数学分析

1、（15分）设函数$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}, m\in\mathbb{N}^+$试问:

（1）m为何值时，$f(x)$在$x=0$连续

（2）m为何值时，$f(x)$在$x=0$可导

（3）m为何值时，$f'(x)$在$x=0$连续

解:

（1）即$\lim_{x\to 0}f(x)=0$,由此可以得到$m>0, m\in\mathbb{N}^+$

（2）即$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^{m-1}\sin\frac{1}{x}$存在，由此得到$m>1, m\in\mathbb{N}^+$

（3）$f'(x)=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}+x^{m-2}\cos\frac{1}{x}$，由上得若$f'(0)$存在则必为零，所以$\lim_{x\to 0}f'(x)=0$

观察式子可以得到$m>2, m\in\mathbb{N}^+$

2、（10分）若函数$f(x)$满足$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

解:

令$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\times(x-a)+f(a)-f(x)$，则有$F(a)=F(b)=0$，由此可得$\exists\xi\in(a,b)$使得$F'(\xi)=0$

也即$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

3、（10分）设$f(x)$二次可微，$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2$，求$I=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$

解:

应用洛必达法则得$I=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}$

再次应用洛必达法则得$I=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=1$

4、（10分）计算$\int\sec^3 x\,dx$

解:

$\int\sec^3 x\,dx=\int\frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{1}{(1-\sin^2 x)^2}d\sin x$

对于$\int\frac{1}{(1-x^2)^2}dx$，有

$\int\frac{1}{(1-x^2)^2}dx=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})^2dx=\frac{1}{4}[\int(\frac{1}{x-1})^2dx-2\int\frac{1}{x^2-1}dx+\int(\frac{1}{x+1})^2dx]$

$=\frac{1}{4}(\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|+\ln|x+1|+\frac{1}{x+1})$

因此有$\int\sec^3 x=\frac{1}{4}(\frac{1}{\sin x-1}-\ln|\sin x-1|+\ln|\sin x+1|+\frac{1}{\sin x+1})$

5、（10分）与19年第三题一致

6、（10分）已知$y=1+xe^{xy}$，求$y'(0),y''(0)$

解:

题式对x求导后得$y'=(1+y+xy')e^{xy}$，题式中代入$x=0$得$y(0)=1$，代入此式得$y'(0)=2$

上式再对x求导得$y''=(2y'+xy''+y+xy')e^{xy}$代入后求得$y''(0)=5$

7、（10分）设正项级数$\sum u_n$收敛，证明级数$\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$收敛，试问反之是否成立？若不成立则举出反例

解:

因为$\sum u_n$收敛，则有$\sum(u_n+u_{n+1})$收敛，则有$\sum(u_n+u_{n+1})\geq\sum 2\sqrt{u_nu_{n+1}}$，由此可得结论成立

反之不成立，令$u_n=\begin{cases}2^{-2n} & ,n \mod 2=0\\ 1 & ,n \mod 2=1\end{cases}$，则显然级数$\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}<=\sum 2^{-n}$，易得收敛，而显然$\sum u_n$不收敛

8、（15分）过点$P(1,0)$作抛物线$y=\sqrt{x-2}$的切线，该切线与上述抛物线及x轴围成以平面图形，求此平面图形旋转一周所形成旋转体的体积

解:

设切点为$(x_0,\sqrt{x_0-2})$，则有$\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}=\frac{\sqrt{x_0-2}}{x_0-1}$解得$x_0=3$

体积$V=\int_1^3dx\int_{\max(0,\sqrt{(x-2)})}^{\frac{1}{2}(x-1)}2\pi ydy=\int_1^3[\frac{1}{2}(x-1)]^2\pi dx-\int_2^3(x-2)\pi dx=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{6}\pi$

高等代数

1、求行列式$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$的值

解:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&10&10&10\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&2&-1\\3&1&-2&-1\\4&-3&-2&-1\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&-2&-1\\-3&-2&-1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}0&2&-1\\0&-2&-1\\-4&-2&-1\end{vmatrix}=-40\begin{vmatrix}2&-1\\-2&-1\end{vmatrix}=160$$

2、求如下矩阵的逆矩阵

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

解:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $-\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

3、（10分）已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值是$2,1,-1$，对应的特征向量为$(1,0,-1)^T,(1,-1,0)^T,(1,0,1)^T$,求$\mathbf{A}$

解:

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P^{-1}}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

4、（10分）k分别取何值时，使得如下方程组无解？有唯一解？有无穷多解？

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$$

解:

系数矩阵的增广矩阵化简后为$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k^3+k-k^2 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-k^2 \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$

无穷多解：增广矩阵的秩和系数矩阵的秩相等且不为满，得$k=1$

无解：增广矩阵的秩和系数矩阵的秩不相等$k=-2$

唯一解：$k\neq 1,k\neq -2$

5、（10分）设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$是n阶方阵，且$\mathbf{AB}=O$，证明$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\leq n$

解:

$\dim(img(\mathbf{A}))+\dim(ker(\mathbf{A}))=n$

又由$\mathbf{AB}=O$得$img(\mathbf{B})\in ker(\mathbf{A})$

则$\dim(img(\mathbf{B}))\leq \dim ker(\mathbf{A})$

所以$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})=\dim(img(\mathbf{A}))+\dim(img(\mathbf{B}))\leq \dim(img(\mathbf{A}))+\dim(ker(\mathbf{A}))=n$

6、（10分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m>1)$均为向量，且$\beta=\sum_{j=1}^m\alpha_j$，证明，若$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

解：

$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$线性无关，则$k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+k_m(\beta-\alpha_m)=0$

只有零解

如果此时$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，设有解$n_1,n_2,\cdots,n_m$使得$n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_m\alpha_m=0$

则令$k_1=\sum_{i=1}^m a_i-a_1,k_2=\sum_{i=1}^m a_i-a_2,\cdots,k_m=\sum_{i=1}^m a_i-a_m$

其为使得$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$线性相关的一组解，并且易得其不全为0

这就得出矛盾，所以其线性无关