12年真题

数学分析

1、（5分）计算极限$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]$

解：显然有$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]\geq 0$

而又有$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]\leq\lim_{n\to\infty}(n+1)\times\frac{1}{n^2}=0$

所以$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]=0$

2、（5分）计算极限$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sin\sqrt{t}\,dt}{\ln(1+x^{\frac{5}{2}})}$

解：

应用洛必达法则得$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sin\sqrt{t}\,dt}{\ln(1+x^{\frac{5}{2}})}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}(1+x^{\frac{5}{2}})}{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}}=\infty$

3、（5分）设$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\y=t-\arctan t\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

解：

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=(\frac{2t}{1+t^2})/(1-\frac{1}{1+t^2})=\frac{t}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{d\frac{dy}{dt}}{dt})/(\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt})=(\frac{2t}{(1+t^2)^2})/(\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2})=\frac{t}{1-t^2}$

4、（5分）设$x^y=y^x$，求dy

解：

原式为$e^{y\ln x}=e^{x\ln y}$，两侧对x求导后得$(y'\ln x+\frac{y}{x})e^{y\ln x}=(\ln y+\frac{y'x}{y})e^{x\ln y}$

计算得$dy=[(\ln y\cdot y^x-\frac{y}{x}x^y)/(\ln x\cdot x^y-\frac{x}{y}y^x)]dx$

5、（5分）计算不定积分$\int\ln(1+x^2)dx$

解：

$\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int xd\ln(1+x^2)=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$

$=x\ln(1+x^2)-2\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x$

6、（5分）计算定积分$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$

解：

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \sqrt{\cos x}\, dx = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, d\cos x = 2\int_0^1 \sqrt{t}\, dr = \frac{4}{3}$

7、（5分）判定级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$的敛散性

解：

收敛，证明如下：

下证明$\frac{(n!)^2}{(2n)!} < \frac{1}{n^2}$从第三项开始恒成立

$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1\times 2\times \cdots \times n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \times \frac{1\times 2\times n}{2n} \times \frac{3}{n+3} \times \frac{4}{n+4} \times \cdots \frac{n-1}{2n-1} < \frac{1}{n^2}$

由基本放缩可得级数收敛

8、求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$的和函数，并指出其收敛区间

解：

收敛区间$(-1,1)$

$\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \int x^{n-2} dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n)} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \int \frac{1}{n-1} x^{n-1} dx = \int -\ln(1-x) dx = (1-\ln(1-x))x + \ln(1-x) - 1$

此即为和函数

9、（8分）设$f(x) = e^x - 2$，证明在$(0,2)$内有唯一的点ξ，使得$e^{\xi} - 2 = \xi$

解：

令$F(x) = e^x - 2 - x$，则在$x \in (0,2)$上有$F'(x) = e^x - 1 > 0$

而又有$F(0) = -2, F(2) = e^2 - 4 > 0$，所以存在唯一的$\xi$，使得$F(\xi) = 0$

也就是$e^{\xi} - 2 = \xi$

10、（8分）当$x > 0$时，证明$e^x > 1 + x$

解：

显然

11、（8分）设$z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$，证明$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$

解：

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x \times \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + y \times \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{1}{2}$

12、（12分）设立体$\sum$由$x^2 + y^2 = 2z$与$z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$围成，求$\sum$的体积和表面积

解：**UNSOLVED**

体积$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2/2}^{4-r}dz=2\pi\int_0^1(4-r-\frac{r^2}{2})rdr=\frac{37}{24}\pi$

13、（14分）求函数$y=e^{-x^2}$的单调区间、极值、凹凸区间，并作出函数图像

解：

$y'=-2xe^{-x^2}$，$(-\infty,0)$单增，$(0,+\infty)$单减，$x=0$有极大值$y=1$

$y''=-2(1-2x^2)e^{-x^2}$，凸区间$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，凹区间$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

高等代数

14、（4分）计算行列式：$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!$$

15、（4分）设n阶方阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$及$\mathbf{A}+\mathbf{B}$均可逆，证明$\mathbf{A^{-1}}+\mathbf{B^{-1}}$也可逆，并求其逆矩阵

解：

$\mathbf{A^{-1}}+\mathbf{B^{-1}}=\mathbf{A^{-1}BB^{-1}}+\mathbf{A^{-1}AB^{-1}}=\mathbf{A^{-1}(A+B)B^{-1}}$

16、（4分）设4元非齐次线性方程组$\mathbf{A}X=b$的系数矩阵$\mathbf{A}$的秩为3，且它的三个解向量η_1,η_2,η_3满足$\eta_1=(1,3,5,7)^T,\eta_2+\eta_3=(0,2,4,6)^T$，求$\mathbf{A}X=b$的通解

解：

由题意得$\mathbf{A}X=b$的解空间维度为1，设其通解为$\vec{v}=k\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{v_b}$

设$\eta_1=k_1\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{v_b},\eta_2+\eta_3=(k_2+k_3)\overrightarrow{v_0}+2\overrightarrow{v_b}$

由此得$(k_2+k_3-2k_1)\overrightarrow{v_0}=\eta_2+\eta_3-2\eta_1=(-2,-4,-6,-8)$

而可以令$\overrightarrow{v_b}=\eta_1$，则通解为$k(-2,-4,-6,-8)^T+(1,3,5,7)^T,k\in\mathbb{R}$

17、（4分）设向量组
$\alpha_1=(2,1,2,2,-4),\alpha_2=(1,1,-1,0,2),\alpha_3=(0,1,2,1,-1),\alpha_4=(-1,-1,-1,-1,1),\alpha_5=(1,2,1,1,1)$

求此向量组的秩，并求出它的一个最大无关组

解：

18、（4分）若实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(a+5)x_1^2+x_2^2+(3-a)x_3^2+4x_1x_2$为正定的，求$a$的取值范围

解：

$f(x_1,x_2,x_3)=(a+5)x_1^2+x_2^2+(3-a)x_3^2+4x_1x_2=(a+1)x_1^2+(2x_1+x_2)^2+(3-a)x_3^2$

由此得到$-1<a<3$

19、（4分）在直角坐标系中，已知ΔABC的顶点坐标为$A(0,0),B(1,1),C(0,2)$，求ΔABC在矩阵$\mathbf{MN}$对应变换下所得到的图形的面积，这里$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\mathbf{N}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

$S=|\mathbf{M}||\mathbf{N}|S_{\Delta ABC}=1$

20、（6分）同20年高代第六题

21、（6分）证明n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关当且仅当任一$n$维向量可由其线性表出

解：

充分性$\Leftarrow$：

由题意可知$\mathbb{R}^n\in span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

所以有$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geq n$，而因为向量组中只有$n$个向量

所以$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leq n$

综合得到$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$，也就是说其线性无关

必要性$\Rightarrow$：

由其线性无关得到$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$

而若存在某个n维向量，使得其不能线性表出，那么也就是说$span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是$\mathbb{R}$的一个真子空间

也就是说$\dim span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)<\dim\mathbb{R}^n=n$

导出矛盾，所以任一n维向量都可由其线性表出

22、（6分）证明对称的正交矩阵的特征值必为1或-1

解：

设对称的正交矩阵为$\mathbf{A}$，对应特征值λ的特征向量为α

可得$\lambda\alpha\cdot\lambda\alpha=\lambda^2|\alpha|^2$

而又有$\lambda\alpha\cdot\lambda\alpha=(\mathbf{A}\alpha)^\mathbf{T}\mathbf{A}\alpha=\alpha^\mathbf{T}\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}\alpha=\alpha^\mathbf{T}\alpha=|\alpha|^2$

由此得到$\lambda=\pm1$

23、（8分）a,b为何值时下列线性方程组有解，有解时求出其所有解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = b \end{cases} \quad 1$$

解:

系数矩阵的增广矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & b-5 \end{bmatrix}$

由有解得到$a = 0, b = 2$

其解为$x_3, x_4 \in \mathbb{R}, x_2 = 3 - 2x_1 - 2x_2, x_1 = x_3 + x_4 - 2$

24、（10分）已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$1, 2, -1$，设矩阵$\mathbf{B} = \mathbf{A} - 2\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A}^3$，求

（1）矩阵$\mathbf{B}$的特征值及其相似对角矩阵

（2）行列式$|\mathbf{B}|$及$|\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{E}|$的值

解:

（1）将题中的特征值代入后式即得到$\mathbf{B}$的特征值为$2, 18, -6$

其相似对角矩阵为$diag(2, 18, -6)$

（2）$|\mathbf{B}| = 2 \times 18 \times -6 = -216$

$|\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{E}| = -2 \times 1 \times -2 = 4$