网格。它由行和列组成。一个 m x n 的矩阵有 m 行 n 列。

```
A = [[1, 2, 3],[4, 5, 6]]
```

这是一个 2x3 矩阵。矩阵是线性代数的“超级工具”，它可以表示线性方程组、线性变换等。

4. 矩阵的基本运算

- **矩阵加法**：两个**维度相同**的矩阵，对应元素相加。
- **标量乘法**：一个数乘以矩阵的每一个元素。
- **矩阵乘法**：**这是最关键也最容易出错的地方！**
    - **前提**：矩阵 A mxn 可以乘以矩阵 B nxp。结果是一个 m x p 的新矩阵 C。**关键：A的列数必须等于B的行数！**
    - **方法**：结果矩阵 C 的第 `i` 行第 `j` 列的元素 `C_ij`，等于 A 的第 `i` 行与 B 的第 `j` 列对应元素相乘再相加。
    - **示例**： `A = [[1, 2], [3, 4]]` 2x2 `B = [[5, 6], [7, 8]]` 2x2 `C = A * B` `C_11 = (1*5) + (2*7) = 5 + 14 = 19` `C_12 = (1*6) + (2*8) = 6 + 16 = 22` `C_21 = (3*5) + (4*7) = 15 + 28 = 43` `C_22 = (3*6) + (4*8) = 18 + 32 = 50` `C = [[19, 22], [43, 50]]`
    - **重要性质**：矩阵乘法**不满足交换律**！通常 `A * B ≠ B * A`。

1.2 关键技能

1. 熟练进行向量的加减和数乘运算。
2. 熟练进行矩阵的加减和数乘运算。
3. **精通矩阵乘法**，这是后续所有内容的基础。

1.3 章节习题

习题 1.1 设向量 `a = [2, -1, 3]`，`b = [-1, 4, 0]`，标量 `k = 3`。 计算： a) `a + b` b) `k * a` c) `a - 2b`

习题 1.2 设矩阵 `A = [[1, 0, -2], [3, 1, 4]]`，`B = [[5, -1], [0, 2], [3, 1]]`，`C = [[2, 3], [1, -1]]`。 计算： a) `A * B` 如果可以 b) `B * A` 如果可以 c) `A + A` 如果可以 d) `B * C` 如果可以

第二章：线性方程组与矩阵——从问题到工具

2.1 核心概念讲解

1. 线性方程组的矩阵表示 一个线性方程组，例如： `2x + 3y - z = 5` `x - y + 2z = 1` `3x + 2y + z = 8`

可以完美地用一个矩阵方程 `Ax = b` 来表示：

- **系数矩阵 A**: `[[2, 3, -1], [1, -1, 2], [3, 2, 1]]`
- **未知向量 x**: `[x, y, z]`
- **常数向量 b**: `[5, 1, 8]`

这样，解线性方程组的问题就转化成了求解向量 `x` 的问题。

2. 增广矩阵 为了方便求解，我们将 A 和 b 拼接在一起，形成一个**增广矩阵** `[A|b]`： `[[2, 3, -1 | 5], [1, -1, 2 | 1], [3, 2, 1 | 8]]`

3. 高斯消元法 这是解线性方程组的核心算法。目标是利用**初等行变换**将增广矩阵化为**行阶梯形**或**简化行阶梯形**。

- **初等行变换**：
  1. 交换两行。
  2. 将一行乘以一个非零常数。
  3. 将一行的倍数加到另一行上。
  - **关键**：这些变换不改变方程组的解！
- **行阶梯形**：
  1. 所有全零行都在底部。
  2. 每个非零行的第一个非零元素（称为主元）的列号，比上一行主元的列号更靠右。
  3. 主元下方的元素都为0。
- **简化行阶梯形**：
  1. 满足行阶梯形的所有条件。
  2. 每个主元都是1。
  3. 每个主元所在列的其他元素都为0。

4. 解的判定 通过化简后的增广矩阵，我们可以判断解的情况：

- **唯一解**：每个变量都是主元。RREF形式下，左边是单位矩阵。
- **无穷多解**：存在非主元变量（自由变量）。解可以用自由变量来表示。
- **无解**：出现 `[0, 0, ... | k]` 且 `k ≠ 0` 的行。例如 `0x + 0y = 5`，这是不可能的。

2.2 关键技能

1. 将线性方程组写成增广矩阵形式。
2. 熟练运用高斯消元法（初等行变换）将矩阵化为行阶梯形和简化行阶梯形。
3. 根据RREF判断解的存在性、唯一性，并写出解。

2.3 章节习题

习题 2.1 用高斯消元法解下列线性方程组： `x + y + z = 6` `2x - y + z = 3` `x + 2y - z = 2`

习题 2.2 用高斯消元法判断下列方程组解的情况，若有解，求出通解： `x + 2y - z = 1` `2x + 4y - 2z = 2` `-x - 2y + z = -1`

第三章：向量空间与线性相关性——抽象的力量

3.1 核心概念讲解

1. 向量空间 这是一个抽象但核心的概念。一个向量空间 V 是一个非空集合，其上的元素（向量）满足加法和标量乘法封闭，并满足8条公理（如结合律、交换律、零元、负元等）。

- **例子**：所有二维实数向量 R^2，所有 n 维实数向量 R^n，所有 m x n 矩阵构成的集合。
- **核心思想**：我们关心的是“空间”的结构，而不是里面具体是什么。

2. 子空间 向量空间 V 的一个非空子集 W，如果它本身也对加法和标量乘法封闭，那么 W 就是 V 的一个子空间。

- **几何意义**：子空间是通过原点的直线或平面。
- **判定**：要证明 W 是 V 的子空间，只需证明：
    1. 零向量在 W 中。
    2. W 对加法封闭（`u, v ∈ W => u+v ∈ W`）。
    3. W 对标量乘法封闭（`u ∈ W, k 是标量 => k*u ∈ W`）。

3. 线性组合与张成

- **线性组合**：给定向量 `v1, v2, ..., vk` 和标量 `c1, c2, ..., ck`，`c1*v1 + c2*v2 + ... + ck*vk` 称为这些向量的一个线性组合。
- **张成**：向量 `v1, v2, ..., vk` 的所有线性组合构成的集合，称为它们的张成空间，记作 `span{v1, v2, ..., vk}`。
    - **重要**：`span{v1, v2, ..., vk}` 是一个子空间。

4. 线性相关与线性无关 这是本章的**重中之重**。

- **线性相关**：如果存在一组**不全为零**的标量 `c1, c2, ..., ck`，使得 `c1*v1 + c2*v2 + ... + ck*vk = 0`，那么这组向量是线性相关的。
    - **几何意义**：至少有一个向量可以被其他向量线性表示（“冗余”）。在二维空间中，两个向量线性相关意味着它们共线。
- **线性无关**：如果 `c1*v1 + c2*v2 + ... + ck*vk = 0` 的唯一解是 `c1 = c2 = ... = ck = 0`，那么这组向量是线性无关的。
    - **几何意义**：没有向量是“冗余”的。在二维空间中，两个线性无关的向量不共线，可以张成整个平面 R^2。

5. 基与维数

- **基**：向量空间 V 的一组向量，如果它们：
    1. 是线性无关的。
    2. 它们的张成空间是 V（即可以表示 V 中任何一个向量）。 那么这组向量就称为 V 的一组**基**。
- **维数**：向量空间 V 的任意一组基中向量的个数，称为 V 的维数，记作 `dim(V)`。
    - 例如，R^3 的标准基是 `e1=[1,0,0]`, `e2=[0,1,0]`, `e3=[0,0,1]`，所以 $\dim(R^3) = 3$。

3.2 关键技能

1. 判断一个集合是否为子空间。

2. 判断一组向量是线性相关还是线性无关。
3. 求一个向量组的张成空间。
4. 找出一个向量空间的基，并求其维数。

3.3 章节习题

习题 3.1 判断下列向量组是线性相关还是线性无关： a) `v1 = [1, 2]`, `v2 = [3, 6]` b) `u1 = [1, 0, 1]`, `u2 = [2, 1, 0]`, `u3 = [0, 1, -2]`

习题 3.2 设 `W = { [x, y, z] ∈ R³ | x + y - z = 0 }`。 a) 证明 W 是 R^3 的一个子空间。 b) 找出 W 的一组基，并求其维数。

第四章：行列式与特征值——矩阵的灵魂

4.1 核心概念讲解

1. 行列式 行列式是一个从方阵映射到标量的函数。它提供了关于矩阵的重要信息。

- **几何意义**：一个 2x2 矩阵的行列式的绝对值，等于其列向量所张成的平行四边形的面积。一个 3x3 矩阵的行列式的绝对值，等于其列向量所张成的平行六面体的体积。
- **计算**：
  - **2x2**: `det([[a, b], [c, d]]) = ad - bc`
  - **3x3** 萨吕斯法则：`det([[a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]]) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh`
  - **n x n** 代数余子式展开：沿任意一行或一列展开。例如，沿第一行展开： `det(A) = a_11 * C_11 + a_12 * C_12 + ... + a_1n * C_1n` 其中 `C_ij = (-1)^(i+j) * M_ij`，`M_ij` 是去掉第 i 行第 j 列的子矩阵的行列式。

2. 行列式的性质

- `det(A) = 0` 当且仅当 A 的行（或列）线性相关。
- `det(A) = 0` 当且仅当 `Ax=0` 有非零解。
- `det(A) ≠ 0` 当且仅当 A 是可逆的。
- `det(AB) = det(A) * det(B)`

3. 特征值与特征向量 这是线性代数最深刻、最核心的概念。

- **定义**：对于一个 n x n 矩阵 A，如果存在一个非零向量 `v` 和一个标量 `λ`，使得 `Av = λv`，那么 `λ` 称为 A 的一个**特征值**，`v` 称为对应于 `λ` 的一个**特征向量**。
- **几何意义**：特征向量 `v` 是一个特殊的方向，当矩阵 A 作用（线性变换）在 `v` 上时，`v` 的方向不变，只进行伸缩（或反向），伸缩的比例就是特征值 `λ`。特征向量是变换的“不变轴”。

4. 如何求特征值和特征向量？

1. **特征方程**：$Av = λv$ => $Av - λIv = 0$ => $(A - λI)v = 0$。 这是一个关于 v 的齐次线性方程组。它要有非零解 v，系数矩阵 $(A - λI)$ 必须是奇异的（不可逆），即其行列式必须为零。 $\det(A - λI) = 0$ 这个方程称为**特征方程**。解这个关于 λ 的多项式方程，就能得到所有的特征值。

2. **求特征向量**：对于每一个求出的特征值 λ，代回方程组 $(A - λI)v = 0$，求出它的非零解空间（称为**特征空间**），这个空间里的所有非零向量都是对应于 λ 的特征向量。

4.2 关键技能

1. 计算 2x2 和 3x3 矩阵的行列式。
2. 理解行列式为零的几何和代数意义。
3. **掌握求解特征值和特征向量的完整流程**。

4.3 章节习题

习题 4.1 计算下列矩阵的行列式： `A = [[2, 1, 0], [1, -1, 3], [4, 2, 1]]`

习题 4.2 求矩阵 `B = [[3, 1], [0, 2]]` 的所有特征值和对应的特征向量。

第五章：线性变换与对角化——应用与升华

5.1 核心概念讲解

1. 线性变换 线性变换是保持向量加法和标量乘法运算的函数 $T: V \to W$。

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- $T(cu) = cT(u)$
- **几何意义**：线性变换是“拉直”原点的变换，如旋转、缩放、剪切、投影等。它不能产生曲线。
- **矩阵表示**：任何从 R^n 到 R^m 的线性变换，都可以唯一地用一个 m x n 的矩阵 A 来表示。变换过程就是矩阵乘法：$T(x) = Ax$。这个矩阵 A 称为变换的**标准矩阵**。

2. 对角化 如果一个方阵 A 相似于一个对角矩阵 D，即存在一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = D$，那么称 A 是**可对角化的**。

- **为什么对角化如此重要？**
  - **简化计算**：计算 A^k（A的k次幂）非常困难。但如果 $A = PDP^{-1}$，那么 $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$。而对角矩阵的幂 D^k 只需将对角线元素分别求幂即可，非常简单。
  - **解微分方程组**：对角化是解线性常微分方程组的关键。

3. 对角化定理 一个 n x n 矩阵 A 可对角化的**充要条件**是：A 有 n 个线性无关的特征向量。

- **如何对角化？**

1. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$。
2. 对每个特征值 λ_i，求出其对应的特征空间的一组基（即线性无关的特征向量）。
3. 将所有这些特征向量作为列向量，组成矩阵 P。
4. 将对应的特征值按相同顺序放在对角线上，组成对角矩阵 D。
5. 如果 P 是可逆的（即这 n 个特征向量线性无关），那么 $P^{-1}AP = D$。

- **特殊情况**：如果 A 有 n 个**互不相同**的特征值，那么它一定有 n 个线性无关的特征向量，因此一定可对角化。

5.2 关键技能

1. 理解线性变换的几何意义，并能写出其标准矩阵。
2. **掌握矩阵对角化的完整流程**。
3. 利用对角化计算矩阵的高次幂。

5.3 章节习题

习题 5.1 判断矩阵 `A = [[1, 1], [0, 2]]` 是否可对角化。如果可以，求出 P 和 D 使得 $P^{-1}AP = D$。

习题 5.2 利用对角化的结果，计算 `A^10`，其中 A 是习题 5.1 中的矩阵。

结业模拟考试

时间：120分钟 总分：100分

一、 **基础计算** 30分

1. 10分 计算 `[[2, -1], [3, 0]] * [[1, 4], [2, -1]]`。
2. 10分 计算 3x3 矩阵 `[[1, 2, 0], [0, 1, 1], [2, 1, 0]]` 的行列式。
3. 10分 求矩阵 `[[4, -1], [2, 1]]` 的特征值和特征向量。

二、 **概念与证明** 30分

1. 15分 解释线性无关的几何意义，并证明向量组 `v1=[1,1,0]`, `v2=[1,0,1]`, `v3=[0,1,1]` 是线性无关的。
2. 15分 什么是矩阵的对角化？一个矩阵可对角化的充要条件是什么？

三、 **综合应用** 40分

1. 20分 解线性方程组，并讨论解的情况。 `x + 2y + z = 3` `2x + 5y - z = -4` `3x + 7y = -1`
2. 20分 矩阵 `A = [[0, 1, 0], [0, 0, 1], [2, -5, 4]]`。 a) 求出 A 的所有特征值。 b) 判断 A 是否可对角化，并说明理由。

习题与考试答案

第一章 习题答案

习题 1.1 a) a + b = [2 + (-1), -1 + 4, 3 + 0] = [1, 3, 3] b) k * a = 3 * [2, -1, 3] = [3*2, 3*(-1), 3*3] = [6, -3, 9] c) a - 2b = [2, -1, 3] - 2 * [-1, 4, 0] = [2, -1, 3] - [-2, 8, 0] = [2 - (-2), -1 - 8, 3 - 0] = [4, -9, 3]

习题 1.2 a) A * B：A是 2x3，B是 3x2，可以乘。结果是 2x2 矩阵。 [[1*5+0*0+(-2)*3, 1*(-1)+0*2+(-2)*1], [3*5+1*0+4*3, 3*(-1)+1*2+4*1]] = [[5-6, -1-2], [15+12, -3+2+4]] = [[-1, -3], [27, 3]] b) B * A：B是 3x2，A是 2x3，可以乘。结果是 3x3 矩阵。 [[5*1+(-1)*3, 5*0+(-1)*1, 5*(-2)+(-1)*4], [0*1+2*3, 0*0+2*1, 0*(-2)+2*4], [3*1+1*3, 3*0+1*1, 3*(-2)+1*4]] = [[5-3, 0-1, -10-4], [0+6, 0+2, 0+8], [3+3, 0+1, -6+4]] = [[2, -1, -14], [6, 2, 8], [6, 1, -2]] c) A + A：A是 2x3，可以加。结果是 2x3 矩阵。 [[1+1, 0+0, -2+(-2)], [3+3, 1+1, 4+4]] = [[2, 0, -4], [6, 2, 8]] d) B * C：B是 3x2，C是 2x2，可以乘。结果是 3x2 矩阵。 [[5*2+(-1)*1, 5*3+(-1)*(-1)], [0*2+2*1, 0*3+2*(-1)], [3*2+1*1, 3*3+1*(-1)]] = [[10-1, 15+1], [0+2, 0-2], [6+1, 9-1]] = [[9, 16], [2, -2], [7, 8]]

第二章 习题答案

习题 2.1 增广矩阵：[[1, 1, 1 | 6], [2, -1, 1 | 3], [1, 2, -1 | 2]] R2 -> R2 - 2*R1: [[1, 1, 1 | 6], [0, -3, -1 | -9], [1, 2, -1 | 2]] R3 -> R3 - R1: [[1, 1, 1 | 6], [0, -3, -1 | -9], [0, 1, -2 | -4]] R2 -> -1/3 * R2: [[1, 1, 1 | 6], [0, 1, 1/3 | 3], [0, 1, -2 | -4]] R3 -> R3 - R2: [[1, 1, 1 | 6], [0, 1, 1/3 | 3], [0, 0, -7/3 | -7]] R3 -> -3/7 * R3: [[1, 1, 1 | 6], [0, 1, 1/3 | 3], [0, 0, 1 | 3]] 行阶梯形 回代： z = 3 y + (1/3)z = 3 => y + 1 = 3 => y = 2 x + y + z = 6 => x + 2 + 3 = 6 => x = 1 **解：唯一解 x=1, y=2, z=3**

习题 2.2 增广矩阵：[[1, 2, -1 | 1], [2, 4, -2 | 2], [-1, -2, 1 | -1]] R2 -> R2 - 2*R1: [[1, 2, -1 | 1], [0, 0, 0 | 0], [-1, -2, 1 | -1]] R3 -> R3 + R1: [[1, 2, -1 | 1], [0, 0, 0 | 0], [0, 0, 0 | 0]] 矩阵已化为行阶梯形。没有 [0,0,0|k], k≠0 的行，所以有解。 主元是 x，y 和 z 是自由变量。 令 y = s, z = t s, t为任意实数。 x + 2s - t = 1 => x = 1 - 2s + t **解：无穷多解。通解为 [x, y, z] = [1 - 2s + t, s, t] = [1, 0, 0] + s[-2, 1, 0] + t[1, 0, 1]**

第三章 习题答案

习题 3.1 a) v1 = [1, 2], v2 = [3, 6]。观察可知 v2 = 3 * v1。所以存在不全为零的系数 c1=-3, c2=1 使得 c1*v1 + c2*v2 = 0。**线性相关**。 b) u1 = [1, 0, 1], u2 = [2, 1, 0], u3 = [0, 1, -2]。 设 c1*u1 + c2*u2 + c3*u3 = 0 c1[1,0,1] + c2[2,1,0] + c3[0,1,-2] = [0,0,0] [c1+2c2, c2+c3, c1-2c3] = [0,0,0] 得到方程组： c1 + 2c2 = 0 c2 + c3 = 0 c1 - 2c3 = 0 由2得 c2 = -c3。代入1得 c1 + 2(-c3) = 0 => c1 = 2c3。 将 c1=2c3 代入3得 2c3 - 2c3 = 0，恒成立。 所以解为 c1=2t, c2=-t, c3=t。当 t=1 时，c1=2, c2=-1, c3=1 是一组非零解。 **线性相关**。 *(注：如果题目改成 u3=[0,1,-1]，则线性无关。)*

习题 3.2 a) **证明 W 是子空间**：

1. **零向量**：[0,0,0] 代入 x+y-z=0，0+0-0=0 成立。零向量在 W 中。
2. **加法封闭**：设 u=[x1,y1,z1], v=[x2,y2,z2] 都在 W 中。则 x1+y1-z1=0, x2+y2-z2=0。u+v = [x1+x2, y1+y2, z1+z2]。 (x1+x2) + (y1+y2) - (z1+z2) = (x1+y1-z1) + (x2+y2-z2) = 0 + 0 = 0。所以 u+v 在 W 中。
3. **标量乘法封闭**：设 u=[x1,y1,z1] 在 W 中，k 是标量。k*u = [kx1, ky1, kz1]。 kx1 + ky1 - kz1 = k(x1+y1-z1) = k*0 = 0。所以 k*u 在 W 中。 综上，W 是 R^3 的一个子空间。

b) **找基和维数**： 方程 x + y - z = 0 可以写成 z = x + y。 W 中的任意向量可表示为 [x, y, x+y]。 我们用自由变量 x 和 y 来表示这个向量： [x, y, x+y] = x[1, 0, 1] + y[0, 1, 1] 这表明 W 中的任何向量都可以由 v1=[1,0,1] 和 v2=[0,1,1] 线性表示。 我们需要验证 v1 和 v2 是否线性无关。显然，它们不成比例，所以线性无关。 因此，{[1,0,1], [0,1,1]} 是 W 的一组基。 **维数是 2**。W 是 R^3 中一个通过原点的平面。

第四章 习题答案

习题 4.1 det(A) = 2 * det([[-1, 3], [2, 1]]) - 1 * det([[1, 3], [4, 1]]) + 0 * det([[1, -1], [4, 2]]) = 2 * ((-1)*1 - 3*2) - 1 * (1*1 - 3*4) + 0 = 2 * (-1 - 6) - 1 * (1 - 12) = 2 * (-7) - 1 * (-11) = -14 + 11 = -3

习题 4.2

1. **特征方程**：det(B - λI) = 0 det([[3-λ, 1], [0, 2-λ]]) = 0 (3-λ)(2-λ) - 0*1 = 0 (3-λ)(2-λ) = 0 **特征值为 λ_1 = 3, λ_2 = 2**。

2. **求特征向量**：

   - **当 λ_1 = 3 时**：解 (B - 3I)v = 0 [[3-3, 1], [0, 2-3]] * [x, y] = [[0, 1], [0, -1]] * [x, y] = [0, 0] 0*x + 1*y = 0 => y = 0 0*x - 1*y = 0 => y = 0 x 是自由变量。令 x = 1，得到一个特征向量 v_1 = [1, 0]。 对应于 λ=3 的特征空间是 span{[1, 0]}。

   - **当 λ_2 = 2 时**：解 (B - 2I)v = 0 [[3-2, 1], [0, 2-2]] * [x, y] = [[1, 1], [0, 0]] * [x, y] = [0, 0] 1*x + 1*y = 0 => x = -y y 是自由变量。令 y = 1，得到一个特征向量 v_2 = [-1, 1]。 对应于 λ=2 的特征空间是 span{[-1, 1]}。

第五章 习题答案

习题 5.1

1. **求特征值**： det(A - λI) = det([[1-λ, 1], [0, 2-λ]]) = (1-λ)(2-λ) = 0 **特征值为 λ_1 = 1, λ_2 = 2**。

2. **求特征向量**：

    - $\lambda_1 = 1$: $(A - I)v = 0$ => [[0, 1], [0, 1]] * [x, y] = [0, 0] => y=0。v_1 = [1, 0]。
    - $\lambda_2 = 2$: $(A - 2I)v = 0$ => [[-1, 1], [0, 0]] * [x, y] = [0, 0] => -x+y=0 => x=y。v_2 = [1, 1]。

3. **判断是否可对角化**： A 是一个 2x2 矩阵，我们找到了 2 个线性无关的特征向量 v_1=[1,0] 和 v_2=[1,1]。 根据对角化定理，**A 可对角化**。

4. **构造 P 和 D**：

    - **P**：由特征向量作为列组成。P = [[1, 1], [0, 1]]
    - **D**：由对应的特征值作为对角线元素组成。D = [[1, 0], [0, 2]] （注意顺序必须一致，v_1 对应 λ_1，v_2 对应 λ_2）

习题 5.2 根据习题 5.1，我们有 $A = PDP^{-1}$。 我们需要计算 $A^{10} = PD^{10}P^{-1}$。

1. **计算 D^{10}**： D^{10} = [[1^{10}, 0], [0, 2^{10}]] = [[1, 0], [0, 1024]]

2. **计算 P^{-1}**： 对于 2x2 矩阵 [[a, b], [c, d]]，逆矩阵是 (1/det) * [[d, -b], [-c, a]]。 det(P) = 1*1 - 1*0 = 1。 P^{-1} = 1/1 * [[1, -1], [0, 1]] = [[1, -1], [0, 1]]

3. **计算 A^{10}**： A^{10} = P * D^{10} * P^{-1} = [[1, 1], [0, 1]] * [[1, 0], [0, 1024]] * [[1, -1], [0, 1]] 先算前两个矩阵的乘积： M = [[1, 1], [0, 1]] * [[1, 0], [0, 1024]] = [[1*1+1*0, 1*0+1*1024], [0*1+1*0, 0*0+1*1024]] = [[1, 1024], [0, 1024]] 再算 M * P^{-1}： A^{10} = [[1, 1024], [0, 1024]] * [[1, -1], [0, 1]] = [[1*1+1024*0, 1*(-1)+1024*1], [0*1+1024*0, 0*(-1)+1024*1]] = [[1, 1023], [0, 1024]]

结业模拟考试答案

一、 基础计算 30分

1. 10分 [[2*1+(-1)*2, 2*4+(-1)*(-1)], [3*1+0*2, 3*4+0*(-1)]] = [[0, 9], [3, 12]]
2. 10分 1*det([[1,1],[1,0]]) - 2*det([[0,1],[2,0]]) + 0*... = 1*(0-1) - 2*(0-2) = -1 - (-4) = 3
3. 10分
    - 特征方程: det([[4-λ, -1], [2, 1-λ]]) = (4-λ)(1-λ) - (-1)*2 = 4-4λ-λ+$λ^2$+2 = $λ^2$-5λ+6 = (λ-2)(λ-3)=0。特征值 λ_1=2, λ_2=3。
    - λ=2: (A-2I)v=0 => [[2,-1],[2,-1]]v=0 => 2x-y=0。v_1=[1,2]。
    - λ=3: (A-3I)v=0 => [[1,-1],[2,-2]]v=0 => x-y=0。v_2=[1,1]。

二、 概念与证明 30分

1. 15分

    - **几何意义**：一组向量线性无关，意味着它们指向不同的方向，没有任何一个向量可以由其他向量通过线性组合得到（即不“冗余”）。在二维空间中，它们不

共线；在三维空间中，它们不共面。
    - **证明**：设 c1*v1 + c2*v2 + c3*v3 = 0。 c1[1,1,0] + c2[1,0,1] + c3[0,1,1] = [0,0,0] [c1+c2, c1+c3, c2+c3] = [0,0,0] 得到方程组： c1+c2=0 c1+c3=0 c2+c3=0 由1得 c2=-c1。由2得 c3=-c1。代入3得 -c1 + (-c1) = 0 => -2c1=0 => c1=0。 则 c2=0, c3=0。唯一解是零解，所以该向量组**线性无关**。

2. 15分

    - **对角化**：对于一个 n x n 矩阵 A，如果存在一个可逆矩阵 P 和一个对角矩阵 D，使得 $P^{-1}AP = D$，则称矩阵 A 可对角化。
    - **充要条件**：一个 n x n 矩阵 A 可对角化的充要条件是它拥有 n 个线性无关的特征向量。

三、 综合应用 40分

1. 20分 增广矩阵：[[1,2,1|3], [2,5,-1|-4], [3,7,0|-1]] R2->R2-2R1, R3->R3-3R1: [[1,2,1|3], [0,1,-3|-10], [0,1,-3|-10]] R3->R3-R2: [[1,2,1|3], [0,1,-3|-10], [0,0,0|0]] 行阶梯形。无矛盾行，有解。主元是 x, y，z 是自由变量。 令 z=t。y-3t=-10 => y=3t-10。 x+2(3t-10)+t=3 => x+6t-20+t=3 => x=23-7t。 **解：无穷多解，通解为 [23-7t, 3t-10, t] = [23, -10, 0] + t[-7, 3, 1]**。

2. 20分 a) **求特征值**： det(A-λI) = det([[-λ,1,0],[0,-λ,1],[2,-5,4-λ]]) = -λ * det([[-λ,1],[-5,4-λ]]) - 1 * det([[0,1],[2,4-λ]]) + 0 = -λ((-λ)(4-λ) - 1*(-5)) - 1(0*(4-λ) - 1*2) = $-\lambda(\lambda^2-4\lambda+5) - (-2) = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = 0$ $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2 = 0$ 由有理根定理，尝试 λ=1: 1-4+5-2=0。所以 (λ-1) 是一个因子。 多项式除法或综合除法得到 $(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2) = 0$。 (λ-1)(λ-1)(λ-2) = 0。 **特征值为 $\lambda_1=1$ 二重根, $\lambda_2=2$**。

    b) **判断是否可对角化**： A 是一个 3x3 矩阵，需要有 3 个线性无关的特征向量才能对角化。 * 对于 λ=2 单根，它一定提供 1 个线性无关的特征向量。 * 对于 λ=1 二重根，我们需要看它的**几何重数**（即特征空间的维数）是多少。 我们需要解 (A-I)v=0 的解空间的维数。 A-I = [[-1,1,0],[0,-1,1],[2,-5,3]] R3->R3+2R1: [[-1,1,0],[0,-1,1],[0,-3,3]] R3->R3-3R2: [[-1,1,0],[0,-1,1],[0,0,0]] 矩阵的秩是 2。根据秩-零度定理，解空间的维数（零度）= n - rank = 3 - 2 = 1。 这意味着，对于二重特征值 λ=1，我们只能找到 1 个线性无关的特征向量。 总共，我们只能找到 1（来自λ=1） + 1（来自λ=2） = 2 个线性无关的特征向量。 因为 2 < 3，所以**矩阵 A 不可对角化**。

结语

恭喜你完成了这次从零到优秀的线性代数之旅！你已经掌握了这门学科最核心的概念和技能。记住，线性代数的精髓在于**几何直观**和**代数计算**的结合。多画图，多思考，多练习，你就能真正驾驭这个强大的工具。祝你结业考试取得优异的成绩！