线性代数应该这样学

Chapter1 向量空间

1.1 复数

所有复数的集合 $\mathbb{C}=\{a+bi:a,b\in\mathbb{R}\}$

加法逆-负数，乘法逆-倒数

$\mathbb{F}$(Field)总表示$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$，即把$\mathbb{F}$变为$\mathbb{R}$或者$\mathbb{C}$结论仍然成立

1.2 向量空间的定义

$\mathbb{F}^n=\{(x_1,\cdots,x_n):x_i\in\mathbb{F},i=1,\cdots,n\}$

向量空间：给定域$\mathbb{F}$，$\mathbb{F}$上的向量空间$\mathbb{V}$是一个集合，其上定义了两种运算

- 向量加法$+$：$\mathbb{V}+\mathbb{V}\to\mathbb{V}$，把$\mathbb{V}$中的两个元素$\mathbf{u},\mathbf{v}$映射到V中另一个元素，记作$\mathbf{u}+\mathbf{v}$
- 向量乘法 $\cdot$：$\mathbb{F}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$，把$\mathbb{F}$中的一个元素$a$和$\mathbb{V}$中的一个元素$\mathbf{u}$变为到V中另一个元素，记作$a\cdot\mathbf{u}$

多项式：一个函数$\mathbf{p}:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$称为系数在$\mathbb{F}$中的多项式，如果存在$a_0,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$使得

$$\mathbf{p}(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m,z\in\mathbb{F}.$$

定义$\mathbf{P}(\mathbb{F})$为系数在$\mathbb{F}$中的左右多项式构成的**集合**

- 若$\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{P}(\mathbb{F})$，则$(\mathbf{p}+\mathbf{q})(z)=\mathbf{p}(z)+\mathbf{q}(z),z\in\mathbb{F}$
- 若$a\in\mathbb{F},\mathbf{p}\in\mathbf{P}(\mathbb{F})$，则$(a\mathbf{p})(z)=a(p)(z),z\in\mathbb{F}$

1.3 向量空间的性质

1.4 子空间

子空间：$\mathbb{V}$的子集$\mathbb{U}$称为$\mathbb{V}$的子空间，如果$\mathbb{U}$也是向量空间

- 例如$\{(x_1,x_2,0):x_1,x_2\in\mathbb{F}\}$是$\mathbb{F}^3$的一个子空间

1.5 和与直和

设$\mathbb{U}_1,\cdots,\mathbb{U}_m$都是$\mathbb{V}$的子空间，则$\mathbb{U}_1,\cdots,\mathbb{U}_m$的**和**记为$\mathbb{U}_1+\cdots+\mathbb{U}_m$，定义为$\mathbb{U}_1,\cdots,\mathbb{U}_m$中元素所有可能的和所构成的集合，更明确的说：

$$\mathbb{U}_1+\cdots+\mathbb{U}_m=\{\mathbf{u}_1+\cdots+\mathbf{u}_m:\mathbf{u}_1\in\mathbb{U}_1,\cdots,\mathbf{u}_m\in\mathbb{U}_m\}$$

如果$\mathbb{V}$的每个元素都可以**唯一**地写成$\mathbf{u}_1+\cdots+\mathbf{u}_m$，其中$\mathbf{u}_j\in\mathbb{U}_j$，则称$\mathbb{V}$是子空间$\mathbb{U}_1,\cdots,\mathbb{U}_m$的**直和**，记为

$$\mathbb{V}=\mathbb{U}_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{U}_m$$

- 若 $\mathbb{U}=\{(x,y,0)\in\mathbb{F}^3:x,y\in\mathbb{F},\mathbb{W}=\{(0,0,z)\in\mathbb{F}^3:z\in\mathbb{F}\}$，则$\mathbb{F}^3=\mathbb{U}\oplus\mathbb{W}$

Chapter2 有限维向量空间

2.1 张成与线性无关

张成 $span(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m)=\{a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_m\mathbf{v}_m:a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}\}$

- $(7,2,9)\in span((2,1,3),(1,0,1))$
- 空组$span()=\mathbf{0}$
- 如果$span(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m)$等于$\mathbb{V}$，则称$(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m)$张成$\mathbb{V}$

如果一个向量空间可以由它的一组向量张成，则称其为有限维的

多项式的次数由其最高阶变量的指数确定，如果多项式恒等于0，则规定其次数为$-\infty$

对于非负整数m，令$\mathbf{P}_m(\mathbf{F})$表示系数在$\mathbf{F}$中并且次数不超过m的所有多项式所组成的集合

对于$(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m)$中一组向量，如果使得$a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_m\mathbf{v}_m$等于$\mathbf{0}$的$a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$只有$a_1=\cdots=a_m=0$，则称$(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m)$是**线性无关**的，空组()是线性无关的

2.2 基

若$\mathbb{V}$中一个向量组既是线性无关的又张成$\mathbb{V}$，则称之为$\mathbb{V}$的**基**

2.3 维数

有限维向量空间的任意基的长度称为这个向量空间的**维数**，$\mathbb{V}$的维数记为$\dim\mathbb{V}$

- $\dim\mathbb{F}^n=n,\dim\mathbf{P}_m(\mathbb{F})=m+1$

Chapter3 线性映射

3.1 定义与例子

从$\mathbb{V}$到$\mathbb{W}$的**线性映射**是具有下列性质的函数$\mathbf{T}$：$\mathbb{V}\to\mathbb{W}$：（对于线性映射$\mathbf{Tv}=\mathbf{T}(\mathbf{v})$）

- 加性 对所有$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{V}$都有$\mathbf{Tu}+\mathbf{v}=\mathbf{Tu}+\mathbf{Tv}$
- 齐性 对所有$a\in\mathbb{F},\mathbf{v}\in\mathbb{V}$都有$\mathbf{T}(a\mathbf{v})=a(\mathbf{Tv})$

从$\mathbb{V}$到$\mathbb{W}$的所有线性映射所构成的集合记为$\mathbf{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$

如果$\mathbf{T}\in\mathbf{L}(\mathbb{U},\mathbb{V}),\mathbf{S}\in\mathbf{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$，那么定义$\mathbf{ST}\in\mathbf{L}(\mathbb{U},\mathbb{W})$如下，我们称$\mathbf{ST}$是$\mathbf{S}$和$\mathbf{T}$的乘积：

$$(\mathbf{ST})(\mathbf{v})=\mathbf{S}(\mathbf{Tv}),\mathbf{v}\in\mathbb{U}.$$

3.2 零空间和值域

对于$\mathbf{T}\in\mathbf{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$，$\mathbb{V}$中被$\mathbf{T}$映射成$\mathbf{0}$的那些向量所组成的子集称为$\mathbf{T}$的零空间，记为$\text{null}\mathbf{T}$：

$$\text{null}\mathbf{T}=\{\mathbf{v}\in\mathbb{V}:\mathbf{Tv}=\mathbf{0}\}$$

线性映射$\mathbf{T}$：$\mathbb{V}\to\mathbb{W}$称为是单的，如果当$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{V},\mathbf{Tu}=\mathbf{Tv}$时，必有$\mathbf{u}=\mathbf{v}$

对于$\mathbf{T}\in\mathbf{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$，由$\mathbb{W}$中形如$\mathbf{Tv}(\mathbf{v}\in\mathbb{V})$的向量所组成的子集称为$\mathbf{T}$的值域，记为$\text{range}\mathbf{T}$：

$$\text{range}\mathbf{T}=\{\mathbf{Tv}:\mathbf{v}\in\mathbb{V}\}$$

线性映射$\mathbf{T}$：$\mathbb{V}\to\mathbb{W}$称为是满的，如果它的值域等于$\mathbb{W}$

定理：$\dim\mathbb{V}=\dim\text{null}\mathbf{T}+\dim\text{range}\mathbf{T}$

3.3 线性映射的矩阵

设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$，$(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$是$\mathbb{V}$的基，$(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m)$是$\mathbb{W}$的基，那么对于每个$k = 1, \cdots, n$，$\mathbf{Tv_k}$都可以唯一地写成这些$\mathbf{w}$的线性组合：$\mathbf{Tv_k} = a_{1,k}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{m,k}\mathbf{w}_m$，其中$a_{j,k} \in \mathbb{F}, j = 1, \cdots, m$。因为线性映射由其在基上的值确定，所以线性映射$\mathbf{T}$由这些标量$a_{j,k}$完全确定，由这些$a$所构成的$m \times n$矩阵称为$\mathbf{T}$关于基$(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$和基$(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m)$的矩阵，记为：

$$\mathbf{M}(\mathbf{T}, (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n), (\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m)) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

- 如果基在上下文中是自明的，那么将上式简记为$\mathbf{M}(\mathbf{T})$

3.4 可逆性

线性映射$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$称为可逆的，如果存在线性映射$\mathbf{S} \in \mathbf{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$使得$\mathbf{TS}$等于$\mathbb{W}$上的恒等映射，并且$\mathbf{ST}$等于$\mathbb{V}$上的恒等映射，$\mathbf{S}$称为$\mathbf{T}$的逆

称两个向量空间是同构的，如果存在从一个向量空间到另一个向量空间的可逆线性映射

一个向量空间到其自身的线性映射称为算子，我们说线性映射$\mathbf{T}$：$\mathbb{V} \to \mathbb{V}$是$\mathbb{V}$上的算子，我们采用$\mathbf{L}(\mathbb{V})$来表示$\mathbb{V}$上算子的集合，也就是说$\mathbf{L}(\mathbb{V}) = \mathbf{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$

Chapter4 多项式

4.1 次数

4.2 复系数

每个不是常数的复系数多项式都有根

4.3 实系数

$z = \text{Re } z + (\text{Im } z)i$

Chapter5 特征值和特征向量

5.1 不变子空间

对于$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$和$\mathbb{V}$的子空间$\mathbb{U}$，如果对于每个$\mathbf{u} \in \mathbb{U}$都有$\mathbf{Tu} \in \mathbb{U}$，则称$\mathbb{U}$在$\mathbf{T}$下是不变的

对于$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$和标量$\lambda \in \mathbb{F}$，如果有非零向量$\mathbf{u} \in \mathbb{V}$使得$\mathbf{Tu} = \lambda\mathbf{u}$，则称$\lambda$为$\mathbf{T}$的特征值

设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，并且$\lambda \in \mathbb{F}$为$\mathbf{T}$的特征值，如果向量$\mathbf{u} \in \mathbb{V}$满足$\mathbf{Tu} = \lambda\mathbf{u}$，则称$\mathbf{u}$是$\mathbf{T}$相应于$\lambda$的特征向量

5.2 多项式对算子的应用

5.3 上三角矩阵

3.3中的线性变换的矩阵，如果其映射是从一个向量空间到其自身，也就是说这个映射是一个算子，也就是说只有一组基，这样的映射显然是一个方阵，记作$\mathbf{M}(\mathbf{T}, (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n))$，称$\mathbf{T}$关于$(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$的矩阵

一个矩阵称为上三角的，如果位于对角线下方的元素全为0，典型形式如下：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$关于$\mathbb{V}$的某个基有上三角矩阵，则这个上三角矩阵对角线上的元素恰好是$\mathbf{T}$的所有特征值

5.4 对角矩阵

对角矩阵是对角线以外的元素全是0的方阵

算子$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$关于$\mathbb{V}$的某个基有对角矩阵当且仅当$\mathbb{V}$有一个由$\mathbf{T}$的特征向量所组成的基

5.5 实向量空间的不变子空间

Chapter6 内积空间

6.1 内积

$\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ 与$\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$的内积为$w_1 \overline{z_1} + \cdots + w_n \overline{z_n}$

有 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = \overline{\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}}$

$\mathbb{V}$上的内积就是一个函数，它把$\mathbb{V}$中元素的每个有序对$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$都映射成一个数$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{F}$

6.2 范数

对于$\mathbf{v} \in \mathbb{V}$，$\mathbf{v}$的范数记为$\|\mathbf{v}\|$，定义为$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$

对于两个向量$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$，如果$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$，则称$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$是正交的

柯西-施瓦茨不等式：若$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$，则$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$

6.3 标准正交基

如果一个向量组中的向量两两正交，并且每个向量的范数都为1，则称这个向量组是标准正交的

6.4 正交投影与极小化问题

如果$\mathbb{U}$是$\mathbb{V}$的子集，那么$\mathbb{U}$的正交补记为$\mathbb{U}^{\perp}$，是由$\mathbb{V}$中与$\mathbb{U}$的每个向量都正交的那些向量组成的集合：

$$\mathbb{U}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0, \mathbf{u} \in \mathbb{U}\}$$

设$\mathbb{U}$是$\mathbb{V}$的子空间，并且$\mathbf{v} \in \mathbb{V}$，则$\|\mathbf{v} - P_{\mathbb{U}} \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|, \mathbf{u} \in \mathbb{U}$

6.5 线性泛函与伴随

$\mathbb{V}$上的线性泛函是从$\mathbb{V}$到$\mathbb{F}$的线性映射，如$\varphi : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F} \;\; \varphi(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 - 5z_2 + z_3$

设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$，$\mathbf{T}$的伴随记为$\mathbf{T}^*$，是如下定义的从$\mathbb{W}$到$\mathbb{V}$的函数，给定$\mathbf{w} \in \mathbb{W}$，$\mathbf{T}^* \mathbf{w}$是$\mathbb{V}$中唯一一个满足下面条件的向量

$$\langle \mathbf{T} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}^* \mathbf{w} \rangle, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$$

一个$m \times n$矩阵的共轭转置是通过互换行和列，然后对每个元素取复共轭所得到的$n \times m$矩阵

$\mathbf{M}(\mathbf{T}^*, (\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m), (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n))$是$\mathbf{M}(\mathbf{T}, (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n), (\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m))$的共轭转置，注意这里的基都要是规范正交基

Chapter7 内积空间上的算子

7.1 自伴算子与正规算子

算子$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$称为自伴的，如果$\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$

算子$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$称为正规的，如果$\mathbf{T}\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^*\mathbf{T}$

7.2 谱定理

复谱定理：设$\mathbb{V}$是复内积空间，$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，则有$\mathbb{V}$一个由$\mathbf{T}$的特征向量组成的规范正交基当且仅当$\mathbf{T}$是正规的

实谱定理：设$\mathbb{V}$是实内积空间，$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，则$\mathbb{V}$有一个由$\mathbf{T}$的特征向量组成的规范正交基当且仅当$\mathbf{T}$是自伴的

7.3 实内积空间上的正规算子

分块对角矩阵是如下形式的方阵：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{A}_m \end{bmatrix}$$

7.4 正算子

对于算子$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，如果$\mathbf{T}$是自伴的，并且对所有$\mathbf{v} \in \mathbb{V}$都有$\langle \mathbf{T}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$，则称$\mathbf{T}$为正的

算子$\mathbf{S}$称为算子$\mathbf{T}$的平方根，如果满足$\mathbf{S}^2 = \mathbf{T}$，记$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{T}}$

7.5 等距同构

算子$\mathbf{S} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$称为等距同构，如果对于所有的$\mathbf{v} \in \mathbb{V}$都有$\|\mathbf{S}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$

7.6 极分解与奇异值分解

极分解：如果$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，则有一个等距同构$\mathbf{S} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$使得$\mathbf{T} = \mathbf{S}\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$

设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$,$\mathbf{T}$的奇异值就是$\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$的特征值，而且每个特征值$\lambda$都要重复$\dim \operatorname{null}(\mathbf{T}^*\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$次

Chapter8 复空间向量上的算子

8.1 广义特征向量

设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，并且$\lambda$是$\mathbf{T}$的特征值，对于向量$\mathbf{v} \in \mathbb{V}$，如果存在正整数$j$使得$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})^j\mathbf{v} = 0$，则称$\mathbf{v}$是$\mathbf{T}$的相应于$\lambda$的广义特征向量

一个算子称为幂零的，如果它的某个幂等于0

8.2 特征多项式

设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，并且$\lambda \in \mathbb{F}$，则对$\mathbb{V}$的每个使得$\mathbf{T}$具有上三角矩阵的基，$\lambda$在$\mathbf{T}$的矩阵对角线上都恰好出现$\dim \operatorname{null}(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})^{\dim \mathbf{V}}$次

设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，$\mathbf{T}$的特征值$\lambda$的重数定义为相应于$\lambda$的广义特征向量所构成的子空间的维数。

设$\mathbb{V}$是复向量空间，并且$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，令$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$表示$\mathbf{T}$的所有互不相同的特征值，令$d_1, \cdots, d_m$表示$\mathbf{T}$的特征值的重数，则多项式$(z - \lambda_1)^{d_1} \cdots (z - \lambda_m)^{d_m}$称为$\mathbf{T}$的特征多项式

凯莱-哈密顿定理：设$\mathbb{V}$是复向量空间，并且$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，并设$q$是$\mathbf{T}$的特征多项式，那么$q(\mathbf{T}) = 0$

8.3 算子的分解

8.4 平方根

设$\mathbb{V}$是复向量空间，如果$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$是可逆的，那么$\mathbf{T}$有平方根

8.5 极小多项式

多项式$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m$称为$\mathbf{T}$的极小多项式，其中$m$是使得$(\mathbf{I}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^2, \cdots, \mathbf{T}^m)$线性无关的最小整数

8.6 约当形

设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$,$\mathbb{V}$的基称为$\mathbf{T}$的约当基，如果$\mathbf{T}$关于这个基有分块对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{A}_m \end{bmatrix}$$

其中每个$\mathbf{A}_j$都是形如

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

的上三角矩阵

Chapter9 实向量空间上的算子

9.1 方阵的特征值

设$\mathbf{A}$是一个$n \times n$矩阵，它的元素都含于$\mathbb{F}$，一个数$\lambda \in \mathbb{F}$称为$\mathbf{A}$的特征值，如果有非零的$n \times 1$矩阵$\mathbf{x}$使得$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$

9.2 分块上三角矩阵

分块上三角矩阵是如下形式的方阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{A}_m \end{bmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_m$都是方阵

对于实向量空间上的每个算子，都有基使得该算子关于此基具有分块上三角矩阵，并且对角线上块的大小不超过2×2

9.3 特征多项式

把1×1矩阵$[\lambda]$的特征多项式定义为$x - \lambda$

把2×2矩阵$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$的特征多项式定义为$(x-a)(x-d) - bc$

设$\mathbb{V}$是实向量空间，并设$\mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbb{V})$，如果$\alpha^2 < 4\beta$，并且$\mathbf{T}^2 + \alpha\mathbf{T} + \mathbf{I}$不是单的，则称有序实数对$(\alpha, \beta)$ 为$\mathbf{T}$的特征对，把$\mathbf{T}$的特针对(α, β) 的重数定义为$\frac{\dim \operatorname{null}(\mathbf{T}^2 + \alpha\mathbf{T} + \mathbf{I})^{\dim \mathbb{V}}}{2}$

$\mathbf{T}\in\mathbf{L}(\mathbb{V})$的特征多项式为其分块上三角矩阵$\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_m$的特征多项式之积

Chapter10 迹与行列式

10.1 基变换

如果$(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n)$和$(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n)$都是的基，那么$\mathbf{M}(\mathbf{I},(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n),(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n))$是可逆的，并且$\mathbf{M}(\mathbf{I},(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n),(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n))^{-1}=\mathbf{M}(\mathbf{I},(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n),(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n))$

10.2 迹

对于$\mathbf{T}\in\mathbf{L}(\mathbb{V})$，$\mathbf{T}$的特征多项式中$z^{n-1}$的系数的相反数称为$\mathbf{T}$的迹，记作$\mathrm{trace}\mathbf{T}$

定义方阵$\mathbf{A}$的迹为其对角线元素之和，记为$\mathrm{trace}\mathbf{A}$

算子关于一个基的矩阵的对角线元素之和并不依赖于这个基的选取

10.3 算子的行列式

对于$\mathbf{T}\in\mathbf{L}(\mathbb{V})$，定义$\mathbf{T}$的行列式为$\mathbf{T}$的特征多项式的常数项乘以$(-1)^{\dim\mathbb{V}}$，记为$\det\mathbf{T}$

一个算子是可逆的当且仅当它的行列式不等于零

10.4 矩阵的行列式

10.5 体积