10年真题

一、填空（12空*5分）

1、$\lim_{n\to\infty}=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$

2、不定积分$\int x\arctan x\,dx=\frac{1}{2}(x^2\arctan x-x+\arctan x)$

3、$\lim_{n\to\infty}n(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2})=\frac{1}{2}$

4、函数$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$的麦克劳林公式为**UNSOLVED**

5、设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2},x\in[-1,1]$，那么$\int_0^x s(t)dt=$**UNSOLVED**

6、函数$f(x)=\cos\frac{x}{2}$在$[0,\pi]$上展开成正弦函数为**UNSOLVED**

7、$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=2$

8、多项式$f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$的有理根为$3,-1$

9、行列式$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{vmatrix}=-160$

10、设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，则$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$

11、设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则$p^{3\times3}$中全体与$\mathbf{A}$可交换的矩阵所成子空间的维数为3，一组基为$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

二、（10分）求下列齐次线性方程组的一个基础解系并用它表出全部解

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0\\x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0\\2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0\end{cases}$$

解:

其系数矩阵为
$$\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&0\\4&-2&6&3&-4\\2&4&-2&4&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&-6&6&15&0\\0&2&-2&10&-5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&9&-3\\0&0&0&12&-4\end{bmatrix}$$

则得到其解为$x_5,x_3\in\mathbb{R},x_4=\frac{1}{3}x_5,x_2=x_3+\frac{5}{6}x_5,x_1=x_3-\frac{7}{6}x_5$

三、（15分）与14年12题类似

四、（15分）证明属于不同特征值的特征向量是线性无关的

解：

假设对于矩阵$\mathbf{A}$的不同特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的特征向量为$\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_n}$，设其线性相关

则存在不全为零的系数$c_1,\cdots,c_n$使得$c_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_n\overrightarrow{v_n}=0\ \ (1)$

在两边同时乘以$\mathbf{A}$，则得到$c_1\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_n\lambda_n\overrightarrow{v_n}=0\ \ (2)$

$(2)-\lambda_n(1)$得$c_1(\lambda_1-\lambda_n)\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\overrightarrow{v_{n-1}}=0$

也即$d_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+d_{n-1}\overrightarrow{v_{n-1}}=0$

反复利用此过程得到$m_1(\lambda_1-\lambda_3)\overrightarrow{v_1}+m_2(\lambda_2-\lambda_3)\overrightarrow{v_2}=0$

也即$n_1\overrightarrow{v_1}+n_2\overrightarrow{v_2}=0$，也就有$n_1\lambda_1\overrightarrow{v_1}+n_2\lambda_2\overrightarrow{v_2}=0$

则可得$n_1(\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{v_1}=0$，则$\overrightarrow{v_1}=0$，这就导出矛盾，所以线性无关

五、（10分）设$f(x)=\ln(1+x)$，求$f^{(5)}(x)$

解：

$f'(x)=(1+x)^{-1}$

$f^{(5)}(x)=24(1+x)^{-5}$

六、（10分）设$0<x<\frac{\pi}{3}$，证明$\tan x>x-\frac{x^3}{3}$

解：

令$f(x)=\tan x-x+\frac{x^3}{3}$，则$f'(x)=\sec^2 x-1+x^2>0$，所以$f(x)>f(0)=0$

也就是题式成立

七、（15分）证明Jensen不等式：函数f为$[a,b]$上的凸函数，则对任意的
$x_i\in[a,b],\lambda_i>0,(i=1,2,\cdots,n),\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$,有
$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\leq\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$

解：

运用数学归纳法，当$n=2$时，即为凸函数的定义，若当$n=k$时成立，当$n=k+1$时，有

$f(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_ix_i)=f((1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i+\lambda_{k+1}x_{k+1})\leq(1-\lambda_{k+1})f(\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$

$\leq(1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}f(x_i)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_if(x_i)$

数学归纳得结论成立

八、（15分）求平面曲线$x^2+(y-2)^2=1$绕x轴旋转所得旋转体的表面积和体积

解:

表面积

$S=\int_{-1}^{1} 2\pi(r_{max}+r_{min})\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{-1}^{1} 2\pi(2+\sqrt{1-x^2}+2-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx$

$=\int_{-1}^{1} 8\pi\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=8\pi^2$

体积$V=\int_{-1}^{1}\pi((r_{max})^2-(r_{min})^2)dx=\pi\int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-x^2}dx=8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=4\pi^2$

11年真题

1、（15分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$的收敛域，并求其和函数

解:

易得收敛域为$(-1,1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{1}{1-x} - 1 - x$

$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

2、（15分）将函数$f(x) = \frac{\pi}{2} - x$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数

解: **UNSOLVED**

3、（15分）求函数$z = y\sin(x+y)$的全微分

解:

$dz = y\cos(x+y)dx + (\sin(x+y) + y\cos(x+y))dy$

4、求椭球体$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$的体积

解:

令$x = a\rho\sin\varphi\cos\theta, y = b\rho\sin\varphi\sin\theta, z = c\rho\cos\varphi$

则$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 abc\rho^2 \sin\varphi d\rho = abc\frac{4}{3}\pi$

5、（15分）设$0 < x < \frac{\pi}{2}$，证明$\sin x < x < \tan x$

解:

显然

6、（15分）计算极限$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n})$

解:

$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2$

7、（15分）计算行列式：$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

解：

展开不难得到答案为$a^3+b^3+c^3-3abc$

8、（15分）与15年高代第4题一致

9、（15分）与15年高代第2题（2）一致

10、（15分）与14年第11题类似

12年真题

数学分析

1、（5分）计算极限$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]$

解：显然有$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]\geq 0$

而又有$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]\leq\lim_{n\to\infty}(n+1)\times\frac{1}{n^2}=0$

所以$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]=0$

2、（5分）计算极限$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sin\sqrt{t}\,dt}{\ln(1+x^{\frac{5}{2}})}$

解：

应用洛必达法则得$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sin\sqrt{t}\,dt}{\ln(1+x^{\frac{5}{2}})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}(1+x^{\frac{5}{2}})}{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}}=\infty$

3、（5分）设$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

解：

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=(\frac{2t}{1+t^2})/(1-\frac{1}{1+t^2})=\frac{t}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{d\frac{dy}{dt}}{dt})/(\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt})=(\frac{2t}{(1+t^2)^2})/(\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2})=\frac{t}{1-t^2}$

4、（5分）设$x^y=y^x$，求dy

解：

原式为$e^{y\ln x}=e^{x\ln y}$，两侧对x求导后得$(y'\ln x+\frac{y}{x})e^{y\ln x}=(\ln y+\frac{y'x}{y})e^{x\ln y}$

计算得$dy=[(\ln y\cdot y^x-\frac{y}{x}x^y)/(\ln x\cdot x^y-\frac{x}{y}y^x)]dx$

5、（5分）计算不定积分$\int\ln(1+x^2)dx$

解：

$\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int xd\ln(1+x^2)=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$

$=x\ln(1+x^2)-2\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x$

6、（5分）计算定积分$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$

解：

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\sqrt{\cos x}\,dx=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\,d\cos x=2\int_0^1\sqrt{t}\,dr=\frac{4}{3}$

7、（5分）判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$的敛散性

解：

收敛，证明如下：

下证明$\frac{(n!)^2}{(2n)!}<\frac{1}{n^2}$从第三项开始恒成立

$\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{1\times2\times\cdots\times n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\times\frac{1\times2\times n}{2n}\times\frac{3}{n+3}\times\frac{4}{n+4}\times\cdots\frac{n-1}{2n-1}<\frac{1}{n^2}$

由基本放缩可得级数收敛

8、求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$的和函数，并指出其收敛区间

解：

收敛区间$(-1,1)$

$\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\int x^{n-2}dx=\int\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n)}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\int\frac{1}{n-1}x^{n-1}dx=\int-\ln(1-x)dx=(1-\ln(1-x))x+\ln(1-x)-1$

此即为和函数

9、（8分）设$f(x)=e^x-2$，证明在$(0,2)$内有唯一的点ξ，使得$e^{\xi}-2=\xi$

解：

令$F(x)=e^x-2-x$，则在$x\in(0,2)$上有$F'(x)=e^x-1>0$

而又有$F(0)=-2,F(2)=e^2-4>0$，所以存在唯一的ξ，使得$F(\xi)=0$

也就是$e^{\xi}-2=\xi$

10、（8分）当$x>0$时，证明$e^x>1+x$

解：

显然

11、（8分）设$z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，证明$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$

解：

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\times\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+y\times\frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{1}{2}$

12、（12分）设立体$\sum$由$x^2+y^2=2z$与$z=4-\sqrt{x^2+y^2}$围成，求$\sum$的体积和表面积

解：**UNSOLVED**

体积$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2/2}^{4-r}dz=2\pi\int_0^1(4-r-\frac{r^2}{2})rdr=\frac{37}{24}\pi$

13、（14分）求函数$y=e^{-x^2}$的单调区间、极值、凹凸区间，并作出函数图像

解:

$y'=-2xe^{-x^2}$，$(-\infty,0)$单增，$(0,+\infty)$单减，$x=0$有极大值$y=1$

$y''=-2(1-2x^2)e^{-x^2}$，凸区间$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，凹区间$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

高等代数

14、（4分）计算行列式: $\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$

解:

$$\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\2&2&2&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!$$

15、（4分）设n阶方阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$及$\mathbf{A}+\mathbf{B}$均可逆，证明$\mathbf{A^{-1}}+\mathbf{B^{-1}}$也可逆，并求其逆矩阵

解:

$$\mathbf{A^{-1}}+\mathbf{B^{-1}}=\mathbf{A^{-1}BB^{-1}}+\mathbf{A^{-1}AB^{-1}}=\mathbf{A^{-1}(A+B)B^{-1}}$$

16、（4分）设4元非齐次线性方程组$\mathbf{A}X=b$的系数矩阵$\mathbf{A}$的秩为3，且它的三个解向量η_1,η_2,η_3满足$\eta_1=(1,3,5,7)^T,\eta_2+\eta_3=(0,2,4,6)^T$，求$\mathbf{A}X=b$的通解

解:

由题意得$\mathbf{A}X=b$的解空间维度为1，设其通解为$\vec{v}=k\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{v_b}$

设$\eta_1=k_1\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{v_b},\eta_2+\eta_3=(k_2+k_3)\overrightarrow{v_0}+2\overrightarrow{v_b}$

由此得$(k_2+k_3-2k_1)\overrightarrow{v_0}=\eta_2+\eta_3-2\eta_1=(-2,-4,-6,-8)$

而可以令$\overrightarrow{v_b}=\eta_1$，则通解为$k(-2,-4,-6,-8)^T+(1,3,5,7)^T,k\in\mathbb{R}$

17、（4分）设向量组
$\alpha_1=(2,1,2,2,-4),\alpha_2=(1,1,-1,0,2),\alpha_3=(0,1,2,1,-1),\alpha_4=(-1,-1,-1,-1,1),\alpha_5=(1,2,1,1,1)$

求此向量组的秩，并求出它的一个最大无关组

解:

18、（4分）若实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(a+5)x_1^2+x_2^2+(3-a)x_3^2+4x_1x_2$为正定的，求$a$的取值范围

解：

$f(x_1,x_2,x_3)=(a+5)x_1^2+x_2^2+(3-a)x_3^2+4x_1x_2=(a+1)x_1^2+(2x_1+x_2)^2+(3-a)x_3^2$

由此得到$-1<a<3$

19、（4分）在直角坐标系中，已知ΔABC的顶点坐标为$A(0,0),B(1,1),C(0,2)$，求ΔABC在矩阵$\mathbf{MN}$对应变换下所得到的图形的面积，这里$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\mathbf{N}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

$S=|\mathbf{M}||\mathbf{N}|S_{\Delta ABC}=1$

20、（6分）同20年高代第六题

21、（6分）证明n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关当且仅当任一$n$维向量可由其线性表出

解：

充分性$\Leftarrow$：

由题意可知$\mathbb{R}^n\in span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

所以有$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geq n$，而因为向量组中只有$n$个向量

所以$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leq n$

综合得到$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$，也就是说其线性无关

必要性$\Rightarrow$：

由其线性无关得到$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$

而若存在某个n维向量，使得其不能线性表出，那么也就是说$span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是$\mathbb{R}$的一个真子空间

也就是说$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)<\dim\mathbb{R}^n=n$

导出矛盾，所以任一n维向量都可由其线性表出

22、（6分）证明对称的正交矩阵的特征值必为1或-1

解：

设对称的正交矩阵为$\mathbf{A}$，对应特征值λ的特征向量为α

可得$\lambda\alpha\cdot\lambda\alpha=\lambda^2|\alpha|^2$

而又有$\lambda\alpha\cdot\lambda\alpha=(\mathbf{A}\alpha)^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\alpha=\alpha^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\alpha=\alpha^{\mathbf{T}}\alpha=|\alpha|^2$

由此得到$\lambda=\pm1$

23、（8分）a,b为何值时下列线性方程组有解，有解时求出其所有解

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=a \\ x_2+2x_3+2x_4=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=b \end{cases} 1$$

解:

系数矩阵的增广矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & b-5 \end{bmatrix}$

由有解得到$a=0,b=2$

其解为$x_3,x_4\in\mathbb{R},x_2=3-2x_1-2x_2,x_1=x_3+x_4-2$

24、（10分）已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$1,2,-1$，设矩阵$\mathbf{B}=\mathbf{A}-2\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}^3$，求

（1）矩阵$\mathbf{B}$的特征值及其相似对角矩阵

（2）行列式$|\mathbf{B}|$及$|\mathbf{A}^2-3\mathbf{E}|$的值

解:

（1）将题中的特征值代入后式即得到$\mathbf{B}$的特征值为$2,18,-6$

其相似对角矩阵为$diag(2,18,-6)$

（2）$|\mathbf{B}|=2\times18\times-6=-216$

$|\mathbf{A}^2-3\mathbf{E}|=-2\times1\times-2=4$

13年真题

数学分析

1、（10分）设$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，求$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)}-1}{x}$

解:

由题意得$\lim_{x\to0}f(x)=0$

因此有$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)}{x}=\frac{1}{2}$

2、（10分）设$\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

解:

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=\frac{-a\sin t}{b\cos t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{d\frac{dy}{dt}}{dt})/(\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt})=\frac{a\cos t}{b\sin t}$

3、（10分）求不定积分$\int\frac{dx}{x(1-x)}$

解:

$\int\frac{dx}{x(1-x)}=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1})dx=\ln|\frac{x}{x-1}|+C$

4、（10分）证明方程$3x-1=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$在区间$(0,1)$内有唯一的实根

解:

令$f(x)=3x-1-\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$，则在$x\in(0,1)$上有$f'(x)=3-\frac{1}{1+x^2}>0$

而$f(0)=-1,f(1)=2-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=2-\frac{\pi}{4}>0$

则易得$f(x)=0$区间$(0,1)$内有唯一的实根，也即题中结论成立

5、（10分）证明：若函数f在$[a,b]$上连续，且对任意$x\in[a,b],f(x)\neq0$，则f在$[a,b]$上恒正或恒负

解:

假设结论不成立，若存在某点值为0，则由题知这种可能性不存在

若在f上存在两个点ξ_1,ξ_2，使得$f(\xi_1)f(\xi_2)<0$，则由连续函数介值定理得一定存在$\xi\in(\min\{\xi_1,\xi_2\},\max\{\xi_1,\xi_2\})$，使得$f(\xi)=0\in(\min\{f(\xi_1),f(\xi_2)\},\max\{f(\xi_1),f(\xi_2)\})$

则导出矛盾，由此得题中结论成立

6、（10分）设a,b,c是实数，已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$在$x=1$处取得极值-2

（1）试用c表示a和b；（2）求$f(x)$的单调区间

解：

（1）$f'(x)=3x^2+2ax+b$，由题得$f(1)=-2=a+b+c+1,f'(1)=0=3+2a+b$

由此可以解得$a=c,b=-3-2c$

（2）$f'(x)=3x^2+2cx-3-2c=(x-1)(3x+3+2c)$，解$f'(x)=0$得$x=1,x=\frac{-2c-3}{3}$

对$c>-3$，$f(x)$在$(-\infty,\frac{-2c-3}{3})$增，$(\frac{-2c-3}{3},1)$减，$(1,+\infty)$增

对$c<-3$，$f(x)$在$(-\infty,1)$增，$(1,\frac{-2c-3}{3})$减，$(\frac{-2c-3}{3},+\infty)$增

对$c=-3$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$增

7、（10分）试用数列极限的$\varepsilon-N$定义，证明$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$

解：

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\frac{a}{\varepsilon},\forall n>N$有$(1+\varepsilon)^n>(1+\varepsilon)^N\geq(1+\varepsilon)^{\frac{a}{\varepsilon}}\geq 1+a$

也就是$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{1+a}<1+\varepsilon$，证毕

8、（10分）把函数$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<\pi\\ 0 & x=\pi\\ -x^2 & \pi<x<2\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数

解：**UNSOLVED**

9、（10分）设$a_n\geq 0(n=1,2,\cdots)$且数列$\{na_n\}$有界，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛

解：

由数列$\{na_n\}$有界知$\exists G,\forall n\in N^+,na_n<G$恒成立

因此$a_n<\frac{G}{n}$恒成立

由此得到$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<G^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

而由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，原级数为正项级数易得原级数收敛

高等代数

10、（10分）用消元法求解线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 & (1)\\ x_2-x_3+x_4=-3 & (2)\\ x_1+3x_2+x_4=1 & (3)\\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 & (4)\end{cases}$

解：

$(3)-(1)$得$5x_2-3x_3+5x_4=-3\ \ (5)$

$(5)+(4)$得$-2x_2+6x_4=-6\ \ (6)$

$(5)-3\times(2)$得$2x_2+2x_4=6\ \ (7)$

联立(6),(7)得到$x_4=0,x_2=3$

回代(5)得到$x_3=6$

回代(3)得到$x_1=-8$

11、（10分）证明如果$(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，那么$(x-1)\mid f_1(x),(x-1)\mid f_2(x)$

解：**UNSOLVED**

12、（10分）设n阶实对称矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$都是正定矩阵，且常数$k_1>0,k_2>0$，试证明矩阵$k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B}$也是正定的

解：

对非零列向量η，有$\eta^T(k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B})\eta=\eta^T(k_1\mathbf{A}\eta+k_2\mathbf{B}\eta)=k_1\eta^T\mathbf{A}\eta+k_2\eta^T\mathbf{B}\eta>0$

这就证明了矩阵$k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B}$是正定的

13、（10分）设矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$都是正定矩阵，证明$\mathbf{AB}$是正定矩阵的充要条件是$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$

解：

充分性$\Leftarrow$：

因为$\mathbf{A},\mathbf{B}$正定，所以$\mathbf{A}=\mathbf{A}^\mathbf{T},\mathbf{B}=\mathbf{B}^\mathbf{T}$，因为$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，所以$(\mathbf{AB})^\mathbf{T}=\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{A}^\mathbf{T}=\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$

所以$\mathbf{AB}$是对称矩阵

因为$\mathbf{A},\mathbf{B}$正定，所以存在可逆矩阵$\mathbf{P},\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{A}=\mathbf{P}^\mathbf{T}\mathbf{P},\mathbf{B}=\mathbf{Q}^\mathbf{T}\mathbf{Q}$，所以$\mathbf{AB}=\mathbf{P}^\mathbf{T}\mathbf{PQ}^\mathbf{T}\mathbf{Q}$

而$\mathbf{QABQ}^{-\mathbf{1}}=\mathbf{QP}^\mathbf{T}\mathbf{PQ}^\mathbf{T}=(\mathbf{PQ}^\mathbf{T})^\mathbf{T}(\mathbf{PQ}^\mathbf{T})$正定，且与$\mathbf{AB}$相似

因此$\mathbf{AB}$正定

必要性$\Rightarrow$：

因为$\mathbf{A},\mathbf{B}$正定，所以$\mathbf{A}=\mathbf{A}^\mathbf{T},\mathbf{B}=\mathbf{B}^\mathbf{T}$

所以$\mathbf{AB}=\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{B}^\mathbf{T}=(\mathbf{BA})^\mathbf{T}=\mathbf{BA}$

14、（10分）已知下列两矩阵相似：$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$

（1）求x,y的值（2）求矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$

解：

（1）$f(\lambda)=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=(-2-\lambda)[\lambda^2-(1+x)\lambda+x-2]=k(-1-\lambda)(2-\lambda)(y-\lambda)$

解得$x=0,y=-2$

（2）$\mathbf{A}$关于特征值$\lambda_1=-1$的一个特征向量为$\overrightarrow{v_1}=(0,2,-1)$

$\mathbf{A}$关于特征值$\lambda_2=2$的一个特征向量为$\overrightarrow{v_2}=(0,1,1)$

$\mathbf{A}$关于特征值$\lambda_3=-2$的一个特征向量为$\overrightarrow{v_3}=(1,0,-1)$

由此可得$\mathbf{P} = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}]$即为所求

15、与14年12题类似

14年真题

1、（10分）求极限$\lim_{x\to 0}(1+2013x)^{\frac{1}{x}}$

解：

$\lim_{x\to 0}(1+2013x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+2013x)^{\frac{1}{2013x}\times 2013} = e^{2013}$

2、（10分）求下列函数的导数$y=\frac{1+x^2}{\sin x+\cos x}$

解：

$y' = \frac{2x(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)(1+x^2)}{(\sin x+\cos x)^2}$

3、（10分）同15年第4题

4、（10分）证明：对实数$x>0$，有$0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1$

解：

即证明$0<x-\ln(1+x)<x\ln(1+x)$，左侧显然

对于右侧，令$f(x)=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)$

则$f'(x)=\ln(1+x)>0$，所以有$f(x)>f(0)=0$证毕

5、（15分）证明：函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续，但在$[1,+\infty)$上一致连续

解：

6、（15分）计算二重积分$\iint_D d\sigma$，其中D为直线$y=2x, x=2y, x+y=3$所围成的三角形区域

解：

即求三角形区域的面积，简单计算后可得$S=\frac{3}{2}$

7、（15分）求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-3^{2n}}(x-1)^{2n}$的收敛半径和收敛域

由$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{1}{9}$得收敛半径为3，当$x-1=\pm3$时其显然不收敛，得到其收敛域为$(-2,4)$

8、计算行列式

（1）同15年高代第一题（2）$d_n=\begin{vmatrix}5&6&0&\cdots&0&0\\1&5&6&\cdots&0&0\\0&1&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&5\end{vmatrix}$

解:

（2）将其先按第一行展开，然后展开后的第二项按照第一列展开，就得到递推式$d_n=5d_{n-1}-6d_{n-2}$

变形后得到$d_n-3d_{n-1}=2(d_{n-1}-3d_{n-2})$，不难发现$d_1=5,d_2=19$，由此得$d_n-3d_{n-1}=2^n$

因此$d_n=(d_n-3d_{n-1})+3(d_{n-1}-3d_{n-2})+\cdots+3^{n-2}(d_2-3d_1)+3^{n-1}d_1$

$=2^n[1+\frac{3}{2}+\cdots+(\frac{3}{2})^{n-2}]+5\times 3^{n-1}=3^{n+1}-2^{n+1}$

9、（10分）求下列矩阵的逆矩阵

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&-1\\0&3&1&4\\2&7&6&-1\\1&2&2&-1\end{bmatrix}$

解:

$\mathbf{A^{-1}}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&3&-7&20\\-7&-3&5&-10\\9&3&-3&6\\3&3&-3&6\end{bmatrix}$

10、叙述爱森斯坦（Eisenstein）判别法并给出证明

解:

爱森斯坦判别法：设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$是一个整系数多项式，如果有一个素数$p$，使得（1）$p\nmid a_n$（2）$p\mid a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0$（3）$p^2\nmid a_0$，那么$f(x)$在有理数域上是不可约的

证明：如果$f(x)$在有理数域上可约，那么可以得到$f(x)$可以分解为两个次数较低的整系数多项式的乘积

$f(x)=(b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+b_0)(c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0)\quad l,m<n;l+m=n$

于是得到$a_n=b_lc_m,a_0=b_0c_0$

因为$p\mid a_0$，所以$p\mid b_0$或$p\mid c_0$，但是$p^2\nmid a_0$，所以$p\mid b_0$和$p\mid c_0$不同时成立，不妨假定$p\mid b_0$但$p\nmid c_0$

另一方面，因为$p\nmid a_n$，所以$p\nmid b_l$，假设$b_0,b_1,\cdots,b_l$中第一个不能被p整除的是b_k，比较$f(x)$中x^k的系数，得到等式$a_k=b_kc_0+b_{k-1}c_1+\cdots+b_0c_k$，式子中$p\mid a_k,b_{k-1},\cdots,b_0$，所以$p\mid b_kc_0$，但$p$是一个素数，所以$b_k,c_0$中至少有一个能被$p$整除，这就得出了矛盾，证毕

11、（15分）设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，求$p^{3\times3}$中全体与$\mathbf{A}$乘法可交换的矩阵所成子空间的维数和一组基

解:

令$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}$

则$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_{11}+x_{21}&2x_{12}+x_{22}&2x_{13}+x_{23}\\2x_{21}+x_{31}&2x_{22}+x_{32}&2x_{23}+x_{33}\\2x_{31}&2x_{32}&2x_{33}\end{bmatrix}$

$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_{11}&x_{11}+2x_{12}&x_{12}+2x_{13}\\2x_{21}&x_{21}+2x_{22}&x_{22}+2x_{23}\\2x_{31}&x_{31}+2x_{32}&x_{32}+2x_{33}\end{bmatrix}$

由此可得,$x_{11}=x_{22}=x_{33},x_{12}=x_{23},x_{31}=0,x_{21}=x_{32}=0,x_{13}\in\mathbb{R}$

由此得维数为三

基为$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

12、（15分）已知$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}$，求一正交矩阵$\mathbf{T}$，使得$\mathbf{T}'\mathbf{AT}$成对角形（$'$符号为转置）

解:

$f(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$

代入$\lambda=1$得到$\xi_1=(1,0,0,-1),\xi_2=(0,1,0,1),\xi_3=(0,0,1,1)$

代入$\lambda=-3$得$\xi_4=(1,-1,-1,1)$

正交单位化后得$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

数学分析

1、（15分）设函数$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，$m\in\mathbb{N}^+$试问:

（1）m为何值时，$f(x)$在$x=0$连续

（2）m为何值时，$f(x)$在$x=0$可导

（3）m为何值时，$f'(x)$在$x=0$连续

解:

（1）即$\lim_{x\to 0}f(x)=0$,由此可以得到$m>0,m\in\mathbb{N}^+$

（2）即$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^{m-1}\sin\frac{1}{x}$存在，由此得到$m>1,m\in\mathbb{N}^+$

（3）$f'(x)=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}+x^{m-2}\cos\frac{1}{x}$，由上得若$f'(0)$存在则必为零，所以$\lim_{x\to 0}f'(x)=0$

观察式子可以得到$m>2,m\in\mathbb{N}^+$

2、（10分）若函数$f(x)$满足$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

解:

令$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\times(x-a)+f(a)-f(x)$，则有$F(a)=F(b)=0$，由此可得$\exists\xi\in(a,b)$使得$F'(\xi)=0$

也即$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

3、（10分）设$f(x)$二次可微，$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=2$，求$I=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$

解:

应用洛必达法则得$I=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}$

再次应用洛必达法则得$I=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=1$

4、（10分）计算$\int\sec^3 x\,dx$

解:

$\int\sec^3 x\,dx=\int\frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{1}{(1-\sin^2 x)^2}d\sin x$

对于$\int\frac{1}{(1-x^2)^2}dx$，有

$\int\frac{1}{(1-x^2)^2}dx=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})^2dx=\frac{1}{4}[\int(\frac{1}{x-1})^2dx-2\int\frac{1}{x^2-1}dx+\int(\frac{1}{x+1})^2dx]$

$=\frac{1}{4}(\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|+\ln|x+1|+\frac{1}{x+1})$

因此有$\int\sec^3 x=\frac{1}{4}(\frac{1}{\sin x-1}-\ln|\sin x-1|+\ln|\sin x+1|+\frac{1}{\sin x+1})$

5、（10分）与19年第三题一致

6、（10分）已知$y=1+xe^{xy}$，求$y'(0),y''(0)$

解：

题式对x求导后得$y'=(1+y+xy')e^{xy}$，题式中代入$x=0$得$y(0)=1$，代入此式得$y'(0)=2$

上式再对x求导得$y''=(2y'+xy''+y+xy')e^{xy}$代入后求得$y''(0)=5$

7、（10分）设正项级数$\sum u_n$收敛，证明级数$\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$收敛，试问反之是否成立？若不成立则举出反例

解：

因为$\sum u_n$收敛，则有$\sum(u_n+u_{n+1})$收敛，则有$\sum(u_n+u_{n+1})\geq\sum 2\sqrt{u_nu_{n+1}}$，由此可得结论成立

反之不成立，令$u_n=\begin{cases}2^{-2n} & ,n \mod 2=0\\ 1 & ,n \mod 2=1\end{cases}$，则显然级数$\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}<=\sum 2^{-n}$，易得收敛，而显然$\sum u_n$不收敛

8、（15分）过点$P(1,0)$作抛物线$y=\sqrt{x-2}$的切线，该切线与上述抛物线及x轴围成以平面图形，求此平面图形旋转一周所形成旋转体的体积

解：

设切点为$(x_0,\sqrt{x_0-2})$，则有$\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}=\frac{\sqrt{x_0-2}}{x_0-1}$解得$x_0=3$

体积$V=\int_1^3 dx\int_{\max(0,\sqrt{(x-2)})}^{\frac{1}{2}(x-1)}2\pi ydy=\int_1^3[\frac{1}{2}(x-1)]^2\pi dx-\int_2^3(x-2)\pi dx=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{6}\pi$

高等代数

1、求行列式$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$的值

解：

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&10&10&10\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&2&-1\\3&1&-2&-1\\4&-3&-2&-1\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&-2&-1\\-3&-2&-1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}0&2&-1\\0&-2&-1\\-4&-2&-1\end{vmatrix}=-40\begin{vmatrix}2&-1\\-2&-1\end{vmatrix}=160$$

2、求如下矩阵的逆矩阵

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$（2）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

解：

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

（2）$-\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

3、（10分）已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值是$2,1,-1$，对应的特征向量为$(1,0,-1)^T,(1,-1,0)^T,(1,0,1)^T$,求$\mathbf{A}$

解：

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P^{-1}}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

4、（10分）k分别取何值时，使得如下方程组无解？有唯一解？有无穷多解？

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$$

解：

系数矩阵的增广矩阵化简后为$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k^3+k-k^2 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-k^2 \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$

无穷多解：增广矩阵的秩和系数矩阵的秩相等且不为满，得$k=1$

无解：增广矩阵的秩和系数矩阵的秩不相等$k=-2$

唯一解：$k\neq 1,k\neq -2$

5、（10分）设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$是n阶方阵，且$\mathbf{AB}=O$，证明$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\leq n$

解：

$\dim(img(\mathbf{A}))+\dim(ker(\mathbf{A}))=n$

又由$\mathbf{AB}=O$得$img(\mathbf{B})\in ker(\mathbf{A})$

则$\dim(img(\mathbf{B}))\leq \dim ker(\mathbf{A})$

所以$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})=\dim(img(\mathbf{A}))+\dim(img(\mathbf{B}))\leq\dim(img(\mathbf{A}))+\dim(ker(\mathbf{A}))=n$

6、（10分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m>1)$均为向量，且$\beta=\sum_{j=1}^m\alpha_j$，证明，若$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

解:

$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$线性无关，则$k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+k_m(\beta-\alpha_m)=0$

只有零解

如果此时$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，设有解$n_1,n_2,\cdots,n_m$使得$n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_m\alpha_m=0$

则令$k_1=\sum_{i=1}^m a_i-a_1,k_2=\sum_{i=1}^m a_i-a_2,\cdots,k_m=\sum_{i=1}^m a_i-a_m$

其为使得$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$线性相关的一组解，并且易得其不全为0

这就得出矛盾，所以其线性无关

16年真题

1、（10分）求极限$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{6+x})^{\frac{x+1}{2}}$

解：

$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{6+x})^{\frac{6+x}{3}\frac{3(x+1)}{2(6+x)}}=e^{-\frac{3}{2}}$

2、（10分）求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{\ln(1+x^2)}$

解：

应用洛必达法则后得$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin xe^{-x^2}}{\frac{2x}{(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$

3、（10分）计算定积分$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}(x\cos x+2)dx$

解：

由对称性可将原式化简为$2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4\cos^2 xdx=4\pi$

4、（10分）设$y=(1+x)^{3x}(x>-1)$，求dy

解：

$y=e^{3x\ln(1+x)},y'=[3\ln(1+x)+\frac{3x}{1+x}](1+x)^{3x},dy=[3\ln(1+x)+\frac{3x}{1+x}](1+x)^{3x}dx$

5、（10分）计算二重积分$\iint_D e^{x+y}d\sigma$，其中$D=\{(x,y)||x|+|y|\leq 1\}$

解：**UNSOLVED**

（有些地方没有想通）

令$k=x+y$，则$I=\int_{-1}^{1}e^k dk\int_0^1 d?=e-e^{-1}$

6、（10分）设$F(x)=(x-1)^2f(x)$，其中$f(x)$在区间$[1,2]$上二阶可导且有$f(2)=0$，试证至少存在一点$\xi\in(1,2)$使得$F''(\xi)=0$

解：

由$F(1)=F(2)=0$得$\exists\eta\in(1,2)$使得$F'(\eta)=0$

再由$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f(x)$得$F'(1)=0$

再次运用罗尔定理就得到了$\exists\xi\in(1,\eta)$使得$F''(x)=0$

7、（15分）设幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$，求

（1）其收敛区间（2）其和函数（3）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n$的值

解：

（1）由$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=0$得到其收敛区间为$(-\infty,+\infty)$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}=e^{x^2}-1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=xe^{x^2}-x$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=(xex^2-x)'=(1+2x^2)e^{x^2}-1$

（3）代入$x=\sqrt{2}$得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\sqrt{2}^{2n}=5e^2-1$

再加上第一项得到结果为$5e^2$

8、（15分）设三个实数$x,y,z(y>0)$满足$y+e^x+|z|=3$求$ye^x|z|$的极值，并证明$ye^x|z|\leq 1$

解：

观察后得到$y,e^x,|z|$均非负，所以最小值显然为0

由均值不等式得到$3=y+e^x+|z|\geq 3\sqrt[3]{ye^x|z|}$，则有$ye^x|z|\leq 1$

当$y=1,x=0,z=\pm 1$时取到最大值1

9、（10分）求行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1&a\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\a&1&1&1\end{vmatrix}$

解：

与17年第九题几乎类似，答案为$D=-(a+3)(a-1)^3$

10、（10分）设R^3的线性变换$\mathbf{A}$使得$\mathbf{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1\\x_2+x_3\\x_3\end{bmatrix}$，求$\mathbf{A}$在基

$\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=(1,1,1)^T$下的矩阵

解：

$\mathbf{A}$在基坐标$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$下的变换矩阵为$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

则有$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$变换到$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的变换矩阵为$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

则$\mathbf{A}$在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的矩阵为

$\mathbf{B}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}=\mathbf{M}=\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$

11、（15分）与17年13题完全一致

12、（15分）与17年14题类似

13、（10分）给定n维向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$证明$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关当且仅当

$$G=\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_s)\\(\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\\vdots & \vdots & & \vdots\\(\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{vmatrix}\neq 0$$

解：

令$\mathbf{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$

则经过观察后得到$\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_s)\\(\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\\vdots & \vdots & & \vdots\\(\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{bmatrix}$

由此可得$G=|\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^\mathbf{T}||\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|^2$

如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$|\mathbf{A}|\neq 0$，则$G\neq 0$

反之同理

17年真题

1、（5分）$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^6$

2、（5分）$f(x)=e^x,f(g(x))=1-x^2$，则$g(x)=\ln(1-x^2)$

3、（5分）$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x+\cos x}{1+\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}$

4、（5分）级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的和函数为$\frac{x}{(1-x)^2}$

5、（5分）已知微分方程$y''=\sin x$，则其通解为$y=-\sin x+C_1x+C_2,C_1\in\mathbb{R},C_2\in\mathbb{R}$

6、（5分）若$\mathbf{A,B}$均为3阶方阵，且$|\mathbf{A}|=-2$，$|\mathbf{B}|=\frac{1}{3}$，$\mathbf{A}^*$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵，则$|\mathbf{A}^*|=4,|\mathbf{A}^*\mathbf{B^{-1}}|=12$

7、（5分）向量$\alpha=(1,2,3),\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，则矩阵$\mathbf{A}=\alpha^T\beta$的秩$r(\mathbf{A})=1,\mathbf{A}^n=\alpha^T\beta$

8、（5分）实对称矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$相似，则二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{X^TAX}$的规范型为$f=x_1^2-x_2^2+x_3^2$，此二次型的秩为3

9、计算行列式$D=\begin{vmatrix}a-1&-2&3&4\\-1&-2&a+3&4\\-1&a-2&3&4\\-1&-2&3&a+4\end{vmatrix}$

解：

$$D=-\begin{vmatrix}a-1&-2&3&4\\-1&a-2&3&4\\-1&-2&a+3&4\\-1&-2&3&a+4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a-1&-2&3&a+4\\-1&a-2&3&a+4\\-1&-2&a+3&a+4\\-1&-2&3&a+4\end{vmatrix}$$

$$=-(a+4)\begin{vmatrix}a-1&-2&3&1\\-1&a-2&3&1\\-1&-2&a+3&1\\-1&-2&3&1\end{vmatrix}=-(a+4)\begin{vmatrix}a&0&0&1\\0&a&0&1\\0&0&a&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-a^3(a+4)$$

10、（10分）求$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

解：

很显然有分子为0，分母为1，所以原式为0

11、（10分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$的收敛域

解：

$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{2n+1}{2n+3}|=1$

所以其收敛区间为$(-1,1)$，再考虑其端点

对$x=\pm 1$，代入原式后可以得到其并没有什么本质的区别，可以一起考虑

由奇偶项交错和数列单减可以得到其收敛

因此收敛域为$[-1,1]$

12、（10分）求$I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy$

解：

交换积分次序后得$I=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}dy^2=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt=\frac{1}{2}(e-1)$

13、（15分）设线性方程组$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\2&3&-2&5\\1&2&0&2\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}$，问λ取何值时方程组有解，有解时求出通解

解：系数的增广矩阵化简后为$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&-1&\lambda\\0&0&0&0&\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$

如果想要方程组有非平凡解，则系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，也即$\lambda\neq 0,\lambda^2-\lambda=0$

解得$\lambda=1$

通解为：$x_3,x_4\in\mathbb{R},x_2=1-2x_3+x_4,x_1=-1+4x_3-4x_4$

14、（15分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$

（1）写出此二次型的系数矩阵$\mathbf{A}$

（2）用正交变换将二次型化为标准型，并写出正交变换$\mathbf{X}=\mathbf{TY}$及二次型的标准型

（3）问此二次型是否正定，并说明理由

解：

（1）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{bmatrix}$

（2）$f(\lambda)=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=-(\lambda-4)^2(\lambda+2)$

对于特征值$\lambda=4$，有$\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&1&2\\1&-1&-2\\2&-2&-4\end{bmatrix}$，不难发现得到其一组特征向量为

$\xi_1=(2,0,1)^T,\xi_2=(0,-2,1)^T$

对于特征值$\lambda=-2$，有$\mathbf{A}+2\mathbf{E}=\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&1&2\\1&5&-2\\2&-2&2\end{bmatrix}$，不难得到其一组特征向量为

$\xi_3=(1,-1,-2)^T$

将特征向量矩阵正交化后得到$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

二次型的标准型为$f(y_1,y_2,y_3)=4y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$

15、（10分）将$f(x)=x\arctan x-\ln(\sqrt{1+x^2})$展开为$x$的幂级数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$的和

解:

$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

$\frac{x}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$，$\ln(\sqrt{1+x^2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+2}$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)(2n)}$

由此可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}=2f(1)=\frac{\pi}{4}-\ln 2$

16、（10分）计算曲面积$I=\oiint_{\Sigma}xz\,dxdy+xy\,dydz+yz\,dzdx$的值，其中$\Sigma$是平面$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧

解:

由高斯公式可得$I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv$，其中$\Omega$是$\Sigma$的内部空间

$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[1-(x+y)^2]dy$

$=\frac{1}{6}\int_0^1(x^3-3x+2)dx=\frac{1}{8}$

17、（10分）已知$\mathbf{A,B}$为n阶矩阵，且满足$2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{B}-4\mathbf{E}$，证明矩阵$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$可逆，并求$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}$

解:

$2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{B}-4\mathbf{E}\Leftrightarrow 2\mathbf{B}=\mathbf{AB}-4\mathbf{A}\Leftrightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{B}=4\mathbf{A}$

由$\mathbf{A}$可逆可知$rank(\mathbf{A})=n$，则$rank(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\geq rank((\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{B})=rank(\mathbf{A})=n$

又由其为n阶矩阵知$rank(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=n$，则其可逆

同理可得$\mathbf{B}$可逆，则有$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=4\mathbf{AB}^{-1},(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=\frac{1}{4}\mathbf{BA}^{-1}$

18、（10分）设$x>-1$，可微函数$f(x)$满足条件$(x+1)[f'(x)+f(x)]-\int_0^x f(x)dx=0$，且$f(0)=1$

（1）求$f'(x)$，（2）试证当$x\geq 0$时有$e^{-x}\leq f(x)\leq 1$

解:

（1）在题式两边对x进行求导后得$(x+2)f'(x)+(x+1)f''(x)=0$，令$g(x)=f'(x)$

则有$(x+2)g(x)+(x+1)g'(x)=0$，求解该微分方程后得到$g(x)=C\frac{e^{-x}}{x+1}=f'(x)$

题式中代入$x=0$得$f'(0)=-1$，代入得$C=-1$，因此$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}$

（2）由在$x\geq 0$时恒有$f'(x)<$得$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx\leq f(0)=1$

又有$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\geq f(0)+\int_0^x -e^{-x}dx=e^{-x}$

18年真题

数学分析

1、（12分）$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos(\frac{1}{x^{\beta}}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ $(\beta>0)$，当α和β满足什么关系时，$f'(x)$在$x=0$处连续

解:

由题得首先要存在$f'(0)$，也就是说$f(x)$需要连续，所以$\lim_{x\to 0}f(x)=0$，也就得到$\alpha>0$

$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos(\frac{1}{x^{\beta}})+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin(\frac{1}{x^{\beta}})$

$\lim_{x\to 0}f'(x)$存在则要求$\alpha-\beta-1>0$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=x^{\alpha-1}\cos(\frac{1}{x^{\beta}})$，也要求$\alpha>1$

综上$\alpha>\beta+1$

2、$f(x)=\sin x\sin 2x\cos 3x$，求$f^{(n)}(x)$

解:

由$\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x,\cos(2x-x)=\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x$

得$\sin x\sin 2x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)$

则$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x\cos 3x-\cos^2 3x)=\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x-\cos 6x-1)$

由三角函数的高阶导数公式可以得到

$f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}[2^n\cos(2x+n\frac{\pi}{2})+4^n\cos(4x+n\frac{\pi}{2})-6^n\cos(6x+n\frac{\pi}{2})]$

3、设$b>a>0$，$f(x)$满足如下条件:

（1）$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，（2）$f(x)$在开区间(a,b)内可导，（3）$f'(x)\neq 0$

则在(a,b)内存在ξ,η使得$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

解:

由拉格朗日中值定理得$\exists\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

构造$F(x)=f(x^2),x\in(\sqrt{a},\sqrt{b})$

由拉格朗日中值定理得$\exists\varepsilon\in(\sqrt{a},\sqrt{b})$使得$\frac{f(b)-f(a)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=F'(\varepsilon)=2\varepsilon f'(\varepsilon^2)$

令$\eta=\varepsilon^2$，则$f'(\eta)=\frac{f(b)-f(a)}{2\sqrt{\eta}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$

两式相除即得原式成立

4、（10分）与21年第四题类似

5、（12分）与21年第五题一致

6、（12分）设$a_0=3, na_n=\frac{2}{3}a_{n-1}-(n-1)a_{n-1}(n\geq 1)$，试证明当$|x|<1$时幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛，并求出其和函数

解：**UNSOLVED**

7、计算二重积分$\iint_D \sin\frac{\pi x}{2y}dxdy$，其中曲线$D$由曲线$y=\sqrt{x}$，直线$y=x, y=2$所围成

解：

$$\iint_D \sin\frac{\pi x}{2y}dxdy=\int_1^2 dy\int_y^{y^2} sin\frac{\pi x}{2y}dx=\int_1^2(-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y})|_y^{y^2}dy=\int_1^2-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}dy$$

$$=-(\frac{4y}{\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}y)|_1^2+\frac{4}{\pi^2}\int_1^2\sin\frac{\pi}{2}y\,dy=-\frac{4}{\pi^2}(y\sin\frac{\pi}{2}y+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}y)|_1^2=\frac{4}{\pi^2}(1-\frac{2}{\pi})$$

8、试在曲线族$y=\lambda\sin x(\lambda>0)$中找一条曲线$L$，使该曲线从$O(0,0)$到$A(\pi,0)$的曲线积分$\int_L(1+\frac{1}{2}y^3)dx+(2x+y)dy$的值最小

解：

将$y=\lambda\sin x$代入曲线积分后得$\int_0^\pi(1+\frac{1}{2}\lambda^3\sin^3x+2\lambda x\cos x+\lambda^2\sin x\cos x)dx$

$=[x+\frac{1}{2}\lambda^3(\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x)+2\lambda(x\sin x+\cos x)+\lambda^2(-\frac{1}{4}\cos 2x)]|_0^\pi$

$=\pi+\frac{2}{3}\lambda^3-4\lambda$

求导后不难得到最小的$\lambda=\sqrt{2}$

高等代数

1、（6分）求行列式$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$$

2、（8分）求矩阵$\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=-2-2+3=-1$$

伴随矩阵为$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

逆矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

3、设$\mathbf{A}$为三阶矩阵，满足$\mathbf{A}\alpha_i = ia_i, (i = 1, 2, 3)$，其中$\alpha_1 = (1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (2, -2, 1)^T, \alpha_3 = (-2, -1, 2)^T$，求矩阵$\mathbf{A}$

令$\mathbf{P} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，不难发现其为正交矩阵，则$\mathbf{P^{-1}} = \frac{1}{9}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$

则有$\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P^{-1}} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 21 & 0 & -6 \\ 0 & 15 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{bmatrix}$

4、（12分）n阶矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^* \neq O$，且非齐次线性方程组$\mathbf{A}x = b$有两个不同的解向量ξ_1, ξ_2，证明$\xi_1 - \xi_2$是$\mathbf{A}x = 0$的基础解系

解：

首先证明$rank(\mathbf{A}) = n - 1$，如果$rank(\mathbf{A}) \leq n - 2$，则$\mathbf{A}^* = O$，如果$rank(\mathbf{A}) = n$，则其不可能有两个不同的解，所以$rank(\mathbf{A}) = n - 1$

这也就说明了$\mathbf{A}x = 0$的解空间的维度为1，其通解为$k\vec{v}$，而$\mathbf{A}(\xi_1 - \xi_2) = 0$，所以$\xi_1 - \xi_2$是$\mathbf{A}x = 0$的基础解系

5、（10分）设$\mathbf{A}$为三阶非零矩阵，满足$\mathbf{A^2} = \mathbf{A}, \mathbf{A} \neq \mathbf{E}$，证明：$(r(\mathbf{A}) - 1)(r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) - 1) = 0$

解：

由$\mathbf{A^2} = \mathbf{A}$得$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{A} = 0$，则有$r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) + r(\mathbf{A}) \leq n = 3$

而由题得$(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \neq 0, \mathbf{A} \neq 0$，所以$r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \geq 1, r(\mathbf{A}) \geq 1$，结合上式知至少有一个为1

所以题式得证

6、（12分）设向量α可由向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$线性表示，证明$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关的充要条件是$\alpha$表示法唯一

解：

充分性$\Leftarrow$：

α表示法唯一也就是说$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$的解只有$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$，也就是说其线性无关

必要性$\Rightarrow$：

线性无关也就是说$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$的解只有$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$

则设$\alpha = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \cdots + s_r\alpha_r$，则这就是其唯一的表示法

19年真题

数学分析

1、（8分）求$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

解:

进行无穷小量替换得到$\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}),\cos\frac{1}{x}\sim 1+o(\frac{1}{x})$

由此可得$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))^x=e$

2、（8分）计算定积分$I=\int_{e^{-1}}^{e}|\ln x|dx$

解:

$I=\int_1^e\ln x\,dx-\int_{e^{-1}}^{e}\ln x\,dx=(x\ln x-x)|_1^e-(x\ln x-x)|_{e^{-1}}^1=2-\frac{2}{e}$

3、（8分）计算$\iint_D\frac{\sin y}{y}d\sigma$，其中$D$是由直线$y=x$与曲线$y=\sqrt{x}$所围成的闭区域

解:

先对x方向进行积分，再对y方向进行积分，即原式化为

$\int_0^1dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1\sin y-y\sin y\,dy=(-\cos x-\sin x+x\cos x)|_0^1=1-\sin 1$

4、（12分）判断下列断言是否正确，若正确请给出证明，若不正确请给出范例

（1）若函数$f(x)$单调且可导，则必有$f'(x)>0$

（2）单调函数的导函数必为单调函数

（3）若函数$f(x)$的导函数$f'(x)$单调，则函数$f(x)$必单调

（4）若函数$f(x)$可导且只有一个稳定点，则稳定点必为极值点

解:

（1）反例$y=-x$

（2）反例$y=x^3$

（3）反例$y=x^2$

（4）反例$y=x^3$

5、（10分）计算$\iiint_\Omega(x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$，其中$\Omega$是由锥面$x^2+y^2=z^2$，柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0$围成的区域

解:

该闭区域可以视作为一个圆柱体C从中挖去了一个等底等高的圆锥体Z

$\iiint_C(x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1zdz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^3dr=\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$

$\iiint_Z (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 zdz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^z r^3\,dr = 2\pi\times\frac{1}{4}\int_0^1 z^5\,dz = \frac{\pi}{12}$

由此可得$\iiint_\Omega (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz = \iiint_C (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz - \iiint_Z (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{6}$

6、（10分）求函数$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$在$x^2+y^2+z^2=24(x,y,z>0)$条件之下的最大值

解：

令$\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-24$，令$F(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda\phi(x,y,z)$

解$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$得

$\frac{1}{\lambda}=2x^2=y^2=\frac{2}{3}z^2,\phi(x,y,z)=0$

解得$x=2,y=2\sqrt{2},z=2\sqrt{3}$

则其最大值就为此驻点，为$7\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3$

7、（10分）设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$内可导，$f'(x)$的导函数为$f'(x)$，且$f(0)=0,f(1)=1$，证明：

（1）存在$\xi_1\in(0,1)$，使得$f(\xi_1)=1-\xi_1$

（2）存在两个不同的$\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，使得$f'(\xi_2)f'(\xi_3)=1$

解：

（1）令$F(x)=f(x)+x-1$，则$F(0)=-1,F(1)=1$，又因为其连续，则$\exists\xi_1\in(0,1)$，使得$F(\xi_1)=0$

也即$f(\xi_1)=1-\xi_1$

（2）由$\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1$得若$f'(x)$在$(0,1)$上为常值函数，则$\forall x\in(0,1),f'(x)=1$

则题式结论显然成立

否则令$\sup\{f'(x)\}=A,\inf\{f'(x)\}=B,x\in(0,1)$

令$\varepsilon=\frac{1}{2}\min(A-1,1-B,0.1)$

若$\varepsilon=\frac{1}{2}(A-1)$，则由介值定理得到存在$\xi_2\in(0,1)$使得$f'(\xi_2)=1+\varepsilon$

要证明存在点$\xi_3\in(0,1)$使得$f'(\xi_3)=\frac{1}{1+\varepsilon}$，只要证明$\frac{1}{1+\varepsilon}>B$，也就只要证明$\frac{1}{1+\varepsilon}>1-2\varepsilon$，这显然成立

若$\varepsilon=\frac{1}{2}(1-B)$，则由介值定理得到存在$\xi_2\in(0,1)$使得$f'(\xi_2)=1-\varepsilon$

要证明存在点$\xi_3\in(0,1)$使得$f'(\xi_3)=\frac{1}{1-\varepsilon}$，只要证明$\frac{1}{1+\varepsilon}<A$，也就只要证明$\frac{1}{1-\varepsilon}<1+2\varepsilon$，也即$\varepsilon<\frac{1}{2}$，而由题得$\varepsilon<0.05$，证毕

若$\varepsilon=\frac{1}{2}(0.1)$，则显然可以取到$f'(\xi_2)=1.001,f'(\xi_3)=\frac{1}{1.001}$，证毕

8、（10分）证明在点$(1,1)$的某邻域内存在唯一的连续可微函数$y=f(x)$满足$f(1)=1$，
$xf(x)+2\ln x+3\ln f(x)=1$

，并求$f(x)$的导数$f'(x)$

解：

要证明在点$(1,1)$的某邻域内存在唯一的连续可微函数,只要证明在点$(1,1)$的某邻域内的每一个x值，都只有唯一的一个y值与之对应

令$g(y)=xy+3\ln y+2\ln x-1$，则不难发现其在邻域内单调增，所以只有唯一解

题式对x求导得$f(x)+xf'(x)+\frac{2}{x}+3\frac{f'(x)}{f(x)}=0$得$f'(1)=\frac{3}{4}$

9、（12分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的和函数

解：

$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\int x^{n-1})=\int\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\int\frac{x^n}{n})=\int-\ln(1-x)=(1-\ln(1-x))x+\ln(1-x)-1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac{1}{x}((1-\ln(1-x))x+\ln(1-x)-1)$

高等代数

1、（8分）求行列式$D=\begin{vmatrix}2&2&2&2\\2&3&4&5\\8&13&20&29\\10&29&66&127\end{vmatrix}$的值

解：

$D=2\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)=3\times2^2\times1^3=12$

2、（10分）同20年第三题

3、（10分）试问λ为何值时方程组$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=4\\-x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$无解，有唯一解，有无穷多解？并在有无穷多解时求出其所有的解

解：

化简后的系数增广矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&\lambda&4\\0&-2&2-\lambda&-8\\0&0&\frac{(4-\lambda)(\lambda+1)}{2}&\lambda^2-4\lambda\end{bmatrix}$

无解：增广矩阵的秩大于系数矩阵的秩。解得$\lambda=-1$

有唯一解：增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩且为满秩，解得$\lambda\neq-1,4$

无穷多解：此时$\lambda=4$，解系为$x_3\in\mathbb{R},x_2=4-x_3,x_1=-3x_3$

4、（12分）矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$有3个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是$\mathbf{A}$的二重特征值，证明$\mathbf{A}$可对角化，并求可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$为对角矩阵

解:

由其有3个线性无关的特征向量知其可对角化

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\x&4-\lambda&y\\-3&-3&5-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+10\lambda^2+(-32-3y-x)\lambda+32+6y+2x=(a\lambda-b)(\lambda-2)^2$$

解该方程可以得到$a=-1,b=-6,x+3y=-4$

所以其特征值为$2,2,6$

$$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-4-3y&2&y\\-3&-3&3\end{bmatrix}$$

由$\lambda=2$是$\mathbf{A}$的二重特征值知$rank(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=3-2=1$，由此得$x=2,y=-2$

经过计算得到，$\mathbf{A}$关于$\lambda=2$的特征向量有$\overrightarrow{v_1}=(1,-1,0),\overrightarrow{v_2}=(1,0,1)$

关于$\lambda=6$的特征值有$\overrightarrow{v_3}=(1,-2,3)$

由此得$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$即为所求

5、（12分）证明：（1）正定矩阵一定可逆，且正定矩阵的逆矩阵也是正定矩阵

（2）两个同阶数正定矩阵的和也是正定的

解:

（1）设$\mathbf{A}$为正定矩阵，则$\mathbf{A}$可以表示为$\mathbf{A}=\mathbf{C}^\mathbf{T}\mathbf{C}$，其中$\mathbf{C}$为可逆阵，则有$|\mathbf{A}|=|\mathbf{C}^\mathbf{T}||\mathbf{C}|=\mathbf{C}^2>0$，则其为可逆阵，而$\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{C}^\mathbf{T}\mathbf{C})^{-1}=\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}^\mathbf{T})^{-1}=\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}^{-1})^\mathbf{T}$，因为$\mathbf{C}$可逆所以$\mathbf{C}^{-1}$也可逆，这就证明了$\mathbf{A}^{-1}$也为正定矩阵

（2）设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为正定矩阵，则对任意向量η，有$\eta^T(\mathbf{A}+\mathbf{B})\eta=\eta^T(\mathbf{A}\eta+\mathbf{B}\eta)=\eta^T\mathbf{A}\eta+\eta^T\mathbf{B}\eta>0$，这就证明了其和也为正定矩阵

6、（12分）设$\mathbb{V}$是全体次数不超过n的实系数多项式，再添上零多项式组成的实数域上的线性空间，定义$\mathbb{V}$上的线性变换$T(f(x))=xf'(x)-f(x)$，其中$f'(x)$为$f(x)$的导函数

（1）求T的核$T^{-1}(0)$和值域$T\mathbb{V}$

（2）证明：$\mathbb{V}=T^{-1}(0)\oplus T\mathbb{V}$

解:

（1）设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

则$T(f(x))=xf'(x)-f(x)=(n-1)a_nx^n+(n-2)a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2-a_0$

由此可得$T^{-1}(0)$为所有只有一次项的多项式组成的线性空间

同理，可得$T\mathbb{V}$为所有不含一次项的多项式组成的线性空间

（2）由上不难得到结论成立

20年真题

数学分析

1、（13分）设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中$g(x)$具有二阶连续导函数，$g(0)=1$

（1）若$f(x)$在$x=0$是连续的，确定a的值

（2）求$f'(x)$

（3）讨论$f'(x)$在$x=0$处连续

解:

（1）由题得$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=a$，对左式利用洛必达法则后不难得到$a=g'(x)$

（2）对$x\neq 0$有$f'(x)=(\frac{g(x)-\cos x}{x})'=\frac{x(g'(x)+\sin x)-(g(x)-\cos x)}{x^2}$

当$x=0$时，$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x}{2x}$

若$g'(x)=0$，则$f'(0)=\frac{1}{2}(g''(0)+1)$，否则$f'(0)=\infty$

（3）若$g'(x)=0$，则易得$\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$，则连续，否则不连续

2、（10分）设$f(x)=\frac{x^3}{x^2-2x-3}$，求$f^{(n)}(x)$

解:

$f(x)=\frac{x(x^2-2x-3)+2(x^2-2x-3)+7x+6}{x^2-2x-3}=x+2+\frac{7x+6}{(x-3)(x+1)}=x+2+\frac{\frac{1}{4}(x-3)+\frac{27}{4}(x+1)}{(x-3)(x+1)}=x+2+\frac{1}{4(x+1)}+\frac{27}{4(x-3)}$

由此可得$f'(x)=1-\frac{1}{4(x+1)^2}-\frac{27}{4(x-3)^2}$

对$n>1$，有$f^{(n)}(x)=(-1)^n\times n!\times(\frac{1}{4(x+1)^{n+1}}+\frac{27}{4(x-3)^{n+1}})$

3、（12分）（1）设$0<x<+\infty$，证明存在$0<\eta<1$，使得$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{(x+\eta)}}$

（2）求出（1）中η关于x的函数表达式$\eta(x)$，并求出$0<x<+\infty,\eta(x)$的值域

解:

（1）令$f(x)=\sqrt{x}$由拉格朗日中值定得一定存在$\xi\in(x,x+1)$，使得$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$

也即$\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

不难发现令$\eta=\xi-x$即为所求

（2）$2\sqrt{(x+\eta)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

由此可得$\eta(x)=\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-x$

$\eta'(x)=\frac{1}{4}(2+\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}})-1=\frac{1}{4}(2\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}-2)>0$恒成立

由$\eta(x)$连续得$\eta(x) > \eta(0) = \frac{1}{4}, \eta(x) < \eta(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}\eta(x) = \frac{1}{4}(1+2\sqrt{x^2+x}-2x) = \frac{1}{2}$

由此得$\eta(x) \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

4、设函数$f(\mu)$有一阶连续导数，$f(0)=2$，且函数$z = xf(\frac{y}{x}) + yf(\frac{y}{x})$满足$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}(x \neq 0)$，求$z(x,y)$的表达式

解:

$z = (x+y)f(\frac{y}{x}), \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2f(\frac{y}{x}) + (x+y)(-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x})f'(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$

因为$x \neq 0$，令$k = \frac{y}{x}$得$2f(k) + (1+k)(1-k)f'(x) = k$

也即$f'(k) + \frac{2}{1-k^2}f(k) = \frac{k}{1-k^2}$

令$P(k) = \frac{2}{1-k^2}, Q(k) = \frac{k}{1-k^2}$

则$e^{\int P(k)dk} = e^{\int(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1})dk} = e^{\ln|(k+1)| - \ln|(k-1)|} = |\frac{k+1}{k-1}|$

$\int Q(k)e^{\int P(k)dk}dk = \int \frac{k}{1-k^2} \times \frac{k+1}{k-1}dk = -\int \frac{k}{(k-1)^2}dk = -\int \frac{1}{k-1}dk - \int \frac{1}{(k-1)^2}dk = \frac{1}{k-1} - \ln|(k-1)|$

$f(k) = e^{-\int P(k)dk}(\int Q(k)e^{\int P(k)dk}dk + C) = \frac{k+1}{k-1}(k-1-\ln|(k-1)| + C)$

代入$f(0) = 2$得$C = -1$

回代后得$z(x,y) = (x+y)(\frac{y+x}{y-x})(\frac{y}{x} - 2 - \ln|(\frac{y}{x} - 1)|)$

5、（12分）求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n}$收敛半径，收敛区间，收敛域，并求收敛区间内$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n}$和函数

解:

$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{4(n+1)^2-1}{4n^2-1} = 1$，收敛半径为1，收敛区间为$(-1,1)$

当$x = \pm1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$，易得其收敛，所以可得其收敛域为$[-1,1]$

首先求$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}$的和函数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(-1)^{n+1}x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}[\int(-1)^{n+1}x^{2n-2}] = \int\frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(-1)^{n+1}x^{2n} = x\arctan x$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \sum[\int\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n-1)}] = \int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}[(x^2+1)\arctan x - x]$

6、（12分）$z = z(x,y)$由方程$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 32 = 0$确定，讨论$z(x,y)$极值

解:

在原式两侧对x求偏导得$2x - 6y - 2y\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-3y}{y+z}$

同理对y求偏导得$-6x + 20y - 2z - 2y\frac{\partial z}{\partial y} - 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x+10y-z}{y+z}$

解$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$得$x = 3y, y = z$，回代题式得极值点只可能在$(12,4), (-12,-4)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(y+z)^2-(x-3y)^2}{(y+z)^3},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(y+z)(3x+11z)-(-3x+11y)(-3x+10y-z)}{(y+z)^3},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3(y+z)^2-(x-3y)(-3x+11y)}{(y+z)^3}$

对于点$(12,4)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{16},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{5}{8},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{3}{16},\frac{1}{16}\times\frac{5}{8}-(-\frac{3}{16})^2>0$

由此得$z(x,y)$在$(12,4)$处取极小值，极小值为4

对于点$(-12,-4)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{16},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{5}{8},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{3}{16},-\frac{1}{16}\times(-\frac{5}{8})-(\frac{3}{16})^2>0$

由此得$z(x,y)$在$(12,4)$处取极大值，极大值为-4

7、（10分）设$D=\{(x,y)|0\le x\le\sqrt{\pi},0\le y\le\sqrt{\pi}\}$，求二重积分$\iint_D\sin\{\max(x^2,y^2)\}dxdy$

解:

由对称性不难得到$\iint_D\sin\{\max(x^2,y^2)\}dxdy=2\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_0^x\sin x^2dy$

$2\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_0^x\sin x^2dy=2\int_0^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin x^2dx^2=\int_0^{\pi}\sin tdt=2$

8、（11分）设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续可导函数，求曲线积分
$\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$，其中$L$是从点$A(3,\frac{2}{3})$到点$B(1,2)$的直线段

解:

令$P(x,y)=\frac{1+y^2f(x,y)}{y},Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$

观察到$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy)+\frac{1}{y^2}$

则存在$u(x,y)$，使得$du=Pdx+Qdy$

令$f(x)$的一个原函数为$F(x)$，不难验证$u(x,y)=F(xy)+\frac{x}{y}$满足要求

由$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$得题中曲线积分为与路径无关的曲线积分

因此有$\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy=u(x,y)|_A^B=F(2)+\frac{1}{2}-F(2)-\frac{9}{2}=-4$

高等代数

1、（10分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

解:

将除第一行以外的所有行加到第一列后得$\begin{vmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&\cdots&x+(n-1)a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

提出$x+(n-1)a$后得到$x+(n-1)a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$

再对除第一行外的所有行减去第一行的a倍后得到$x+(n-1)a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$

这就变成了一个上三角矩阵，则可得$\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$

2、（10分）设λ为何值时，齐次线性方程组$\begin{cases}(1-\lambda)x-2y+4z=0\\ 2x+(3-\lambda)y+z=0\\ x+y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$ 有非零解

解:

齐次线性方程组的系数矩阵为$\begin{bmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}$

若齐次线性方程组有非零解，则齐次线性方程组的系数矩阵不是满秩的，也就是说其行列式为0

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

由此得当$\lambda=0,2,3$时，齐次线性方程组有非零解

3、（10分）设$\mathbf{A}=diag(1,-2,1),\mathbf{A}^*\mathbf{BA}=2\mathbf{BA}-8\mathbf{E}$，其中$\mathbf{B}$为3阶矩阵，$\mathbf{E}$为单位矩阵，$\mathbf{A}^*$为伴随矩阵，求$\mathbf{B}$

解:

题式变换得$(\mathbf{A}^*-2\mathbf{E})\mathbf{BA}=-8\mathbf{E}$

$\mathbf{A}^*=diag(-2,1,-2),\mathbf{A}^*-2\mathbf{E}=diag(-4,-1,-4)$，其可逆，$\mathbf{A}$显然可逆

因此$\mathbf{B}=-8(\mathbf{A}^*-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^{-1}=-8\times diag(-\frac{1}{4},-1,-\frac{1}{4})\times diag(1,-\frac{1}{2},1)=diag(2,-4,2)$

4、（10分）求解下列方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}$

解:

一式加上二式得$x_1+2x_2-x_4=0$回代一式得$x_3=0$

三式可以由上面两式复合而来，并没有排上什么用场，由此得该方程组的解系为

$x_1,x_2\in\mathbb{R},x_3=0,x_4=x_1+2x_2$

5、利用初等变换，求$\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&4&-1&-1\end{bmatrix}$的一个极大无关列向量组

对题目矩阵进行初等列变换后得：

$$\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&4&-1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&1&5&-1\\2&-2&-1&-5&1\\1&0&2&-3&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\2&-2&0&0&0\\1&0&2&-3&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\2&-2&0&0&0\\1&0&2&0&0\end{bmatrix}$$

由此可得其的一个极大无关列向量组为$\overrightarrow{v_1}=(1,0,2,1),\overrightarrow{v_2}=(0,2,-2,0),\overrightarrow{v_3}=(0,0,0,2)$

6、设n阶矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵为$\mathbf{A}^*$，证明$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$

解：

如果矩阵$\mathbf{A}$不可逆，则$|\mathbf{A}|=0$，其伴随矩阵的秩最多为1，则$|\mathbf{A}^*|=0$

否则由$\mathbf{A}^*=\frac{|\mathbf{A}|}{\mathbf{A}}$得$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^n\times\frac{1}{|\mathbf{A}|}=|\mathbf{A}|^{n-1}$

21年真题

数学分析

1、（13分）设函数$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin(x^\beta) & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}(\beta<0)$，试确定$\alpha,\beta$满足何关系时，$f(x)$可微，但$f'(x)$在$[-1,1]$上无界

解：**UNSOLVED**

首先其要可微，这就要求其连续并且在定义域内导数存在

不难发现$f(x)$连续只要求其在$x=0$处连续，也即$\lim_{x\to0} f(x)=x^{\alpha+\beta}=0$，由此得$\alpha+\beta>0$

当$x>0$时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin(x^\beta)+\beta x^{\alpha+\beta-1}\cos(x^\beta)$，当$x<0$时，$f'(x)=0$

所以在定义域内导数存在只需要$f'(0)$存在，也即$\lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0^-} f'(x)=0$

因为$\beta<0$，所以对任意小的ε，总是存在$x<\varepsilon$，使得$x^\beta=2k\pi+\frac{\pi}{4}$

此时$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta x^\beta)x^{\alpha-1}$，若要满足$\lim_{x\to0+} f'(x)=0$，则必有$\alpha+\beta-1>0$

接着考虑其无界的条件

2、（10分）设$f(x)$在$x=0$处存在二阶导数，且$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=A$，求$f(x),f'(x),f''(x)$

解：

由题意得$\lim_{x\to0} f(x),\lim_{x\to0} f'(x),\lim_{x\to0} f''(x)$均存在

若$\lim_{x\to0} f(x)\ne0$，则因为$\lim_{x\to0}(1-\cos x)=0$，那么$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\infty$

这与题意矛盾，所以$\lim_{x\to0} f(x)=0$

由此可对题式使用洛必达法则，得$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{\sin x}=A\ \ (1)$

若$\lim_{x\to0} f'(x)\ne0$，则因为$\lim_{x\to0}\sin x=0$，那么$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\infty$

这与题意矛盾，所以$\lim_{x\to0} f'(x)=0$

对（1）式使用洛必达法则，得$\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{\cos x}=A$

因为$\lim_{x\to0}\cos x=1$，所以$\lim_{x\to0} f''(x)=A$

综上，$f(x)=0,f'(x)=0,f''(x)=A$

3、（10分）设$f(x)$满足：$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，$f(1)=2f(0)$，则在$(0,1)$内存在ξ，使得$(1+\xi)f'(\xi)=f(\xi)$

解：

构造$F(x)=\frac{f(x)}{1+x}$，则有$F(0)=f(0)=\frac{f(1)}{2}=F(1)$

则由罗尔定理知，存在$\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=0=\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}$

也就得到了$(1+\xi)f'(\xi)=f(\xi)$

4、（10分）求不定积分$\int \cos(\ln x)dx$

解:

首先考虑换元，令$x=e^t$，则原式化为求不定积分$\int \cos t\, de^t$

利用分部积分法，$\int \cos t\, de^t = \cos t\cdot e^t - \int e^t\, d\cos t = \cos t\cdot e^t + \int \sin t\, de^t$

又有$\int \sin t\, de^t = \sin t\cdot e^t - \int e^t\, d\sin t = \sin t\cdot e^t - \int \cos t\, de^t$

两者结合得$\int \cos t\, de^t = \frac{1}{2}(\cos t\cdot e^t + \sin t\cdot e^t) + C$

回代得$\int \cos(\ln x)dx = \frac{1}{2}x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)) + C$

5、（12分）设函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(x,y)\neq 0$，试证$f(x,y)=g(x)h(y)$的充要条件是$f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$

解: **UNSOLVED**

充分性$\Leftarrow$:

必要性$\Rightarrow$:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(h(y)g'(x))=g'(x)h'(y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=g'(x)h'(y)g(x)h(y)$

由此便可得$f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$

6、（13分）设$f(x)$满足条件：对于任意x',x''，存在常数$k\in[0,1)$，使得$|f(x')-f(x'')|\le k|x'-x''|$，对于给定的$x_0$，定义$x_1=f(x_0),x_2=f(x_1),\cdots,x_{n+1}=f(x_n),\cdots$，证明:

（1）级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛

（2）极限$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，记为c

（3）c与x_0无关，且$f(c)=c$

解:

（1）对于$n\ge 1$，$\frac{|x_{n+2}-x_{n+1}|}{|x_{n+1}-x_n|}=\frac{|f(x_{n+1})-f(x_n)|}{|x_{n+1}-x_n|}\le k<1$，由此即得级数绝对收敛

（2）由级数绝对收敛可得级数收敛，令和函数$S_n=\sum_1^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=x_n-x_1$

由级数收敛得$\lim_{n\to\infty}S_n$存在，也即$\lim_{n\to\infty}(x_n-x_1)$存在，也即$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，证毕

（3）由$\lim_{n\to\infty}x_n=c$的定义得$\forall\varepsilon>0,\exists G,\forall n>G,|x_n-c|<\varepsilon$恒成立

则有$\forall n>G,|f(c)-c|\le|f(c)-f(x_n)|+|f(x_n)-c|\le k|c-x_{n+1}|+|x_{n+1}-c|<2\varepsilon$

则由ε的任意性可得$f(c)=c$

由上结论和题目条件得$|f(x_n)-f(c)|=|x_{n+1}-c|\le k|x_n-c|$

由此不难得到$|x_n-c|\le k^n|x_0-c|$

因此$\forall\varepsilon>0,\exists N=\log_k\frac{\varepsilon}{|x_0-c|},\forall n>N,|x_n-c|<\varepsilon$恒成立

这也就说明了x_0只决定了收敛的快慢，不会决定最终收敛的值

7、（12分）计算二重积分$I=\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中$D$是由圆弧$y=\sqrt{1-x^2}$与直线$y=x,y=0$所围成的区域

解:

$I=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=\frac{\pi}{8}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}dr^2\overset{t=r^2}{=\!=\!=}\frac{\pi}{8}\int_0^1\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}dt=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{1-t}\,d\sqrt{1+t}$

$\overset{s=\sqrt{1+t}}{=\!=\!=\!=}\frac{\pi}{4}\int_1^{\sqrt2}\sqrt{2-s^2}ds\overset{s=\sqrt2\sin\theta}{=\!=\!=\!=\!=}\frac{\pi}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2}2\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}(\frac12\sin2\theta+\theta)|_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{4}-\frac12)$

8、（10分）设曲线积分为$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L$是以点$(0,1)$为中心，$R(>1)$为半径的圆周，取逆时针方向

解:

令S是以点$(0,0)$为中心，$(0<)\varepsilon(<R-1)$为半径的圆周，取逆时针方向

令Ω为由S和L包围所形成的面积

令$P=\frac{-y}{4x^2+y^2},Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$，则$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(4x^2+y^2)+2y^2}{(4x^2+y^2)^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(4x^2+y^2)-8x^2}{(4x^2+y^2)^2}$

$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}-\oint_S\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}+\oint_S\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$

$=\iint_\Omega(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma+\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon\cos\theta\,d(\varepsilon\sin\theta)-\varepsilon\sin\theta\,d(\varepsilon\cos\theta)}{4\varepsilon^2\cos^2\theta+\varepsilon^2\sin^2\theta}$

$=\iint_\Omega0\,d\sigma+\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta+4\cos^2\theta}=4\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\tan^2\theta+4}=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\frac{\tan\theta}{2}}{(\frac{\tan\theta}{2})^2+1}=2(\arctan(\frac{\tan\theta}{2}))|_0^{\pi/2}=\pi$

高等代数

1、（8分）证明

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

解:

考虑范德蒙行列式:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&x\\a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le5}(y_j-y_i),y=[a,b,c,d,x]$$

再将其按最后一列展开，观察不难得到题目中所求的式子就是$\prod_{1\le i<j\le 5}(y_j-y_i), y=[a,b,c,d,x]$中$x^3$项系数的相反数

$\prod(y_j-y_i)=[(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)](a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

中括号中x^3项的系数为$-(a+b+c+d)$，故题式得证

2、（10分）设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$，且$\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}$，求$\mathbf{B}$

解:

由题得$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{B}=\mathbf{A}$

$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{bmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，不难发现其可逆

因此$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}=\frac{(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^*}{|\mathbf{A}-2\mathbf{E}|}\mathbf{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&3&3\\-1&1&3\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{bmatrix}$

3、（8分）解方程组

$$\begin{cases}2x+y-z+w=1 \ \ (1)\\4x+2y-2z+w=2 \ \ (2)\\2x+y-z-w=1 \ \ (3)\end{cases}$$

解:

$(1)-(3)$得$2w=0$，也即$w=0$

回代入题式并化简后均得到$2x+y-z=1$

由此可得该方程组有两个自由变量，不妨令x,y为自由变量

得方程组的通解为$x,y\in\mathbb{R}, z=2x+y-1, w=1$

4、（10分）设$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$是一组$n$维向量，如果$n$维单位坐标向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$都可由它们线性表示，证明$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$线性无关

解:

令$\mathbb{U}$为$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$所张成的空间，即$\mathbb{U}=\mathrm{span}(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n})$

令$\mathbb{V}$为$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$所张成的空间，即$\mathbb{V}=\mathrm{span}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n})$

由$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$可由$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$线性表出，得$\mathbb{V}$是$\mathbb{U}$的子空间

并且由$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$都是单位坐标向量得$\dim\mathbb{V}=n$

因此$\dim\mathbb{U}\ge\dim\mathbb{V}=n$

再因为向量组$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$的数目为$n$，得$\dim\mathbb{U}\le n$

综上$\dim\mathbb{U}=n$

由n个向量组成的向量组其张成的空间维度为n，则表明这个向量组是线性无关向量组

因此$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$线性无关

5、（12分）设n阶矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵为$\mathbf{A}^*$，证明：

（1）当$r(\mathbf{A})=n$时，$r(\mathbf{A}^*)=n$

（2）当$r(\mathbf{A})=n-1$时，$r(\mathbf{A}^*)=1$

（3）当$r(\mathbf{A})\le n-2$时，$r(\mathbf{A}^*)=0$

解：

（1）由$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$得，因为$\mathbf{A}$为满秩矩阵，所以其行列式不为0，所以$|\mathbf{A}^*|$不为0，所以$\mathbf{A}^*$为可逆矩阵，所以有$r(\mathbf{A}^*)=n$

（2）因为$r(\mathbf{A})=n-1$，所以其必定存在一个$n-1$阶的非零子式，则由伴随矩阵的定义得伴随矩阵至少存在一个元素其值不为0，所以$r(\mathbf{A}^*)\ge 1$

再由$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}=0$得$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{A}^*)\le n$，即$r(\mathbf{A}^*)\le 1$

综上得$r(\mathbf{A}^*)=1$

（3）由$r(\mathbf{A})\le n-2$得$\mathbf{A}$中不存在一个$n-1$阶的非零子式，所以其伴随矩阵的每一个元素都为0，故$r(\mathbf{A}^*)=0$

6、（10分）已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$1,2,-3$，求$|\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}+2\mathbf{E}|$

解：

可以通过求出其所有特征值的方式来求解其行列式

设对应矩阵$\mathbf{A}$的特征值$1,2,-3$的特征向量分别为$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$

则可得$(\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}+2\mathbf{E})\overrightarrow{v_1}=(\frac{1\times2\times-3}{1}+3\times1+2)\overrightarrow{v_1}=-\overrightarrow{v_1}$

即$\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}+2\mathbf{E}$对应$\overrightarrow{v_1}$的特征值为$-1$

同理，其对应$\overrightarrow{v_2}$的特征值为5，对应$\overrightarrow{v_3}$的特征值为-5

由此可得$|\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}+2\mathbf{E}|=-1\times5\times-5=25$