16年真题

1、（10分）求极限$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{6+x})^{\frac{x+1}{2}}$

解:

$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{6+x})^{\frac{6+x}{3}\frac{3(x+1)}{2(6+x)}}=e^{-\frac{3}{2}}$

2、（10分）求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{\ln(1+x^2)}$

解:

应用洛必达法则后得$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin xe^{-x^2}}{\frac{2x}{(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$

3、（10分）计算定积分$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}(x\cos x+2)dx$

解:

由对称性可将原式化简为$2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4\cos^2 xdx=4\pi$

4、（10分）设$y=(1+x)^{3x}(x>-1)$，求dy

解:

$y=e^{3x\ln(1+x)},y'=[3\ln(1+x)+\frac{3x}{1+x}](1+x)^{3x},dy=[3\ln(1+x)+\frac{3x}{1+x}](1+x)^{3x}dx$

5、（10分）计算二重积分$\iint_D e^{x+y}d\sigma$，其中$D=\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$

解：**UNSOLVED**

（有些地方没有想通）

令$k=x+y$，则$I=\int_{-1}^{1}e^k dk\int_0^1 d?=e-e^{-1}$

6、（10分）设$F(x)=(x-1)^2 f(x)$，其中$f(x)$在区间$[1,2]$上二阶可导且有$f(2)=0$，试证至少存在一点$\xi\in(1,2)$使得$F''(\xi)=0$

解:

由$F(1)=F(2)=0$得$\exists\eta\in(1,2)$使得$F'(\eta)=0$

再由$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f(x)$得$F'(1)=0$

再次运用罗尔定理就得到了$\exists\xi\in(1,\eta)$使得$F''(x)=0$

7、（15分）设幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$，求

（1）其收敛区间（2）其和函数（3）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n$的值

解:

（1）由$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=0$得到其收敛区间为$(-\infty,+\infty)$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}=e^{x^2}-1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=xe^{x^2}-x$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=(xex^2-x)'=(1+2x^2)e^{x^2}-1$

（3）代入$x=\sqrt{2}$得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\sqrt{2}^{2n}=5e^2-1$

再加上第一项得到结果为$5e^2$

8、（15分）设三个实数$x,y,z(y>0)$满足$y+e^x+|z|=3$求$ye^x|z|$的极值，并证明$ye^x|z|\le 1$

解:

观察后得到$y,e^x,|z|$均非负，所以最小值显然为0

由均值不等式得到$3=y+e^x+|z|\ge 3\sqrt[3]{ye^x|z|}$，则有$ye^x|z|\le 1$

当$y=1,x=0,z=\pm 1$时取到最大值1

9、（10分）求行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1&a\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\a&1&1&1\end{vmatrix}$

解:

与17年第九题几乎类似，答案为$D=-(a+3)(a-1)^3$

10、（10分）设R^3的线性变换$\mathbf{A}$使得$\mathbf{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1\\x_2+x_3\\x_3\end{bmatrix}$，求$\mathbf{A}$在基

$\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=(1,1,1)^T$下的矩阵

解:

$\mathbf{A}$在基坐标$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$下的变换矩阵为$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

则有$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$变换到$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的变换矩阵为$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

则$\mathbf{A}$在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的矩阵为

$\mathbf{B}=\mathbf{M^{-1}AM}=\mathbf{M}=\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$

11、（15分）与17年13题完全一致

12、（15分）与17年14题类似

13、（10分）给定n维向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$证明$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关当且仅当

$$G=\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_s)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{vmatrix}\neq 0$$

解:

令$\mathbf{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$

则经过观察后得到$\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_s)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{bmatrix}$

由此可得$G=|\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^\mathbf{T}||\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|^2$

如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$|\mathbf{A}|\neq 0$，则$G\neq 0$

反之同理