19年真题

数学分析

1、（8分）求$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

解:

进行无穷小量替换得到$\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}),\cos\frac{1}{x}\sim 1+o(\frac{1}{x})$

由此可得$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))^x=e$

2、（8分）计算定积分$I=\int_{e^{-1}}^{e}|\ln x|dx$

解:

$I=\int_1^e\ln x\,dx-\int_{e^{-1}}^{e}\ln x\,dx=(x\ln x-x)|_1^e-(x\ln x-x)|_{e^{-1}}^{1}=2-\frac{2}{e}$

3、（8分）计算$\iint_D\frac{\sin y}{y}d\sigma$，其中$D$是由直线$y=x$与曲线$y=\sqrt{x}$所围成的闭区域

解:

先对x方向进行积分，再对y方向进行积分，即原式化为

$\int_0^1dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1\sin y-y\sin y\,dy=(-\cos x-\sin x+x\cos x)|_0^1=1-\sin 1$

4、（12分）判断下列断言是否正确，若正确请给出证明，若不正确请给出范例

（1）若函数$f(x)$单调且可导，则必有$f'(x)>0$

（2）单调函数的导函数必为单调函数

（3）若函数$f(x)$的导函数$f'(x)$单调，则函数$f(x)$必单调

（4）若函数$f(x)$可导且只有一个稳定点，则稳定点必为极值点

解:

（1）反例$y=-x$

（2）反例$y=x^3$

（3）反例$y=x^2$

（4）反例$y=x^3$

5、（10分）计算$\iiint_\Omega(x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$，其中$\Omega$是由锥面$x^2+y^2=z^2$，柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0$围成的区域

解:

该闭区域可以视作为一个圆柱体C从中挖去了一个等底等高的圆锥体Z

$\iiint_C(x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1zdz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^3dr=\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$

$\iiint_Z(x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 zdz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z r^3dr=2\pi\times\frac{1}{4}\int_0^1 z^5dz=\frac{\pi}{12}$

由此可得$\iiint_\Omega(x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz=\iiint_C(x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz-\iiint_Z(x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz=\frac{\pi}{6}$

6、（10分）求函数$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$在$x^2+y^2+z^2=24(x,y,z>0)$条件之下的最大值

解:

令$\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-24$，令$F(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda\phi(x,y,z)$

解$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$得

$\frac{1}{\lambda}=2x^2=y^2=\frac{2}{3}z^2,\phi(x,y,z)=0$

解得$x=2,y=2\sqrt{2},z=2\sqrt{3}$

则其最大值就为此驻点，为$7\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3$

7、（10分）设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$内可导，$f'(x)$的导函数为$f'(x)$，且$f(0)=0,f(1)=1$，证明:

（1）存在$\xi_1\in(0,1)$，使得$f(\xi_1)=1-\xi_1$

（2）存在两个不同的$\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，使得$f'(\xi_2)f'(\xi_3)=1$

解:

（1）令$F(x)=f(x)+x-1$，则$F(0)=-1,F(1)=1$，又因为其连续，则$\exists\xi_1\in(0,1)$，使得$F(\xi_1)=0$

也即$f(\xi_1)=1-\xi_1$

（2）由$\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1$得若$f'(x)$在$(0,1)$上为常值函数，则$\forall x\in(0,1),f'(x)=1$

则题式结论显然成立

否则令$\sup\{f'(x)\}=A,\inf\{f'(x)\}=B,x\in(0,1)$

令$\varepsilon=\frac{1}{2}\min(A-1,1-B,0.1)$

若$\varepsilon=\frac{1}{2}(A-1)$，则由介值定理得到存在$\xi_2\in(0,1)$使得$f'(\xi_2)=1+\varepsilon$

要证明存在点$\xi_3\in(0,1)$使得$f'(\xi_3)=\frac{1}{1+\varepsilon}$，只要证明$\frac{1}{1+\varepsilon}>B$，也就只要证明$\frac{1}{1+\varepsilon}>1-2\varepsilon$，这显然成立

若$\varepsilon=\frac{1}{2}(1-B)$，则由介值定理得到存在$\xi_2\in(0,1)$使得$f'(\xi_2)=1-\varepsilon$

要证明存在点$\xi_3\in(0,1)$使得$f'(\xi_3)=\frac{1}{1-\varepsilon}$，只要证明$\frac{1}{1+\varepsilon}<A$，也就只要证明$\frac{1}{1-\varepsilon}<1+2\varepsilon$，也即$\varepsilon<\frac{1}{2}$，而由题得$\varepsilon<0.05$，证毕

若$\varepsilon=\frac{1}{2}(0.1)$，则显然可以取到$f'(\xi_2)=1.001,f'(\xi_3)=\frac{1}{1.001}$，证毕

8、（10分）证明在点$(1,1)$的某邻域内存在唯一的连续可微函数$y=f(x)$满足$f(1)=1$，$xf(x)+2\ln x+3\ln f(x)=1$

，并求$f(x)$的导数$f'(x)$

解：

要证明在点$(1,1)$的某邻域内存在唯一的连续可微函数,只要证明在点$(1,1)$的某邻域内的每一个x值，都只有唯一的一个y值与之对应

令$g(y)=xy+3\ln y+2\ln x-1$，则不难发现其在邻域内单调增，所以只有唯一解

题式对x求导得$f(x)+xf'(x)+\frac{2}{x}+3\frac{f'(x)}{f(x)}=0$得$f'(1)=\frac{3}{4}$

9、（12分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的和函数

解：

$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\int x^{n-1})=\int\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\int\frac{x^n}{n})=\int-\ln(1-x)=(1-\ln(1-x))x+\ln(1-x)-1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac{1}{x}((1-\ln(1-x))x+\ln(1-x)-1)$

高等代数

1、（8分）求行列式$D=\begin{vmatrix}2&2&2&2\\2&3&4&5\\8&13&20&29\\10&29&66&127\end{vmatrix}$的值

解：

$D=2\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)=3\times2^2\times1^3=12$

2、（10分）同20年第三题

3、（10分）试问λ为何值时方程组$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=4\\-x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$无解，有唯一解，有无穷多解？并在有无穷多解时求出其所有的解

解：

化简后的系数增广矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&\lambda&4\\0&-2&2-\lambda&-8\\0&0&\frac{(4-\lambda)(\lambda+1)}{2}&\lambda^2-4\lambda\end{bmatrix}$

无解：增广矩阵的秩大于系数矩阵的秩。解得$\lambda=-1$

有唯一解：增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩且为满秩，解得$\lambda\neq-1,4$

无穷多解：此时$\lambda=4$，解系为$x_3\in\mathbb{R},x_2=4-x_3,x_1=-3x_3$

4、（12分）矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$有3个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是$\mathbf{A}$的二重特征值，证明$\mathbf{A}$可对角化，并求可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$为对角矩阵

解：

由其有3个线性无关的特征向量知其可对角化

$f(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ x & 4-\lambda & y\\ -3 & -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+10\lambda^2+(-32-3y-x)\lambda+32+6y+2x=(a\lambda-b)(\lambda-2)^2$

解该方程可以得到$a=-1,b=-6,x+3y=-4$

所以其特征值为$2,2,6$

$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -4-3y & 2 & y\\ -3 & -3 & 3\end{bmatrix}$

由$\lambda=2$是$\mathbf{A}$的二重特征值知$rank(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=3-2=1$，由此得$x=2,y=-2$

经过计算得到，$\mathbf{A}$关于$\lambda=2$的特征向量有$\overrightarrow{v_1}=(1,-1,0),\overrightarrow{v_2}=(1,0,1)$

关于$\lambda=6$的特征值有$\overrightarrow{v_3}=(1,-2,3)$

由此得$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$即为所求

5、（12分）证明：（1）正定矩阵一定可逆，且正定矩阵的逆矩阵也是正定矩阵

（2）两个同阶数正定矩阵的和也是正定的

解：

（1）设$\mathbf{A}$为正定矩阵，则$\mathbf{A}$可以表示为$\mathbf{A}=\mathbf{C^TC}$，其中$\mathbf{C}$为可逆阵，则有$|\mathbf{A}|=|\mathbf{C^T}||\mathbf{C}|=\mathbf{C}^2>0$，则其为可逆阵，而$\mathbf{A^{-1}}=(\mathbf{C^TC})^{-1}=\mathbf{C^{-1}}(\mathbf{C^T})^{-1}=\mathbf{C^{-1}}(\mathbf{C^{-1}})^{\mathbf{T}}$，因为$\mathbf{C}$可逆所以$\mathbf{C}^{-1}$也可逆，这就证明了$\mathbf{A^{-1}}$也为正定矩阵

（2）设$\mathbf{A,B}$为正定矩阵，则对任意向量η，有$\eta^T(\mathbf{A}+\mathbf{B})\eta=\eta^T(\mathbf{A}\eta+\mathbf{B}\eta)=\eta^T\mathbf{A}\eta+\eta^T\mathbf{B}\eta>0$，这就证明了其和也为正定矩阵

6、（12分）设$\mathbb{V}$是全体次数不超过n的实系数多项式，再添上零多项式组成的实数域上的线性空间，定义$\mathbb{V}$上的线性变换$T(f(x))=xf'(x)-f(x)$，其中$f'(x)$为$f(x)$的导函数

（1）求T的核$T^{-1}(0)$和值域$T\mathbb{V}$

（2）证明：$\mathbb{V}=T^{-1}(0)\oplus T\mathbb{V}$

解：

（1）设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

则$T(f(x))=xf'(x)-f(x)=(n-1)a_nx^n+(n-2)a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2-a_0$

由此可得$T^{-1}(0)$为所有只有一次项的多项式组成的线性空间

同理，可得$T\mathbb{V}$为所有不含一次项的多项式组成的线性空间

（2）由上不难得到结论成立