14年真题

1、（10分）求极限$\lim_{x\to 0}(1+2013x)^{\frac{1}{x}}$

解:

$\lim_{x\to 0}(1+2013x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+2013x)^{\frac{1}{2013x}\times 2013} = e^{2013}$

2、（10分）求下列函数的导数$y=\frac{1+x^2}{\sin x+\cos x}$

解:

$y' = \frac{2x(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)(1+x^2)}{(\sin x+\cos x)^2}$

3、（10分）同15年第4题

4、（10分）证明：对实数$x>0$，有$0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1$

解:

即证明$0<x-\ln(1+x)<x\ln(1+x)$，左侧显然

对于右侧，令$f(x)=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)$

则$f'(x)=\ln(1+x)>0$，所以有$f(x)>f(0)=0$证毕

5、（15分）证明：函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续，但在$[1,+\infty)$上一致连续

解:

6、（15分）计算二重积分$\iint_D d\sigma$，其中D为直线$y=2x, x=2y, x+y=3$所围成的三角形区域

解:

即求三角形区域的面积，简单计算后可得$S=\frac{3}{2}$

7、（15分）求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-3^{2n}}(x-1)^{2n}$的收敛半径和收敛域

由$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{1}{9}$得收敛半径为3，当$x-1=\pm 3$时其显然不收敛，得到其收敛域为$(-2,4)$

8、计算行列式

（1）同15年高代第一题（2）$d_n=\begin{vmatrix}5&6&0&\cdots&0&0\\1&5&6&\cdots&0&0\\0&1&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&5\end{vmatrix}$

解:

（2）将其先按第一行展开，然后展开后的第二项按照第一列展开，就得到递推式$d_n=5d_{n-1}-6d_{n-2}$

变形后得到$d_n-3d_{n-1}=2(d_{n-1}-3d_{n-2})$，不难发现$d_1=5,d_2=19$，由此得$d_n-3d_{n-1}=2^n$

因此$d_n=(d_n-3d_{n-1})+3(d_{n-1}-3d_{n-2})+\cdots+3^{n-2}(d_2-3d_1)+3^{n-1}d_1$

$=2^n[1+\frac{3}{2}+\cdots+(\frac{3}{2})^{n-2}]+5\times3^{n-1}=3^{n+1}-2^{n+1}$

9、（10分）求下列矩阵的逆矩阵

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&-1\\0&3&1&4\\2&7&6&-1\\1&2&2&-1\end{bmatrix}$

解:

$\mathbf{A^{-1}}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&3&-7&20\\-7&-3&5&-10\\9&3&-3&6\\3&3&-3&6\end{bmatrix}$

10、叙述爱森斯坦（Eisenstein）判别法并给出证明

解:

爱森斯坦判别法：设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$是一个整系数多项式，如果有一个素数$p$，使得（1）$p\nmid a_n$（2）$p\mid a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0$（3）$p^2\nmid a_0$，那么$f(x)$在有理数域上是不可约的

证明：如果$f(x)$在有理数域上可约，那么可以得到$f(x)$可以分解为两个次数较低的整系数多项式的乘积

$f(x)=(b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+b_0)(c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0)\quad l,m<n;l+m=n$

于是得到$a_n=b_lc_m,a_0=b_0c_0$

因为$p\mid a_0$，所以$p\mid b_0$或$p\mid c_0$，但是$p^2\nmid a_0$，所以$p\mid b_0$和$p\mid c_0$不同时成立，不妨假定$p\mid b_0$但$p\nmid c_0$

另一方面，因为$p\nmid a_n$，所以$p\nmid b_l$，假设$b_0,b_1,\cdots,b_l$中第一个不能被p整除的是b_k，比较$f(x)$中x^k的系数，得到等式$a_k=b_kc_0+b_{k-1}c_1+\cdots+b_0c_k$，式子中$p\mid a_k,b_{k-1},\cdots,b_0$，所以$p\mid b_kc_0$，但$p$是一个素数，所以$b_k,c_0$中至少有一个能被$p$整除，这就得出了矛盾，证毕

11、（15分）设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，求$p^{3\times3}$中全体与$\mathbf{A}$乘法可交换的矩阵所成子空间的维数和一组基

解:

令$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}$

则$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_{11}+x_{21}&2x_{12}+x_{22}&2x_{13}+x_{23}\\2x_{21}+x_{31}&2x_{22}+x_{32}&2x_{23}+x_{33}\\2x_{31}&2x_{32}&2x_{33}\end{bmatrix}$

$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_{11}&x_{11}+2x_{12}&x_{12}+2x_{13}\\2x_{21}&x_{21}+2x_{22}&x_{22}+2x_{23}\\2x_{31}&x_{31}+2x_{32}&x_{32}+2x_{33}\end{bmatrix}$

由此可得$,x_{11}=x_{22}=x_{33},x_{12}=x_{23},x_{31}=0,x_{21}=x_{32}=0,x_{13}\in\mathbb{R}$

由此得维数为三

基为$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

12、（15分）已知$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}$，求一正交矩阵$\mathbf{T}$，使得$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}$成对角形（$'$符号为转置）

解:

$f(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$

代入$\lambda=1$得到$\xi_1=(1,0,0,-1),\xi_2=(0,1,0,1),\xi_3=(0,0,1,1)$

代入$\lambda=-3$得$\xi_4=(1,-1,-1,1)$

正交单位化后得$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$