

11年真题

1、(15分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域, 并求其和函数

解:

易得收敛域为 $(-1, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{1}{1-x} - 1 - x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

2、(15分) 将函数 $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成余弦级数

解: **UNSOLVED**

3、(15分) 求函数 $z = y \sin(x+y)$ 的全微分

解:

$$dz = y \cos(x+y)dx + (\sin(x+y) + y \cos(x+y))dy$$

4、求椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积

解:

$$\text{令 } x = a\rho \sin \varphi \cos \theta, y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, z = c\rho \cos \varphi$$

$$\text{则 } V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 abc\rho^2 \sin \varphi d\rho = abc \frac{4}{3}\pi$$

5、(15分) 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 证明 $\sin x < x < \tan x$

解:

显然

6、(15分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n})$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (\frac{1}{1+\frac{k}{n}}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

7、(15分) 计算行列式: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

解:

展开不难得到答案为 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

8、(15分) 与15年高代第4题一致

9、(15分) 与15年高代第2题 (2) 一致

10、(15分) 与14年第11题类似