数学分析

1、（13分）设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin(x^\beta) & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}(\beta<0)$$

试确定α,β满足何关系时，$f(x)$可微，但$f'(x)$在$[-1,1]$上无界

解：

首先其要可微，这就要求其连续并且在定义域内导数存在

不难发现$f(x)$连续只要求其在$x=0$处连续，也即$\lim_{x\to 0}f(x)=x^{\alpha+\beta}=0$，由此得$\alpha+\beta>0$

当$x>0$时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin(x^\beta)+\beta x^{\alpha+\beta-1}\cos(x^\beta)$，当$x<0$时，$f'(x)=0$

所以在定义域内导数存在只需要$f'(0)$存在，也即$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=0$

因为$\beta<0$，所以对任意小的ε，总是存在$x<\varepsilon$，使得$x^\beta=2k\pi+\frac{\pi}{4}$

此时$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta x^\beta)x^{\alpha-1}$，若要满足$\lim_{x\to 0+}f'(x)=0$，则必有$\alpha+\beta-1>0$

接着考虑其无界的条件

2、（10分）设$f(x)$在$x=0$处存在二阶导数，且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=A$，求$f(x),f'(x),f''(x)$

解：

由题意得$\lim_{x\to 0}f(x),\lim_{x\to 0}f'(x),\lim_{x\to 0}f''(x)$均存在

若$\lim_{x\to 0}f(x)\neq 0$，则因为$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，那么$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\infty$

这与题意矛盾，所以$\lim_{x\to 0}f(x)=0$

由此可对题式使用洛必达法则，得$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sin x}=A\ \ (1)$

若$\lim_{x\to 0}f'(x)\neq 0$，则因为$\lim_{x\to 0}\sin x=0$，那么$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\infty$

这与题意矛盾，所以$\lim_{x\to 0}f'(x)=0$

对（1）式使用洛必达法则，得$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\cos x}=A$

因为$\lim_{x\to 0}\cos x=1$，所以$\lim_{x\to 0}f''(x)=A$

综上，$f(x)=0,f'(x)=0,f''(x)=A$

3、（10分）设$f(x)$满足：$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，$f(1)=2f(0)$，则在$(0,1)$内存在ξ，使得$(1+\xi)f'(\xi)=f(\xi)$

解：

构造$F(x)=\frac{f(x)}{1+x}$，则有$F(0)=f(0)=\frac{f(1)}{2}=F(1)$

则由罗尔定理知，存在$\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=0=\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}$

也就得到了$(1+\xi)f'(\xi)=f(\xi)$

4、（10分）求不定积分$\int\cos(\ln x)dx$

解：

首先考虑换元，令$x=e^t$，则原式化为求不定积分$\int\cos t\,de^t$

利用分部积分法，$\int\cos t\,de^t=\cos t\cdot e^t-\int e^t\,d\cos t=\cos t\cdot e^t+\int\sin t\,de^t$

又有$\int\sin t\,de^t=\sin t\cdot e^t-\int e^t\,d\sin t=\sin t\cdot e^t-\int\cos t\,de^t$

两者结合得$\int\cos t\,de^t=\frac{1}{2}(\cos t\cdot e^t+\sin t\cdot e^t)+C$

回代得$\int\cos(\ln x)dx=\frac{1}{2}x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$

5、（12分）设函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(x,y)\neq 0$，试证$f(x,y)=g(x)h(y)$的充要条件是$f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$

解：

充分性⇐：

必要性⇒：

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(h(y)g'(x))=g'(x)h'(y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=g'(x)h'(y)g(x)h(y)$

由此便可得$f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$

6、（13分）设$f(x)$满足条件：对于任意x',x''，存在常数$k\in[0,1)$，使得$|f(x')-f(x'')|\leq k|x'-x''|$，对于给定的$x_0$，定义$x_1=f(x_0),x_2=f(x_1),\cdots,x_{n+1}=f(x_n),\cdots$，证明：

（1）级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛

（2）极限$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，记为c

（3）c与x_0无关，且$f(c)=c$

解：

（1）对于$n\geq 1$，$\frac{|x_{n+2}-x_{n+1}|}{|x_{n+1}-x_n|}=\frac{|f(x_{n+1})-f(x_n)|}{|x_{n+1}-x_n|}\leq k<1$，由此即得级数绝对收敛

（2）由级数绝对收敛可得级数收敛，令和函数$S_n=\sum_1^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=x_n-x_1$

由级数收敛得$\lim_{n\to\infty}S_n$存在，也即$\lim_{n\to\infty}(x_n-x_1)$存在，也即$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，证毕

（3）由$\lim_{n\to\infty}x_n=c$的定义得$\forall\varepsilon>0,\exists G,\forall n>G,|x_n-c|<\varepsilon$恒成立

则有$\forall n>G,|f(c)-c|\leq|f(c)-f(x_n)|+|f(x_n)-c|\leq k|c-x_{n+1}|+|x_{n+1}-c|<2\varepsilon$

则由ε的任意性可得$f(c)=c$

由上结论和题目条件得$|f(x_n)-f(c)|=|x_{n+1}-c|\leq k|x_n-c|$

由此不难得到$|x_n-c|\leq k^n|x_0-c|$

因此$\forall\varepsilon>0,\exists N=\log_k\frac{\varepsilon}{|x_0-c|},\forall n>N,|x_n-c|<\varepsilon$恒成立

这也就说明了x_0只决定了收敛的快慢，不会决定最终收敛的值

7、（12分）计算二重积分$I=\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中$D$是由圆弧$y=\sqrt{1-x^2}$与直线$y=x,y=0$所围成的区域

解:

$I=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=\frac{\pi}{8}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}dr^2\overset{t=r^2}{=\!=\!=}\frac{\pi}{8}\int_0^1\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}dt=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{1-t}\,d\sqrt{1+t}$

$\overset{s=\sqrt{1+t}}{=\!=\!=\!=}\frac{\pi}{4}\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-s^2}ds\overset{s=\sqrt{2}\sin\theta}{=\!=\!=\!=\!=}\frac{\pi}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2}2\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}\sin2\theta+\theta)|_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})$

8、（10分）设曲线积分为$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L$是以点$(0,1)$为中心，$R(>1)$为半径的圆周，取逆时针方向

解:

令S是以点$(0,0)$为中心，$(0<)\varepsilon(<R-1)$为半径的圆周，取逆时针方向

令Ω为由S和L包围所形成的面积

令$P=\frac{-y}{4x^2+y^2},Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$，则$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(4x^2+y^2)+2y^2}{(4x^2+y^2)^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(4x^2+y^2)-8x^2}{(4x^2+y^2)^2}$

$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}-\oint_S\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}+\oint_S\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$

$=\iint_\Omega(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma+\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon\cos\theta\,d(\varepsilon\sin\theta)-\varepsilon\sin\theta\,d(\varepsilon\cos\theta)}{4\varepsilon^2\cos^2\theta+\varepsilon^2\sin^2\theta}$

$=\iint_\Omega 0\,d\sigma+\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta+4\cos^2\theta}=4\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\tan^2\theta+4}=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\frac{\tan\theta}{2}}{(\frac{\tan\theta}{2})^2+1}=2(\arctan(\frac{\tan\theta}{2}))|_0^{\pi/2}=\pi$

高等代数

1、（8分）证明

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

解:

考虑范德蒙行列式:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&x\\a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le5}(y_j-y_i),y=[a,b,c,d,x]$$

再将其按最后一列展开，观察不难得到题目中所求的式子就是$\prod_{1\le i<j\le5}(y_j-y_i),y=[a,b,c,d,x]$中$x^3$项系数的相反数

$\prod(y_j-y_i)=[(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)](a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

中括号中x^3项的系数为$-(a+b+c+d)$，故题式得证

2、（10分）设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$，且$\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}$，求$\mathbf{B}$

解:

由题得$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{B}=\mathbf{A}$

$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{bmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，不难发现其可逆

因此$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}=\frac{(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^*}{|\mathbf{A}-2\mathbf{E}|}\mathbf{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&3&3\\-1&1&3\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{bmatrix}$

3、（8分）解方程组

$$\begin{cases}2x+y-z+w=1 & (1)\\4x+2y-2z+w=2 & (2)\\2x+y-z-w=1 & (3)\end{cases}$$

解:

$(1)-(3)$得$2w=0$，也即$w=0$

回代入题式并化简后均得到$2x+y-z=1$

由此可得该方程组有两个自由变量，不妨令x,y为自由变量

得方程组的通解为$x,y\in\mathbb{R},z=2x+y-1,w=1$

4、（10分）设$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$是一组$n$维向量，如果$n$维单位坐标向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$都可由它们线性表示，证明$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$线性无关

解:

令$\mathbb{U}$为$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$所张成的空间，即$\mathbb{U}=\mathrm{span}(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n})$

令$\mathbb{V}$为$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$所张成的空间，即$\mathbb{V}=\mathrm{span}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n})$

由$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$可由$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$线性表出，得$\mathbb{V}$是$\mathbb{U}$的子空间

并且由$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$都是单位坐标向量得$\dim\mathbb{V}=n$

因此$\dim\mathbb{U}\geq\dim\mathbb{V}=n$

再因为向量组$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$的数目为$n$，得$\dim\mathbb{U}\leq n$

综上$\dim\mathbb{U}=n$

由n个向量组成的向量组其张成的空间维度为n，则表明这个向量组是线性无关向量组

因此$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$线性无关

5、（12分）设n阶矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵为$\mathbf{A}^*$，证明：

（1）当$r(\mathbf{A})=n$时，$r(\mathbf{A}^*)=n$

（2）当$r(\mathbf{A})=n-1$时，$r(\mathbf{A}^*)=1$

（3）当$r(\mathbf{A})\leq n-2$时，$r(\mathbf{A}^*)=0$

解：

（1）由$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$得，因为$\mathbf{A}$为满秩矩阵，所以其行列式不为0，所以$|\mathbf{A}^*|$不为0，所以$\mathbf{A}^*$为可逆矩阵，所以有$r(\mathbf{A}^*)=n$

（2）因为$r(\mathbf{A})=n-1$，所以其必定存在一个$n-1$阶的非零子式，则由伴随矩阵的定义得伴随矩阵至少存在一个元素其值不为0，所以$r(\mathbf{A}^*)\geq 1$

再由$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}=0$得$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{A}^*)\leq n$，即$r(\mathbf{A}^*)\leq 1$

综上得$r(\mathbf{A}^*)=1$

（3）由$r(\mathbf{A})\leq n-2$得$\mathbf{A}$中不存在一个$n-1$阶的非零子式，所以其伴随矩阵的每一个元素都为0，故$r(\mathbf{A}^*)=0$

6、（10分）已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$1,2,-3$，求$|\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}+2\mathbf{E}|$

解：

可以通过求出其所有特征值的方式来求解其行列式

设对应矩阵$\mathbf{A}$的特征值$1,2,-3$的特征向量分别为$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$

则可得$(\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}+2\mathbf{E})\overrightarrow{v_1}=(\frac{1\times2\times-3}{1}+3\times1+2)\overrightarrow{v_1}=-\overrightarrow{v_1}$

即$\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}+2\mathbf{E}$对应$\overrightarrow{v_1}$的特征值为$-1$

同理，其对应$\overrightarrow{v_2}$的特征值为5，对应$\overrightarrow{v_3}$的特征值为-5

由此可得$|\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}+2\mathbf{E}|=-1\times5\times-5=25$