20年真题

数学分析

1、（13分）设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中$g(x)$具有二阶连续导函数，$g(0)=1$

（1）若$f(x)$在$x=0$是连续的，确定a的值

（2）求$f'(x)$

（3）讨论$f'(x)$在$x=0$处连续

解:

（1）由题得$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=a$，对左式利用洛必达法则后不难得到$a=g'(x)$

（2）对$x\neq 0$有$f'(x)=(\frac{g(x)-\cos x}{x})'=\frac{x(g'(x)+\sin x)-(g(x)-\cos x)}{x^2}$

当$x=0$时，$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x}{2x}$

若$g'(x)=0$，则$f'(0)=\frac{1}{2}(g''(0)+1)$，否则$f'(0)=\infty$

（3）若$g'(x)=0$，则易得$\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$，则连续，否则不连续

2、（10分）设$f(x)=\frac{x^3}{x^2-2x-3}$，求$f^{(n)}(x)$

解:

$f(x)=\frac{x(x^2-2x-3)+2(x^2-2x-3)+7x+6}{x^2-2x-3}=x+2+\frac{7x+6}{(x-3)(x+1)}=x+2+\frac{\frac{1}{4}(x-3)+\frac{27}{4}(x+1)}{(x-3)(x+1)}=x+2+\frac{1}{4(x+1)}+\frac{27}{4(x-3)}$

由此可得$f'(x)=1-\frac{1}{4(x+1)^2}-\frac{27}{4(x-3)^2}$

对$n>1$，有$f^{(n)}(x)=(-1)^n\times n!\times(\frac{1}{4(x+1)^{n+1}}+\frac{27}{4(x-3)^{n+1}})$

3、（12分）（1）设$0<x<+\infty$，证明存在$0<\eta<1$，使得$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{(x+\eta)}}$

（2）求出（1）中η关于x的函数表达式$\eta(x)$，并求出$0<x<+\infty,\eta(x)$的值域

解:

（1）令$f(x)=\sqrt{x}$由拉格朗日中值定得一定存在$\xi\in(x,x+1)$，使得$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$

也即$\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

不难发现令$\eta=\xi-x$即为所求

（2）$2\sqrt{(x+\eta)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

由此可得$\eta(x)=\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-x$

$\eta'(x)=\frac{1}{4}(2+\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}})-1=\frac{1}{4}(2\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}-2)>0$恒成立

由$\eta(x)$连续得$\eta(x) > \eta(0) = \frac{1}{4}, \eta(x) < \eta(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \eta(x) = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{x^2 + x} - 2x) = \frac{1}{2}$

由此得$\eta(x) \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

4、设函数$f(\mu)$有一阶连续导数，$f(0) = 2$，且函数$z = xf(\frac{y}{x}) + yf(\frac{y}{x})$满足$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}(x \neq 0)$，求$z(x, y)$的表达式

解:

$z = (x + y)f(\frac{y}{x}), \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2f(\frac{y}{x}) + (x + y)(-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x})f'(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$

因为$x \neq 0$，令$k = \frac{y}{x}$得$2f(k) + (1 + k)(1 - k)f'(x) = k$

也即$f'(k) + \frac{2}{1-k^2}f(k) = \frac{k}{1-k^2}$

令$P(k) = \frac{2}{1-k^2}, Q(k) = \frac{k}{1-k^2}$

则$e^{\int P(k)dk} = e^{\int(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1})dk} = e^{\ln|(k+1)| - \ln|(k-1)|} = |\frac{k+1}{k-1}|$

$\int Q(k)e^{\int P(k)dk}dk = \int \frac{k}{1-k^2} \times \frac{k+1}{k-1}dk = -\int \frac{k}{(k-1)^2}dk = -\int \frac{1}{k-1}dk - \int \frac{1}{(k-1)^2}dk = \frac{1}{k-1} - \ln|(k-1)|$

$f(k) = e^{-\int P(k)dk}(\int Q(k)e^{\int P(k)dk}dk + C) = \frac{k+1}{k-1}(k - 1 - \ln|(k-1)| + C)$

代入$f(0) = 2$得$C = -1$

回代后得$z(x, y) = (x + y)(\frac{y+x}{y-x})(\frac{y}{x} - 2 - \ln|(\frac{y}{x} - 1)|)$

5、（12分）求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n}$收敛半径，收敛区间，收敛域，并求收敛区间内$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n}$和函数

解:

$\lim_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{4(n+1)^2-1}{4n^2-1} = 1$，收敛半径为1，收敛区间为$(-1, 1)$

当$x = \pm 1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$，易得其收敛，所以可得其收敛域为$[-1, 1]$

首先求$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}$的和函数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}(-1)^{n+1}x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}[\int(-1)^{n+1}x^{2n-2}] = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}(-1)^{n+1}x^{2n} = x\arctan x$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \sum[\int \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n-1)}] = \int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}[(x^2 + 1)\arctan x - x]$

6、（12分）$z = z(x, y)$由方程$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 32 = 0$确定，讨论$z(x, y)$极值

解:

在原式两侧对x求偏导得$2x - 6y - 2y\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-3y}{y+z}$

同理对y求偏导得$-6x + 20y - 2z - 2y\frac{\partial z}{\partial y} - 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x+10y-z}{y+z}$

解$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$得$x = 3y, y = z$，回代题式得极值点只可能在$(12, 4), (-12, -4)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(y+z)^2-(x-3y)^2}{(y+z)^3},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(y+z)(3x+11z)-(-3x+11y)(-3x+10y-z)}{(y+z)^3},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3(y+z)^2-(x-3y)(-3x+11y)}{(y+z)^3}$

对于点$(12,4)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{16},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{5}{8},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{3}{16},\frac{1}{16}\times\frac{5}{8}-(-\frac{3}{16})^2>0$

由此得$z(x,y)$在$(12,4)$处取极小值，极小值为4

对于点$(-12,-4)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{16},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{5}{8},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{3}{16},-\frac{1}{16}\times(-\frac{5}{8})-(\frac{3}{16})^2>0$

由此得$z(x,y)$在$(12,4)$处取极大值，极大值为-4

7、（10分）设$D=\{(x,y)|0\leq x\leq\sqrt{\pi},0\leq y\leq\sqrt{\pi}\}$，求二重积分$\iint_D\sin\{\max(x^2,y^2)\}dxdy$

解:

由对称性不难得到$\iint_D\sin\{\max(x^2,y^2)\}dxdy=2\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_0^x\sin x^2dy$

$2\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_0^x\sin x^2dy=2\int_0^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin x^2dx^2=\int_0^{\pi}\sin tdt=2$

8、（11分）设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续可导函数，求曲线积分
$\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$，其中$L$是从点$A(3,\frac{2}{3})$到点$B(1,2)$的直线段

解:

令$P(x,y)=\frac{1+y^2f(x,y)}{y},Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$

观察到$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy)+\frac{1}{y^2}$

则存在$u(x,y)$，使得$du=Pdx+Qdy$

令$f(x)$的一个原函数为$F(x)$，不难验证$u(x,y)=F(xy)+\frac{x}{y}$满足要求

由$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$得题中曲线积分为与路径无关的曲线积分

因此有$\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy=u(x,y)|_A^B=F(2)+\frac{1}{2}-F(2)-\frac{9}{2}=-4$

高等代数

1、（10分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

解:

将除第一行以外的所有行加到第一列后得$\begin{vmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&\cdots&x+(n-1)a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

提出$x+(n-1)a$后得到$x+(n-1)a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$

再对除第一行外的所有行减去第一行的a倍后得到$x+(n-1)a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$

这就变成了一个上三角矩阵，则可得$\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$

2、（10分）设λ为何值时，齐次线性方程组$\begin{cases}(1-\lambda)x-2y+4z=0\\ 2x+(3-\lambda)y+z=0\\ x+y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$有非零解

解:

齐次线性方程组的系数矩阵为$\begin{bmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}$

若齐次线性方程组有非零解，则齐次线性方程组的系数矩阵不是满秩的，也就是说其行列式为0

$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$

由此得当$\lambda=0,2,3$时，齐次线性方程组有非零解

3、（10分）设$\mathbf{A}=diag(1,-2,1),\mathbf{A}^*\mathbf{BA}=2\mathbf{BA}-8\mathbf{E}$，其中$\mathbf{B}$为3阶矩阵，$\mathbf{E}$为单位矩阵，$\mathbf{A}^*$为伴随矩阵，求$\mathbf{B}$

解:

题式变换得$(\mathbf{A}^*-2\mathbf{E})\mathbf{BA}=-8\mathbf{E}$

$\mathbf{A}^*=diag(-2,1,-2),\mathbf{A}^*-2\mathbf{E}=diag(-4,-1,-4)$，其可逆，$\mathbf{A}$显然可逆

因此$\mathbf{B}=-8(\mathbf{A}^*-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^{-1}=-8\times diag(-\frac{1}{4},-1,-\frac{1}{4})\times diag(1,-\frac{1}{2},1)=diag(2,-4,2)$

4、（10分）求解下列方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}$

解:

一式加上二式得$x_1+2x_2-x_4=0$回代一式得$x_3=0$

三式可以由上面两式复合而来，并没有排上什么用场，由此得该方程组的解系为

$x_1,x_2\in\mathbb{R},x_3=0,x_4=x_1+2x_2$

5、利用初等变换，求$\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&4&-1&-1\end{bmatrix}$的一个极大无关列向量组

对题目矩阵进行初等列变换后得：

$$\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&4&-1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&1&5&-1\\2&-2&-1&-5&1\\1&0&2&-3&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\2&-2&0&0&0\\1&0&2&-3&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\2&-2&0&0&0\\1&0&2&0&0\end{bmatrix}$$

由此可得其的一个极大无关列向量组为$\overrightarrow{v_1}=(1,0,2,1),\overrightarrow{v_2}=(0,2,-2,0),\overrightarrow{v_3}=(0,0,0,2)$

6、设n阶矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵为$\mathbf{A}^*$，证明$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$

解：

如果矩阵$\mathbf{A}$不可逆，则$|\mathbf{A}|=0$，其伴随矩阵的秩最多为1，则$|\mathbf{A}^*|=0$

否则由$\mathbf{A}^*=\frac{|\mathbf{A}|}{\mathbf{A}}$得$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^n\times\frac{1}{|\mathbf{A}|}=|\mathbf{A}|^{n-1}$