用 FFT 计算多项式乘法

给定两个多项式

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$
$$B(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k,$$

的系数 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 和 $(b_0, b_1, \cdots, b_{m-1})$ ，我们希望求出多项式

$$C(x) = A(x)B(x) = \sum_{k=0}^{n+m-2} c_k x k$$

的各项系数

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad k \in \{0, 1, \cdots, n+m-2\}.$$

首先，为了简化问题，我们假定 $m = n$ ，并且 n 是 2 的正整数次幂。实际情况中，这两点都可以通过给后面补上若干个 0 来完成。

点值表示法 (point-value representation)

通过一个系数向量 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 来表示一个多项式的方式称为**系数表示法**。系数表示法让我们可以很容易地在 $O(n)$ 的时间里求出多项式在某一点处的值，但是用它来计算多项式的乘积是比较麻烦的。

注意到，给定平面上的 n 个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ ，其中所有 x_i 都不相等，这 n 个点可以唯一确定一个不超过 $n-1$ 次的多项式，比如 2 个点可以确定一条直线， 3 个不共线的点可以确定一条抛物线。因此我们还有一种表示多项式 $A(x)$ 的方式：

$$(x_0, A(x_0)), (x_1, A(x_1)), \cdots, (x_{n-1}, A(x_{n-1})), \quad i \neq j \implies x_i \neq x_j.$$

这种表示方式称为**点值表示法**。给定两个多项式 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的点值表示，我们可以很容易地在 $O(n)$ 的时间内求出它们的乘积 $C(x)$ 的点值表示，因为 $C(x_k) = A(x_k)B(x_k)$ 。

所以我们的思路就是：给定 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的系数表示，先快速地求出它们的点值表示，然后花 $O(n)$ 的时间算出它们的乘积 $C(x)$ 的点值表示，再快速地求出 $C(x)$ 的系数表示。

离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)

要想快速地求出 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的点值表示，点 $x_0, x_1, \cdots$ 的选取至关重要。

> 从现在开始，我们用 i 表示虚数单位。

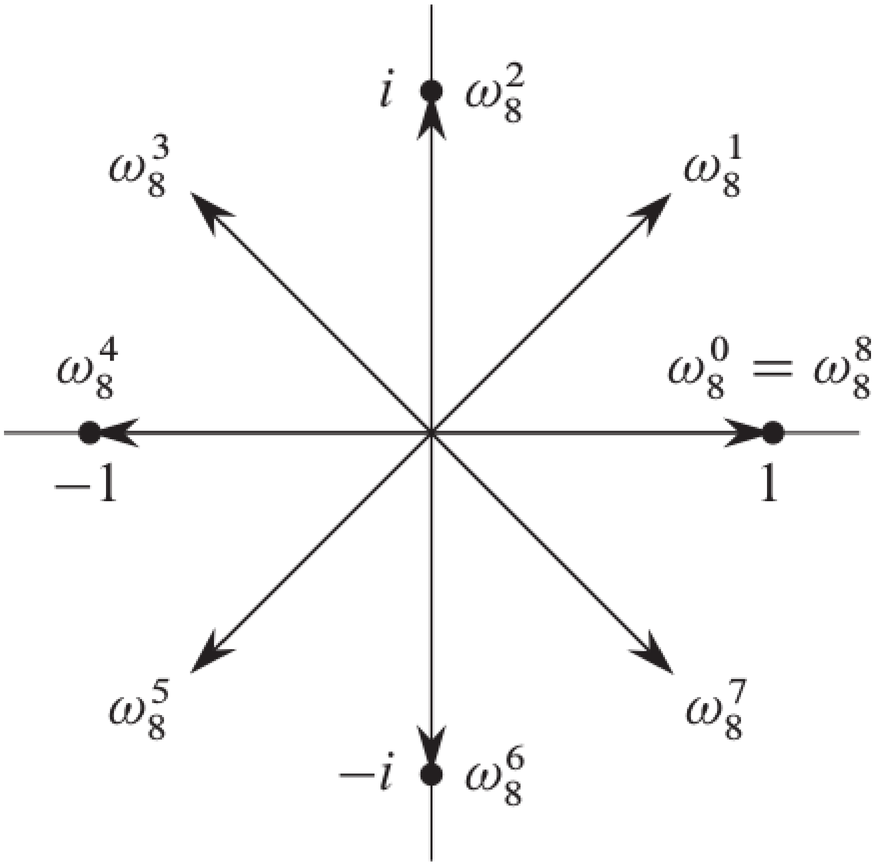
首先引入**单位根** (root of unity) 的概念。一个 n 次单位根指的是一个复数 ω ，满足

$$\omega^n = 1.$$

这个方程在复数域恰好有 n 个解，所以 n 次单位根恰好有 n 个，其中第 k 个 $(0 \leqslant k < n)$ 是 $e^{2\pi ik/n}$ 。我们可以用著名的欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 来理解它：

$$e^{2\pi ik/n} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

它的主辐角恰好为 $2\pi\cdot\frac{k}{n}$ ，所以 n 个单位根均匀地分布在以复平面的原点为圆心的单位圆上，如图所示：



值 $\omega_n = e^{2\pi i/n}$ 称为**主 n 次单位根**，所有其它 n 次单位根都是 ω_n 的幂，所以第 k 个 n 次单位根恰好是 ω_n^k 。

n 个 n 次单位根 $\omega_n^0, \omega_n^1, \cdots, \omega_n^{n-1}$ 在乘法意义下构成一个群，这个群和模 n 意义下的整数加法群 $(\mathbb{Z}_n, +)$ 构成的群具有相同的结构，因为 $\omega_n^n = \omega_n^0 = 1$ 意味着 $\omega_n^j\omega_n^k = \omega_n^{j+k} = \omega_n^{(j+k) \bmod n}$ 。类似地， $\omega_n^{-1} = \omega_n^{n-1}$ 。

多项式 $A(x)$ 在 $\omega_n^0, \omega_n^1, \cdots, \omega_n^{n-1}$ 这 n 个点处的值

$$y_k = A\left(\omega_n^k\right) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega_n^{jk}, \quad 0 \leqslant k < n$$

构成的向量 $(y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 称为系数向量 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 的**离散傅里叶变换**。

快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform)

注意，尽管 $A(x)$ 和 $B(x)$ 各只需要 n 个点就能确定，但是 $C(x)$ 的次数是 $2n-2$ ，它的点值表示至少需要 $2n-1$ 个点。为了方便，我们选取 $2n$ 个点，并且假设这些多项式都各具有 $2n$ 个系数，其中 $a_n = a_{n+1} = \cdots = a_{2n-1} = 0$ 以及 $b_n = b_{n+1} = \cdots = b_{2n-1} = 0$ 。

考虑求出多项式 $A(x)$ 在 $\omega_{2n}^0, \omega_{2n}^1, \cdots, \omega_{2n}^{2n-1}$ 这 $2n$ 个点处的值，即求出 $(y_0, y_1, \cdots, y_{2n-1})$ ，其中

$$y_k = A\left(\omega_{2n}^k\right) = \sum_{j=0}^{2n-1} a_j\omega_{2n}^{kj}, \quad 0 \leqslant k < 2n.$$

如果直接计算，求一个 y_k 需要 $\Theta(n)$ 的时间，所以求出 $(y_0, y_1, \cdots, y_{2n-1})$ 的时间复杂度为 $\Theta\left(n^2\right)$ 。

下面介绍一种快速算法，即**快速傅里叶变换**。对 $0 \leqslant k < 2n$ ，我们有

$$\begin{aligned} A\left(\omega_{2n}^k\right) &= \sum_{j=0}^{2n-1} a_j \omega_{2n}^{kj} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j} \omega_{2n}^{k\cdot(2j)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} \omega_{2n}^{k(2j+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j} \omega_{2n}^{2kj} + \omega_{2n}^k \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} \omega_{2n}^{2kj} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j} \omega_n^{kj} + \omega_{2n}^k \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} \omega_n^{kj}. \end{aligned}$$

这里的最后一步是因为 $\omega_{2n}^{2kj} = \omega_n^{kj}$ 。令 $A_0(x)$ 和 $A_1(x)$ 为两个各有 n 个系数的多项式

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j} x^j = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{2n-2} x^{n-1}, \\ A_1(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} x^j = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_{2n-1} x^{n-1}, \end{aligned}$$

于是

$$A\left(\omega_{2n}^k\right) = A_0\left(\omega_n^k\right) + \omega_{2n}^k A_1\left(\omega_n^k\right), \quad 0 \leqslant k < n. \tag{1}$$

并且注意到 $\omega_{2n}^{n+k} = -\omega_{2n}^k$ ，有

$$\begin{aligned} A\left(\omega_{2n}^{n+k}\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j} \omega_n^{(n+k)j} + \omega_{2n}^{n+k} \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} \omega_n^{(n+k)j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j} \omega_n^{kj} - \omega_{2n}^k \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} \omega_n^{kj}, \quad 0 \leqslant k < n. \end{aligned} \tag{2}$$

也就是说，我们可以先计算 $A_0\left(\omega_n^0\right), A_0\left(\omega_n^1\right), \cdots, A_0\left(\omega_n^{n-1}\right)$ 及 $A_1\left(\omega_n^0\right), A_1\left(\omega_n^1\right), \cdots, A_1\left(\omega_n^{n-1}\right)$ 这两个规模都只有原来的一半的子问题，然后利用 (1) 和 (2) 式求出 $A\left(\omega_{2n}^0\right), A\left(\omega_{2n}^1\right), \cdots, A\left(\omega_{2n}^{2n-1}\right)$ 。

设 $T(n)$ 为计算 $A\left(\omega_{2n}^0\right), A\left(\omega_{2n}^1\right), \cdots, A\left(\omega_{2n}^{2n-1}\right)$ 所需的时间，则我们有

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n),$$

所以 $T(n) = \Theta\left(n \log n\right)$ 。

逆变换

现在我们已经能在 $\Theta(n \log n)$ 的时间里求出

$$A\left(\omega_{2n}^0\right), A\left(\omega_{2n}^1\right), \cdots, A\left(\omega_{2n}^{2n-1}\right)$$

和

$$B\left(\omega_{2n}^0\right), B\left(\omega_{2n}^1\right), \cdots, B\left(\omega_{2n}^{2n-1}\right).$$

我们可以轻易地在 $\Theta(n)$ 的时间里求出 $(\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{2n-1})$, 其中

$$\phi_k = C\left(\omega_{2n}^k\right) = A\left(\omega_{2n}^k\right) B\left(\omega_{2n}^k\right), \quad 0 \leqslant k < 2n.$$

现在的问题是，如何从 $(\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{2n-1})$ 得到 $C(x)$ 的系数表示？

注意到

$$\phi_k = C\left(\omega_{2n}^k\right) = \sum_{j=0}^{2n-1} c_j \omega_{2n}^{kj}.$$

设多项式 $\Phi(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \phi_j x^j$ 。我们发现

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\omega_{2n}^{-k}\right) &= \sum_{j=0}^{2n-1} \phi_j \omega_{2n}^{-kj} \\
&= \sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{t=0}^{2n-1} c_t \omega_{2n}^{j(t-k)} \\
&= \sum_{t=0}^{2n-1} c_t \sum_{j=0}^{2n-1} \omega_{2n}^{j(t-k)}.
\end{aligned}$$

这里 $\sum_{j=0}^{2n-1} \omega_{2n}^{j(t-k)}$ 是等比数列求和，它的结果是

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \omega_{2n}^{j(t-k)} = \begin{cases} \dfrac{1-\omega_{2n}^{2n(t-k)}}{1-\omega_{2n}^{t-k}} = \dfrac{1-1}{1-\omega_{2n}^{t-k}} = 0, & \text{if } \omega_{2n}^{t-k} \neq 1, \\ 2n, & \text{if } \omega_{2n}^{t-k} = 1. \end{cases}$$

由于这里 $0 \leqslant k, t \leqslant 2n-1$ ，如果 $\omega_{2n}^{t-k} = 1$ ，那么 $t-k$ 必然为零，即 $t = k$ 。所以

$$\Phi\left(\omega_{2n}^{-k}\right) = c_k \cdot 2n \implies c_k = \frac{1}{2n} \Phi\left(\omega_{2n}^{-k}\right), \quad 0 \leqslant k < 2n. \tag{3}$$

因此，我们只需对 $(\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{2n-1})$ 求一次离散傅里叶变换，就能根据 (3) 得出 $C(x)$ 的各项系数了。这里有两种可能的方式，你既可以使用

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} \Phi\left(\omega_{2n}^{2n-k}\right), & 0 < k < 2n, \\ \dfrac{1}{2n} \Phi\left(\omega_{2n}^{0}\right), & k = 0, \end{cases}$$

也可以在求 DFT 的过程中使用 ω_{2n}^{-k} 代替 ω_{2n}^{k} 。

实现

C++ 标准库 `<complex>` 中有一个复数模板 `std::complex` ，您可以在[这里](#)看到它的使用方式。您还可以使用 [`std::polar`](#) 来方便地求单位根。

C++ 标准库 `<numbers>` 中还有 `std::numbers::pi` 等数学常量，详见[文档](#)。

您可以按照上述算法描述实现一个递归版本的 FFT ，也可以采用某些更精妙的非递归版的实现。您可以参考网络上的一些资料，但是您必须真正理解您提交的代码的每一个细节，不能只是从网上复制粘贴一份了事。