13年真题

数学分析

1、（10分）设$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，求$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)}-1}{x}$

解:

由题意得$\lim_{x\to 0}f(x)=0$

因此有$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)}{x}=\frac{1}{2}$

2、（10分）设$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

解:

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=\frac{-a\sin t}{b\cos t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{d\frac{dy}{dt}}{dt})/(\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt})=\frac{a\cos t}{b\sin t}$

3、（10分）求不定积分$\int\frac{dx}{x(1-x)}$

解:

$\int\frac{dx}{x(1-x)}=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1})dx=\ln|\frac{x}{x-1}|+C$

4、（10分）证明方程$3x-1=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$在区间$(0,1)$内有唯一的实根

解:

令$f(x)=3x-1-\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$，则在$x\in(0,1)$上有$f'(x)=3-\frac{1}{1+x^2}>0$

而$f(0)=-1,f(1)=2-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=2-\frac{\pi}{4}>0$

则易得$f(x)=0$区间$(0,1)$内有唯一的实根，也即题中结论成立

5、（10分）证明：若函数f在$[a,b]$上连续，且对任意$x\in[a,b],f(x)\neq 0$，则f在$[a,b]$上恒正或恒负

解:

假设结论不成立，若存在某点值为0，则由题知这种可能性不存在

若在f上存在两个点ξ_1,ξ_2，使得$f(\xi_1)f(\xi_2)<0$，则由连续函数介值定理得一定存在$\xi\in(\min\{\xi_1,\xi_2\},\max\{\xi_1,\xi_2\})$，使得$f(\xi)=0\in(\min\{f(\xi_1),f(\xi_2)\},\max\{f(\xi_1),f(\xi_2)\})$

则导出矛盾，由此得题中结论成立

6、（10分）设a,b,c是实数，已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$在$x=1$处取得极值-2

（1）试用c表示a和b；（2）求$f(x)$的单调区间

解:

（1）$f'(x)=3x^2+2ax+b$，由题得$f(1)=-2=a+b+c+1, f'(1)=0=3+2a+b$

由此可以解得$a=c, b=-3-2c$

（2）$f'(x)=3x^2+2cx-3-2c=(x-1)(3x+3+2c)$，解$f'(x)=0$得$x=1, x=\frac{-2c-3}{3}$

对$c>-3$，$f(x)$在$(-\infty,\frac{-2c-3}{3})$增，$(\frac{-2c-3}{3},1)$减，$(1,+\infty)$增

对$c<-3$，$f(x)$在$(-\infty,1)$增，$(1,\frac{-2c-3}{3})$减，$(\frac{-2c-3}{3},+\infty)$增

对$c=-3$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$增

7、（10分）试用数列极限的$\varepsilon-N$定义，证明$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$

解:

$\forall\varepsilon>0, \exists N=\frac{a}{\varepsilon}, \forall n>N$有$(1+\varepsilon)^n>(1+\varepsilon)^N\geq(1+\varepsilon)^{\frac{a}{\varepsilon}}\geq 1+a$

也就是$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{1+a}<1+\varepsilon$，证毕

8、（10分）把函数$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x<\pi \\ 0 & x=\pi \\ -x^2 & \pi<x<2\pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数

解: **UNSOLVED**

9、（10分）设$a_n\geq 0(n=1,2,\cdots)$且数列$\{na_n\}$有界，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛

解:

由数列$\{na_n\}$有界知$\exists G, \forall n\in N^+, na_n<G$恒成立

因此$a_n<\frac{G}{n}$恒成立

由此得到$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<G^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

而由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，原级数为正项级数易得原级数收敛

高等代数

10、（10分）用消元法求解线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 & (1) \\ x_2-x_3+x_4=-3 & (2) \\ x_1+3x_2+x_4=1 & (3) \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 & (4) \end{cases}$

解:

$(3)-(1)$得$5x_2-3x_3+5x_4=-3\ \ (5)$

$(5)+(4)$得$-2x_2+6x_4=-6\ \ (6)$

$(5)-3\times(2)$得$2x_2+2x_4=6\ \ (7)$

联立(6),(7)得到$x_4=0,x_2=3$

回代(5)得到$x_3=6$

回代(3)得到$x_1=-8$

11、（10分）证明如果$(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，那么$(x-1)\mid f_1(x),(x-1)\mid f_2(x)$

解：**UNSOLVED**

12、（10分）设n阶实对称矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$都是正定矩阵，且常数$k_1>0,k_2>0$，试证明矩阵$k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B}$也是正定的

解：

对非零列向量η，有$\eta^T(k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B})\eta=\eta^T(k_1\mathbf{A}\eta+k_2\mathbf{B}\eta)=k_1\eta^T\mathbf{A}\eta+k_2\eta^T\mathbf{B}\eta>0$

这就证明了矩阵$k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B}$是正定的

13、（10分）设矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$都是正定矩阵，证明$\mathbf{AB}$是正定矩阵的充要条件是$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$

解：

充分性$\Leftarrow$：

因为$\mathbf{A},\mathbf{B}$正定，所以$\mathbf{A}=\mathbf{A}^\mathbf{T},\mathbf{B}=\mathbf{B}^\mathbf{T}$，因为$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，所以$(\mathbf{AB})^\mathbf{T}=\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{A}^\mathbf{T}=\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$

所以$\mathbf{AB}$是对称矩阵

因为$\mathbf{A},\mathbf{B}$正定，所以存在可逆矩阵$\mathbf{P},\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{A}=\mathbf{P}^\mathbf{T}\mathbf{P},\mathbf{B}=\mathbf{Q}^\mathbf{T}\mathbf{Q}$，所以$\mathbf{AB}=\mathbf{P}^\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{Q}^\mathbf{T}\mathbf{Q}$

而$\mathbf{QABQ}^{-1}=\mathbf{QP}^\mathbf{T}\mathbf{PQ}^\mathbf{T}=(\mathbf{PQ}^\mathbf{T})^\mathbf{T}(\mathbf{PQ}^\mathbf{T})$正定，且与$\mathbf{AB}$相似

因此$\mathbf{AB}$正定

必要性$\Rightarrow$：

因为$\mathbf{A},\mathbf{B}$正定，所以$\mathbf{A}=\mathbf{A}^\mathbf{T},\mathbf{B}=\mathbf{B}^\mathbf{T}$

所以$\mathbf{AB}=\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{B}^\mathbf{T}=(\mathbf{BA})^\mathbf{T}=\mathbf{BA}$

14、（10分）已知下列两矩阵相似：$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$

（1）求x,y的值（2）求矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$

解：

（1）$f(\lambda)=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=(-2-\lambda)[\lambda^2-(1+x)\lambda+x-2]=k(-1-\lambda)(2-\lambda)(y-\lambda)$

解得$x=0,y=-2$

（2）$\mathbf{A}$关于特征值$\lambda_1=-1$的一个特征向量为$\overrightarrow{v_1}=(0,2,-1)$

$\mathbf{A}$关于特征值$\lambda_2=2$的一个特征向量为$\overrightarrow{v_2}=(0,1,1)$

$\mathbf{A}$关于特征值$\lambda_3=-2$的一个特征向量为$\overrightarrow{v_3}=(1,0,-1)$

由此可得$\mathbf{P} = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}]$即为所求

15、与14年12题类似