18年真题

数学分析

1、（12分）$f(x)=\begin{cases} x^\alpha\cos(\frac{1}{x^\beta}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ $(\beta>0)$，当α和β满足什么关系时，$f'(x)$在$x=0$处连续

解：

由题得首先要存在$f'(0)$，也就是说$f(x)$需要连续，所以$\lim_{x\to 0}f(x)=0$，也就得到$\alpha>0$

$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos(\frac{1}{x^\beta})+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin(\frac{1}{x^\beta})$

$\lim_{x\to 0}f'(x)$存在则要求$\alpha-\beta-1>0$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=x^{\alpha-1}\cos(\frac{1}{x^\beta})$，也要求$\alpha>1$

综上$\alpha>\beta+1$

2、$f(x)=\sin x\sin 2x\cos 3x$，求$f^{(n)}(x)$

解：

由$\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x,\cos(2x-x)=\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x$

得$\sin x\sin 2x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)$

则$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x\cos 3x-\cos^2 3x)=\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x-\cos 6x-1)$

由三角函数的高阶导数公式可以得到

$f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}[2^n\cos(2x+n\frac{\pi}{2})+4^n\cos(4x+n\frac{\pi}{2})-6^n\cos(6x+n\frac{\pi}{2})]$

3、设$b>a>0$，$f(x)$满足如下条件：

（1）$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，（2）$f(x)$在开区间(a,b)内可导，（3）$f'(x)\neq 0$

则在(a,b)内存在ξ,η使得$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

解：

由拉格朗日中值定理得$\exists\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

构造$F(x)=f(x^2),x\in(\sqrt{a},\sqrt{b})$

由拉格朗日中值定理得$\exists\varepsilon\in(\sqrt{a},\sqrt{b})$使得$\frac{f(b)-f(a)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=F'(\varepsilon)=2\varepsilon f'(\varepsilon^2)$

令$\eta=\varepsilon^2$，则$f'(\eta)=\frac{f(b)-f(a)}{2\sqrt{\eta}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$

两式相除即得原式成立

4、（10分）与21年第四题类似

5、（12分）与21年第五题一致

6、（12分）设$a_0=3, na_n=\frac{2}{3}a_{n-1}-(n-1)a_{n-1}(n\geq 1)$，试证明当$|x|<1$时幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛，并求出其和函数

解：**UNSOLVED**

7、计算二重积分$\iint_D \sin\frac{\pi x}{2y}dxdy$，其中曲线$D$由曲线$y=\sqrt{x}$，直线$y=x, y=2$所围成

解：

$\iint_D \sin\frac{\pi x}{2y}dxdy=\int_1^2 dy\int_y^{y^2} sin\frac{\pi x}{2y}dx=\int_1^2(-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y})|_y^{y^2}dy=\int_1^2-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}dy$

$=-(\frac{4y}{\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}y)|_1^2+\frac{4}{\pi^2}\int_1^2\sin\frac{\pi}{2}y\,dy=-\frac{4}{\pi^2}(y\sin\frac{\pi}{2}y+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}y)|_1^2=\frac{4}{\pi^2}(1-\frac{2}{\pi})$

8、试在曲线族$y=\lambda\sin x(\lambda>0)$中找一条曲线$L$，使该曲线从$O(0,0)$到$A(\pi,0)$的曲线积分$\int_L(1+\frac{1}{2}y^3)dx+(2x+y)dy$的值最小

解：

将$y=\lambda\sin x$代入曲线积分后得$\int_0^\pi(1+\frac{1}{2}\lambda^3\sin^3x+2\lambda x\cos x+\lambda^2\sin x\cos x)dx$

$=[x+\frac{1}{2}\lambda^3(\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x)+2\lambda(x\sin x+\cos x)+\lambda^2(-\frac{1}{4}\cos 2x)]|_0^\pi$

$=\pi+\frac{2}{3}\lambda^3-4\lambda$

求导后不难得到最小的$\lambda=\sqrt{2}$

高等代数

1、（6分）求行列式$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$$

2、（8分）求矩阵$\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=-2-2+3=-1$$

伴随矩阵为$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

逆矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

3、设$\mathbf{A}$为三阶矩阵，满足$\mathbf{A}\alpha_i = ia_i, (i = 1, 2, 3)$，其中
$\alpha_1 = (1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (2, -2, 1)^T, \alpha_3 = (-2, -1, 2)^T$，求矩阵$\mathbf{A}$

令$\mathbf{P} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，不难发现其为正交矩阵，则$\mathbf{P^{-1}} = \frac{1}{9}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$

则有$\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P^{-1}} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 21 & 0 & -6 \\ 0 & 15 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{bmatrix}$

4、（12分）n阶矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^* \neq O$，且非齐次线性方程组$\mathbf{A}x = b$有两个不同的解向量ξ_1, ξ_2，证明$\xi_1 - \xi_2$是$\mathbf{A}x = 0$的基础解系

解:

首先证明$rank(\mathbf{A}) = n - 1$，如果$rank(\mathbf{A}) \leq n - 2$，则$\mathbf{A}^* = O$，如果$rank(\mathbf{A}) = n$，则其不可能有两个不同的解，所以$rank(\mathbf{A}) = n - 1$

这也就说明了$\mathbf{A}x = 0$的解空间的维度为1，其通解为$k\vec{v}$，而$\mathbf{A}(\xi_1 - \xi_2) = 0$，所以$\xi_1 - \xi_2$是$\mathbf{A}x = 0$的基础解系

5、（10分）设$\mathbf{A}$为三阶非零矩阵，满足$\mathbf{A^2} = \mathbf{A}, \mathbf{A} \neq \mathbf{E}$，证明：$(r(\mathbf{A}) - 1)(r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) - 1) = 0$

解:

由$\mathbf{A^2} = \mathbf{A}$得$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{A} = 0$，则有$r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) + r(\mathbf{A}) \leq n = 3$

而由题得$(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \neq 0, \mathbf{A} \neq 0$，所以$r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \geq 1, r(\mathbf{A}) \geq 1$，结合上式知至少有一个为1

所以题式得证

6、（12分）设向量α可由向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$线性表示，证明$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关的充要条件是$\alpha$表示法唯一

解:

充分性$\Leftarrow$:

α表示法唯一也就是说$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$的解只有$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$，也就是说其线性无关

必要性$\Rightarrow$:

线性无关也就是说$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$的解只有$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$

则设$\alpha = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \cdots + s_r\alpha_r$，则这就是其唯一的表示法