10年真题

一、填空（12空*5分）

1、$\lim_{n\to\infty}=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$

2、不定积分$\int x\arctan x\,dx=\frac{1}{2}(x^2\arctan x-x+\arctan x)$

3、$\lim_{n\to\infty}n(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2})=\frac{1}{2}$

4、函数$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$的麦克劳林公式为**UNSOLVED**

5、设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2},x\in[-1,1]$，那么$\int_0^x s(t)dt=$**UNSOLVED**

6、函数$f(x)=\cos\frac{x}{2}$在$[0,\pi]$上展开成正弦函数为**UNSOLVED**

7、$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=2$

8、多项式$f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$的有理根为$3,-1$

9、行列式$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{vmatrix}=-160$

10、设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，则$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$

11、设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则$p^{3\times3}$中全体与$\mathbf{A}$可交换的矩阵所成子空间的维数为$3$，一组基为
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

二、（10分）求下列齐次线性方程组的一个基础解系并用它表出全部解

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0\\x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0\\2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0\end{cases}$$

解:

其系数矩阵为
$\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&0\\4&-2&6&3&-4\\2&4&-2&4&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&-6&6&15&0\\0&2&-2&10&-5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&9&-3\\0&0&0&12&-4\end{bmatrix}$

则得到其解为$x_5,x_3\in\mathbb{R},x_4=\frac{1}{3}x_5,x_2=x_3+\frac{5}{6}x_5,x_1=x_3-\frac{7}{6}x_5$

三、（15分）与14年12题类似

四、（15分）证明属于不同特征值的特征向量是线性无关的

解:

假设对于矩阵$\mathbf{A}$的不同特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的特征向量为$\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_n}$，设其线性相关

则存在不全为零的系数$c_1,\cdots,c_n$使得$c_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_n\overrightarrow{v_n}=0\ \ (1)$

在两边同时乘以$\mathbf{A}$，则得到$c_1\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_n\lambda_n\overrightarrow{v_n}=0\ \ (2)$

$(2)-\lambda_n(1)$得$c_1(\lambda_1-\lambda_n)\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\overrightarrow{v_{n-1}}=0$

也即$d_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+d_{n-1}\overrightarrow{v_{n-1}}=0$

反复利用此过程得到$m_1(\lambda_1-\lambda_3)\overrightarrow{v_1}+m_2(\lambda_2-\lambda_3)\overrightarrow{v_2}=0$

也即$n_1\overrightarrow{v_1}+n_2\overrightarrow{v_2}=0$，也就有$n_1\lambda_1\overrightarrow{v_1}+n_2\lambda_2\overrightarrow{v_2}=0$

则可得$n_1(\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{v_1}=0$，则$\overrightarrow{v_1}=0$，这就导出矛盾，所以线性无关

五、（10分）设$f(x)=\ln(1+x)$，求$f^{(5)}(x)$

解:

$f'(x)=(1+x)^{-1}$

$f^{(5)}(x)=24(1+x)^{-5}$

六、（10分）设$0<x<\frac{\pi}{3}$，证明$\tan x>x-\frac{x^3}{3}$

解:

令$f(x)=\tan x-x+\frac{x^3}{3}$，则$f'(x)=\sec^2 x-1+x^2>0$，所以$f(x)>f(0)=0$

也就是题式成立

七、（15分）证明Jensen不等式：函数f为$[a,b]$上的凸函数，则对任意的
$x_i\in[a,b],\lambda_i>0,(i=1,2,\cdots,n),\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$,有
$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\leq\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$

解:

运用数学归纳法，当$n=2$时，即为凸函数的定义，若当$n=k$时成立，当$n=k+1$时，有

$f(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_ix_i)=f((1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i+\lambda_{k+1}x_{k+1})\leq(1-\lambda_{k+1})f(\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$

$\leq(1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}f(x_i)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_if(x_i)$

数学归纳得结论成立

八、（15分）求平面曲线$x^2+(y-2)^2=1$绕x轴旋转所得旋转体的表面积和体积

解:

表面积

$S=\int_{-1}^{1} 2\pi(r_{max}+r_{min})\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{-1}^{1} 2\pi(2+\sqrt{1-x^2}+2-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx$

$=\int_{-1}^{1} 8\pi\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=8\pi^2$

体积$V=\int_{-1}^{1} \pi((r_{max})^2-(r_{min})^2)dx=\pi\int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-x^2}dx=8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta=4\pi^2$