9、计算

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}dt}{x^2}$$

解：

$$I\xlongequal{s=xt}\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin s}{s}ds}{x^2}\xlongequal{L'Hospital}\frac{2x\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}-3x^2\cdot\frac{\sin x^3}{x^3}}{2x}=1$$

这里需要注意，变限积分中只能含有积分变量t，不能有参变量x

10、求解

$$I=\lim_{x\to\infty}x^2(2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}})$$

解：

$$I=\lim_{x\to\infty}x^2[(2^{\frac{1}{x}}-1)-(2^{\frac{1}{x+1}}-1)]=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\ln 2\cdot(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})=\ln 2$$

不能想当然的以为$2^{\frac{1}{x}}=\sqrt[x]{1+1}=1+\frac{1}{x}$，太蠢了

17、设a,b为常数，且$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$，则$a,b$为

解：

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-x^6}=-x^2(1-\frac{1}{x^6})^{\frac{1}{3}}=-x^2(1-\frac{1}{3x^6}+o(x^{-6}))$$

由此不难得到$a=-1,b=0$

展开的时候把x^{-6}算成了x^{-2}

21、已知当$x\to 0$时$F(x)=\int_0^{x-\sin x}\ln(1+t)dt$是$x^n$的同阶无穷小，则$n$为

$F'(x)=(1-\cos x)\ln(1+(x-\sin x))$，显然为五阶无穷小，则原函数为六阶

把导函数当成原函数了，直接写了5上去

25、设$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$，则$f(x)$的连续区间为

意思是高等数学中n默认为项数，也就是说这里的∞默认为$+\infty$，答案是$(-\infty,+\infty)$

？？？我不能理解，解析说n是项数，默认为正无穷?

27、设$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+bx)}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$，其中$b$为某常数，$f(x)$在定义域上处处可导，则$f'(x)=?$

由函数连续不难得到$b=-1$

当$x\neq 0$时，$f'(x)=\frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^2}$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}\xlongequal{L'Hospital\cdots}-\frac{1}{2}$

注意写完答案看一下有没有不能取的地方，分母为0不能漏

28、设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$，若$f(x)$可导，则$\alpha$应满足?，若$f'(x)$连续，则$\alpha$应满足?

答案是$\alpha>1,\alpha>2$

这里主要是把$f'(x)$看成了$f(x)$，算出来$\alpha>0$，有点蠢，看错题也应该想到题目的递进关系才是

31、设$f(x)$在$x=a$处二阶导数存在，则计算

$$I=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}$$

$$I=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}\xlongequal{L'hospital}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{2h}\xlongequal{definition}\frac{f''(a)}{2}$$

$f''(a)$存在$\Rightarrow f(x)$在$x=a$某邻域内有定义且连续，所以第一个式子可以使用洛必达，第二个不行，因为题目没有说$f''(x)$在$x=a$某邻域内有定义并连续，所以只能用定义法求解

这题没错，但思想还是很有用的，以及洛必达法则的使用条件

33、$f(x)=x^2(x+1)^2(x+2)^2\cdots(x+n)^2$，则$f''(0)=?$

答案是$2(n!)^2$

做的时候没看到括号上的2，写成了$2n!$，太蠢了

34、设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$确定，则$\frac{dy}{dx}=?$，$\frac{d^2y}{dx^2}=?$，$y=y(x)$在任意点处的曲率$K=?$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{x'_t}=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1+t^2}{t}=-\frac{1+t^2}{t^3}$$

$$K=\frac{|y''(x)|}{(1+y'^2(x))^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1+t^2}{|t|^3}}{(1+\frac{1}{t^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

要联想到$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$,不能简单的以为$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_t}{x''_t}$，以及曲率公式要记熟

39、设$y=y(x)$在$(-1,1)$内二阶可导，满足方程$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+a^2y=0$，作变量替换$x=\sin t$后，$y$作为$t$的函数满足的方程为

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\cos t\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\cos t\frac{dy}{dx})=\cos t\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})-\sin t\frac{dy}{dx}=\cos t\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt}-\sin t\frac{dy}{dx}$$

$$=\cos^2 t\frac{d^2y}{dx^2}-\sin t\frac{dy}{dx}=(1-\sin^2 t)\frac{d^2y}{dx^2}-\sin t\frac{dy}{dx}=(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}$$

所以原式为$\frac{d^2y}{dt^2}+a^2y=0$

这个dy,dx,dt相关的内容要多看几遍，加深理解

40、设$f(x)=\ln(\frac{1-2x}{1+3x}),n\ge 2$，则$f^{(n)}(0)=?$

答案是$(-1)^{n-1}(n-1)![(-2)^n-3^n]$

这里我算成了$f^{(n)}(x)$，要多读题目啊

41、曲线$x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$在$t=t_0$相应的点曲率最小，则在该点处的曲率半径为

答案是$\frac{3}{2}$

要留意$R=\frac{1}{K}$，也就是曲率半径是是曲率的倒数，我算成曲率了，非常可惜，以及曲率公式是$K=|x_t'y_t''-x_t''y_t'|/(x_t'^2+y_t'^2)^{\frac{3}{2}}$

48、曲线$y=\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$的全部渐进线是

考察其间断点，不难发现其间断点有$x=-\frac{1}{2}, x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} y=[\sqrt{4x^2+x}\ln(2x+1)-\sqrt{4x+1}\sqrt{x}\ln x]=0-0=0$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} y=\sqrt{\frac{1}{2}}(\ln(-2x-1)-\ln(-x))=-\infty$$

因此其垂直渐进线为$x=-\frac{1}{2}$

再考察其一般渐进线

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln(2+\frac{1}{x})=2\ln 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}[y-(2\ln 2)x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln(2+\frac{1}{x})-2\ln 2}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{4+t}\ln(2+t)-2\ln 2}{t}$$

$$\overset{L'hospitol}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to 0^+}[\frac{\sqrt{4+t}}{2+t}+\frac{\ln(2+t)}{2\sqrt{4+t}}]=1+\frac{1}{4}\ln 2$$

由此得当$x\to+\infty$时，渐近线为$y=(2\ln 2)x+\frac{1}{4}\ln 2+1$

同理，当$x\to-\infty$时，渐近线为$y=-(2\ln 2)x-\frac{1}{4}\ln 2-1$

要注意渐近线还有垂直的，然后求渐进线的时候要分开求，慢慢求，不能马虎

55、求$\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

$$\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int\frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx=\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\frac{x^2}{1+x^6}dx$$

答案是$\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+C$

这里首先要想到将分母用立方公式拆分，然后将分子凑出来一个简单的格式，感觉有点tricky

60、计算

$$I=\int_0^2(x\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{(1-\frac{1}{4}x^2)^3})dx$$

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^2(2-2x)\sqrt{2x-x^2}dx+\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx$$

$$up\_middle=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}d(2x-x^2)+\int_1^2\sqrt{2x-x^2}d(2x-x^2)=\int_0^1\sqrt{t}dt+\int_1^0\sqrt{t}dt=0$$

$$up\_right=\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^2 (1-\frac{1}{4}x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{3}{8}\pi$$

由此可得$I=\frac{1}{8}\pi$

这里需要注意的是在第三步分解的时候要注意正负性，两部分是互相抵消的，不然就会算出来$\frac{4}{3}$

70、摆线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$与$x$轴围成图形绕$y=2a$旋转一周而得到的旋转体的体积$V=?$

答案是$V=7\pi^2a^3$

在计算的时候把与x轴围成的图形当成与y=2a围成的图形来算了，要仔细读题啊

71、设星形线方程为$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$，则它所围成的面积$A=?$，它的弧长$L=?$，它绕$x$轴旋转而成的旋转体体积$V=?$，该旋转体的侧面积$S=?$

答案是$A=\frac{3}{8}\pi a^2, L=6a, V=\frac{32}{105}\pi a^3, S=\frac{12}{5}a^2$

V算错了，我究竟是怎么把$2\times 2\times 4\times 2$算成16的。。。

75、设无穷长直线L的线密度为1，引力常数为k，则L对距直线为a的单位质点A的引力为?

$$F=\int_{-\infty}^{+\infty} F\cos\theta\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = 2ka\int_0^{+\infty}\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$\xlongequal{x=a\tan t} 2ka\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{a}{\cos^2 t}}{a^3\cos^3 t}dt = \frac{2k}{a}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{2k}{a}$$

这里一开始做的时候没有考虑到力只需要计算x方向上的分量，虽然考试大概率不考但还是可以看看，以及这里和距离是反比关系而不是平方反比，有些反直觉

76、设$y=y(x)$在$[0,+\infty)$可导，在$\forall x\in(0,+\infty)$处的增量$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$满足$\Delta y(1+\Delta y)=\frac{y\Delta x}{1+x}+\alpha$，其中$\alpha$当$\Delta x\to 0$时是与$\Delta x$等价的无穷小，又有$y(0)=1$，则$y(x)=?$

在关系式两边同时除以Δx，就得到$y'-\frac{1}{1+x}y=1$

解此微分方程并代入特殊值就得到

$$y=e^{-\int p(x)dx}[C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx]=(1+x)[\ln(1+x)+1]$$

微分方程公式背错了，太蠢了

79、当$y>0$时，微分方程$(x-2xy-y^2)dy+y^2dx=0$的通解为

将等式两边同时除以y^2dy得到$\frac{dx}{dy}+(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y})x=1$

则$p(y)=\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}, q(y)=1, \int p(y)dy=-\frac{1}{y}-2\ln y, e^{\int p(y)dy}=\frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}$

$x=y^2e^{\frac{1}{y}}[C+\int e^{-\frac{1}{y}}d(-\frac{1}{y})]=y^2(Ce^{\frac{1}{y}}+1)$

当正常路子走不通的时候，想到把x和y换一下，看能不能走得通

82、已知连续函数$f(x)$满足$\int_0^x f(t)dt=x+\sin x+\int_0^x tf(x-t)dt$，则$f(x)=?$

对原式做积分变量替换并求导后得到$f(x)=1+\cos x+\int_0^x f(t)dt$，由此式可以得到$f(x)$可导，并且将$x=0$代入此式子可以得到$f(0)=2$

求导后得到$f'(x)=-\sin x+f(x)$

所以有$\begin{cases} y'-y=-\sin x \\ y(0)=2 \end{cases}$

解得$f(x)=\frac{3}{2}e^x+\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

这里的主要思路就是将表达式简化，注意需要仔细观察每一个中间式，比如x=0在题式中得不出什么结论，但是在下面的式子中能得出一些结论来

91、设$z=e^{xy}+f(x+y,xy),f(u,v)$有二阶连续偏导数，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+f_1'+yf_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy}+f_{11}''+(x+y)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$$

没什么好说的，要仔细做和检查，以及f_{12}''不能写成$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$

95、设$f(x),g(x)$可微，$u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)$，且满足$u(x,0)=\sin 2x,u_y'(x,0)=0$，则$f(x)=?$

通过$u_y'(x,0)=0$可以得到$f'(x)=g'(x)$，通过$u(x,0)=\sin 2x$可以得到$f(x)+g(x)=\sin x$

所以得到$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+C,g(x)=\frac{1}{2}\sin x-C,C\in\mathbb{R}$

需要注意的是这里的+C和通常理解的感觉不太一样，更多的是表达一种f和g之间的关系，当然也确实是自由变量

99、设$(ax^2y^2-2xy^2)dx+(2x^3y+bx^2y+1)dy$是一个函数$f(x,y)$的全微分，则$a=?,b=?,f(x,y)=?$

答案是$a=3,b=-2,f(x,y)=x^3y^2-x^2y^2+y+C$

这题不难，就是单纯的忘了+C

110、计算$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$

将图画出来后不难得到图形是由$x^2+y^2=1,x+y=1$在第一象限的部分围成的面积，用极坐标变换后得到

$$I=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}(\sin\theta+\cos\theta)dr=\int_0^{\pi/2}(\sin\theta+\cos\theta-1)d\theta=2-\frac{\pi}{2}$$

用极坐标先完完整整算一遍，不要害怕，冷静下来

116、设$D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,0\le y\le 2\}$，则$I=\iint_D\sqrt{|y-x^2|}dxdy=?$

答案是$\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$

我在算对称积分的时候忘了乘以2...so stupid

117、$f(t)=\int_0^t dx\int_x^t e^{ty^2}dy$，则$f'(1)=?$

交换积分次序后得到$f(t)=\int_0^t e^{ty^2}dy\int_0^y dx=\frac{1}{2t}\int_0^t e^{ty^2}d(ty^2)=\frac{1}{2t}(e^{t^3}-1)$

$f'(t)=\frac{3}{2}te^{t^3}-\frac{1}{2t^2}(e^{t^3}-1),f'(1)=e+\frac{1}{2}$

算的时候不要钻牛角尖，别往复杂的地方想，先看看交换次序能不能做，以及求导的时候一定要慢，要谨慎

120、设积分区域D由曲线$y=\ln x$以及直线$x=2,y=0$围成，则$\iint_D\frac{e^{xy}}{x^x-1}d\sigma=?$

$$\iint_D \frac{e^{xy}}{x^x-1}d\sigma=\int_1^2 dx\int_0^{\ln x}\frac{e^{xy}}{x^x-1}dy=\int_1^2\frac{1}{x^x-1}dx\int_0^{\ln x}e^{xy}dy=\int_1^2\frac{1}{x(x^x-1)}dx\int_0^{\ln x}e^{xy}d(xy)$$

$$=\int_1^2\frac{e^{xy}}{x(x^x-1)}\bigg|_{y=0}^{y=\ln x}dx=\int_1^2\frac{e^{x\ln x}-1}{x(x^x-1)}dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln 2$$

不要犯$e^{xy}=e^x e^y$这样的错误！！！e^{xy}只能放在一起做！

121、命题错误的是：④数列极限$\lim_{n\to\infty}$存在$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$

令$x_n=n$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$，但极限不存在

注意到是等价命题，不能只考虑一个方向

123、设$\lim_{x\to a}f(x)=A,\lim_{x\to a}g(x)$不存在，则错误的是：①$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$不存在

若$A=0$，则该极限为零

太蠢了，要多想想有什么特例，比如0

138、$\int_0^{x^2}\sin t^2dt$的阶数是

令$f(x)=\int_0^{x^2}\sin t^2dt$，则$f'(x)=2x\cdot\sin x^4$为$x$的五阶无穷小，$f(x)$为$x$的六阶无穷小

太蠢了

139、设$x\to a$时$f(x)$与$g(x)$分别是$x-a$的n阶与m阶无穷小，则下列命题错误的是：③若$n\le m$，则$f(x)+g(x)$是$x-a$的n阶无穷小

令$a=0$，若$f(x)=x,g(x)=-x+x^2$，则$f(x)+g(x)=x^2$，是二阶无穷小，矛盾

若小于等于号改成小于号那么结论就是对的

158、设$f(x)$在x_0可导，且$f'(x_0)>0$，则存在$\delta>0$，使得：**(C)** $f(x)>f(x_0),x\in(x_0,x_0+\delta)$

看错大小于号了，太蠢了

161、设$f(x)=\begin{cases}2-\cos x, & x\le 0\\ \sqrt{x}+1, & x>0\end{cases}$，则**(C)** $x=0$是$f(x)$的极值点，且$(0,1)$是曲线$y=f(x)$的拐点

$$f''(x)=\begin{cases}\cos x>0, & x\in(-\delta,0)\\ -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}<0, & x\in(0,\delta)\end{cases}$$

$x=0$也是拐点，极值点和拐点不需要考虑函数或者导函数是否连续，只需要考察函数或者导函数在邻域中的变化情况即可

169、函数$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，其二阶导函数的图形如图所示，则$y=f(x)$的拐点的个数是

$x=0$时，$f''(x)$不存在，但是$f(x)$在$x=0$处连续，在$x=0$两侧$f''(x)$变号，因此$(0,f(0))$也是$f(x)$的拐点

这里需要注意的是只要变号就可以，哪怕二阶导函数不存在，只要原函数存在就可以

171、设曲线$y=\sqrt[3]{x-4}$，则**C :**曲线的凹区间为$(-\infty,4)$，凸区间为$(4,+\infty)$，拐点为$(4,0)$

这本习题册上面对于凹区间的定义是二阶导数大于零，所以为什么凸函数和凹区间是对应的呢。。。没搞懂

172、函数$f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$在$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上**C :**为常数

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=3\frac{(1-4x^2)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=0$$

算的时候没有认真算

182、设$f(x)$在$[a,b]$连续，则：② $\{f(x)\geq 0(x\in[a,b]),\int_a^b f(x)dx=0\}\Rightarrow f(x)=0(x\in[a,b])$

由连续性可知，若$f(x_0)>0$，则$\exists\delta>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b),f(x)>0$

由此得到$\int_a^b f(x)dx\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx>0$，得出矛盾，所以$f(x)\equiv 0$

做题的时候不能直接看单条的结论，还要看一看题干

199、设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$，则**D** :$f(x)$不存在原函数

这里应该这样考虑，原函数的核心就是$dF(x)=f(x)dx$

假设存在原函数，因为$f(0^+)=0,f(0^-)=1$，那么$F'(0)$等于多少呢，是0还是1？

怎么能保证这个原函数是$f(x)$的原函数而不是$g(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ \cos x, & x\leq 0\end{cases}$的原函数呢？

所以说原函数不存在，更一般地，对于存在第一类间断点（两侧极限存在但不相等）的$f(x)$，不存在原函数

确实是不会

204、命题错误的是：②设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，又$\lim_{R\to\infty}\int_R^R f(x)dx$存在，则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)$收敛

这里有一个要点：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)=\lim_{u\to-\infty}\lim_{v\to+\infty}\int_u^v f(x)dx=\lim_{u\to-\infty}\int_u^c f(x)dx+\lim_{v\to+\infty}\int_c^v f(x)dx$$

也就是说，反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)$是定积分向两个方向扩展的过程，这个扩展不是同时的，也不一定是相同速率的，而这个反常积分分解后只要有一个极限不存在那么整个反常积分的极限就是不存在的，所以题中的反常积分发散

而$\lim_{R\to\infty}\int_R^R f(x)dx$是定积分同时朝两个方向扩展，并且扩展的速率相同的过程，这两个过程有本质上的区别

反常积分的概念不够熟悉

207、曲线$r=ae^{b\theta}(a>0,b>0)$从$\theta=0$到$\theta=\alpha$的一段弧长为**A** :$s=\int_0^\alpha ae^{b\theta}\sqrt{1+b^2}d\theta$

就是要记住弧长公式为$s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}d\theta$

具体的公式如果记不住的话可以这样想$r=r(\theta),x=r(\theta)\cos\theta,y=r(\theta)\sin\theta$

$$\frac{dx}{d\theta}=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,\frac{dy}{d\theta}=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta$$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}d\theta=\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}d\theta$$

如果公式一下忘掉的话，尝试从已知的知识中推出关系来，不要想当然，极坐标的关系有时候是反直觉的

212、设$P(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且以T为周期，则$\int_0^T P(x)dx=0$是方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$有解$y=y(x)\neq 0$且以T为周期的**C** :充分且必要条件

？？？？？？？

不太明白，这题的充分性是怎么保证的呢，为什么从一个周期的积分为0能够得出y不恒等于0呢，这里y恒等于0显然是一个解啊，常值函数以任意数为周期

219、设$f_1(x), f_2(x)$为二阶常系数线性微分方程$y''+py'+qy=0$的两个特解，C_1, C_2是两个任意常数，则$C_1f_1(x)+C_2f_2(x)$是该方程通解的充分必要条件是$\mathbf{D:}f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)\neq 0$

二阶常系数线性微分方程解的维度为2，因此如果这两个特解的线性组合构成通解，那么说明这两个特解就是二阶常系数线性微分方程解空间的特征向量或者说基向量，所以这两个解线性无关，所以就有

$$g(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\neq C\Rightarrow g'(x)=\frac{|f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)|}{f_2^2(x)}\neq 0$$

这题做的是对的，但还是很有价值的题，自己写的时候是猜出来的

225、设函数$f(x)$连续，且满足$f(x)=\cos 2x-4\int_0^x(x-t)d(t)dt$，则$f(x)=\mathbf{C:}\cos 2x-x\sin 2x$

求两次导后得到$f''(x)+4f(x)=-4\cos 2x$，不难得到答案

写的时候看错了，把过程中的-4看成了4，太蠢了

233、设$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处$\mathbf{D:}$全微分存在但一阶偏导数$f_x', f_y'$不连续

当$x^2+y^2\neq 0$时，

$$f_x'(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当取路径$y=x$时，有

$$\lim_{x\to 0^+, y=x}f_x'(x,y)=\lim_{x\to 0^+}(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}x})$$

这个极限不存在，所以得到f_x'不连续

这题做的是对的，但有需要注意的就是这里的$f_x'(x,y)$仍然是多元函数，也就是二维平面上的函数，所以偏导数连续的含义和多元函数连续的含义是一样的，就是在二维平面上从什么路径去趋向于这个点，都有$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_{x/y}'(x,y)=f_{x/y}'(x_0,y_0)$

235、设

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$$

则$f(x,y)$在点$(0,0)$处$\mathbf{B:}$连续但两个偏导数不存在

由题式得

$$\lim_{x\to 0, y=0}\frac{f(x,0)-f(0,0)+2x}{|x|}=1$$

所以有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=-1,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=-3$$

这就说明了f_x'不存在

做题的时候，不能通过构造来证明某个选项是对的，一定要通过定义或者别的什么靠谱的方式来证明才行，只能通过构造法来说明某个选项有问题

249、设$F(x,y)$具有二阶导函数，且$F(x_0,y_0)=0,F'_x(x_0,y_0)=0,F'_y(x_0,y_0)>0$，若一元函数$y=f(x)$是由方程$F(x,y)=0$确定的在点$(x_0,y_0)$附近的隐函数，则$x_0$是函数$y=y(x)$的极小值点的一个充分条件是**B** :$F''_{xx}(x_0,y_0)<0$

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)},y'(x_0)=0$$

$$y''(x)=-\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}y')F'_y-(F''_{yx}+F''_{yy}y')F'_x}{(F'_y)^2},y''(x_0)=-\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

$y''(x_0)>0\Rightarrow x_0$是极小值点，由此即得$F''_{xx}(x_0,y_0)<0$

要对隐函数的相关概念有印象，涉及到这类比较抽象的问题时，不要盲目的用一些取巧的方法，而是要尝试推一推，想一想每个条件能怎么用上，车到山前必有路

267、设积分区域$D=\{(x,y)|\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\le 1\}$，则$I=\iint_D(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})dxdy=$ **C** :$\frac{8}{15}$

令D_1为区域D在第一象限的部分，则由对称性和轮换性可以得到$I=8\iint_{D_1}\sqrt{x}\,d\sigma$，则有

$$I=8\int_0^1\sqrt{x}\,dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}dy=8\int_0^1(x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x})dx=8\times(\frac{2}{5}-1+\frac{2}{3})=\frac{8}{15}$$

看到这类x和y地位相同的题的时候，不要无脑用极坐标，思考思考怎么能在必要的简化之后用直角坐标的方法来做

275、设$g(x)$是可微函数$y=f(x)$的反函数，且$f(1)=0,\int_0^1 xf(x)dx=\frac{2023}{2}$，则$\int_0^1 dx\int_0^{f(x)}g(t)dt$的值为**C** :2023

利用分部积分法:

$$\int_0^1 dx\int_0^{f(x)}g(t)dt=\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}g(t)dt\right]dx=x\int_0^{f(x)}g(t)dt\Big|_0^1-\int_0^1 xg[f(x)]f'(x)dx$$

$$=0-\int_0^1 x^2f'(x)dx=-\int_0^1 x^2df(x)=-x^2f(x)\Big|_0^1+2\int_0^1 xf(x)dx=2023$$

这个题我觉得是有点tricky的，这题的关键点就是想到这个反函数条件如何运用，想到$g(f(x))=x$这个条件很关键，然后再根据题目中的式子思考如何去凑出这个条件，于是想到变限积分求导，然后就是一步一步推，我自己感觉这种题不用强求

276、$\begin{vmatrix}1&0&2&-1\\0&2&1&0\\1&-1&0&1\\1&2&3&4\end{vmatrix}=?$

按第一列展开

$$\begin{vmatrix}1&0&2&-1\\0&2&1&0\\1&-1&0&1\\1&2&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\2&3&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&2&-1\\2&1&0\\2&3&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&2&-1\\2&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=[2\times(-3)-(-6)]+[-2\times 8-1\times 4]-[-2\times 2-1\times 1]=-20+5=-15$$

错的很不应该，这里是把$(-1)^{i+j}$算的时候算劈叉了导致答案是反的，太蠢了

设矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}4&-2&0&0\\-3&1&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$，则$\mathbf{A}=?$

由$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$得到$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$，所以有$\mathbf{A}=|\mathbf{A}|(\mathbf{A}^*)^{-1}$

由分块矩阵的求逆公式可以知道$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&0\\0&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}&0\\0&\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}$

所以$(\mathbf{A}^*)^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-1&0&0\\-\frac{3}{2}&-2&0&0\\0&0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$

而易得$|\mathbf{A}^*|=\begin{vmatrix}4&-2\\-3&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-4&0\\0&-1\end{vmatrix}=(-2)\times4=-8=|\mathbf{A}|^3\Rightarrow|\mathbf{A}|=-2$

由此得$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$

这里我的答案差了一个负号，我的想法是乘上一个数使得$|\mathbf{A}|=-2$，而没有考虑推导过程，这种题就应该一步一步写步骤，不能马虎

291、已知$\mathbf{A},\mathbf{B}$均为n阶矩阵，且$\mathbf{AB}=\mathbf{E}$，则$(\mathbf{E}+\mathbf{BA})[\mathbf{E}-\mathbf{B}(\mathbf{E}+\mathbf{A^TB^T})^{-1}\mathbf{A}]=?$

由题得$\mathbf{A},\mathbf{B}$均可逆，所以$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{A^TB^T}=\mathbf{B^TA^T}=\mathbf{E}$

所以
$(\mathbf{E}+\mathbf{BA})[\mathbf{E}-\mathbf{B}(\mathbf{E}+\mathbf{A^TB^T})^{-1}\mathbf{A}]=2\mathbf{E}[\mathbf{E}-\mathbf{B}(2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}]=2\mathbf{E}[\mathbf{E}-\frac{1}{2}\mathbf{BA}]=2\mathbf{E}\cdot\frac{1}{2}\mathbf{E}=\mathbf{E}$

做的时候把两个大式子之间的乘号看成加号算出来$\frac{5}{2}\mathbf{E}$，so stupid

303、已知向量组$\alpha_1=(a+1,1,a)^T,\alpha_2=(a,-2,2-a)^T,\alpha_3=(a-1,-3,4-a)^T$线性相关，则$a=?$

由线性相关可以得到$|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3|=\begin{vmatrix}a+1&a&a-1\\1&-2&-3\\a&2-a&4-a\end{vmatrix}=0$

$=(a+1)[-2(4-a)+3(2-a)]-a[(4-a)+3a]+(a-1)[(2-a)+2a]$

$=(a+1)(-a-2)-a(2a+4)+(a-1)(a+2)$

$=(a+2)(-a-1-2a+a-1)=(a+2)(-2a-2)$

由此解得$a=-2,-1$

计算出了问题，看到过程中有比较大（两位数）的话一定要仔细检查过程

310、已知向量组$\alpha_1=(a,a,1)^T,\alpha_2=(a,1,a)^T,\alpha_3=(1,a,a)^T$的秩是2，则$a=?$

解$|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3|=0$可以得到$a=1,-\frac{1}{2}$

注意到当$a=1$时秩是1，所以由题得到$a=-\frac{1}{2}$

不能想当然的看到秩就用行列式为0来算，还要多看看题干

333、已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1&2\\0&2&a\\0&0&3\end{bmatrix}$和对角矩阵相似，则$a=?$

这里要从一个点来考虑，就是两个相似矩阵对应于同一个特征值的特征向量的个数是相等的

因为和对角矩阵相似，不难得到$r(3\mathbf{E}-\mathbf{\Lambda})=1$，所以$r(3\mathbf{E}-\mathbf{A})=1$

于是可以解得$a=-2$

具体内容可以参考https://zhuanlan.zhihu.com/p/151231495

339、二次型$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$在正交变换下的标准型为

答案是$6y_1^2$

这里就是注意标准型不是矩阵，而是另一个二次型

361、下列矩阵中，行最简矩阵是$\mathbf{C:}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

行最简矩阵需要

- 主元系数为1
- 主元所在列其余系数均为0
- 零行都在矩阵下面

对于行最简矩阵的概念不完全清楚

362、下列矩阵中，初等矩阵是$\mathbf{D:}\begin{bmatrix}1&0&\sqrt{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

初等矩阵的概念是经过一次初等变换得到的矩阵

概念要记清，不能想当然

408、已知$\mathbf{A}$是三阶矩阵，$r(\mathbf{A})=1$，则$\lambda=0$ $\mathbf{B:}$至少是$\mathbf{A}$的二重特征值

因为k重特征值最多有k个线性无关的特征向量，那么由$r(\mathbf{A})=1$得到$(0\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$必有两个线性无关的特征向量，故$\lambda=0$的重数大于等于2，所以得到结论，当$\mathbf{A}$只有最右上角元素为1时，就有0为三重特征值

多想一些反例

410、已知$\alpha=(1,-2,3)^T$是矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&-1\\a&-2&2\\3&b&-1\end{bmatrix}$的特征向量，则$\mathbf{A:}a=-2,b=6$

怎么会出现这种计算错误，太蠢了

418、已知二次型$x_1^2+3x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2+8x_2x_3$，在下列矩阵运算中，得到二次型的是
$\mathbf{A:}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\begin{bmatrix}1&-1&2\\-3&3&2\\-2&6&5\end{bmatrix}\mathbf{x}$

要注意二次型的系数矩阵不是必须是实对称矩阵

420、二次型经过正交变换标准形不是$y_1^2+3y_2^2-y_3^2$的是$\mathbf{D:}x_1^2+x_2^2+x_3^3-4x_1x_2-4x_2x_3$

读错题干了。。。太蠢了

433、设

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\ln(1+x)}-1}{e^{2x^3}-1}=3$$

，则$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ =?

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}xf(x)}{2x^3}=3\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=12$$

不能想当然的用洛必达法则，因为你无法处理$f'(x)$

434、

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}=?$$

不难知道$\lim_{x\to 0^+}x^x=0$，则

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^x[(\frac{\sin x}{x})^x-1]}{x^3}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^3}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x}-1+1)}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x-x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

确实没想出来怎么做

438、$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$ =?

利用$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ x, & 1\le x<2\\ \frac{x^2}{2}, & x\ge 2\end{cases}$$

为什么会有人认为$(\frac{x^2}{2})^n=(\frac{x^n}{2})^2$然后凑平方啊。。。

446、设$f(x)=\begin{cases}\frac{\arctan x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则$f'(x)$ =?

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

题目看成了$f'(0)$，读题啊读题

449、设$y=\int_0^{2x}e^{t^2}dt+1$，则它的反函数$x=\varphi(y)$的二阶导数$\frac{d^2x}{dy^2}$ =?, $\frac{d^2x}{dy^2}\Big|_{y=1}$ =?

首先有$\frac{dy}{dx}=2e^{4x^2}$，然后由反函数求导法则得到$\frac{dx}{dy}=1/\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}e^{-4x^2}$

最后由复合函数求导法得到

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{-4x^2})\frac{dx}{dy}=-4xe^{-4x^2}\cdot\frac{1}{2}e^{-4x^2}=-2xe^{-8x^2}$$

由原方程得到$y=1\Leftrightarrow x=0,\Rightarrow\frac{d^2x}{dy^2}\Big|_{y=1}=0$

这题也可以记一个反函数二阶导公式$x''=-\frac{y''}{y'^3}$

453、设$F(x)=\int_0^x e^{tx-t^2}dt$，则$F'(x)$ =?

$$F(x)=\int_0^x e^{\frac{x^2}{4}-(\frac{x}{2}-t)^2}dt \xlongequal{u=\frac{x}{2}-t} e^{\frac{x^2}{4}}\int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}} e^{-u^2}du=2e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-u^2}du$$

于是解得$F'(x)=xe^{\frac{x^2}{4}}\int_0^{\frac{x}{2}} e-u^2du+1$

有点搞的，要想到肯定需要换元，以及把积分中只带有x的部分提取出来

455、设$f(x)=x^{100}e^{x^2}$，则$f^{(200)}(0)=?$

问题转化为求$f(x)$麦克劳林展开后x^{200}的系数，不难得到其系数为$1/50!$，所以答案就是$200!/50!$

想到展开做，结果麦克劳林展开式求错了。。。

460、设$f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$，则$f(x)$的凸区间是?，拐点的横坐标是?

$$f''(x)=\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{5})\begin{cases}<0, & -\infty<x<-\frac{1}{5}\\ =0, & x=-\frac{1}{5}\\ >0, & \frac{1}{5}<x<0\\ >0, & 0<x<+\infty\end{cases}$$

凸区间是$(-\infty,-\frac{1}{5})$，拐点横坐标是$x=-\frac{1}{5}$

拐点的定义是两侧二阶导相反的点。。不能记错了

466、若不定积分$\int\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$的结果中不含反正切函数，则$a=?$

令$\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx}{x^2+1}+\frac{N}{x^2+1}$，经过观察后发现若要结果中不含有反正切，则$N=0$

$\frac{A}{x+1}+\frac{Mx}{x^2+1}+\frac{N}{x^2+1}=\frac{(A+M)x^2+(M+N)x+(A+N)}{(x+1)(x^2+1)}$

比较后得到$a=M=-1$

感觉不是很有价值。。。

471、设$f(u)$为连续函数，且$\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\ln(1+x^2),f(1)=1$，则$\int_1^2 f(x)dx=?$

令$u=2x-t$，则$t=2x-u,\int_0^x(2x-u)f(u)d(2x-u)=2x\int_x^{2x} f(u)du-\int_x^{2x} uf(u)du$

题式两侧求导后得到

$$2\int_x^{2x} f(u)du+4xf(2x)-2xf(x)-4xf(2x)+xf(x)=2\int_x^{2x} f(u)du-xf(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

代入$x=1$后得到$2\int_1^2 f(u)du-f(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{4}$

每一步的过程要看仔细，如果知道怎么做还做错就太可惜了

472、$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<x<b)=?$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+(a+b)x-ab}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{b+a}{2})^2}}=\int\frac{d[\frac{2}{b-a}(x-\frac{b+a}{2})]}{\sqrt{1-[\frac{2}{b-a}(x-\frac{b+a}{2})]^2}}$$

$$=\arcsin[\frac{2}{b-a}(x-\frac{b+a}{2})]+C$$

可以记一个类似于结论性的东西就是凑arcsin的时候如果x^2前面没有系数那么积分前面也没有系数，然后做的时候一定要一步一步慢慢做

475、$I=\int_0^1 x\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}=?$

这题的核心是利用分部积分

$$I=2\int_0^1 x\arcsin x\ d\sqrt{1+x}=(2x\arcsin x\sqrt{1+x})|_0^1-2\int_0^1\sqrt{1+x}(\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\ dx$$

$$=\sqrt{2}\pi-2\int_0^1\sqrt{1+x}\arcsin xdx-2\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx=\sqrt{2}\pi-2I_1-2I_2$$

$$I_1=\frac{2}{3}\int_0^1\arcsin x\ d(1+x)^{\frac{3}{2}}=[\frac{2}{3}\arcsin x(1+x)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}dx$$

$$I=\sqrt{2}\pi-\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{4}{3}\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}dx-\frac{6}{3}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx=-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{2}{3}\int_0^1\frac{2-x}{\sqrt{1-x}}dx$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{2}{3}\int_0^1(\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}})dx=-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi-\frac{4}{9}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{4}{3}\sqrt{1-x}\Big|_0^1=-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{16}{9}$$

好恶心的题。。。但是还是有一些启发的，遇到arcsin x这类不常规的东西出现的时候就要考虑凑微分或者分部积分了，应该只有这两种方法能把这个奇奇怪怪的东西给去掉

476、设当$0\le x\le\pi$时$f(x)=x$，且对一切$x, f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，则$\int_\pi^{3\pi}f(x)dx=?$

$$\int_\pi^{3\pi}f(x)dx=\int_\pi^{2\pi}f(x)dx+\int_{2\pi}^{3\pi}f(x)dx=2\int_\pi^{2\pi}f(x)dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\sin xdx$$

$$=2\int_0^\pi f(x)dx+2\int_\pi^{2\pi}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi}\sin xdx=\pi^2-2$$

做这类题的时候要慢慢拆，不然就会像我一样算成$I=2\int_0^\pi f(x)dx+3\int_0^\pi\sin xdx$

479、设当$x>-2$时$f(x)$连续，且满足

$$2f(x)\left[\int_0^x f(t)dt+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=\frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$$

则当$x>-2$时，$f(x)=?$

令$F(x)=\int_0^x f(t)dty+\frac{1}{\sqrt{2}}$，则$F'(x)=f(x)$，原式化简为$2F'(x)F(x)=\frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$

两边积分后得到

$$F^2(x)=\int\frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}dx=-\int(x+1)e^xd(\frac{1}{x+2})=-\frac{(x+1)e^x}{(x+2)}+\int\frac{1}{x+2}d[(x+1)e^x]$$

$$=-\frac{(x+1)e^x}{(x+2)}+\int\frac{x+2}{x+2}e^xdx=-\frac{(x+1)e^x}{(x+2)}+e^x+C=\frac{e^x}{(x+2)}+C$$

$F(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow C=0$，又由$F(0)>0$，$F(x)$连续得到$F(x)=\sqrt{\frac{e^x}{x+2}}$（开根号为正）

由此得$f(x)=F'(x)=\frac{(x+1)e^{\frac{x}{2}}}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}$

1、首先要注意这里没有说$f(x)$可导，所以不要考虑求导 2、看到奇奇怪怪的数字就要考虑不要用常规的做法了 3、这种做法感觉留个印象就行。。。

480、$f(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x}, x\in[0,\pi]$，则$f(x)$在$[0,\pi]$上的全体原函数是

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{\frac{1}{\cos^2 x}+\tan^2 x}=\int\frac{d\tan x}{1+2\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$$

令

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & x=\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$$

则$f(x)$在$[0,\pi]$上的全体原函数是$\int f(x)dx=F(x)+C, C\in\mathbb{R}$

首先要会做。。这里看到这种齐次的就要想到去凑tan，然后就是要考虑函数不存在以及连续等因素，还是蛮有难度的

483、设$\alpha>1$，反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x}$收敛，则$\beta$的取值范围是

令$f(x)=\frac{1}{x^\alpha\ln^\beta x}$，取$A>1$，有$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^A f(x)dx+\int_A^{+\infty}f(x)dx$

先考察$\int_A^{+\infty}f(x)dx$，因$\alpha>1$，可取$\varepsilon>0$充分小使得$\alpha-\varepsilon>1$，则有

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}}=x^{\alpha-\varepsilon}f(x)=\frac{1}{x^\varepsilon\ln^\beta x}\to 0(x\to+\infty)$$

又因为$\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha-\varepsilon}}$收敛，由比较判别法的极限形式得出无论$\beta$取什么值，都有$\int_A^{+\infty}f(x)dx$收敛

再考察$\int_1^A f(x)dx$，因为

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{(x-1)^\beta}}=\lim_{x\to1^+}(\frac{x-1}{\ln x})^\beta\cdot\frac{1}{x^\alpha}=1$$

由比较判别法得到$\int_1^A f(x)dx$与$\int_1^A\frac{dx}{(x-1)^\beta}$有相同敛散性，由此得到当$\beta<1$时候$\int_1^A f(x)dx$收敛

此时也即题中反常积分收敛

这道题我觉得蛮有价值，要多看几遍，注意考虑问题的时候要考虑积分的两端

489、由极坐标给出的双纽线$r^2=a^2\cos2\theta(a>0)$所围成的图形绕极轴旋转一周所得旋转体的侧面积$A=?$

首先要知道这个图像长什么样，是一个∞这样子的形状，然后代入侧面积公式得到

$$A=2\int_0^{\pi/4}2\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

由$r^2=a^2\cos2\theta$得到

$$2r(\theta)r'(\theta)=-2a^2\sin2\theta, r'(\theta)=-\frac{a^2\sin2\theta}{r(\theta)}\Rightarrow r^2(\theta)+r'^2(\theta)=\frac{a^4}{r^2(\theta)}$$

$$A=4\pi\int_0^{\pi/4}a^2\sin\theta d\theta=4\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})a^2$$

这道题的关键是要记得侧面积的公式然后那个对题中式子求导的过程值得看看

490、心脏线$r=1+\cos\theta$与直线$r=\frac{2}{2\sin\theta+\cos\theta}$，在$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$所围成平面图形绕直线$\theta=0$旋转一周的旋转体体积$V=?$

首先把图画出来后观察可以得到这题的答案就是用心脏线所围成的体积V_1减去直线所围成的体积V_2

注意到$dx=d(r\cos\theta)=d(\cos\theta+\cos^2\theta)=(-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)d\theta$，则有

$$V_1=\int_0^2 \pi y^2 dx=\pi\int_{\pi/2}^0 (1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot(-1)(\sin\theta(1+2\cos\theta))d\theta$$

$$=-\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)d\cos\theta \xlongequal{t=\cos\theta} \pi\int_0^1(1+t)^2(1-t^2)(1+2t)dt=\frac{5}{2}\pi$$

不难得到$V_2=\frac{2}{3}\pi$，所以$V=\frac{11}{6}\pi$

不能算成$dx=d(r\cos\theta)=-r\sin\theta d\theta$，要知道$r=r(\theta)$

491、$xy''=y'+x\sin\frac{y'}{x}$的通解是

令$u=\frac{y'}{x}$，则原方程化为$\frac{du}{\sin u}=\frac{dx}{x}$，我们有

$$\int\frac{du}{\sin u}=\int\frac{du}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}=\int\frac{du}{2\tan\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}}=\int\frac{d\tan\frac{u}{2}}{\tan\frac{u}{2}}=\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|$$

于是题解第一行方程两边积分得到$\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|=\ln|x|+C_1'$

即$\tan\frac{u}{2}=C_1x, C_1\in\mathbb{R}$，由此得到$y'=2x\arctan C_1x$，积分后得到

$$y=\int 2x\arctan C_1xdx=\int\arctan C_1xdx^2=x^2\arctan C_1x-\frac{1}{C_1}\int\frac{C_1^2x^2+1-1}{1+(C_1x)^2}dx$$

$$=\begin{cases} x^2\arctan C_1x-\frac{x}{C_1}+\frac{1}{C_1^2}\arctan C_1x+C_2 & C_1\neq 0 \\ C_2 & C_1=0\end{cases}$$

这道题的难点是积分sin的时候不能把其化为cos的式子，要不下面没法下手

494、方程$(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0$满足条件$y(1)=0$的特解是

当$x>0$时，原方程可以化为$\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}-y'=0$，令$u=\frac{y}{x}$则有$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$

积分后得到$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln x+\ln C\Rightarrow u+\sqrt{1+u^2}=Cx\Rightarrow y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$

代入题中数据后得到$C=1$，所以$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x^2-1)$

当$x<0$时过程类似，答案相同

这道题的关键是要分类讨论以化简绝对值，然后最后一步的化简最好要有

496、微分方程$y'=\frac{2xy-y^2}{x^2-2xy}$满足$y(1)=-2$的特解是

微分方程为齐次方程，令$u=\frac{y}{x}$后得到$\frac{(1-2u)du}{u(1+u)}=\frac{dx}{x}$

$$\int\frac{1-2u}{u(1+u)}du=\int(\frac{1}{u}-\frac{3}{1+u})du=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|u|-3\ln|1+u|=\ln|Cx|\Rightarrow\frac{u}{(1+u)^3}=Cx$$

结合题中数据得到$C=2$，所以答案为$xy=2(x+y)^3$

这道题是计算失误。。。

497、把x^2看成y的函数，求解微分方程$(y^4-3x^2)dy+xydx=0$，则该方程的通解是

x^2看成y的函数的意思是$x^2=f(y)$，所以我们第一步就是要我们的方程中只有x^2和关于y的多项式

原式可以化为$2(y^4-3x^2)dy+y\,dx^2=0\Rightarrow\frac{dx^2}{dy}-\frac{6}{y}x^2=-2y^3$

不难解得答案为$x^2=Cy^6+y^4, C\in\mathbb{R}$

这道题核心就是第二行的变换，做过一次下次就晓得怎么做了

498、设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足方程$f(t)=t^2+\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，则$f(t)=?$

首先我们有

$$\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^t f(r)dr=2\pi\int_0^t rf(r)dr$$

所以题式两边求导由$f'(t)=2t+2\pi tf(t)$，不难解得$f(t)=Ce^{\pi t^2}-\frac{1}{\pi}$

又由$f(0)=0$，由此确定常数$C=\frac{1}{\pi}$，则$f(t)=\frac{1}{\pi}e^{\pi t^2}-\frac{1}{\pi}$

注意这题不能把积分看为是常数来做，而要把积分看作是一个关于t的函数

502、计算累次积分$I=\int_{-1}^0 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{-x}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-x^2-y^2}}$

通过观察积分区域和积分形式不难得到这道题应该用化为极坐标的方法来做

$$I=\int_{3/4\pi}^{\pi} d\theta\int_0^{2\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}dr=\int_{3/4\pi}^{\pi}\arcsin\frac{r}{2}\Big|_0^{2\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{3/4\pi}^{\pi}\arcsin(\sin\theta)d\theta=\int_{3/4\pi}^{\pi}(\pi-\theta)d\theta=\frac{1}{32}\pi^2$$

这题错的点在于没有想到最后一步，就是说arcsin的值域只有$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，基础不牢

503、设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le x\}$，则$I=\iint_D(x+y^2)d\sigma=?$

令$S=\{(x,y)|x^2+y^2\le\frac{1}{4}\}$，则$I=\iint_D(x+y^2)d\sigma=\iint_S(x+\frac{1}{2}+y^2)d\sigma$，所以

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^2)rdr\overset{u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^2}{=\!=\!=\!=}2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{8}}udu=\frac{9}{64}\pi$$

化为极坐标的时候没乘r，太蠢了。。。

504、设积分区域D是由直线$y=0,y=x$与曲线$y=\sqrt{4x-x^2},y=\sqrt{9x-x^2}$围成的平面图形，则$\iint_D\frac{y^2}{x^2}d\sigma=?$

化为极坐标后不难得到

$$I=\int_0^{\pi/4}d\theta\int_{4\cos\theta}^{9\cos\theta}r\tan^2\theta\,dr=\int_0^{\pi/4}\tan^2\theta\,d\theta\int_{4\cos\theta}^{9\cos\theta}r\,dr=\frac{65}{2}\int_0^{\pi/4}\tan^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{65}{2}\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{65}{16}(\pi-2)$$

似乎就是单纯的计算错误。。。

505、设积分区域$D=\{(x,y)|1\le x+y\le 2,x\ge 0,y\ge 0\}$，则$\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}}=?$

极坐标变换后得到

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}d\theta}{1+2\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}}\overset{t=\tan\frac{\theta}{2}}{=\!=\!=\!=}\int_0^1\frac{2\,dt}{1+2t-t^2}$$

$$=\int_0^1\frac{2\,dt}{2-(1-t)^2}\overset{u=1-t}{=\!=\!=\!=}\int_0^1\frac{2\,du}{2-u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\Big|_0^1=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

又是一个计算错误。。。

508、下列命题正确的是$\mathbf{C}$:设在$x \to x_0$时$\alpha(x)$为无穷大，且$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)=a$，则$\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0$

C选项正确是因为$\beta(x)=\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\alpha(x)}$，$\lim_{x\to x_0}\beta(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha(x)\beta(x))\lim_{x\to 0}\frac{1}{\alpha(x)}=0$

D选项设在$x=x_0$空心邻域$\alpha(x)$为无界函数，且$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)=0$，则$\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0$

如下即为一组反例

$$\alpha(x)=\begin{cases}(x-x_0)^2, & x>x_0\\ \frac{1}{x-x_0}, & x<x_0\end{cases},\beta(x)=\begin{cases}(x-x_0)^2, & x<x_0\\ \frac{1}{x-x_0}, & x>x_0\end{cases}$$

这个反例需要牢记在心

521、设$f(x)=|x^3-4x|\sqrt[3]{x^2-2x-8}$，则$f(x)$的不可导的点的个数是$\mathbf{D}$:3个

这里就是在考虑可导的时候应采用如下方法，以该题的特殊点$x=-2$为例：

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{|x||x+2||x-2|\sqrt[3]{x^2-2x-8}}{x+2}=\lim_{x\to -2^{\pm}}\frac{|x||x+2||x-2|\sqrt[3]{x^2-2x-8}}{\pm|x+2|}$$

$$=\pm\lim_{x\to -2^{\pm}}|x||x-2|\sqrt[3]{(x-4)(x+2)}=0$$

就是需要慢慢做，不能投机取巧

527、设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\ge 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$，则$\mathbf{D}$:$f'(0)$不存在，曲线$y=f(x)$在$(0,0)$有切线

因为$f'(0^+)=+\infty, f'(0^-)=-\infty$，所以存在切线$x=0$

这个题感觉还是硬记，不是很能理解

530、设函数$f(x)$在$x=x_0$某邻域有定义，则存在函数$g(x)$在x_0处连续并使$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)g(x)$是$f(x)$在$x=x_0$处可导的$\mathbf{C}$: 充要条件

这题的充分性比较显然，关键是看必要性，这里主要就是存在这两个字比较关键，所以说我们只需要构造出来一个$g(x)$就可以证明出必要性，显然令

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\ne x_0\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$$

这就保证了$g(x)$在x_0处连续

这题的关键是要把题看仔细，存在这两个字很重要

552、设$y=y(x)$在$x=0$领域二阶连续可导且满足$xy''+y'^2=\arctan^2 x$，则$\mathbf{C}$:$(0,y(0))$点是$y=y(x)$的拐点

题中方程令$x=0$可以得到$y'(0)=0$，再然后有

$$\lim_{x\to 0}y''=\lim_{x\to 0}\frac{-y'^2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\arctan^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}-2y'y''+0=0\Rightarrow y''(0)=0$$

$$y^{(3)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y''(x)-y''(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y''}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{y'^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\arctan^2 x}{x^2}=-(y''(0))^2+1=1$$

这就得到了结论

要大胆做，以及题目给的数字肯定是有含义的

568、设$f(x)$在(a,b)内可导，$x_0\in(a,b)$是$f'(x)$的间断点，则该间断点一定是$\mathbf{D}$:非无穷型的第二类间断点（即两侧极都限不存在）

现在先把这个当作结论来记忆

例子：$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

有空再琢磨琢磨吧

577、设$f(x)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+t^2}dt$，则$f(x)$在$x=0$处$\mathbf{B}$:连续，但不可导

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(x^2+t^2)dt=\frac{1}{2}t\ln(x^2+t^2)\Big|_{t=0}^{t=1}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t^2}{x^2+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-1+\int_0^1\frac{x^2}{x^2+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-1+x\arctan\frac{t}{x}\Big|_{t=0}^{t=1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-1+x\arctan\frac{1}{x}$$

当$x=0$时，$f(0)=\int_0^1\ln t dt=-1$，所以

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\ln(x^2+1)-1+x\arctan\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$$

由此可得$f(x)$在$x=0$处连续，然后又有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}[\frac{1}{2x}\ln(x^2+1)+\arctan\frac{1}{x}]=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}[\frac{1}{2x}\ln(x^2+1)+\arctan\frac{1}{x}]=-\frac{\pi}{2}$$

所以可见其不可导

这题的关键在于怎么把f(x)化简，慢慢练慢慢学吧

589、$I=\int_0^{100\pi}\sqrt{1+\cos 2x}=?$

$$I=50\int_0^{2\pi}|\sqrt{2}\cos x|dx=200\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos xdx=200\sqrt{2}$$

这个错的太不应该了

624、四元线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_4=0 \\ x_3-3x_4=0 \end{cases}$的基础解系是

观察后不难得到其系数矩阵的秩是2，所以有$4-2=2$个自由变量，令x_2,x_4为自由变量

令$x_2=1,x_4=0$，解得$x_1=0,x_3=0$，所以其解$\eta_1=(0,1,0,0)^T$

令$x_2=2,x_4=1$，解得$x_1=-2,x_3=3$，所以其解$\eta_2=(-2,0,3,1)^T$

所以其基础解系是η_1,η_2

做的时候不要想当然，静下来做

634、已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$的秩为2，则$t=?$

由题得二次型矩阵的行列式为0，即

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 2 \end{vmatrix}=2(2-t^2)-2=2(1-t^2)=0\Rightarrow t=\pm 1$$

多看看题啊

END！错误100/660道，正确率84.84%