17年真题

1、（5分）$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^6$

2、（5分）$f(x)=e^x,f(g(x))=1-x^2$，则$g(x)=\ln(1-x^2)$

3、（5分）$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x+\cos x}{1+\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}$

4、（5分）级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的和函数为$\frac{x}{(1-x)^2}$

5、（5分）已知微分方程$y''=\sin x$，则其通解为$y=-\sin x+C_1x+C_2,C_1\in\mathbb{R},C_2\in\mathbb{R}$

6、（5分）若$\mathbf{A},\mathbf{B}$均为3阶方阵，且$|\mathbf{A}|=-2$，$|\mathbf{B}|=\frac{1}{3}$，$\mathbf{A}^*$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵，则$|\mathbf{A}^*|=4,|\mathbf{A}^*\mathbf{B}^{-1}|=12$

7、（5分）向量$\alpha=(1,2,3),\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，则矩阵$\mathbf{A}=\alpha^T\beta$的秩$r(\mathbf{A})=1,\mathbf{A}^n=\alpha^T\beta$

8、（5分）实对称矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$相似，则二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{X^TAX}$的规范型为$f=x_1^2-x_2^2+x_3^2$，此二次型的秩为3

9、计算行列式$D=\begin{vmatrix}a-1&-2&3&4\\-1&-2&a+3&4\\-1&a-2&3&4\\-1&-2&3&a+4\end{vmatrix}$

解：

$$D=-\begin{vmatrix}a-1&-2&3&4\\-1&a-2&3&4\\-1&-2&a+3&4\\-1&-2&3&a+4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a-1&-2&3&a+4\\-1&a-2&3&a+4\\-1&-2&a+3&a+4\\-1&-2&3&a+4\end{vmatrix}$$

$$=-(a+4)\begin{vmatrix}a-1&-2&3&1\\-1&a-2&3&1\\-1&-2&a+3&1\\-1&-2&3&1\end{vmatrix}=-(a+4)\begin{vmatrix}a&0&0&1\\0&a&0&1\\0&0&a&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-a^3(a+4)$$

10、（10分）求$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

解：

很显然有分子为0，分母为1，所以原式为0

11、（10分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$的收敛域

解：

$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{2n+1}{2n+3}|=1$

所以其收敛区间为$(-1,1)$，再考虑其端点

对$x=\pm 1$，代入原式后可以得到其并没有什么本质的区别，可以一起考虑

由奇偶项交错和数列单减可以得到其收敛

因此收敛域为$[-1,1]$

12、（10分）求$I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy$

解：

交换积分次序后得$I=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}dy^2=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt=\frac{1}{2}(e-1)$

13、（15分）设线性方程组$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\2&3&-2&5\\1&2&0&2\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}$，问λ取何值时方程组有解，有解时求出通解

解：系数的增广矩阵化简后为$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&-1&\lambda\\0&0&0&0&\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$

如果想要方程组有非平凡解，则系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，也即$\lambda\neq0,\lambda^2-\lambda=0$

解得$\lambda=1$

通解为：$x_3,x_4\in\mathbb{R},x_2=1-2x_3+x_4,x_1=-1+4x_3-4x_4$

14、（15分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$

（1）写出此二次型的系数矩阵$\mathbf{A}$

（2）用正交变换将二次型化为标准型，并写出正交变换$\mathbf{X}=\mathbf{TY}$及二次型的标准型

（3）问此二次型是否正定，并说明理由

解：

（1）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{bmatrix}$

（2）$f(\lambda)=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=-(\lambda-4)^2(\lambda+2)$

对于特征值$\lambda=4$，有$\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&1&2\\1&-1&-2\\2&-2&-4\end{bmatrix}$，不难发现得到其一组特征向量为

$\xi_1=(2,0,1)^T,\xi_2=(0,-2,1)^T$

对于特征值$\lambda=-2$，有$\mathbf{A}+2\mathbf{E}=\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&1&2\\1&5&-2\\2&-2&2\end{bmatrix}$，不难得到其一组特征向量为

$\xi_3=(1,-1,-2)^T$

将特征向量矩阵正交化后得到$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$

二次型的标准型为$f(y_1,y_2,y_3)=4y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$

15、（10分）将$f(x)=x\arctan x-\ln(\sqrt{1+x^2})$展开为$x$的幂级数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$的和

解:

$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

$\frac{x}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$，$\ln(\sqrt{1+x^2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+2}$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)(2n)}$

由此可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}=2f(1)=\frac{\pi}{4}-\ln 2$

16、（10分）计算曲面积$I=\oiint_{\Sigma}xz\,dxdy+xy\,dydz+yz\,dzdx$的值，其中$\Sigma$是平面$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧

解:

由高斯公式可得$I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv$，其中$\Omega$是$\Sigma$的内部空间

$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[1-(x+y)^2]dy$

$=\frac{1}{6}\int_0^1(x^3-3x+2)dx=\frac{1}{8}$

17、（10分）已知$\mathbf{A},\mathbf{B}$为n阶矩阵，且满足$2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{B}-4\mathbf{E}$，证明矩阵$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$可逆，并求$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}$

解:

$2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{B}-4\mathbf{E}\Leftrightarrow 2\mathbf{B}=\mathbf{AB}-4\mathbf{A}\Leftrightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{B}=4\mathbf{A}$

由$\mathbf{A}$可逆可知$rank(\mathbf{A})=n$，则$rank(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\geq rank((\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{B})=rank(\mathbf{A})=n$

又由其为n阶矩阵知$rank(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=n$，则其可逆

同理可得$\mathbf{B}$可逆，则有$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=4\mathbf{AB}^{-1},(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=\frac{1}{4}\mathbf{BA}^{-1}$

18、（10分）设$x>-1$，可微函数$f(x)$满足条件$(x+1)[f'(x)+f(x)]-\int_0^x f(x)dx=0$，且$f(0)=1$

（1）求$f'(x)$，（2）试证当$x\geq 0$时有$e^{-x}\leq f(x)\leq 1$

解:

（1）在题式两边对x进行求导后得$(x+2)f'(x)+(x+1)f''(x)=0$，令$g(x)=f'(x)$

则有$(x+2)g(x)+(x+1)g'(x)=0$，求解该微分方程后得到$g(x)=C\frac{e^{-x}}{x+1}=f'(x)$

题式中代入$x=0$得$f'(0)=-1$，代入得$C=-1$，因此$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}$

（2）由在$x\geq 0$时恒有$f'(x)<$得$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx\leq f(0)=1$

又有$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\geq f(0)+\int_0^x -e^{-x}dx=e^{-x}$