Fisika-Matematika Inspiratif

Richard Tao Roni Hutagalung

28 Juni 2020

Kata Pengantar

Monograf singkat ini berisi beberapa formulasi / perumusan dalam ilmu matematika dan fisika secara khusus dan mendalam yang menurut hemat penulis dianggap penting serta jarang dan belum pernah dibahas di kebanyakan buku teks kuliah maupun di situs-situs internet / dunia maya. Urutan penyajian masalah dalam monograf ini tidak diurutkan berdasarkan sejarah kronologis yang sebenarnya dari beberapa masalah tersebut, melainkan semata-mata diurutkan dengan datangnya masalah ke dalam pikiran penulis. Pembaca diharapkan kritis dalam membaca, menelaah, meneliti, dan mengoreksi isi monograf ini dari bab ke bab, karena kebanyakan dari beberapa masalah yang disajikan dalam monograf ini bersifat *open-ended* yang harus diteliti lagi secara terus-menerus dan berkesinambungan. Monograf ini merupakan kelanjutan dari kedua monograf kami yang pertama, sehingga kami selaku penulis tidak akan banyak menjelaskan lagi secara detail mengenai sebagian arti teknis dari beberapa istilah matematika dan fisika. Dalam hal ini, pembaca harap memakluminya.

Mengingat penyajian masalah dalam monograf ini tidaklah urut, terutama dalam menjelaskan definisi dan arti istilah-istilah matematika dan fisika, maka para pembaca hendaknya tidak membaca monograf ini urut mulai dari awal hingga akhir, karena sebuah istilah boleh jadi sudah dijelaskan di kedua monograf kami sebelumnya, atau baru akan dijelaskan di bab-bab selanjutnya, atau bahkan sudah sering dijelaskan di buku teks kuliah di luar monograf ini, sehingga untuk dapat memahami monograf ini diperlukan beberapa pra-syarat yang harus dipenuhi. Terus terang, bahwa monograf ini bukanlah sebuah ensiklopedia matematika dan fisika yang mampu menjawab segala rasa ingin tahu pembaca, mengingat yang dipaparkan di sini hanyalah beberapa masalah saja, sehingga monograf ini masih teramat sangat jauh dikatakan lengkap dan jelas. Hal ini semata-mata disebabkan oleh keterbatasan penulis dan keterbatasan izin toleransi waktu penggarapan yang diberikan kepada penulis. Oleh karena itu, masih diperlukan saran dan kritik yang membangun demi kemajuan monograf ini untuk selanjutnya.

Penulis berterima kasih kepada Mbak Angela yang telah memberikan dukungan penuh seluruh proses pembuatan buku ini dari awal sampai akhir.

UNTUK ANGELA

Daftar Isi

Bab 1

Kesepakatan Notasi Matematis

1.1 Asumsi Dasar

Untuk membaca monograf ini, para pembaca dianggap sudah menguasai seluruh formalisme matematika, seperti aljabar, geometri, kalkulus, dan sebagainya, sehingga formalisme yang meliputi seluruh definisi dan teorema matematika tidak akan dibahas lagi di dalam monograf ini, kecuali notasi-notasi yang sangat jarang dipakai orang dalam membahas matematika, yang akan dibahas pada beberapa sub-bab selanjutnya. Tetapi ingat, bahwa sebenarnya notasi matematika itu terserah setiap orang. Yang paling penting adalah apa makna yang diwakili dari notasi matematika tersebut.

1.2 Ketergantungan Besaran terhadap Besaran Lain

Nilai besaran-besaran fisika ada yang tetap maupun ada yang berubah-ubah terhadap besaran-besaran fisika yang lain. Meskipun demikian, sebuah besaran fisika boleh dikatakan pasti bergantung pada besaran fisika yang lain, meskipun ketergantungannya tidak harus ketergantungan satu-satu, melainkan bisa juga satu-banyak. Ketergantungan besaran q terhadap besaran t, misalnya, hendak ditulis sebagai $q \mapsto t$ atau bisa juga $t \mapsto q$ atau bisa juga $q = q_t(t)$ atau bisa juga $t = t_q(q)$, sehingga q_t dalam hal ini merupakan pemetaan yang memetakan t ke q, sedangkan t_q dalam hal ini merupakan pemetaan yang memetakan q ke t, di mana q dan t tidak harus tunggal, bahkan boleh tidak terakomodasi. Karena setiap pemetaan pasti memiliki invers, maka $t = q_t^{-1}(q)$ dan $q = t_q^{-1}(t)$, sehingga $q_t^{-1} = t_q$ dan $t_q^{-1} = q_t$. Mengapa terkesan aneh dan berlebihan? Nanti kita juga akan mengetahui betapa pentingnya penulisan notasi semacam ini. Contohnya adalah bahwa $q_t(u)$ belum tentu sama dengan q apabila $u \neq t$. Contohnya lagi adalah bahwa q boleh bergantung pada t maupun u maupun keduanya (t dan u), maka kita boleh menuliskan $q = q_t(t) = q_u(u) = q_{t,u}(t,u)$. Contoh kongkretnya dalam fisika adalah $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2} \mapsto v$ pada persamaan (4.3) di mana $v := |\vec{v}|$, $\vec{v} \mapsto t$, dan $t \mapsto \tau$ maka kita boleh menuliskan $\gamma = \gamma_v(v) = \gamma_{\vec{v}}(\vec{v}) = \gamma_t(t) = \gamma_\tau(\tau)$, sehingga tentu saja pemetaan γ_v, $\gamma_{\vec{v}}$, γ_t, dan γ_τ merupakan empat buah pemetaan yang berbeda satu sama lain. Apabila misalnya x dan y keduanya bergantung pada u dan v, maka kita bisa menuliskan $x \mapsto (u,v)$ dan $y \mapsto (u,v)$ atau dipadukan menjadi $(x,y) \mapsto (u,v)$ atau bisa juga $(x,y) = (x,y)_{u,v}(u,v)$, sehingga u dan v dapat dicari dari persamaan terakhir dengan cara menuliskan $(u,v) = (x,y)^{-1}_{u,v}(x,y)$, lalu $u = ((x,y)^{-1}_{u,v}(x,y))_1$ dan $v = ((x,y)^{-1}_{u,v}(x,y))_2$ untuk pengkodean dengan alasan bahwa u terletak di posisi pertama, sedangkan v terletak di posisi kedua. Secara mudahnya, $u = (u,v,w)_1$, $v = (u,v,w)_2$, dan $w = (u,v,w)_3$. Apabila $z \mapsto (x,y)$, maka tentu saja $y \mapsto (z,x)$ dan juga $x \mapsto (y,z)$. Apabila diketahui $z \mapsto (x,y)$, maka semua besaran selain x, y, dan z itu dianggap konstan terhadap x, y, dan z.

Andaikan diketahui ada pemetaan $f : (x,y) \mapsto z$, maka kita dapat menuliskan $z = f(x,y)$, sehingga persamaan ini dapat dibalik, yaitu misalnya $x = g(y,z)$, di mana $g : (y,z) \mapsto x$ adalah pemetaan yang tentu saja tidak boleh sebarang, melainkan harus bergantung pada f. Kaitan ketergantungannya adalah sebagai berikut. Tentu saja, $(x,y) = f^{-1}(z)$ sehingga $x = (x,y)_1 = (f^{-1}(z))_1 = x_{y,z}(y,z) = ((f^{-1}(z))_1)_{y,z}(y,z)$, sehingga

$$g = ((f^{-1}(z))_1)_{y,z}. \tag{1.1}$$

Soal 1.2.1. Andaikan diketahui $z = f(x,y)$ di mana $f : (x,y) \mapsto z$ adalah sebuah pemetaan, maka buktikanlah bahwa

$$(((((f^{-1}(z))_1)_{y,z})^{-1}(x))_2)_{x,y} = f. \tag{1.2}$$

Jawaban. Karena $z = z_{x,y}(x,y)$, maka

$$\begin{aligned}
(((((f^{-1}(z))_1)_{y,z})^{-1}(x))_2)_{x,y} &= (((((x,y)_1)_{y,z})^{-1}(x))_2)_{x,y} \\
&= (((x_{y,z})^{-1}(x))_2)_{x,y} \\
&= (((y,z)_x(x))_2)_{x,y} \\
&= ((y,z)_2)_{x,y} = z_{x,y} = f. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

■

Misalkan y, s, dan t adalah peubah-peubah riil sedemikian rupa sehingga $y \mapsto s$ dan $s \mapsto t$, sehingga otomatis $y \mapsto t$. Ada beberapa teorema yang melibatkan turunan mengenai metode ini, yaitu sebagai berikut.

$$\frac{y_t(t+dt)-y}{dt} = \frac{dy}{dt}. \tag{1.4}$$

$$\frac{y_t(t+dt)-y}{ds} = \frac{y_t(t+dt)-y}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{ds}. \tag{1.5}$$

$$\frac{y_t(t+ds)-y}{dt} = \frac{y_t(t+ds)-y}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{ds}{dt}. \tag{1.6}$$

$$\frac{y_t(t+ds)-y}{ds} = \frac{dy}{dt}. \tag{1.7}$$

$$\frac{y_t(s+dt)-y}{dt} = \frac{y_t(s+dt)-y_t(s)+y_t(s)-y}{dt} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_t(s) + \frac{y_t(s)-y}{dt}. \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{y_t(s+dt)-y}{ds} &= \frac{y_t(s+dt)-y}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{y_t(s+dt)-y_t(s)+y_t(s)-y}{dt}\frac{dt}{ds} \\ &= \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_t(s) + \frac{y_t(s)-y}{dt}\right)\frac{dt}{ds}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{y_t(s+ds)-y}{dt} &= \frac{y_t(s+ds)-y}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{y_t(s+ds)-y_t(s)+y_t(s)-y}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_t(s) + \frac{y_t(s)-y}{ds}\right)\frac{ds}{dt}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\frac{y_t(s+ds)-y}{ds} = \frac{y_t(s+ds)-y_t(s)+y_t(s)-y}{ds} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_t(s) + \frac{y_t(s)-y}{ds}. \tag{1.11}$$

$$\frac{y_s(t+dt)-y}{dt} = \frac{y_s(t+dt)-y_s(t)+y_s(t)-y}{dt} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_s(t) + \frac{y_s(t)-y}{dt}. \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{y_s(t+dt)-y}{ds} &= \frac{y_s(t+dt)-y}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{y_s(t+dt)-y_s(t)+y_s(t)-y}{dt}\frac{dt}{ds} \\ &= \left(\left(\frac{dy}{ds}\right)_s(t) + \frac{y_s(t)-y}{dt}\right)\frac{dt}{ds}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{y_s(t+ds)-y}{dt} &= \frac{y_s(t+ds)-y}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{y_s(t+ds)-y_s(t)+y_s(t)-y}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \left(\left(\frac{dy}{ds}\right)_s(t) + \frac{y_s(t)-y}{ds}\right)\frac{ds}{dt}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\frac{y_s(t+ds)-y}{ds} = \frac{y_s(t+ds)-y_s(t)+y_s(t)-y}{ds} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_s(t) + \frac{y_s(t)-y}{ds}. \tag{1.15}$$

$$\frac{y_s(s+dt)-y}{dt} = \frac{dy}{ds}. \tag{1.16}$$

$$\frac{y_s(s+dt)-y}{ds} = \frac{y_s(s+dt)-y}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{ds}\frac{dt}{ds}. \tag{1.17}$$

$$\frac{y_s(s+ds)-y}{dt} = \frac{y_s(s+ds)-y}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dt}. \tag{1.18}$$

$$\frac{y_s(s+ds)-y}{ds} = \frac{dy}{ds}. \tag{1.19}$$

1.3 Kesepakatan Penjumlahan Einstein

Dalam monograf ini, kesepakatan penjumlahan Einstein hanya akan dipakai untuk suku yang mengandung indeks berulang (dua kali) hanya untuk indeks komponen vektor dan tensor serta indeks unsur matriks. Contohnya pada persamaan (2.34), yaitu

$$I^i{}_j \omega^j \vec{e}_i \equiv \sum_{i,j=1}^{3} I^i{}_j \omega^j \vec{e}_i, \tag{1.20}$$

di mana indeks i dan j bergerak ke seluruh label yang ada, yang dalam hal ini $1, 2, 3$. Begitu juga dengan indeks matriks. Apabila suku yang mengandung indeks berulang tersebut tidak ingin dijumlahkan, maka nanti justru akan diberitahukan, meskipun hal ini jarang terjadi. Dalam monograf ini, bila hal ini terjadi, maka kita akan menuliskan, misalnya $(a_i b_i)_i$, yang artinya suku $a_i b_i$ tidak dijumlahkan. Penulisan semacam ini, sekali lagi, hanya berlaku untuk indeks komponen vektor dan tensor serta indeks unsur matriks.

1.4 Komponen Kovarian dan Komponen Kontravarian Vektor dan Tensor

Pada persamaan (2.34), misalnya, kita melihat ada indeks komponen vektor dan tensor yang di atas dan yang di bawah. Indeks yang di atas itu merupakan indeks komponen kontravarian, sedangkan indeks yang di bawah itu merupakan komponen kovarian. Lain halnya dengan vektor basis kontravarian dan vektor basis kovarian. Vektor basis dengan indeks di bawah, seperti $\vec{e}_i$, justru merupakan vektor basis kontravarian, sedangkan vektor basis dengan indeks di atas, seperti $\vec{e}^i$, justru merupakan vektor basis kovarian, sehingga berlaku kesamaan

$$\vec{A} = A^i \vec{e}_i = A_i \vec{e}^i, \tag{1.21}$$

serta, misalnya,

$$\overleftrightarrow{T} = T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T^i{}_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j = T_i{}^j \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j = T_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \tag{1.22}$$

dengan menerapkan kesepakatan penjumlahan Einstein tentunya.

Tensor metriks $\overleftrightarrow{g} := g_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = g^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ memiliki komponen kovarian g_{ij} dan komponen kontravarian g^{ij} yang didefinisikan sebagai

$$g_{ij} := \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad \text{dan} \quad g^{ij} := \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j, \tag{1.23}$$

sedangkan tentu saja $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j$.

1.5 Penyingkatan Notasi Turunan

Notasi $\dot{Q}$ berarti $dQ/d\tau$ yaitu bahwa besaran Q diturunkan satu kali terhadap swa-waktu τ. Dalam mekanika relativistik, τ biasanya mewakili besaran swa-waktu, sedangkan t biasanya mewakili besaran waktu sejati. Hubungan antara

t dan τ adalah $dt/d\tau = \gamma$ alias $\dot{t} = \gamma$ di mana γ adalah faktor koreksi relativistik. Dalam mekanika non-relativistik, γ selalu bernilai 1, yang berarti $\dot{t} = 1$, sehingga

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dQ}{dt}\dot{t} = \frac{dQ}{dt}. \tag{1.24}$$

Persamaan (1.24) hanya berlaku dalam mekanika non-relativistik, tetapi tidak berlaku secara umum dalam mekanika relativistik.

1.6 Notasi Turunan Parsial

Andaikan x, y, z, u, dan v adalah peubah-peubah riil. Notasi seperti $(\partial z/\partial y)_x$ berarti bahwa $z \mapsto (x, y)$ diturunkan terhadap y dengan menganggap x konstan. Andaikan selain itu, $(x, y) \mapsto (u, v)$, maka bolehlah $z = z_{x,y}(x, y_{u,v}(u, v_{x,u}(x, u)))$, sehingga

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_u. \tag{1.25}$$

Kita dapat menuliskan $y = y_{u,v}(u, v_{x,u}(x, u))$, sehingga

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_u. \tag{1.26}$$

Dari persamaan (1.26), maka persamaan (1.25) menjadi

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u. \tag{1.27}$$

Pada persamaan (1.27), tampak bahwa secara umum,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u \neq \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y. \tag{1.28}$$

1.7 Domain Integral

Pada persamaan (2.7), misalnya, tampak terdapat domain integral, yaitu $C(d\vec{r}, d\vec{p})$. Ini terkesan aneh dan berlebihan, tetapi sebenarnya tidak demikian. Pada persamaan tersebut, tampak bahwa C adalah domain dari $d\vec{r}$. Tentu saja, domain dari $d\vec{p}$ bukan lagi C, melainkan harus merupakan himpunan yang lain, yang akan kita tulis dan kita sepakati sebagai himpunan $C(d\vec{r}, d\vec{p})$, dengan menganggap bahwa $C(d\vec{r}, d\vec{r})$ akan tereduksi menjadi C, yaitu bahwa

$$C(d\vec{r}, d\vec{r}) \equiv C. \tag{1.29}$$

Lantas, apakah $C(d\vec{p}, d\vec{r})$ sama dengan $C(d\vec{r}, d\vec{p})$? Tentu saja tidak. Karena kita sudah terlanjur menyepakati tata-tulis semacam ini, maka himpunan $C(d\vec{p}, d\vec{r})$ adalah domain bagi $d\vec{r}$ dengan menganggap bahwa C adalah domain bagi $d\vec{p}$. Tentu saja, $C(d\vec{p}, d\vec{p})$ juga akan tereduksi menjadi C saja.

Bab 2

Mekanika Klasik

2.1 Mekanika Sebuah Partikel Klasik

Dalam bab ini, didefinisikan $\dot{Q} := dQ/dt$ untuk sebarang besaran Q.

Sebuah partikel klasik yang menempati posisi $\vec{r}$ pada waktu t akan memiliki kecepatan

$$\vec{v} := \dot{\vec{r}}, \tag{2.1}$$

serta percepatannya adalah

$$\vec{a} := \dot{\vec{v}}. \tag{2.2}$$

Percepatan tangensial partikel tersebut adalah $\vec{a}_{//} := (\vec{a} \cdot \hat{v})\hat{v}$, sedangkan percepatan sentripetal partikel tersebut adalah $\vec{a}_{\perp} := \vec{a} - \vec{a}_{//}$, di mana $\hat{v} := \vec{v}/v$ dan $v := |\vec{v}|$.

Soal 2.1.1. Apabila diketahui $|\vec{v}| = v$, maka carilah $\vec{v} \mapsto v$.

Jawaban. $\vec{v} = v\hat{e}$ di mana $\hat{e}$ adalah sebarang vektor satuan. ■

Apabila massa partikel klasik tersebut adalah m yang secara umum bergantung pada waktu t, maka momentum linier partikel klasik tersebut adalah

$$\vec{p} := m\vec{v}, \tag{2.3}$$

serta gaya yang dialami partikel tersebut adalah

$$\vec{F} := \dot{\vec{p}} = \dot{m}\vec{v} + m\vec{a}. \tag{2.4}$$

Momentum sudut yang dialami oleh partikel tersebut adalah

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}, \tag{2.5}$$

serta torsi (momen gaya) yang dialaminya adalah

$$\vec{\tau} := \dot{\vec{L}} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{2.6}$$

Usaha yang dikerjakan partikel tersebut untuk berpindah melewati lintasan C adalah

$$W_C := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C(d\vec{r}, d\vec{p})} \vec{v} \cdot d\vec{p}. \tag{2.7}$$

Tenaga kinetik milik partikel tersebut adalah

$$T := \int_{\vec{r}_v(0)}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{2.8}$$

dengan $v := |\vec{v}|$ adalah kelajuan partikel tersebut.

Apabila massa m partikel tersebut konstan, maka

$$T = \int_{\vec{0}}^{\vec{p}} \vec{v} \cdot d\vec{p} = m \int_{\vec{0}}^{\vec{v}} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m \int_0^{v^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v^2. \tag{2.9}$$

Gaya $\vec{F}$ dikatakan konservatif apabila nilai

$$W_C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.10}$$

tidak tergantung pada lintasan C, melainkan hanya tergantung pada nilai $\vec{r}$ di kedua ujung lintasan C yang terbuka. Andaikan $C := \partial A$, di mana $A \subset \mathbb{R}^3$ adalah sebuah permukaan terbuka di ruang $\mathbb{R}^3$, maka tentu saja ∂A adalah lintasan tertutup, sehingga apabila $\vec{F}$ merupakan gaya konservatif, maka berlaku

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \tag{2.11}$$

Dari teorema Stokes, persamaan (2.11) menjadi

$$\int_A (\nabla \times \vec{F}) \cdot d^2\vec{r} = 0. \tag{2.12}$$

Karena persamaan (2.12) berlaku untuk sebarang luasan A, maka dari persamaan tersebut, haruslah

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \tag{2.13}$$

yang merupakan syarat bahwa $\vec{F}$ konservatif. Penyelesaian persamaan (2.13) antara lain adalah

$$\vec{F} = -\nabla V \tag{2.14}$$

untuk semua skalar V yang dikenal sebagai *tenaga potensial*.

Usaha yang dikerjakan oleh gaya konservatif $\vec{F}$ melewati lintasan C adalah

$$W_C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \nabla V \cdot d\vec{r} = V_i - V_f \tag{2.15}$$

di mana V_i adalah nilai V di titik ujung awal dari C, dan V_f adalah nilai V di titik ujung akhir dari C.

Soal 2.1.2. Apabila diketahui $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ untuk sebarang vektor $\vec{F}$ yang bergantung pada posisi $\vec{r}$, maka buktikanlah (dengan cara menguraikan persamaan vektor tersebut menjadi komponen-komponennya) bahwa semua penyelesaiannya adalah $\vec{F} = -\nabla V$ untuk semua bentuk skalar V yang bergantung pada $\vec{r}$. Samakah hasilnya dengan persamaan (2.14)?

Soal 2.1.3. Sebutkan contoh gaya non-konservatif $\vec{F}$, setelah itu carilah posisi $\vec{r}$ dengan menyelesaikan persamaan (2.4) dengan bantuan persamaan (2.2) dan (2.1). Apa yang dapat disimpulkan mengenai gaya non-konservatif?

Lebih lanjut lagi dari persamaan (2.7) apabila massa m konstan, maka

$$\begin{aligned} W_C &= \int_{C(d\vec{r},d\vec{p})} \vec{v}\cdot d\vec{p} = m\int_{C(d\vec{r},d\vec{v})} \vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}m\int_{C(d\vec{r},d(v^2))} d(v^2) \\ &= \frac{1}{2}mv^2|_{\vec{r}\in C} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = T_f - T_i \end{aligned} \tag{2.16}$$

di mana v_i (v_f) adalah kelajuan partikel di titik awal (akhir) lintasan C, serta T_i (T_f) adalah tenaga kinetik partikel di titik awal (akhir) lintasan C.

Dengan menyetarakan persamaan (2.15) dan (2.16), diperoleh

$$W_C = V_i - V_f = T_f - T_i \tag{2.17}$$

alias

$$T_f + V_f = T_i + V_i. \tag{2.18}$$

Besaran

$$\mathcal{E}_m := T + V \tag{2.19}$$

ini disebut sebagai energi mekanik partikel, sehingga menurut persamaan (2.18), diperoleh kesimpulan bahwa apabila pada suatu partikel, bekerja gaya konservatif, maka tenaga mekaniknya konstan. Tentu pula bahwa

$$\mathcal{E}_{mf} - \mathcal{E}_{mi} = (T_f + V_f) - (T_i + V_i) = (T_f - T_i) - (V_i - V_f) = W_C - W_C = 0, \tag{2.20}$$

di mana $\mathcal{E}_{mi} := T_i + V_i = \mathcal{E}_m$ dan $\mathcal{E}_{mf} := T_f + V_f = \mathcal{E}_m$.

Apabila W merupakan usaha yang dilakukan partikel tersebut, maka daya partikel tersebut adalah

$$P := \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{\vec{r}_t(t_0)}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \vec{F}\cdot\vec{v}. \tag{2.21}$$

2.2 Rotasi Sebuah Partikel Klasik

Sudut rotasi aktif dapat dinyatakan sebagai sebuah vektor, misalnya $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$, di mana θ merupakan sudut tempuh, dan $\hat{\theta}$ merupakan arah dari $\vec{\theta}$ di ruang $\mathbb{R}^3$. Orientasi putarannya ditentukan oleh $\hat{\theta}$ dengan aturan tangan kanan, yaitu bahwa arah ibu jari yang mengacung menunjukkan arah $\hat{\theta}$, sedangkan keempat jari lainnya yang mengepal menunjukkan arah putarannya. Karena $\hat{\theta}$ semata-mata hanya menunjukkan arah dari $\vec{\theta}$, maka haruslah $|\hat{\theta}| = 1$. Titik pangkal dari vektor $\vec{\theta}$ ini benar-benar menentukan letak dan orientasi arah sumbu putar di ruang $\mathbb{R}^3$.

Apabila sebuah titik yang terletak pada posisi $\vec{r}_0 := r_0\hat{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ dirotasikan secara aktif dengan vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$ yang titik pangkalnya terletak di posisi $\vec{0}$ sedangkan arah $\hat{\theta}$-nya tetap, maka titik tersebut akan berpindah ke posisi, misalnya $\vec{r}$, sedemikian rupa sehingga

$$\vec{r} = (\hat{\theta}\cdot\vec{r}_0)\hat{\theta} + (\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0\cos\theta - \hat{\beta}\cdot\vec{r}_0\sin\theta)\hat{\alpha} + (\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0\sin\theta + \hat{\beta}\cdot\vec{r}_0\cos\theta)\hat{\beta}, \tag{2.22}$$

di mana

$$\hat{\alpha} := \frac{(\hat{\theta}\times\hat{r}_0)\times\hat{\theta}}{\sqrt{1-(\hat{\theta}\cdot\hat{r}_0)^2}} \quad \text{dan} \quad \hat{\beta} := \frac{\hat{\theta}\times\hat{r}_0}{\sqrt{1-(\hat{\theta}\cdot\hat{r}_0)^2}}. \tag{2.23}$$

Mengingat $\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0 = r_0\sqrt{1-(\hat{\theta}\cdot\hat{r}_0)^2}$ dan $\hat{\beta}\cdot\vec{r}_0 = 0$, maka $(\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0)\hat{\alpha} = (\hat{\theta}\times\vec{r}_0)\times\hat{\theta}$ dan $(\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0)\hat{\beta} = \hat{\theta}\times\vec{r}_0$ sehingga

$$\vec{r} = (\hat{\theta}\cdot\vec{r}_0)\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r}_0)\times\hat{\theta}\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}_0\sin\theta. \tag{2.24}$$

Sekarang, apabila titik $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ dirotasikan secara aktif dan kontinyu oleh vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$ yang bertitik pangkal di titik $\vec{0}$, di mana θ dan $\hat{\theta}$ secara umum tidak konstan alias bergantung pada waktu t, maka

$$\begin{aligned}
\vec{r}_t(t+dt) &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta}\cos d\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta} + \hat{\theta}\times\vec{r}\,d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\vec{r} - (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta}) + \hat{\theta}\times\vec{r}\,d\theta \\
&= \vec{r} + \hat{\theta}\times\vec{r}\,d\theta
\end{aligned} \tag{2.25}$$

sehingga

$$\vec{r}_t(t+dt) - \vec{r} \equiv d\vec{r} = \hat{\theta}\times\vec{r}\,d\theta \tag{2.26}$$

alias

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}\times\vec{r}. \tag{2.27}$$

Untuk mencari $\vec{r}$ yang bergantung pada t secara eksplisit, maka persamaan (2.27) harus diselesaikan untuk $\vec{r}$ yang bergantung pada t.

Soal 2.2.1. Selesaikan persamaan (2.27) untuk $\vec{r}$ yang bergantung t.

Kecepatan sudut $\vec{\omega}$ secara umum didefinisikan sebagai

$$\vec{\omega} := \dot{\vec{\theta}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \theta\dot{\hat{\theta}} \tag{2.28}$$

sehingga apabila $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$, serta $\hat{\theta}$ konstan, maka persamaan (2.27) menjadi

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{2.29}$$

Selanjutnya, diasumsikan bahwa $\dot{\hat{\theta}} = \vec{0}$.

Percepatan $\vec{a} := \dot{\vec{v}}$ akibat rotasi tersebut tentu saja adalah

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} \tag{2.30}$$

di mana $\vec{\alpha} := \dot{\vec{\omega}}$ adalah percepatan sudutnya.

Percepatan tangensial rotasinya adalah

$$\begin{aligned}\vec{a}_{//} &:= (\vec{a}\cdot\hat{v})\hat{v} = \vec{a}\cdot\vec{v}\vec{v}/v^2 = (\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v})\cdot\vec{v}\vec{v}/v^2 = (\vec{\alpha}\times\vec{r})\cdot\vec{v}\vec{v}/v^2 \\ &= (\vec{\alpha}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})\vec{v}/v^2 = \frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\omega})r^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{r})(\vec{\omega}\cdot\vec{r})}{\omega^2r^2-(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2}\vec{v} \\ &= \frac{\alpha\omega r^2-\alpha r(\hat{\theta}\cdot\hat{r})\omega r(\hat{\theta}\cdot\hat{r})}{\omega^2r^2-\omega^2r^2(\hat{\theta}\cdot\hat{r})^2}\vec{v} = \frac{\alpha\omega r^2}{\omega^2r^2}\vec{v} = \frac{\alpha}{\omega}(\omega\hat{\theta}\times\vec{r}) = \alpha\hat{\theta}\times\vec{r} \\ &= \vec{\alpha}\times\vec{r}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Percepatan sentripetalnya adalah

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\perp} &:= \vec{a}-\vec{a}_{//} = (\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v})-\vec{\alpha}\times\vec{r} \\ &= \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}-\omega^2\vec{r}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Apabila $\vec{\omega}$ tegak lurus dengan $\vec{r}$, yaitu bahwa $\vec{\omega}\cdot\vec{r}=0$, maka

$$|\vec{a}_{//}| = |\alpha|r \quad \text{dan} \quad \vec{a}_{\perp} = -\omega^2\vec{r}. \tag{2.33}$$

Momentum sudut partikel tersebut adalah

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m\vec{r}\times\vec{v} = m\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m(r^2\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}) = m(r^2\omega^i-\omega^j r_j r^i)\vec{e}_i \\ &= m(r^2\delta^i{}_j - r^i r_j)\omega^j\vec{e}_i = I^i{}_j\omega^j\vec{e}_i = L^i\vec{e}_i,\end{aligned} \tag{2.34}$$

sehingga

$$L^i = I^i{}_j\omega^j \tag{2.35}$$

di mana

$$I^i{}_j := m(r^2\delta^i{}_j - r^i r_j) \tag{2.36}$$

merupakan komponen dari tensor momen inersia $\overleftrightarrow{I} := I^i{}_j\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j$.

Tenaga kinetik partikel tersebut adalah

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m|\vec{\omega}\times\vec{r}|^2 = \frac{1}{2}m(\omega^2r^2-(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2) = \frac{1}{2}m(\omega^i\omega_i r^2-\omega_i r^i\omega^j r_j) \\ &= \frac{1}{2}m\omega_i(\delta^i{}_j r^2 - r^i r_j)\omega^j = \frac{1}{2}\omega_i I^i{}_j\omega^j.\end{aligned} \tag{2.37}$$

2.3 Mekanika Sistem Partikel Klasik

Andaikan ada sebuah sistem N buah partikel klasik yang masing-masing bermassa $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_N$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots, \vec{r}_N$ pada waktu t. Pusat massa sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{R} := \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{r}_j, \tag{2.38}$$

di mana $M := \sum_{j=1}^{N} m_j$.

Andaikan massa m_j konstan untuk setiap $j \in \{1, 2, 3, \cdots, N\}$, maka kecepatan pusat massa dari sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{V} := \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j, \tag{2.39}$$

di mana $\vec{v}_j := \dot{\vec{r}}_j$. Tentu saja percepatan pusat massanya adalah

$$\vec{A} := \dot{\vec{V}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j, \tag{2.40}$$

di mana $\vec{a}_j := \dot{\vec{v}}_j$

Momentum linier partikel ke-j adalah

$$\vec{p}_j := m_j \vec{v}_j. \tag{2.41}$$

Momentum total dari sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{P} := \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j. \tag{2.42}$$

Dari persamaan (2.39), (2.41), dan (2.42), diperoleh

$$\vec{V} = \vec{P}/M \quad \text{alias} \quad \vec{P} = M\vec{V}. \tag{2.43}$$

Momentum sudut partikel ke-j adalah

$$\vec{L}_j := \vec{r}_j \times \vec{p}_j. \tag{2.44}$$

Momentum sudut total dari sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{L} := \sum_{j=1}^{N} \vec{L}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j. \tag{2.45}$$

Andaikan posisi partikel ke-j relatif terhadap pusat massa adalah $\vec{r}'_j := \vec{r}_j - \vec{R}$, maka kecepatan partikel tersebut relatif terhadap pusat massa adalah $\vec{v}'_j := \dot{\vec{r}}_j = \vec{v}_j - \vec{V}$, sehingga

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{j=1}^{N} m_j (\vec{R} + \vec{r}'_j) \times (\vec{V} + \vec{v}'_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} m_j (\vec{R} \times \vec{V} + \vec{R} \times \vec{v}'_j + \vec{r}'_j \times \vec{V} + \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j) \\ &= M\vec{R} \times \vec{V} + \vec{R} \times \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}'_j + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}'_j \times \vec{V} + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Karena $\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}'_j = \sum_{j=1}^{N} m_j(\vec{v}_j - \vec{V}) = \vec{0}$ dan $\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}'_j = \sum_{j=1}^{N} m_j(\vec{r}_j - \vec{R}) = \vec{0}$, maka persamaan (2.46) menjadi

$$\vec{L} = M\vec{R} \times \vec{V} + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j, \tag{2.47}$$

yang berarti bahwa momentum sudut total adalah jumlahan dari momentum sudut pusat massa dengan jumlah momentum sudut relatif terhadap pusat massa.

Tenaga kinetik partikel ke-j adalah

$$T_j := \frac{1}{2} m_j v_j^2. \tag{2.48}$$

Tenaga kinetik total dari sistem partikel tersebut adalah

$$\begin{aligned} T &:= \sum_{j=1}^{N} T_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j v_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j |\vec{V} + \vec{v}'_j|^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j (V^2 + v'^2_j + 2\vec{V}\cdot\vec{v}'_j) \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j v'^2_j + \vec{V}\cdot\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}'_j = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j v'^2_j, \end{aligned} \tag{2.49}$$

yang berarti bahwa tenaga kinetik total adalah jumlahan dari tenaga kinetik pusat massa dengan jumlah tenaga kinetik relatif terhadap pusat massa.

Gaya yang dialami oleh partikel ke-i adalah

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^e \tag{2.50}$$

di mana $\vec{F}_{ij}$ adalah gaya interaksi yang dialami oleh partikel ke-i akibat partikel ke-j, serta $\vec{F}_i^e$ adalah gaya luar yang dialami oleh partikel ke-i. Gaya interaksi ini memiliki sifat $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ sehingga $\vec{F}_{ii} = \vec{0}$.

Gaya total yang bekerja pada sistem N partikel tersebut adalah

$$\vec{F} := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^e. \tag{2.51}$$

Karena $\sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \sum_{j,i=1}^{N} \vec{F}_{ji}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}$, maka persamaan (2.51) menjadi

$$\vec{F} = \vec{F}^e \tag{2.52}$$

di mana $\vec{F}^e := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^e$ adalah total gaya luar yang bekerja pada sistem partikel.

Dari persamaan (2.52), tampak jelas bahwa gaya total yang dialami oleh sistem partikel adalah hanya gaya luar yang bekerja pada sistem partikel tersebut, sedangkan gaya interaksi antar-partikel sama sekali tidak mempengaruhi gaya totalnya.

Tentu saja, gaya yang dialami oleh partikel ke-i adalah $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$, sehingga gaya total yang bekerja pada sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{F} := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \dot{\vec{P}} = \vec{F}^e, \tag{2.53}$$

sehingga apabila total gaya luar tidak ada, maka momentum linier total kekal.

Torsi total yang dialami oleh sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{\tau} := \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^e \right) = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e. \tag{2.54}$$

Tentu saja, pada persamaan (2.54),

$$\sum_{i,j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{j,i=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}. \tag{2.55}$$

Apabila $\vec{F}_{ij}$ memenuhi *hukum kuat interaksi*, maka $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$, sedangkan apabila $\vec{F}_{ij}$ *hukum lemah interaksi*, maka $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \neq \vec{0}$. Apabila $\vec{F}_{ij}$ pada persamaan (2.55) memenuhi hukum kuat interaksi, maka $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$, yang menyebabkan persamaan (2.55) menjadi $\sum_{i,j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$, sehingga persamaan (2.54) menjadi

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}^e \tag{2.56}$$

di mana $\vec{\tau}^e := \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e$ adalah total torsi luar yang dialami oleh sistem partikel tersebut.

Tentu saja torsi yang dialami oleh partikel ke-i adalah $\vec{\tau}_i = \dot{\vec{L}}_i$, sehingga torsi total yang dialami oleh sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{\tau} := \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{L}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \dot{\vec{L}} = \vec{\tau}^e, \tag{2.57}$$

sehingga apabila total torsi luar tidak ada, maka momentum sudut total kekal.

Bab 3

Mekanika Lagrange

3.1 Persamaan Lagrange Mekanika Klasik Non-Relativistik

Dalam bab ini, didefinisikan $\dot{Q} := dQ/dt$ untuk sebarang besaran Q.

Andaikan ada N buah partikel yang masing-masing bermassa $m_1, \cdots, m_N$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N$ yang masing-masing bergantung secara eksplisit pada $n \leq 3N$ buah koordinat umum, yaitu $q^1, \cdots, q^n$ dan waktu t, di mana q^i bergantung pada t untuk semua $i \in \{1, \cdots, n\}$, maka total usaha maya yang dikerjakan oleh sistem partikel tersebut adalah

$$\delta W := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i, \tag{3.1}$$

di mana secara khusus $\vec{F}_i := m_i \ddot{\vec{r}}_i$ merupakan gaya yang bekerja pada partikel ke-i. Karena selalu $\delta t = 0$

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j, \tag{3.2}$$

maka

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q^j \tag{3.3}$$

di mana

$$Q_j := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \tag{3.4}$$

merupakan komponen gaya umum pada koordinat q^j.

Tentu saja,

$$\vec{v}_i := \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \tag{3.5}$$

sehingga

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j}. \tag{3.6}$$

Selain itu,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = \sum_{k=1}^{n}\left(\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q^j}. \tag{3.7}$$

Dari persamaan (3.4), diperoleh

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j}\right) - \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j}\right). \tag{3.8}$$

Substitusi (3.6) dan (3.7) ke persamaan (3.8) menghasilkan

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}^j}\right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q^j}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T_i}{\partial q^j}\right), \tag{3.9}$$

di mana $T_i := \frac{1}{2}m_i v_i^2$ adalah tenaga kinetik milik partikel ke-i, dengan $v_i := |\vec{v}_i|$ adalah kelajuan milik partikel ke-i.

Karena $T := \sum_{i=1}^{N} T_i$ adalah tenaga kinetik total milik N buah partikel tersebut, maka persamaan (3.9) menjadi

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j}. \tag{3.10}$$

Apabila $\vec{F}_i$ merupakan gaya konservatif, maka tentu saja $\vec{F}_i = -\nabla_i V$ untuk semua tenaga potensial V, di mana $\nabla_i := \sum_{j=1}^{3} \vec{e}^j \partial/\partial {q^j}_i$, sehingga persamaan (3.4) menjadi

$$Q_j := -\sum_{i=1}^{N} \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = -\frac{\partial V}{\partial q^j}. \tag{3.11}$$

Apabila V hanya bergantung pada koordinat umum $q^1, \cdots, q^n$ dan waktu t saja, maka persamaan (3.10) menjadi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \tag{3.12}$$

di mana $L := T - V$ adalah *Lagrangian* sistem, yang tentu saja bergantung pada $q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n, t$.

Momentum umum alias *momentum konjugat* didefinisikan sebagai

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}, \tag{3.13}$$

sehingga substitusi persamaan (3.13) ke persamaan (3.12) menghasilkan

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q^j}. \tag{3.14}$$

Selanjutnya,

$$\dot{L} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j\right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.15}$$

Substitusi persamaan (3.14) dan (3.13) ke persamaan (3.15), menghasilkan

$$\dot{L} = \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{p}_j \dot{q}^j + p_j \ddot{q}^j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(p_j \dot{q}^j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.16}$$

alias

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.17}$$

di mana $H := \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}^j - L$ adalah *Hamiltonian* sistem yang secara umum bergantung pada $q^1, \cdots, q^n$, $p_1, \cdots, p_n, t$. Tentu saja, dari persamaan (3.14), diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^j, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.18}$$

Selanjutnya, apabila ada besaran fisis A yang secara eksplisit bergantung pada $q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n, t$, maka

$$\dot{A} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial A}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{3.19}$$

Substitusi persamaan (3.18) ke persamaan (3.19) menghasilkan

$$\dot{A} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q^j} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{3.20}$$

Apabila didefinisikan kurung Poisson antara besaran fisis A dan B sebagai

$$[A, B] := \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q^j} \right), \tag{3.21}$$

maka persamaan (3.20) menjadi

$$\dot{A} = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{3.22}$$

3.2 Kalkulus Variasi

Andaikan ada besaran $\mathcal{L}$ yang bergantung pada $q^1, \cdots, q^n$, $\partial_1 q^1, \cdots, \partial_1 q^n, \cdots, \cdots, \cdots$, $\partial_m q^1, \cdots, \partial_m q^n$, $t^1, \cdots, t^m$, di mana $\partial_j q^i := \partial q^i / \partial t^j$. Kita akan membuat nilai

$$I := \int_{t_-^m}^{t_+^m} \cdots \int_{t_-^1}^{t_+^1} \mathcal{L}\, dt^1 \cdots dt^m \tag{3.23}$$

menjadi stasioner, yaitu bahwa $\delta I = 0$, dengan menganggap $\delta t^j = 0$, serta

$$(\delta q^i)_{t^1,\dots,t^m}(t^1, \cdots, t^{j-1}, t_-^j, t^{j+1}, \cdots, t^m) = (\delta q^i)_{t^1,\dots,t^m}(t^1, \cdots, t^{j-1}, t_+^j, t^{j+1}, \cdots, t^m) = 0 \tag{3.24}$$

untuk setiap $j \in \{1, \cdots, m\}$, sehingga

$$\int_{t_-^m}^{t_+^m} \cdots \int_{t_-^1}^{t_+^1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i / \partial t^j)} \delta \frac{\partial q^i}{\partial t^j} \right) \, dt^1 \cdots dt^m = 0. \tag{3.25}$$

Karena $\delta(\partial q^i/\partial t^j) = \partial(\delta q^i)/\partial t^j$, maka persamaan (3.25) menjadi

$$\int_{t_-^m}^{t_+^m} \cdots \int_{t_-^1}^{t_+^1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i / \partial t^j)} \right) \delta q^i \, dt^1 \cdots dt^m = 0. \tag{3.26}$$

Karena persamaan (3.26) berlaku untuk sebarang variasi dan batas-batas integrasi, maka persamaan (3.26) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i / \partial t^j)} = 0. \tag{3.27}$$

Apabila $m = 1$, $t^1 = t$, dan $\mathcal{L} = L$, maka persamaan (3.27) menjadi

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = 0 \tag{3.28}$$

yang ternyata serupa dengan persamaan (3.12).

Andaikan ada p buah kendala, yaitu $\varphi_k = 0$, dengan $\varphi_k \mapsto (q^1, \cdots, q^n, t^1, \cdots, t^m)$, untuk semua $k \in \{1, \cdots, p\}$, maka Lagrangian $\mathcal{L}$ pada persamaan (3.27) dapat diganti dengan $\mathcal{L} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_k$, dengan λ_k adalah *pengali Lagrange*, sehingga persamaan (3.27) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i / \partial t^j)} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^i} = 0. \tag{3.29}$$

Diferensial dari persamaan $\varphi_k = 0$ adalah

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial t^j} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t^j} = 0, \tag{3.30}$$

sehingga persamaan (3.30) dapat diringkas bentuknya menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \frac{\partial q^i}{\partial t^j} + b_{kj} = 0, \tag{3.31}$$

di mana $a_{ki} := \partial \varphi_k / \partial q^i$ dan $b_{kj} := \partial \varphi_k / \partial t^j$, sehingga persamaan (3.29) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i / \partial t^j)} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_{ki} = 0. \tag{3.32}$$

Apabila pada persamaan (3.31) tidak diketemukan φ_k yang memenuhi persamaan $\partial \varphi_k / \partial q^i = a_{ki}$ dan $\partial \varphi_k / \partial t^j = b_{kj}$, maka bentuk diferensial pada persamaan (3.31) disebut *diferensial tak eksak*. Oleh karena itu, untuk mencari $q^1, \cdots, q^n \mapsto (t^1, \cdots, t^m)$ dan $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, diperlukan n buah persamaan (3.32) dan mp buah persamaan (3.31).

Bab 4

Mekanika Klasik Relativistik

4.1 Kinematika dan Dinamika Relativistik Klasik

Dalam bab ini, didefinisikan $\dot{Q} := dQ/d\tau$ untuk sebarang besaran Q.

Andaikan ada sebuah kereta yang melaju dengan kelajuan v selama selang waktu dt (menurut pengamat di stasiun) pada sebuah rel yang lurus, sementara pada kereta tersebut dipasang sepasang cermin yang saling berhadapan dengan arah hadap yang tegak lurus dengan rel tadi. Dari cermin pertama memancar sinar dengan kelajuan $c := 299792458\,\mathrm{m/s}$ menuju ke cermin kedua selama selang waktu $d\tau$ menurut kereta yang melaju tadi, maka menurut pengamat di stasiun, sinar tadi pasti bergerak dengan kelajuan c selama selang waktu dt, sedemikian rupa sehingga (dari teorema Pythagoras)

$$(c\,dt)^2 = (v\,dt)^2 + (c\,d\tau)^2 \tag{4.1}$$

alias

$$dt = \gamma\,d\tau \tag{4.2}$$

di mana

$$\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{4.3}$$

serta τ merupakan swa-waktu milik kereta tadi, sedangkan t merupakan waktu sejati yang diamati oleh pengamat yang melihat kereta yang bergerak dengan kelajuan v. Persamaan (4.2) dapat ditulis sebagai

$$\dot{t} = \gamma, \tag{4.4}$$

dengan menganggap bahwa t bergantung pada τ.

Soal 4.1.1. Andaikan diketahui sebuah partikel klasik berkecepatan $\vec{v} \mapsto t$ pada waktu t, maka carilah kaitan antara waktu t dengan swa-waktu-nya τ dengan cara menyelesaikan persamaan (4.4), yaitu mencari $t \mapsto \tau$.

Andaikan ada partikel klasik terletak pada posisi $\vec{r}$ pada waktu t dan pada swa-waktu τ, maka kecepatan partikel tersebut adalah

$$\vec{v} := \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{4.5}$$

sedangkan swa-kecepatan-nya adalah

$$\vec{u} := \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \vec{v}\dot{t} = \vec{v}\gamma. \tag{4.6}$$

Andaikan partikel tersebut bermassa rehat m_0, maka momentum linier partikel tersebut didefinisikan sebagai

$$\vec{p} := m_0\vec{u} = m_0\vec{v}\gamma = m\vec{v} \tag{4.7}$$

di mana $m := m_0\gamma$ merupakan massa bergerak partikel tersebut, yaitu massa yang diamati oleh pengamat yang melihat partikel tersebut bergerak dengan kelajuan v. Sedangkan gaya yang dikerjakan partikel tersebut tentu saja adalah

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0\left(\vec{a}\gamma + \vec{v}\frac{d\gamma}{dt}\right) \tag{4.8}$$

di mana $\vec{a} := d\vec{v}/dt$ adalah percepatan partikel tersebut. Tentu saja,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}, \tag{4.9}$$

sehingga persamaan (4.8) menjadi

$$\vec{F} = m_0\left(\vec{a}\gamma + \vec{v}\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right). \tag{4.10}$$

Andaikan $\vec{a}_{//} := (\vec{a}\cdot\hat{v})\hat{v}$ merupakan percepatan tangensial (longitudinal), serta $\vec{a}_\perp := \vec{a} - \vec{a}_{//}$ merupakan percepatan sentripetal (transversal), maka tentu saja $\vec{a} = \vec{a}_{//} + \vec{a}_\perp$, sehingga

$$\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{a}) = \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{a}_{//}) = v\hat{v}(\vec{v}\cdot\hat{v})(\vec{a}\cdot\hat{v}) = v^2\vec{a}_{//}. \tag{4.11}$$

Persamaan (4.10) menjadi

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m_0\left((\vec{a}_{//} + \vec{a}_\perp)\gamma + \gamma^3 v^2\vec{a}_{//}/c^2\right)\\ &= m_{//}\vec{a}_{//} + m_\perp\vec{a}_\perp\end{aligned} \tag{4.12}$$

di mana $m_{//} := m_0\gamma^3$ merupakan *massa longitudinal*, sedangkan $m_\perp := m_0\gamma$ merupakan *massa transversal*, karena $1 + \gamma^2v^2/c^2 = \gamma^2$.

Tenaga kinetik partikel tersebut adalah

$$\begin{aligned}T &= \int_{\vec{0}}^{\vec{p}} \vec{v}\cdot d\vec{p} = \vec{v}\cdot\vec{p}|_{\vec{0}}^{\vec{v}} - \int_{\vec{0}}^{\vec{v}} \vec{p}\cdot d\vec{v} = \gamma m_0 v^2 - m_0\int_0^v \gamma v\, dv\\ &= \gamma m_0c^2(1-\gamma^{-2}) - m_0c^2\int_1^\gamma \gamma^{-2}d\gamma\\ &= \gamma m_0c^2(1-\gamma^{-2}) + m_0c^2(\gamma^{-1}-1)\\ &= (\gamma-1)m_0c^2 = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0,\end{aligned} \tag{4.13}$$

di mana $\mathcal{E} := \gamma m_0c^2 = mc^2$ merupakan tenaga relativistik partikel tersebut, sedangkan $\mathcal{E}_0 := m_0c^2$ merupakan tenaga rehat partikel tersebut.

Kaitan antara tenaga relativistik $\mathcal{E}$ dan momentum $\vec{p}$ adalah sebagai berikut. Dari kaitan $\mathcal{E} = \gamma m_0 c^2$ dan $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$, kita akan mengeliminasi γ (otomatis $\vec{v}$ juga). Mula-mula, kita peroleh $p^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2 = m_0^2 c^2(\gamma^2 - 1)$. Lantas, $\gamma^2 = \mathcal{E}^2/(m_0c^2)^2 = p^2/(m_0^2c^2) + 1$ alias

$$\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \quad \text{alias} \quad \mathcal{E}^2 = (pc)^2 + \mathcal{E}_0^2. \tag{4.14}$$

Dari persamaan (2.21) dan (4.12), diperoleh bahwa daya yang dimiliki partikel tersebut adalah

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = m_{//} a_{//} v, \tag{4.15}$$

di mana $a_{//} := \vec{a} \cdot \hat{v}$ adalah perlajuan milik partikel tersebut, sebab $\vec{a}_\perp \cdot \vec{v} = 0$.

4.2 Gerak Relatif

Andaikan pada swa-waktu τ diketahui sebuah partikel klasik terletak pada posisi $\vec{r}$ menurut titik acuan O, serta posisi $\vec{r}'$ menurut titik acuan O', sedangkan posisi O' menurut O adalah $\vec{R}$. Tentu saja, kecepatan O' menurut O adalah $\vec{V} := d\vec{R}/dt$. Waktu sejati menurut O adalah t, dan menurut O' adalah t', sedemikian rupa sehingga $\dot{t} = \gamma$ dan $\dot{t}' = \gamma'$, di mana $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ dan $\gamma' := 1/\sqrt{1-(v'/c)^2}$, dengan $v := |\vec{v}|$ adalah kelajuan partikel tersebut menurut O, $v' := |\vec{v}'|$ adalah kelajuan partikel tersebut menurut O', $\vec{v} := d\vec{r}/dt$ adalah kecepatan partikel tersebut menurut O, dan $\vec{v}' := d\vec{r}'/dt'$ adalah kecepatan partikel tersebut menurut O'.

Andaikan $v = c$, maka tentu saja $v' = c$ juga, sehingga

$$v'^2 - c^2 = -c^2/\gamma'^2 = -c^2(d\tau/dt')^2 \quad \text{dan} \quad v^2 - c^2 = -c^2/\gamma^2 = -c^2(d\tau/dt)^2 \tag{4.16}$$

alias

$$|d\vec{r}'|^2 - c^2dt'^2 = |d\vec{r}|^2 - c^2dt^2 = -c^2d\tau^2 = |d\overrightarrow{s}|^2, \tag{4.17}$$

di mana $\overrightarrow{s} := \vec{r} + ict\hat{x}_0 \equiv \vec{r}' + ict'\hat{x}_0$ adalah vektor-4 posisi di ruang-waktu, yang tidak tergantung pengamat, sedemikian rupa sehingga[1]

$$|\hat{x}_0| = 1 \quad \text{dan} \quad \hat{x}_0 \cdot d\vec{r} = \hat{x}_0 \cdot d\vec{r}' = 0, \tag{4.18}$$

di mana $\hat{x}_0$ adalah vektor konstan.

Pergeseran $d\vec{r}$ dan $d\vec{r}'$ dapat dipisahkan menjadi komponen sejajar dan tegak lurusnya dengan $\vec{V}$, yaitu $d\vec{r} = d\vec{r}_{//} + d\vec{r}_\perp$ dan $d\vec{r}' = d\vec{r}'_{//} + d\vec{r}'_\perp$, di mana $d\vec{r}_{//} := d\vec{r} \cdot \hat{V}\hat{V}$, $d\vec{r}_\perp := d\vec{r} - d\vec{r}_{//}$, $d\vec{r}'_{//} := d\vec{r}' \cdot \hat{V}\hat{V}$, dan $d\vec{r}'_\perp := d\vec{r}' - d\vec{r}'_{//}$. Karena

$$d\vec{r}'_\perp = d\vec{r}_\perp, \tag{4.19}$$

maka persamaan (4.17) menjadi

$$|d\vec{r}'_{//}|^2 - c^2dt'^2 = |d\vec{r}_{//}|^2 - c^2dt^2, \tag{4.20}$$

[1]Notasi $\overrightarrow{s}$ adalah vektor-4 yang membedakan dengan vektor-3 $\vec{s}$. Vektor-4 $\overrightarrow{A}$ akan dibedakan dengan vektor-3 $\vec{A}$.

alias

$$(d\vec{r}'_{//}\cdot\hat{V})^2 - c^2 dt'^2 = (d\vec{r}_{//}\hat{V})^2 - c^2 dt^2, \tag{4.21}$$

Apabila $d\vec{r}' = \vec{0}$, maka haruslah $d\vec{r} = \vec{V}dt$ sehingga $d\vec{r}'_{//} = \vec{0}$ dan $d\vec{r}_{//} = \vec{V}dt$. Apabila $d\vec{r} = \vec{0}$, maka haruslah $d\vec{r}' = -\vec{V}dt'$ sehingga $d\vec{r}_{//} = \vec{0}$ dan $d\vec{r}'_{//} = -\vec{V}dt'$. Oleh karena itu, haruslah

$$d\vec{r}'_{//} = \Gamma(d\vec{r}_{//} - \vec{V}dt) \quad \text{dan} \quad d\vec{r}_{//} = \Gamma'(d\vec{r}'_{//} + \vec{V}dt'), \tag{4.22}$$

di mana Γ dan Γ' adalah *faktor Lorentz* yang harus bernilai positif.

Pengalikan titik dengan $\hat{V}$ pada persamaan (4.22) menghasilkan

$$d\vec{r}'_{//}\cdot\hat{V} = \Gamma(d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} - V\,dt) \quad \text{dan} \quad d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} = \Gamma'(d\vec{r}'_{//}\cdot\hat{V} + V\,dt'), \tag{4.23}$$

sehingga

$$d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} = \Gamma'(\Gamma(d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} - V\,dt) + V\,dt') \tag{4.24}$$

lalu

$$dt' = \frac{1}{V}\left(\left(\frac{1}{\Gamma'} - \Gamma\right)d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} + \Gamma V\,dt\right). \tag{4.25}$$

Dengan memasukkan nilai dt' dari persamaan (4.25) dan $d\vec{r}'\cdot\hat{V}$ dari persamaan (4.23) ke persamaan (4.21), serta dengan mengidentikkan koefisien dari $(d\vec{r}\cdot\hat{V})^2$, $(d\vec{r}\cdot\hat{V})dt$ dan dt^2, maka diperoleh

$$\Gamma = \Gamma' = 1/\sqrt{1-(V/c)^2}. \tag{4.26}$$

Dari persamaan (4.22) dan (4.19), serta persamaan (4.25) dan (4.26), diperoleh

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + (\Gamma - 1)d\vec{r}_{//} - \Gamma\vec{V}\,dt \tag{4.27}$$

dan

$$dt' = \Gamma(dt - d\vec{r}\cdot\vec{V}/c^2), \tag{4.28}$$

sehingga

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (\Gamma-1)\vec{v}_{//} - \Gamma\vec{V}}{\Gamma(1 - \vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{4.29}$$

Karena $\dot{t} = \gamma$ dan $\dot{t}' = \gamma'$, maka persamaan (4.28) menjadi

$$\gamma' = \Gamma\gamma(1 - \vec{v}\cdot\vec{V}/c^2). \tag{4.30}$$

Apabila massa rehat partikel tadi adalah m_0, serta momentum linier partikel tersebut teramati $\vec{p} = m_0\vec{v}\gamma$ di O, dan teramati $\vec{p}' = m_0\vec{v}'\gamma'$ di O', dengan mengalikan kedua ruas persamaan (4.29) dengan $m_0\gamma'$, maka diperoleh

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\Gamma-1)\vec{p}_{//} - \Gamma\vec{V}\mathcal{E}/c^2 \tag{4.31}$$

di mana $\vec{p}_{//} := \vec{p}\cdot\hat{V}\hat{V}$ dan $\mathcal{E} = m_0c^2\gamma$.

Dengan memanfaatkan persamaan (4.30), maka persamaan $\mathcal{E}' = m_0c^2\gamma'$ menjadi

$$\mathcal{E}' = \Gamma(\mathcal{E} - \vec{p}\cdot\vec{V}), \tag{4.32}$$

di mana $\mathcal{E} = m_0 c^2 \gamma$.

Dengan membagi kedua ruas persamaan (4.31) dengan m_0, serta mengingat $\vec{p}' = m_0 \vec{u}'$ dan $\vec{p} = m_0 \vec{u}$, di mana $\vec{u}' := \dot{\vec{r}}'$ dan $\vec{u} := \dot{\vec{r}}$, maka diperoleh

$$\vec{u}' = \vec{u} + (\Gamma - 1)\vec{u}_{//} - \Gamma \vec{V} \gamma, \tag{4.33}$$

dan persamaan (4.30) menjadi

$$\gamma' = \Gamma(\gamma - \vec{u} \cdot \vec{V}/c^2), \tag{4.34}$$

di mana $\vec{u}_{//} := \vec{u} \cdot \hat{V} \hat{V}$.

Karena $\mathcal{E} = mc^2$ dan $\mathcal{E}' = m'c^2$, di mana $m = m_0 \gamma$ dan $m' = m_0 \gamma'$, maka persamaan (4.31) menjadi

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\Gamma - 1)\vec{p}_{//} - \Gamma m \vec{V}, \tag{4.35}$$

dan persamaan (4.32) menjadi

$$m' = \Gamma(m - \vec{p} \cdot \vec{V}/c^2). \tag{4.36}$$

Pemetaan-pemetaan seperti $(d\vec{r}, dt) \mapsto (d\vec{r}', dt')$ yaitu persamaan (4.27) dan (4.28), lalu $(\vec{p}, \mathcal{E}) \mapsto (\vec{p}', \mathcal{E}')$ yaitu persamaan (4.31) dan (4.32), lalu $(\vec{u}, \gamma) \mapsto (\vec{u}', \gamma')$ yaitu persamaan (4.33) dan (4.34), lalu $(\vec{p}, m) \mapsto (\vec{p}', m')$ yaitu persamaan (4.35) dan (4.36), semuanya adalah contoh-contoh dari *transformasi Lorentz* dengan parameter $\vec{V}$, sedangkan pemetaan $\vec{v} \mapsto \vec{v}'$ yaitu persamaan (4.29) merupakan *kaedah penjumlahan Einstein* untuk kecepatan dengan parameter $\vec{V}$.

Persamaan (4.33) dapat ditulis kembali menjadi

$$u'^i \vec{e}_i = u^i \vec{e}_i + (\Gamma - 1) u^j V_j V^i \vec{e}_i / V^2 - \Gamma \gamma V^i \vec{e}_i, \tag{4.37}$$

dan persamaan (4.34) dapat ditulis kembali menjadi

$$\gamma' \vec{e}_0 = \Gamma(\gamma - u^j V_j / c^2) \vec{e}_0. \tag{4.38}$$

Persamaan (4.37) dapat ditulis per-komponen-nya menjadi

$$u'^i = u^i + (\Gamma - 1) u^j V_j V^i / V^2 - \Gamma \gamma V^i \tag{4.39}$$

alias (dengan menganggap $c\gamma =: u^0$ dan $c\gamma' =: u'^0$)

$$u'^i = (\delta^i{}_j + (\Gamma - 1) V^i V_j / V^2) u^j - (\Gamma V^i / c) u^0 \tag{4.40}$$

serta persamaan (4.38) menjadi

$$u'^0 = (-\Gamma V_j / c) u^j + \Gamma u^0. \tag{4.41}$$

Persamaan (4.40) dapat diringkas penulisannya menjadi

$$u'^i = \Lambda^i{}_j u^j + \Lambda^i{}_0 u^0, \tag{4.42}$$

dan persamaan (4.41) dapat diringkas penulisannya menjadi

$$u'^0 = \Lambda^0{}_j u^j + \Lambda^0{}_0 u^0, \tag{4.43}$$

di mana

$$\Lambda^i{}_j := \delta^i{}_j + (\Gamma - 1)V^i V_j / V^2, \qquad \Lambda^i{}_0 := -\Gamma V^i / c, \tag{4.44}$$

$$\Lambda^0{}_j := -\Gamma V_j / c, \qquad \text{dan} \qquad \Lambda^0{}_0 := \Gamma, \tag{4.45}$$

sehingga persamaan (4.42) dan (4.43) dapat dipadukan menjadi

$$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu \tag{4.46}$$

untuk setiap $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$, serta ν bergerak ke indeks $0, 1, 2, 3$.

Kedua ruas persamaan (4.46) dapat dikalikan dengan $\vec{e}_\mu$ kemudian dijumlahkan terhadap indeks μ, menjadi (dengan $\overrightarrow{u} := u^\rho \vec{e}_\rho$)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}' &:= u'^\mu \vec{e}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu \vec{e}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \delta^\nu{}_\rho u^\rho \vec{e}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (\vec{e}^\nu \cdot \vec{e}_\rho) u^\rho \vec{e}_\mu \\ &= (\Lambda^\mu{}_\nu \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}^\nu) \cdot (u^\rho \vec{e}_\rho) = \overleftrightarrow{\Lambda} \cdot \overrightarrow{u}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Tensor $\overleftrightarrow{\Lambda} := \Lambda^\mu{}_\nu \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}^\nu$ ini merupakan *tensor transformasi Lorentz*.

Karena $|\overrightarrow{u}'|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 = -c^2$, maka

$$\begin{aligned} u'^\mu u'_\mu = u^\nu u_\nu &\iff \Lambda^\mu{}_\rho u^\rho g_{\mu\sigma} u'^\sigma = u^\nu g_{\nu\rho} u^\rho \\ &\iff \Lambda^\mu{}_\rho u^\rho g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\alpha u^\alpha = u^\nu g_{\nu\rho} u^\rho \\ &\iff \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\alpha u^\rho u^\alpha = g_{\alpha\rho} u^\rho u^\alpha \\ &\iff \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\alpha = g_{\alpha\rho} \end{aligned} \tag{4.48}$$

yang merupakan syarat agar tensor $\overleftrightarrow{\Lambda}$ merupakan transformasi Lorentz.

Dari persamaan (4.44), (4.45), dan (4.47), diperoleh bentuk eksplisit dari tensor transformasi Lorentz, yaitu

$$\overleftrightarrow{\Lambda} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}^i + (\Gamma - 1)\hat{V} \otimes \hat{V} + \Gamma(\vec{e}_0 \otimes \vec{e}^0 - (\vec{V} \otimes \vec{e}^0 + \vec{e}_0 \otimes \vec{V})/c). \tag{4.49}$$

4.3 Panjang, Luas, dan Volume Relativistik

Panjang sebuah kurva $C \subset \mathbb{R}^3$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ adalah

$$L = \int_C \sqrt{(d\vec{r} \cdot \hat{v})^2/\gamma^2 + |d\vec{r} - d\vec{r} \cdot \hat{v}\hat{v}|^2} = \int_C \sqrt{|d\vec{r}|^2 - (d\vec{r} \cdot \vec{v})^2/c^2} \tag{4.50}$$

di mana $\vec{r} \in C$, $\hat{v} := \vec{v}/v$, $v := |\vec{v}|$, $\gamma := 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$, dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

Luas sebuah permukaan $S \subset \mathbb{R}^3$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ adalah

$$A = \int_S \sqrt{(d^2\vec{r} \cdot \hat{v})^2 + |d^2\vec{r} - d^2\vec{r} \cdot \hat{v}\hat{v}|^2/\gamma^2} = \int_S \sqrt{|d^2\vec{r}|^2 - |d^2\vec{r} \times \vec{v}|^2/c^2} \tag{4.51}$$

di mana $\vec{r} \in S$, $\hat{v} := \vec{v}/v$, $v := |\vec{v}|$, $\gamma := 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$, dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

Volume sebuah bangun ruang $W \subseteq \mathbb{R}^3$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ adalah

$$V = \int_W |d^3\vec{r}|/\gamma \tag{4.52}$$

di mana $\vec{r} \in W$, $\hat{v} := \vec{v}/v$, $v := |\vec{v}|$, $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

4.4 Bukti Relativitas Volume Sebarang Bangun Ruang

Volume sebuah partisi $d^3\vec{r} := dx \wedge dy \wedge dz$ dari bangun ruang $W \subseteq \mathbb{R}^3$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ adalah $d^3\vec{R} := dX \wedge dY \wedge dZ$ yang merupakan partisi dari bangun ruang $W' \subseteq \mathbb{R}^3$, sedemikian rupa

$$dX = (d\vec{r} + (1/\gamma - 1)d\vec{r}\cdot\hat{v}\hat{v})\cdot\hat{x} = dx + (1/\gamma - 1)d\vec{r}\cdot\hat{v}n_x, \tag{4.53}$$

$$dY = (d\vec{r} + (1/\gamma - 1)d\vec{r}\cdot\hat{v}\hat{v})\cdot\hat{y} = dy + (1/\gamma - 1)d\vec{r}\cdot\hat{v}n_y, \tag{4.54}$$

$$dZ = (d\vec{r} + (1/\gamma - 1)d\vec{r}\cdot\hat{v}\hat{v})\cdot\hat{z} = dz + (1/\gamma - 1)d\vec{r}\cdot\hat{v}n_z, \tag{4.55}$$

di mana $\vec{r} := (x, y, z) \in W$, $\vec{R} := (X, Y, Z) \in W'$, $\hat{v} := \vec{v}/v$, $v := |\vec{v}|$, $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, $\hat{z} := (0, 0, 1)$, dan $\hat{v} := (n_x, n_y, n_z)$.

Oleh karena itu,

$$d^3\vec{R} = (dx + (1/\gamma - 1)d\vec{r}\cdot\hat{v}n_x) \wedge (dy + (1/\gamma - 1)d\vec{r}\cdot\hat{v}n_y) \wedge (dz + (1/\gamma - 1)d\vec{r}\cdot\hat{v}n_z).$$

Karena $d\vec{r}\cdot\hat{v} = dx\, n_x + dy\, n_y + dz\, n_z$, maka

$$d^3\vec{R} = dx\wedge dy\wedge dz + (1/\gamma-1)[n_z dx\wedge dy\wedge(d\vec{r}\cdot\hat{v}) + n_y dx\wedge(d\vec{r}\cdot\hat{v})\wedge dz + n_x(d\vec{r}\cdot\hat{v})\wedge dy\wedge dz]$$

sebab $(d\vec{r}\cdot\hat{v}) \wedge (d\vec{r}\cdot\hat{v}) = 0$. Karena $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$, maka

$$d^3\vec{R} = dx \wedge dy \wedge dz + (1/\gamma - 1)(n_z^2 + n_y^2 + n_x^2)dx \wedge dy \wedge dz. \tag{4.56}$$

Karena $n_z^2 + n_y^2 + n_x^2 = 1$, maka

$$d^3\vec{R} = dx \wedge dy \wedge dz + (1/\gamma - 1)dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz/\gamma = d^3\vec{r}/\gamma \tag{4.57}$$

sesuai yang diharapkan.

Inilah relativitas volume untuk sebarang bangun ruang.

Bab 5

Elektrodinamika

5.1 Hukum Coulomb Non-Relativistik

Muatan listrik merupakan sebuah besaran skalar riil yang nilainya dapat positif maupun negatif, sedangkan massa merupakan sebuah besaran skalar riil tak negatif. Muatan listrik merupakan kelipatan bulat dari $\pm e$, di mana $e := 1,6(10^{-19})\,\mathrm{C}$ merupakan muatan elementer alias muatan satu buah proton.

Andaikan di suatu ruang hampa $\mathbb{R}^3$ hanya terdapat dua buah partikel, yaitu partikel ke-1 dan partikel ke-2. Secara non-relativistik, di ruang $\mathbb{R}^3$ tersebut, gaya yang dialami oleh partikel ke-1 yang bermassa m_1 dan bermuatan q_1 yang terletak pada posisi $\vec{r}_1$, akibat partikel ke-2 yang bermassa m_2 dan bermuatan q_2 yang terletak pada posisi $\vec{r}_2$, pada waktu t adalah

$$\vec{F}_{12} := m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+q_1\left(\frac{\kappa_e q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+\dot{\vec{r}}_1\times\frac{\kappa_m q_2\dot{\vec{r}}_2\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}\right) \tag{5.1}$$

di mana G adalah tetapan gravitasi umum, $\kappa_e := 1/(4\pi\epsilon_0)$ dan $\kappa_m := \mu_0/(4\pi)$, dengan ϵ_0 adalah permitivitas listrik ruang hampa, dan μ_0 adalah permeabilitas magnet ruang hampa. Gaya yang dialami oleh partikel ke-2 akibat partikel ke-1 adalah

$$\vec{F}_{21} := m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+q_2\left(\frac{\kappa_e q_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\dot{\vec{r}}_2\times\frac{\kappa_m q_1\dot{\vec{r}}_1\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}\right). \tag{5.2}$$

Ungkapan

$$F_{12}^C := \frac{\kappa_e q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \tag{5.3}$$

merupakan *gaya Coulomb* yang dialami oleh partikel ke-1 akibat partikel ke-2.

Apabila $m_1 = m_2 = 0$ serta $q_1 \neq 0$ dan $q_2 \neq 0$, maka persamaan (5.1) menjadi

$$\kappa_e(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+\kappa_m\dot{\vec{r}}_1\times(\dot{\vec{r}}_2\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)) = \vec{0} \tag{5.4}$$

alias

$$\kappa_e(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+\kappa_m((\dot{\vec{r}}_1\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2))\dot{\vec{r}}_2-(\dot{\vec{r}}_1\cdot\dot{\vec{r}}_2)(\vec{r}_1-\vec{r}_2)) = \vec{0} \tag{5.5}$$

alias

$$(\kappa_e-\kappa_m\dot{\vec{r}}_1\cdot\dot{\vec{r}}_2)(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+\kappa_m(\dot{\vec{r}}_1\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2))\dot{\vec{r}}_2 = \vec{0}, \tag{5.6}$$

serta, secara serupa, persamaan (5.2) menjadi

$$(\kappa_e - \kappa_m \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \kappa_m(\dot{\vec{r}}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))\dot{\vec{r}}_1 = \vec{0}. \tag{5.7}$$

Untuk mencari $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \mapsto t$, dibutuhkan persamaan (5.6) dan (5.7), yang memberikan kesimpulan bahwa meskipun gaya yang dialami oleh partikel ke-1 dan partikel ke-2 sama-sama nol, tetapi percepatan keduanya secara umum tidak nol.

5.2 Menentukan Lokasi tempat tidak Adanya Gaya Coulomb

Andaikan terdapat dua buah muatan listrik $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$. Andaikan lokasi tempat muatan uji $q \in \mathbb{R}$ tidak mengalami gaya Coulomb terletak pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Oleh karena itu, menurut hukum Coulomb, berlakulah kaitan

$$\kappa \frac{qq_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) + \kappa \frac{qq_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}(\vec{r} - \vec{r}_2) = \vec{0} \tag{5.8}$$

di mana didefinisikan $\kappa := 1/(4\pi\epsilon_0)$ dengan ϵ_0 adalah permitivitas listrik di ruang hampa $\mathbb{R}^3$.

Persamaan terakhir dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}) \tag{5.9}$$

sehingga haruslah dipenuhi

$$\vec{r}_2 - \vec{r} = k(\vec{r} - \vec{r}_1)\,\mathrm{sgn}(q_1/q_2) \tag{5.10}$$

di mana $k \in \mathbb{R}^+$.

Dari persamaan terakhir, diperoleh

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_2 + k\vec{r}_1\,\mathrm{sgn}(q_1/q_2)}{1 + k\,\mathrm{sgn}(q_1/q_2)}. \tag{5.11}$$

Untuk mencari k, maka dibutuhkan persamaan skalar yang diperoleh dari magnitudo persamaan kedua, yaitu

$$\frac{|q_1|}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} = \frac{|q_2|}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^2}. \tag{5.12}$$

Dengan memasukkan persamaan ketiga ke persamaan terakhir, diperoleh

$$k^2\,\mathrm{sgn}^2(q_1/q_2) = |q_2/q_1| \tag{5.13}$$

alias

$$k = \sqrt{|q_2/q_1|}\,\mathrm{sgn}(q_2/q_1). \tag{5.14}$$

Karena k tidak boleh negatif, maka

$$k = \sqrt{|q_2/q_1|}. \tag{5.15}$$

Dengan memasukkan persamaan terakhir ini ke persamaan keempat, diperoleh

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_2 + \sqrt{|q_2/q_1|}\vec{r}_1 \operatorname{sgn}(q_1/q_2)}{1 + \sqrt{|q_2/q_1|} \operatorname{sgn}(q_1/q_2)}. \tag{5.16}$$

Persamaan ini terbukti sahih untuk berbagai macam situasi.

5.3 Medan Listrik Non-Relativistik

Secara non-relativistik, medan listrik pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat sebuah titik bermuatan q' yang terletak di posisi $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ dalam ruang hampa adalah

$$\vec{E} = \frac{\kappa_e q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}') \tag{5.17}$$

di mana $\kappa_e := 1/(4\pi\epsilon_0)$, di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Secara non-relativistik pula, medan listrik pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat N buah titik bermuatan $q_1, \cdots, q_N$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}'_1, \cdots, \vec{r}'_N \in \mathbb{R}^3$ dalam ruang hampa adalah

$$\vec{E} = \kappa_e \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|^3}(\vec{r} - \vec{r}'_n). \tag{5.18}$$

Untuk agihan kontinyu, medan listrik pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat distribusi muatan berbentuk $D \subseteq \mathbb{R}^3$ di mana muatan dq' terletak di posisi $\vec{r}'$ dalam ruang hampa adalah

$$\vec{E} = \kappa_e \int_D \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq'. \tag{5.19}$$

Apabila D merupakan sebuah kurva yang memiliki distribusi rapat muatan kurva $\lambda' \mapsto \vec{r}'$, maka $dq' = \lambda'|d\vec{r}'|$. Apabila D merupakan sebuah permukaan yang memiliki distribusi rapat muatan permukaan $\sigma' \mapsto \vec{r}'$, maka $dq' = \sigma'|d^2\vec{r}'|$. Apabila D merupakan sebuah permukaan yang memiliki distribusi rapat muatan permukaan $\rho' \mapsto \vec{r}'$, maka $dq' = \rho'|d^3\vec{r}'|$.

5.4 Hukum Gauss Non-Relativistik

Andaikan ada sebuah volume berarah $V \subseteq \mathbb{R}^3$, sehingga batasnya berupa sebuah permukaan berarah, yaitu ∂V. Andaikan pula ada barisan muatan titik, yaitu $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ dan $q'_1, q'_2, q'_3, \cdots, q'_{n'}$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots, \vec{r}_n \in V$ dan $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_3, \cdots, \vec{r}'_{n'} \notin V$, sehingga vektor medan listrik pada titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat barisan muatan tersebut secara non-relativistik adalah

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \frac{\vec{r}-\vec{r}'_k}{|\vec{r}-\vec{r}'_k|^3}\right) \tag{5.20}$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa.

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d^2\vec{r} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \oint_{\partial V} \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}\cdot d^2\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \oint_{\partial V} \frac{\vec{r}-\vec{r}'_k}{|\vec{r}-\vec{r}'_k|^3}\cdot d^2\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \int_V \nabla\cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} d^3\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \int_V \nabla\cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'_k}{|\vec{r}-\vec{r}'_k|^3} d^3\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_j) d^3\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'_k) d^3\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n} q_j
\end{aligned} \tag{5.21}$$

karena

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_j) d^3\vec{r} = 1 \tag{5.22}$$

dan

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'_k) d^3\vec{r} = 0. \tag{5.23}$$

Di sini, $\delta^{(3)}$ adalah delta Dirac 3-dimensi.

Apabila $Q_{\text{in}} := \sum_{j=1}^{n} q_j$ adalah muatan yang seluruhnya terletak pada V, maka hukum Gauss non-relativistik dapat kita tuliskan sebagai

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d^2\vec{r} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}. \tag{5.24}$$

5.5 Potensial Listrik Non-Relativistik

Medan listrik non-relativistik $\vec{E}$ pada posisi $\vec{r}$ yang tampil pada persamaan (5.17) akibat sebuah partikel klasik bermuatan q' yang terletak pada posisi $\vec{r}'$ itu bersifat konservatif, yaitu bahwa

$$\oint_{\partial A} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \tag{5.25}$$

untuk sebarang luasan $A \subset \mathbb{R}^3$.

Menurut teorema Stokes, persamaan (5.25) setara dengan

$$\int_A (\nabla\times\vec{E})\cdot d^2\vec{r} = 0 \tag{5.26}$$

untuk sebarang luasan $A \subset \mathbb{R}^3$, sehingga

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}. \tag{5.27}$$

Penyelesaian persamaan (5.27) adalah

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \tag{5.28}$$

untuk suatu potensial listrik skalar φ, sehingga

$$\varphi = \frac{\kappa_e q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.29}$$

di mana $\kappa_e := 1/(4\pi\epsilon_0)$, di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik ruang hampa.

5.6 Tenaga Listrik Non-Relativistik

Tenaga potensial listrik yang timbul antara dua partikel bermuatan q dan q' yang terpisah pada jarak R adalah

$$V = \frac{\kappa q q'}{R} \tag{5.30}$$

di mana $\kappa := 1/(4\pi\epsilon_0)$, dan ϵ_0 merupakan permitivitas listrik ruang hampa.

Tenaga potensial listrik yang timbul oleh partikel-partikel bermuatan listrik $q_1, \cdots, q_n$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$ adalah

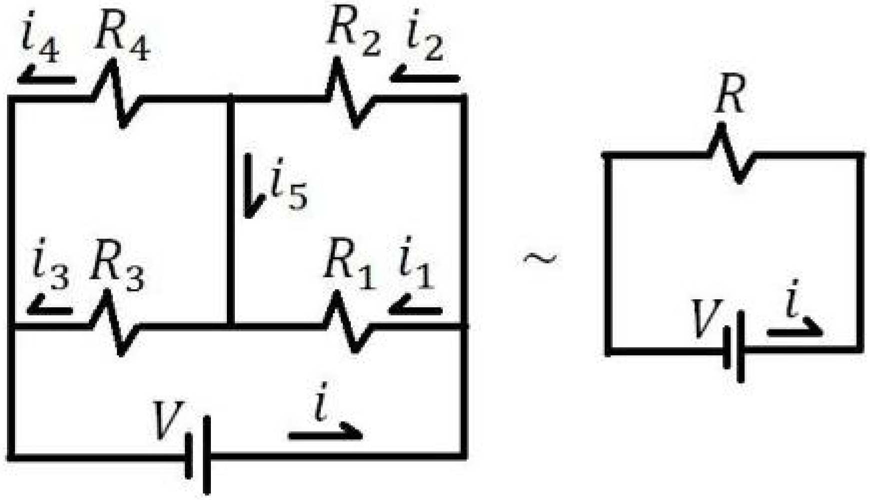
$$V = \frac{1}{2}\kappa \sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{5.31}$$

Tenaga potensial listrik yang dialami oleh partikel bermuatan listrik q yang terletak pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat oleh partikel-partikel bermuatan listrik $q_1, \cdots, q_n$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$ adalah

$$V = \kappa q \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \tag{5.32}$$

5.7 Rangkaian Semacam Jembatan Wheatstone

Pada gambar 5.1, tampak sebuah rangkaian listrik semacam jembatan Wheatstone, hanya bedanya, pada rangkaian ini, penggal kawat yang dilalui arus i_5 hambatannya nol. Rangkaian di sebelah kanan adalah rangkaian setara dari rangkaian yang di sebelah kiri. Andaikan telah diketahui R_1, R_2, R_3, R_4, dan V, kemudian akan dicari i, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, dan R. Dari hukum tegangan dan arus



Gambar 5.1: Rangkaian Semacam Jembatan Wheatstone

Kirchoff, diperoleh seperangkat sitem persamaan yaitu sebagai berikut.

$$-V + i_1 R_1 + i_3 R_3 = 0. \tag{5.33}$$
$$i_2 R_2 - i_1 R_1 = 0. \tag{5.34}$$
$$i_4 R_4 - i_3 R_3 = 0. \tag{5.35}$$
$$-i + i_1 + i_2 = 0. \tag{5.36}$$
$$-i_2 + i_4 + i_5 = 0. \tag{5.37}$$
$$-i_5 + i_3 - i_1 = 0. \tag{5.38}$$
$$i - i_4 - i_3 = 0. \tag{5.39}$$
$$-V + iR = 0. \tag{5.40}$$

Apabila sistem persamaan ini diselesaikan untuk i, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, dan R, maka antara lain diperoleh hasil-hasil sebagai berikut.

$$i = V \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}. \tag{5.41}$$
$$R = \frac{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}. \tag{5.42}$$
$$i_5 = V \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}. \tag{5.43}$$

Dari hasil tersebut, dapat ditarik kesimpulan bahwa ternyata hambatan pengganti R sistem tersebut tidak lain adalah $R = (R_1//R_2) + (R_3//R_4)$, serta bahwa ternyata i_5 akan bernilai nol apabila $R_1R_4 = R_2R_3$. Tegangan penggal kawat yang dilalui arus i_5 tentu saja selalu sama dengan nol, berapapun besarnya i_5, sebab pada penggal kawat tersebut hambatannya nol, sesuai dengan hukum Ohm.

5.8 Medan Listrik yang Ditimbulkan oleh Distribusi Muatan Berbentuk Penggal Garis Lurus Terhingga

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada muatan dengan distribusi berbentuk penggal garis terhingga dengan rapat muatan $\lambda \in \mathbb{R}$, yaitu

$$L(a,b) := \{(0,0,z') \mid a < z' < b\} \tag{5.44}$$

di mana $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$.

Posisi titik pada $L(a,b)$ adalah $\vec{r}' := z'\hat{z}$ di mana $\hat{z} := (0,0,1)$.

Posisi sebarang titik pada ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := \hat{x} l \cos\phi + \hat{y} l \sin\phi + \hat{z} z \tag{5.45}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, $l \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$.

Medan listrik yang terjadi di titik $\vec{r}$ tentu saja adalah

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dz' \tag{5.46}$$

di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Tentu saja,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\hat{x} l \cos\phi + \hat{y} l \sin\phi + \hat{z}(z - z')}{[l^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}. \tag{5.47}$$

Tentu saja,

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (l \cos\phi) \int_a^b \frac{dz'}{[l^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \tag{5.48}$$

Dengan substitusi $z - z' = l \tan\alpha$, maka diperoleh $-dz' = l \sec^2\alpha \, d\alpha$. Nilai α_a dan α_b didefinisikan sedemikian $z - a = l \tan\alpha_a$ dan $z - b = l \tan\alpha_b$, sehingga

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (l \cos\phi) \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \frac{-l \sec^2\alpha \, d\alpha}{l^3 \sec^3\alpha}. \tag{5.49}$$

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} (\cos\phi) \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \cos\alpha \, d\alpha. \tag{5.50}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} (\cos\phi)(\sin\alpha_a - \sin\alpha_b). \tag{5.51}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{z - a}{\sqrt{l^2 + (z - a)^2}} - \frac{z - b}{\sqrt{l^2 + (z - b)^2}} \right) \cos\phi. \tag{5.52}$$

Dengan penalaran yang sama, diperoleh

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{z - a}{\sqrt{l^2 + (z - a)^2}} - \frac{z - b}{\sqrt{l^2 + (z - b)^2}} \right) \sin\phi. \tag{5.53}$$

Komponen yang lain adalah

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{z-z'}{[l^2+(z-z')^2]^{3/2}}dz'. \tag{5.54}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \frac{l\tan\alpha}{l^3\sec^3\alpha}(-1)l\sec^2\alpha\,d\alpha. \tag{5.55}$$

$$E_z = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l}\int_{\alpha_a}^{\alpha_b}\sin\alpha\,d\alpha. \tag{5.56}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l}(\cos\alpha_b - \cos\alpha_a). \tag{5.57}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l}\left(\frac{l}{\sqrt{l^2+(z-b)^2}} - \frac{l}{\sqrt{l^2+(z-a)^2}}\right). \tag{5.58}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{l^2+(z-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{l^2+(z-a)^2}}\right). \tag{5.59}$$

Misalkan $b = L \to \infty$ dan $a = -L \to -\infty$, maka

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\lim_{L\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{l^2+(z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{l^2+(z+L)^2}}\right) = 0. \tag{5.60}$$

$$E_l := E_x\sec\phi = E_y\csc\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l}\lim_{L\to\infty}\left(\frac{z+L}{\sqrt{l^2+(z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{l^2+(z-L)^2}}\right). \tag{5.61}$$

$$E_l = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 l} \tag{5.62}$$

sesuai yang diharapkan.

5.9 Medan Listrik akibat Distribusi Muatan Berbentuk Lingkaran

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada muatan berdistribusi sebuah lingkaran dengan rapat muatan $\lambda \in \mathbb{R}$, yaitu

$$S^1(R) := \{R(\cos\phi', \sin\phi', 0) \mid \phi' \in \{0\} \cup (0, 2\pi)\} \tag{5.63}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari lingkaran tersebut.

Posisi titik pada $S^1(R)$ tentu saja adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}R\cos\phi' + \hat{y}R\sin\phi' \tag{5.64}$$

di mana $\phi' \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, $\hat{x} := (1,0,0)$, dan $\hat{y} := (0,1,0)$.

Posisi sebarang titik di ruang $\mathbb{R}^3$ tentu saja adalah

$$\vec{r} := \hat{x} l \cos\phi + \hat{y} l \sin\phi + \hat{z} z \tag{5.65}$$

di mana $\hat{z} := (0,0,1)$, $l \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = \hat{x}(l\cos\phi - R\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - R\sin\phi') + \hat{z}z \tag{5.66}$$

sehingga

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos(\phi - \phi') + z^2. \tag{5.67}$$

Medan listrik di titik $\vec{r}$ tentu saja adalah

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\phi' \tag{5.68}$$

alias

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{x}(l\cos\phi - R\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - R\sin\phi') + \hat{z}z}{[l^2 + R^2 - 2lR\cos(\phi - \phi') + z^2]^{3/2}} d\phi'. \tag{5.69}$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik di ruang hampa.

Untuk mempermudah analisa, kita ambil kasus khusus, yaitu $l = 0$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{-\hat{x}R\cos\phi' - \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi' = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z. \tag{5.70}$$

$$E_x = -\frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\phi' \, d\phi' = 0 = E_y. \tag{5.71}$$

$$E_z = \frac{\lambda R z}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{5.72}$$

Apabila $z = 0$, maka $E_z = 0$, sesuai yang diharapkan.

5.10 Medan Listrik akibat Muatan Berbentuk Sebagian Busur Lingkaran

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada muatan yang terdistribusi homogen dengan rapat muatan $\lambda \in \mathbb{R}$ berbentuk sebagian busur lingkaran, yaitu

$$C(R, \phi) := \{R(\cos\phi', \sin\phi', 0) \mid \phi' \in (0, \phi)\} \tag{5.73}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ dan $\phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$.

Posisi titik pada $C(R, \phi)$ adalah

$$\vec{r}' := R(\hat{x}\cos\phi' + \hat{y}\sin\phi') \tag{5.74}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$ dan $\hat{y} := (0,1,0)$.

Kita akan mencari medan listrik $\vec{E}$ di titik $\vec{r} := (0,0,0)$, yaitu

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\phi}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d\phi' \tag{5.75}$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik di ruang hampa.

Selanjutnya,

$$\vec{E} = -\frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\phi}\frac{\hat{x}\cos\phi' + \hat{y}\sin\phi'}{R^3}d\phi'. \tag{5.76}$$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^{\phi}(\hat{x}\cos\phi' + \hat{y}\sin\phi')d\phi' = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z. \tag{5.77}$$

Tentu saja, $E_z = 0$, sedangkan komponen yang lain adalah

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\sin\phi \tag{5.78}$$

dan

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(\cos\phi - 1). \tag{5.79}$$

Apabila $\phi = 0$ atau $\phi = 2\pi$, maka $E_x = E_y = 0$ sesuai dengan yang diharapkan.

5.11 Medan Listrik akibat Muatan Berbentuk Cakram

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah muatan yang berbentuk cakram dengan rapat muatan luasan $\sigma \in \mathbb{R}$ yang konstan, yaitu

$$D^2(R) := \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 < R^2\} \tag{5.80}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari cakram tersebut.

Posisi titik pada $D^2(R)$ adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}l'\cos\phi' + \hat{y}l'\sin\phi' \tag{5.81}$$

di mana $l' \in [0,R]$ dan $\phi' \in \{0\} \cup (0,2\pi)$, serta $\hat{x} := (1,0,0)$ dan $\hat{y} := (0,1,0)$.

Posisi titik di ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := \hat{x}l\cos\phi + \hat{y}l\sin\phi + \hat{z}z \tag{5.82}$$

di mana $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{(0,0,0)\}$, $\phi \in \{0\} \cup (0,2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$, serta $\hat{z} := (0,0,1)$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = \hat{x}(l\cos\phi - l'\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - l'\sin\phi') + \hat{z}z \tag{5.83}$$

sehingga

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = l^2 + l'^2 - 2ll'\cos(\phi - \phi') + z^2. \tag{5.84}$$

Medan listrik di titik $\vec{r}$ adalah

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\hat{x}(l\cos\phi - l'\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - l'\sin\phi') + \hat{z}z}{(l^2 + l'^2 - 2ll'\cos(\phi - \phi') + z^2)^{3/2}}l'd\phi'dl' \tag{5.85}$$

di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Integral terakhir susah untuk diselesaikan secara analitik sehingga untuk mudahnya, kita ambil kasus khusus $l = 0$, yaitu

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{-\hat{x}l'\cos\phi' - \hat{y}l'\sin\phi' + \hat{z}z}{(l'^2+z^2)^{3/2}}l'd\phi'dl' \tag{5.86}$$

alias

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{l'd\phi'dl'}{(l'^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^R\frac{l'dl'}{(l'^2+z^2)^{3/2}}. \tag{5.87}$$

Misalkan $l'' := \sqrt{l'^2+z^2}$, maka $l''^2 = l'^2+z^2$ sehingga dideferensialkan menjadi $l''dl'' = l'dl'$.

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_{|z|}^{\sqrt{R^2+z^2}}\frac{l''dl''}{l''^3} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_{|z|}^{\sqrt{R^2+z^2}} l''^{-2}dl'' \tag{5.88}$$

sehingga

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right). \tag{5.89}$$

Jika $R \to \infty$, maka

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\hat{z} \tag{5.90}$$

sesuai yang diharapkan.

5.12 Medan Listrik akibat Muatan Berbentuk Kulit Silinder

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah muatan yang berbentuk kulit silinder dengan rapat muatan luasan $\sigma \in \mathbb{R}$ yang seragam, yaitu

$$C(R,a,b) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = R^2,\ a < z < b\} \tag{5.91}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari $C(R,a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, dan $a < b$.

Tentu saja, posisi titik pada $C(R,a,b)$ adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}R\cos\phi' + \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}z' \tag{5.92}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, $\hat{z} := (0,0,1)$, $\phi' \in \{0\} \cup (0,2\pi)$, dan $z' \in (a,b)$.

Posisi titik di ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := \hat{x}l\cos\phi + \hat{y}l\sin\phi + \hat{z}z \tag{5.93}$$

di mana $l \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$, $\phi \in \{0\} \cup (0,2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$, sehingga

$$\vec{r} - \vec{r}' = \hat{x}(l\cos\phi - R\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - R\sin\phi') + \hat{z}(z - z') \tag{5.94}$$

lalu

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos(\phi-\phi') + (z-z')^2. \tag{5.95}$$

Medan listrik di titik $\vec{r}$ akibat muatan $C(R,a,b)$ adalah

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d\phi' dz. \tag{5.96}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{\hat{x}(l\cos\phi - R\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - R\sin\phi') + \hat{z}(z-z')}{(l^2+R^2-2lR\cos(\phi-\phi')+(z-z')^2)^{3/2}}d\phi' dz. \tag{5.97}$$

Karena integral rangkap terakhir ini sulit untuk diselesaikan secara analitik, maka kita ambil kasus khusus, yaitu $l=0$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{-\hat{x}R\cos\phi' - \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}(z-z')}{(R^2+(z-z')^2)^{3/2}}d\phi' dz'. \tag{5.98}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_a^b\frac{z-z'}{(R^2+(z-z')^2)^{3/2}}dz'. \tag{5.99}$$

Apabila $z-z' = R\tan\alpha$, maka $dz' = -R\sec^2\alpha\, d\alpha$, sehingga

$$\vec{E} = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_{\alpha_a}^{\alpha_b}\frac{R\tan\alpha}{R^3\sec^3\alpha}R\sec^2\alpha\, d\alpha \tag{5.100}$$

di mana $\tan\alpha_a := (z-a)/R$ dan $\tan\alpha_b := (z-b)/R$.

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_{\alpha_a}^{\alpha_b}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}(\cos\alpha_b - \cos\alpha_a). \tag{5.101}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+(z-b)^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right). \tag{5.102}$$

Apabila $a\to-\infty$ dan $b\to\infty$, maka tentu saja $\vec{E}=\vec{0}$ sesuai dengan yang diharapkan.

5.13 Medan Listrik akibat Muatan Berbentuk Kulit Bola

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada muatan berbentuk kulit bola

$$S^2(R) := \{\vec{r}\in\mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}| = R\} \tag{5.103}$$

yang memiliki rapat muatan luasan $\sigma\in\mathbb{R}$ yang seragam, di mana $R\in\{0\}\cup\mathbb{R}$.

Posisi titik pada $S^2(R)$ tentu saja adalah

$$\vec{r}' := R(\hat{x}\sin\theta'\cos\phi' + \hat{y}\sin\theta'\sin\phi' + \hat{z}\cos\theta') \tag{5.104}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, $\hat{z} := (0,0,1)$, $\theta' \in [0,\pi]$, $\phi' \in \{0\} \cup (0,2\pi)$.

Posisi sebarang titik di ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := r(\hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta) \tag{5.105}$$

di mana $r \in \{0\} \cup \mathbb{R}$, $\theta \in [0,\pi]$, dan $\phi \in \{0\} \cup (0,2\pi)$.

Selanjutnya, kita asumsikan $\theta = 0$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\hat{x}R\sin\theta'\cos\phi' - \hat{y}R\sin\theta'\sin\phi' + \hat{z}(r - R\cos\theta') \tag{5.106}$$

dan

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta'. \tag{5.107}$$

Medan medan listrik di titik $\vec{r}$ akibat muatan $S^2(R)$ adalah

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\sin\theta'\,d\phi'\,d\theta'. \tag{5.108}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_0^{\pi}\frac{r - R\cos\theta'}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta')^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'. \tag{5.109}$$

Apabila $l^2 := r^2+R^2-2rR\cos\theta'$, maka $2l\,dl = 2rR\sin\theta'\,d\theta'$, $r - R\cos\theta' = r-(r^2+R^2-l^2)/(2r)$, dan $\sin\theta'\,d\theta' = l\,dl/(rR)$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_{|r-R|}^{r+R}\frac{1}{l^3}\left(r - \frac{r^2+R^2-l^2}{2r}\right)\frac{l}{rR}dl. \tag{5.110}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\int_{|r-R|}^{r+R}\left[\left(r - \frac{r^2+R^2}{2r}\right)l^{-2} + \frac{1}{2r}\right]dl. \tag{5.111}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\left[\left(\frac{r^2+R^2}{2r} - r\right)l^{-1} + \frac{1}{2r}l\right]\Bigg|_{l=|r-R|}^{l=r+R}. \tag{5.112}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\left[\left(\frac{r^2+R^2}{2r} - r\right)\left(\frac{1}{r+R} - \frac{1}{|r-R|}\right) + \frac{1}{2r}(r+R-|r-R|)\right]. \tag{5.113}$$

Apabila $r < R$, maka $|r-R| = R-r$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\left[\left(\frac{r^2+R^2}{2r} - r\right)\left(\frac{1}{r+R} - \frac{1}{R-r}\right) + \frac{1}{2r}(r+R-(R-r))\right] = \vec{0}. \tag{5.114}$$

Apabila $r > R$, maka $|r-R| = r-R$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\left[\left(\frac{r^2+R^2}{2r} - r\right)\left(\frac{1}{r+R} - \frac{1}{r-R}\right) + \frac{1}{2r}(r+R-(r-R))\right] \tag{5.115}$$

alias

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}\frac{R^2}{r^2}. \tag{5.116}$$

Karena $\sigma = Q/(4\pi R^2)$, di mana Q adalah muatan total dari $S^2(R)$, maka

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{1}{\epsilon_0}\hat{z}\frac{R^2}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{z} \tag{5.117}$$

sesuai yang diharapkan.

5.14 Medan Magnet akibat Arus Berbentuk Ruas Garis

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah arus berbentuk ruas garis berarah, yaitu

$$L(a,b) := \{(0,0,z) \mid a < z < b\} \tag{5.118}$$

yang mengalir dalam arah $\hat{z} := (0,0,1)$, di mana $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$. Tentu saja, posisi titik pada $L(a,b)$ adalah $\vec{r}' := z'\hat{z}$ dengan $z' \in (a,b)$.

Posisi sebarang titik di ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := \hat{x} l \cos\phi + \hat{y} l \sin\phi + \hat{z} z \tag{5.119}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$, $\phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = \hat{x} l \cos\phi + \hat{y} l \sin\phi + \hat{z}(z - z') \tag{5.120}$$

sehingga $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = l^2 + (z - z')^2$.

Medan magnet di titik $\vec{r}$ tentu saja adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{dz' \hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{5.121}$$

di mana μ_0 adalah permeabilitas magnet di ruang hampa.

Tentu saja, $\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \hat{y} l \cos\phi - \hat{x} l \sin\phi$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\hat{y} l \cos\phi - \hat{x} l \sin\phi) \int_a^b \frac{dz'}{[l^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \tag{5.122}$$

Andaikan $z - z' = l \tan\alpha$ maka $dz' = -l \sec^2\alpha \, d\alpha$ sehingga

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\hat{y} l \cos\phi - \hat{x} l \sin\phi) \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \frac{-l \sec^2\alpha \, d\alpha}{l^3 \sec^3\alpha} \tag{5.123}$$

di mana $\tan\alpha_a := (z - a)/l$ dan $\tan\alpha_b := (z - b)/l$.

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi l} (\hat{y} \cos\phi - \hat{x} \sin\phi) \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \cos\alpha \, d\alpha. \tag{5.124}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} (\hat{y} \cos\phi - \hat{x} \sin\phi)(\sin\alpha_a - \sin\alpha_b). \tag{5.125}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} (\hat{y} \cos\phi - \hat{x} \sin\phi) \left(\frac{z - a}{\sqrt{l^2 + (z - a)^2}} + \frac{b - z}{\sqrt{l^2 + (z - b)^2}} \right). \tag{5.126}$$

Jika $a \to -\infty$ dan $b \to \infty$, maka

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} (\hat{y} \cos\phi - \hat{x} \sin\phi) \tag{5.127}$$

sesuai yang diharapkan.

5.15 Medan Magnet akibat Arus Berbentuk Lingkaran

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah arus berbentuk lingkaran, yaitu

$$S^1(R) := \{R(\cos\phi, \sin\phi, 0) \mid \phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)\} \tag{5.128}$$

yang mengalir ke arah meningkatnya nilai ϕ, di mana $R \in \mathbb{R}^+$.

Tentu saja, posisi titik pada $S^1(R)$ adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}R\cos\phi' + \hat{y}R\sin\phi' \tag{5.129}$$

di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, dan $\phi' \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$.

Posisi titik sepanjang arah $\hat{z} := (0, 0, 1)$ adalah $\vec{r} = z\hat{z}$ di mana $z \in \mathbb{R}$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\hat{x}R\cos\phi' - \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}z \tag{5.130}$$

dan $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = R^2 + z^2$. Demikian pula, $d\vec{r}' = R\,d\phi'(-\hat{x}\sin\phi' + \hat{y}\cos\phi')$.

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = (\hat{x}z\cos\phi' + \hat{y}z\sin\phi' + \hat{z}R)R\,d\phi'. \tag{5.131}$$

Medan magnet di titik $\vec{r}$ adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{S^1(R)} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{5.132}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{x}z\cos\phi' + \hat{y}z\sin\phi' + \hat{z}R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R\,d\phi'. \tag{5.133}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z}. \tag{5.134}$$

Apabila $z = 0$, maka $\vec{B} = \hat{z}\mu_0 I/(2R)$ sesuai dengan yang diharapkan.

5.16 Medan Magnet pada Solenoida

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah solenoida dengan N buah lilitan, yaitu

$$S(R, L) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2,\ 0 < z < L\} \tag{5.135}$$

di mana $R, L \in \mathbb{R}^+$.

Posisi titik pada $S(R, L)$ tentu saja adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}R\cos\phi' + \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}z' \tag{5.136}$$

di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, $\hat{z} := (0, 0, 1)$, $\phi' \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, dan $z' \in [0, L]$.

Posisi titik sepanjang sumbu solenoida tentu saja adalah $\vec{r} := \hat{z}z$ sehingga

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\hat{x}R\cos\phi' - \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}(z - z') \tag{5.137}$$

maka $|\vec{r}-\vec{r}'| = R^2 + (z-z')^2$ dan $d\vec{r}' = R\,d\phi'(-\hat{x}\sin\phi' + \hat{y}\cos\phi')$.

Medan magnet di titik $\vec{r}$ tersebut tentu saja adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{S(R,L)} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dn \tag{5.138}$$

di mana μ_0 adalah permeabilitas magnet di ruang hampa, I adalah besar arus listrik, dan $dn := (N/L)dz'$.

$$d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = [\hat{x}(z-z')\cos\phi' + \hat{y}(z-z')\sin\phi' + \hat{z}R]R\,d\phi'. \tag{5.139}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{4\pi L}\int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\hat{x}(z-z')\cos\phi' + \hat{y}(z-z')\sin\phi' + \hat{z}R}{[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}} R\,d\phi'\,dz'. \tag{5.140}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L} R^2 \hat{z}\int_0^L \frac{dz'}{[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}}. \tag{5.141}$$

Apabila $z - z' := R\tan\alpha$, maka $dz' = -R\sec^2\alpha\,d\alpha$ sehingga

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L} R^2 \hat{z}\int_{\alpha_0}^{\alpha_L} \frac{-R\sec^2\alpha\,d\alpha}{R^3\sec^3\alpha} \tag{5.142}$$

di mana $\tan\alpha_0 := z/R$ dan $\tan\alpha_L := (z-L)/R$.

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 IN}{2L}\hat{z}\int_{\alpha_0}^{\alpha_L} \cos\alpha\,d\alpha. \tag{5.143}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}\hat{z}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha_L). \tag{5.144}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}\hat{z}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2+(z-L)^2}}\right). \tag{5.145}$$

Jika kita ambil kasus khusus $R \to 0$, maka

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z-L}{|z-L|}\right)\hat{z}. \tag{5.146}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}(\operatorname{sgn} z - \operatorname{sgn}(z-L))\,\hat{z}. \tag{5.147}$$

Medan magnet di pusat solenoida, yaitu $z = L/2$, tentu saja adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{L}\hat{z}, \tag{5.148}$$

serta medan magnet di ujung solenoida, yaitu $z = 0$ atau $z = L$, tentu saja adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}\hat{z} \tag{5.149}$$

sesuai yang diharapkan.

5.17 Medan Listrik Relativistik

Medan listrik relativistik $\vec{E}$ di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat partikel klasik bermuatan q' yang terletak di posisi $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ dan berkecepatan $\vec{v}' := d\vec{r}'/dt$ pada waktu t adalah

$$\vec{E} = \frac{\kappa q' \gamma^{-2} \vec{R}}{R^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} \tag{5.150}$$

di mana $\kappa := 1/(4\pi\epsilon_0)$ dengan ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa, $\gamma := (1-\beta^2)^{-1/2}$ adalah faktor Lorentz, $\beta := v'/c$, $v' := |\vec{v}'|$, c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, $\vec{R} := \vec{r} - \vec{r}'$, $\sin\psi := R_\perp/R$, $R := |\vec{R}|$, $\vec{R}_\perp := \vec{R} - \vec{R}_{//}$, $\vec{R}_{//} := (\vec{R} \cdot \hat{v}')\hat{v}'$, $\hat{v}' := \vec{v}'/v'$, dan $R_\perp := |\vec{R}_\perp|$.

Ternyata $\vec{E}$ pada persamaan (5.150) itu tidak konservatif, karena

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{3\kappa q' \gamma^{-2} \beta^2 (\vec{R} \cdot \vec{v}')\vec{v}' \times \vec{R}}{v'^2 R^5 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{5/2}} \neq \vec{0} \tag{5.151}$$

yang berbeda dengan medan listrik non-relativistik yang konservatif.

5.18 Lintasan Gerak Partikel Bermuatan akibat Medan Magnet Seragam

Andaikan di $\mathbb{R}^3$ ada sebuah partikel titik klasik bermassa $m \in \mathbb{R}^+$ dan bermuatan $q \in \mathbb{R}$ yang terletak pada posisi awal $\vec{r}_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ dan berkecepatan awal $\vec{v}_0 := (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) \in \mathbb{R}^3$, serta $z_0 = 0$ dan $v_{z0} = 0$. Partikel tersebut diimbas oleh medan magnet seragam $\vec{B} := (0, 0, B)$ di seluruh ruang $\mathbb{R}^3$ sehingga bergerak pada posisi $:= (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ yang bergantung pada waktu $t \in \mathbb{R}$. Gaya Lorentz yang dialami oleh partikel tersebut tentu saja adalah $\vec{F} := m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ dengan asumsi bahwa medan listriknya sangat kecil. Dari perhitungan yang teliti, kita peroleh bahwa lintasan geraknya berupa lingkaran

$$S^1(X, Y, R) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - X)^2 + (y - Y)^2 = R^2; z = 0\} \tag{5.152}$$

dengan $(X, Y, 0)$ adalah pusat lingkaran tersebut, dan R adalah jari-jari lingkaran tersebut, di mana

$$X := x_0 + \frac{m}{qB} v_{y0} \quad \text{dan} \quad Y := y_0 - \frac{m}{qB} v_{x0}, \tag{5.153}$$

serta

$$R := \frac{m}{qB}\sqrt{(v_{x0})^2 + (v_{y0})^2}. \tag{5.154}$$

Lintasan yang berbentuk lingkaran tersebut merupakan lintasan gerak melingkar beraturan dengan frekuensi sudut $\omega := qB/m$.

5.19 Transformasi Lorentz untuk Medan Elektromagnetik

Andaikan ada kerangka $\tilde{K}$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{V}$ menurut kerangka K. Andaikan ada muatan listrik q yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ menurut kerangka K. Selanjutnya, didefinisikan besaran $\vec{Q}^0$ sebagai besaran $\vec{Q}$ yang teramati oleh muatan q tersebut, serta $\vec{Q}^0_{//} := \vec{Q} \cdot \hat{v}\hat{v}$ dan $\vec{Q}^0_{\perp} := \vec{Q}^0 - \vec{Q}^0_{//}$. Kemudian, didefinisikan $\vec{Q}_{//} := \vec{Q} \cdot \hat{V}\hat{V}$ dan $\vec{Q}_{\perp} := \vec{Q} - \vec{Q}_{//}$, serta $\tilde{\vec{Q}}_{//} := \tilde{\vec{Q}} \cdot \hat{V}\hat{V}$ dan $\tilde{\vec{Q}}_{\perp} := \tilde{\vec{Q}} - \tilde{\vec{Q}}_{//}$, untuk setiap besaran $\vec{Q}$, di mana $\tilde{\vec{Q}}$ didefinisikan sebagai besaran $\vec{Q}$ menurut K yang teramati menurut $\tilde{K}$. Gaya Coulomb elektrostatik menurut muatan q tersebut adalah $\vec{F}^0$ di mana

$$\vec{F}^0_{//} = \vec{F}_{//} \quad \text{dan} \quad \vec{F}^0_{\perp} = \gamma \vec{F}_{\perp} \tag{5.155}$$

dengan $\vec{F}$ merupakan gaya Lorentz menurut K, di mana $\gamma := 1/\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}$ merupakan faktor Lorentz.

$$\vec{F}^0 = \vec{F}^0_{//} + \vec{F}^0_{\perp}. \tag{5.156}$$

$$\vec{F}^0 = \vec{F}_{//} + \gamma \vec{F}_{\perp} = q\vec{E}^0 \tag{5.157}$$

di mana $\vec{E}^0$ merupakan medan listrik menurut muatan q.

Gaya Lorentz menurut K tentu saja adalah

$$\vec{F} = q(\vec{E} + (\alpha/c)\vec{v} \times \vec{B}) \tag{5.158}$$

di mana $\vec{E}$ merupakan medan listrik menurut K, serta $\vec{B}$ merupakan medan magnet menurut K.

$$\vec{F}_{//} = q\vec{E}_{//}. \tag{5.159}$$

$$\vec{F}_{\perp} = q(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{v} \times \vec{B}) \tag{5.160}$$

$$\vec{F}^0 = q\vec{E}_{//} + \gamma q(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{E}^0. \tag{5.161}$$

$$\vec{E}^0 = \vec{E}_{//} + \gamma(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{v} \times \vec{B}). \tag{5.162}$$

Medan listrik menurut $\tilde{K}$ tentu saja adalah

$$\tilde{\vec{E}} = \vec{E}_{//} + \Gamma(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{V} \times \vec{B}) \tag{5.163}$$

di mana $\Gamma := 1/\sqrt{1 - |\vec{V}|^2/c^2}$ merupakan faktor Lorentz. Ini merupakan transformasi Lorentz elektromagnetik yang pertama.

$$\vec{V} \times \tilde{\vec{E}} = \Gamma(\vec{V} \times \vec{E} + (\alpha/c)(\vec{B} \cdot \vec{V})\vec{V} - (\alpha/c)V^2\vec{B}). \tag{5.164}$$

$$\vec{V} \times \tilde{\vec{E}} = \Gamma(\vec{V} \times \vec{E} - (\alpha/c)V^2\vec{B}_{\perp}). \tag{5.165}$$

Kaitan inversi dari transformasi Lorentz elektromagnetik yang pertama tentu saja adalah

$$\vec{E} = \tilde{\vec{E}}_{//} + \Gamma(\tilde{\vec{E}}_{\perp} - (\alpha/c)\vec{V} \times \tilde{\vec{B}}). \tag{5.166}$$

Ini adalah kaitan transformasi Lorentz elektromagnetik yang kedua.

$$\vec{V} \times \vec{E} = \Gamma(\vec{V} \times \tilde{\vec{E}} - (\alpha/c)(\tilde{\vec{B}} \cdot \vec{V})\vec{V} + (\alpha/c)V^2\tilde{\vec{B}}). \tag{5.167}$$

$$\vec{V}\times\vec{E}=\Gamma(\vec{V}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}+(\alpha/c)V^2\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp). \tag{5.168}$$

$$\vec{V}\times\vec{E}=\Gamma(\Gamma(\vec{V}\times\vec{E}-(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp)+(\alpha/c)V^2\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp). \tag{5.169}$$

$$\Gamma^{-1}\vec{V}\times\vec{E}=\Gamma(\vec{V}\times\vec{E}-(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp)+(\alpha/c)V^2\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.170}$$

$$(\Gamma^{-1}\vec{V}\times\vec{E}-\Gamma(\vec{V}\times\vec{E}-(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp))(c/\alpha)/V^2=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.171}$$

$$\Gamma((\Gamma^{-2}-1)\vec{V}\times\vec{E}+(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp)(c/\alpha)/V^2=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.172}$$

$$\Gamma((-V^2/c^2)\vec{V}\times\vec{E}+(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp)(c/\alpha)/V^2=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.173}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp=\Gamma(\vec{B}_\perp-(\alpha c)^{-1}\vec{V}\times\vec{E}). \tag{5.174}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}=\tilde{\tilde{\vec{v}}}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}/(\alpha c). \tag{5.175}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=(\alpha c)^{-1}(\tilde{\tilde{\vec{v}}}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}})\cdot\hat{V}\hat{V}. \tag{5.176}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=(\alpha c)^{-1}[(\tilde{\tilde{\vec{v}}}_{//}+\tilde{\tilde{\vec{v}}}_\perp)\times(\tilde{\tilde{\vec{E}}}_{//}+\tilde{\tilde{\vec{E}}}_\perp)]\cdot\hat{V}\hat{V}. \tag{5.177}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=(\alpha c)^{-1}(\tilde{\tilde{\vec{v}}}_\perp\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}_\perp)\cdot\hat{V}\hat{V}=(\alpha c)^{-1}\tilde{\tilde{\vec{v}}}_\perp\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}_\perp. \tag{5.178}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{v}}}_\perp=\vec{v}_\perp\Gamma^{-1}/(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2). \tag{5.179}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{E}}}_\perp=\Gamma(\vec{E}_\perp+(\alpha/c)\vec{V}\times\vec{B}). \tag{5.180}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp}{\Gamma(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}\times\Gamma(\vec{E}_\perp+(\alpha/c)\vec{V}\times\vec{B})\frac{1}{\alpha c}. \tag{5.181}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+(\alpha/c)[(\vec{v}_\perp\cdot\vec{B})\vec{V}-(\vec{v}_\perp\cdot\vec{V})\vec{B}]}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.182}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+(\alpha/c)(\alpha c)^{-1}(\vec{v}_\perp\cdot(\vec{v}\times\vec{E}))\vec{V}}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.183}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+c^{-2}[(\vec{v}\cdot\vec{V})(\vec{E}\times\vec{v}_\perp)+(\vec{E}\cdot\vec{V})(\vec{v}_\perp\times\vec{v})]}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.184}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+c^{-2}[(\vec{v}\cdot\vec{V})(\vec{E}_\perp\times\vec{v}_\perp+\vec{E}_{//}\times\vec{v}_\perp)+(\vec{E}_{//}\cdot\vec{V})(\vec{v}_\perp\times\vec{v}_{//})]}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.185}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+c^{-2}[(\vec{v}\cdot\vec{V})(\vec{E}_\perp\times\vec{v}_\perp)+[\vec{E}_{//},\vec{v}_\perp,\vec{v}_{//}]\vec{V}}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.186}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=(\alpha c)^{-1}\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp=\vec{B}_{//}. \tag{5.187}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}+\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.188}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}=\vec{B}_{//}+\Gamma(\vec{B}_\perp-(\alpha c)^{-1}\vec{V}\times\vec{E}). \tag{5.189}$$

Ini adalah kaitan transformasi Lorentz elektromagnetik yang ketiga. Inversinya adalah

$$\vec{B}=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}+\Gamma(\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp+(\alpha c)^{-1}\vec{V}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}). \tag{5.190}$$

Ini adalah kaitan transformasi Lorentz elektromagnetik yang keempat.

Jadi, seperangkat transformasi Lorentz untuk medan elektromagnetik dapat diringkas menjadi

$$\tilde{\vec{E}} = \vec{E}_{//} + \Gamma(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{V} \times \vec{B}) \tag{5.191}$$

dan

$$\tilde{\vec{B}} = \vec{B}_{//} + \Gamma(\vec{B}_{\perp} - (\alpha c)^{-1}\vec{V} \times \vec{E}). \tag{5.192}$$

Transformasi baliknya adalah

$$\vec{E} = \tilde{\vec{E}}_{//} + \Gamma(\tilde{\vec{E}}_{\perp} - (\alpha/c)\vec{V} \times \tilde{\vec{B}}) \tag{5.193}$$

dan

$$\vec{B} = \tilde{\vec{B}}_{//} + \Gamma(\tilde{\vec{B}}_{\perp} + (\alpha c)^{-1}\vec{V} \times \tilde{\vec{E}}). \tag{5.194}$$

5.20 Bentuk Kovarian dari Sistem Persamaan Maxwell

Sistem persamaan Maxwell yang paling umum adalah

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.195}$$

di mana

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{dan} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \tag{5.196}$$

Dari persamaan $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, diperoleh $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, sehingga

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \tag{5.197}$$

yang dengan menggunakan teori tera $\nabla \times \nabla\varphi = \vec{0}$, persamaan terakhir identik dengan

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{5.198}$$

Dari persamaan $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, diperoleh

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho \tag{5.199}$$

alias

$$-\epsilon_0 \left(\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A}\right) + \nabla \cdot \vec{P} = \rho \tag{5.200}$$

alias

$$-\epsilon_0 c(\nabla^2 A^0 + \partial_0 \nabla \cdot \vec{A}) + \nabla \cdot \vec{P} = \rho \tag{5.201}$$

alias

$$(-1/\mu_0)(\nabla^2 A^0 + \partial_0 \nabla \cdot \vec{A}) + c\nabla \cdot \vec{P} = J^0 \tag{5.202}$$

alias

$$(-1/\mu_0)(\partial_j \partial^j A^0 + \partial_0 \partial_j A^j) + c\partial_j P^j = J^0 \tag{5.203}$$

di mana $A^0 := \varphi/c$, $A^1 := A_x$, $A^2 := A_y$, $A^3 := A_z$, $J^0 := \rho c$, $J^1 := J_x$, $J^2 := J_y$, $J^3 := J_z$, $\partial_0 := (1/c)\partial/\partial t$, $\partial_1 := \partial/\partial x$, $\partial_2 := \partial/\partial y$, $\partial_3 := \partial/\partial z$, $A_\mu := g_{\mu\nu}A^\nu$, $J_\mu := g_{\mu\nu}J^\nu$, $\partial^\mu := g^{\mu\nu}\partial_\nu$, $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, dan $(g_{\mu\nu})_{\mu\neq\nu} = 0$.

Dari persamaan $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$ dan $\vec{H} = (\vec{B} - \vec{M})/\mu_0$, diperoleh

$$(1/\mu_0)(\nabla \times \vec{B} - \nabla \times \vec{M}) = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{5.204}$$

alias

$$(1/\mu_0)(\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} - \nabla \times \vec{M}) = \vec{J} - \epsilon_0 \left(\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{5.205}$$

alias (dengan menerapkan identitas $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$)

$$\begin{aligned} & (1/\mu_0)(\partial^j \partial_k A^k - \partial_k \partial^k A^j - \epsilon^{jkl}\partial_k M_l) \\ = \; & J^j - \epsilon_0(c\partial^j\partial_0\varphi + c^2\partial_0\partial_0 A^j) + c\partial_0 P^j \\ = \; & J^j - \epsilon_0 c^2(\partial^j\partial_0 A^0 + \partial_0\partial_0 A^j) + c\partial_0 P^j \\ = \; & J^j - (1/\mu_0)(\partial^j\partial_0 A^0 + \partial_0\partial_0 A^j) + c\partial_0 P^j \end{aligned} \tag{5.206}$$

alias

$$\partial^j\partial_k A^k - \partial_k\partial^k A^j - \epsilon^{jkl}\partial_k M_l = \mu_0 J^j - \partial^j\partial_0 A^0 + \partial_0\partial^0 A^j + \mu_0 c\partial_0 P^j \tag{5.207}$$

alias

$$\partial^j\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^j = \mu_0 J^j + \epsilon^{jkl}\partial_k M_l + \mu_0 c\partial_0 P^j. \tag{5.208}$$

Karena dari persamaan terdahulu telah diperoleh

$$\partial_j\partial^j A^0 - \partial^0\partial_j A^j - \mu_0 c\partial_j P^j = -\mu_0 J^0 \tag{5.209}$$

alias

$$\partial^0\partial_j A^j - \partial_j\partial^j A^0 = \mu_0 J^0 - \mu_0 c\partial_j P^j \tag{5.210}$$

alias

$$\partial^0\partial_j A^j + \partial^0\partial_0 A^0 - \partial_j\partial^j A^0 - \partial_0\partial^0 A^0 = \mu_0 J^0 - \mu_0 c\partial_j P^j \tag{5.211}$$

alias

$$\partial^0\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^0 = \mu_0 J^0 - \mu_0 c\partial_j P^j, \tag{5.212}$$

maka diperoleh

$$\partial^\nu\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^\nu = \mu_0 J^\nu + C^\nu \tag{5.213}$$

alias

$$\partial_\mu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \mu_0 J^\nu + C^\nu \tag{5.214}$$

alias

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\nu + C^\nu \tag{5.215}$$

yang merupakan bentuk kovarian dari sistem persamaan Maxwell, di mana $C^j := \epsilon^{jkl}\partial_k M_l + \mu_0 c\partial_0 P^j$ dan $C^0 := -\mu_0 c\partial_j P^j$ serta $F^{\nu\mu} := \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$.

5.21 Menurunkan Hukum Arus Kirchhoff dari Hukum Ampere

Hukum arus Kirchhoff dapat diperoleh dari persamaan kontinyuitas yang diperoleh dari hukum Ampere.

Hukum Ampere adalah

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D}/\partial t. \tag{5.216}$$

Pengambilan divergensi pada kedua ruas persamaan terakhir menghasilkan

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + \partial \rho/\partial t, \tag{5.217}$$

di mana $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ merupakan hukum Gauss.

Persamaan terakhir ini merupakan persamaan kontinyuitas untuk elektromagnetisme.

Pengintegralan kedua ruas persamaan kontinyuitas tersebut ke seluruh volume V, dengan menerapkan teorema divergensi Gauss, menghasilkan

$$0 = \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d^2\vec{r} + \frac{dq}{dt}, \tag{5.218}$$

di mana $q = \int_V \rho d^3\vec{r}$ adalah muatan listrik pada V.

Untuk volume V yang mendekati titik matematis yang berupa simpul, maka $\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d^2\vec{r} = 0$. Sementara itu $I := dq/dt = \sum_{j=1}^{n} I_j$ adalah total arus listrik yang melewati titik simpul tersebut, sehingga

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0. \tag{5.219}$$

Inilah hukum arus Kirchhoff, dengan menganggap bahwa I_j bernilai positif apabila arus keluar dari simpul, dan bernilai negatif apabila arus masuk ke simpul. Kesepakatan sebaliknya bolehlah ditetapkan, asalkan konsisten.

Bab 6

Optika

6.1 Irisan Kerucut

Salah satu tempat kedudukan permukaan kerucut yang memiliki setengah sudut puncak $\beta \in (0, \pi/2)$ adalah

$$C(\beta) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = (x^2 + y^2)\cot^2\beta\}. \tag{6.1}$$

Salah satu tempat kedudukan bidang datar yang dipakai untuk mengiris $C(\beta)$ adalah

$$P(\alpha, h) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\tan\alpha - h\} \tag{6.2}$$

di mana $\alpha \in (0, \pi/2)$ adalah sudut kemiringan dari $P(\alpha, h)$, serta $h \in \mathbb{R}$ adalah kerendahan dari $P(\alpha, h)$.

Selanjutnya, akan dicari $C(\beta) \cap P(\alpha, h)$.

Apabila dilakukan transformasi koordinat

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad \text{dan} \qquad z' = z + h, \tag{6.3}$$

lalu dilanjutkan

$$x'' = x', \qquad y'' = y'\cos\alpha + z'\sin\alpha, \qquad \text{dan} \qquad z'' = -y'\sin\alpha + z'\cos\alpha, \tag{6.4}$$

kemudian dibalik menjadi

$$x' = x'', \qquad y' = y''\cos\alpha - z''\sin\alpha, \qquad \text{dan} \qquad z' = y''\sin\alpha + z''\cos\alpha, \tag{6.5}$$

serta

$$x = x' = x'', \quad y = y' = y''\cos\alpha - z''\sin\alpha, \quad \text{dan} \quad z = z' - h = y''\sin\alpha + z''\cos\alpha - h, \tag{6.6}$$

maka $C(\beta)$ menjadi

$$\begin{aligned} C''(\alpha, \beta, h) \;:=\; & \{(x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^3 \mid (y''\sin\alpha + z''\cos\alpha - h)^2 \\ & = (x''^2 + (y''\cos\alpha - z''\sin\alpha)^2)\cot^2\beta\}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

serta $P(\alpha, h)$ menjadi

$$P'' := \{(x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^3 \mid z'' = 0\}. \tag{6.8}$$

Andaikan $S(\alpha,\beta,h) := C''(\alpha,\beta,h) \cap P''$, maka

$$S(\alpha,\beta,h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y\sin\alpha - h)^2 = (x^2 + y^2\cos^2\alpha)\cot^2\beta\} \tag{6.9}$$

yang merupakan salah satu bentuk *irisan kerucut*.

Apabila $\alpha = 0$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah lingkaran.

Apabila $0 < \alpha < \pi/2 - \beta$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah elips.

Apabila $\alpha = \pi/2 - \beta$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah parabola.

Apabila $\pi/2 - \beta < \alpha < \pi/2$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah hiperbola.

6.2 Vektor Pantul dan Vektor Bias

Dalam ruang hampa $\mathbb{R}^3$, sinar dengan arah rambat $\hat{\imath} \in \mathbb{R}^3$ yang mengenai sebuah bidang datar yang memiliki arah normal $\hat{N} \in \mathbb{R}^3$ akan memantul dengan arah

$$\hat{r} = \hat{\imath} - 2(\hat{\imath}\cdot\hat{N})\hat{N}. \tag{6.10}$$

Dalam ruang hampa $\mathbb{R}^3$, sinar dengan arah rambat $\hat{\imath} \in \mathbb{R}^3$ yang memasuki medium berindeks bias mutlak $n \in \mathbb{R}$, di mana bidang batas kedua medium memiliki arah normal $\hat{N} \in \mathbb{R}^3$, akan membias dengan arah

$$\hat{r} = (\hat{r}\cdot\hat{N})\hat{N} + (\hat{r} - (\hat{r}\cdot\hat{N})\hat{N}) \tag{6.11}$$

di mana (menurut hukum Snellius pembiasan)

$$\hat{\imath} - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})\hat{N} = n(\hat{r} - (\hat{r}\cdot\hat{N})\hat{N}) \tag{6.12}$$

yang kuadrat magnitudonya adalah

$$1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2 = n^2(1 - (\hat{r}\cdot\hat{N})^2) \tag{6.13}$$

alias

$$(\hat{r}\cdot\hat{N})^2 = 1 - n^{-2}(1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2) \tag{6.14}$$

alias

$$\hat{r}\cdot\hat{N} = \sqrt{1 - n^{-2}(1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2)}\,\mathrm{sgn}(\hat{r}\cdot\hat{N}). \tag{6.15}$$

Karena $\mathrm{sgn}(\hat{r}\cdot\hat{N}) = \mathrm{sgn}(\hat{\imath}\cdot\hat{N})$, maka persamaan (6.15) menjadi

$$\hat{r}\cdot\hat{N} = \sqrt{1 - n^{-2}(1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2)}\,\mathrm{sgn}(\hat{\imath}\cdot\hat{N}). \tag{6.16}$$

Dari persamaan (6.12) dan (6.16), maka persamaan (6.11) menjadi

$$\hat{r} = \hat{N}\sqrt{1 - n^{-2}(1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2)}\,\mathrm{sgn}(\hat{\imath}\cdot\hat{N}) + n^{-1}(\hat{\imath} - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})\hat{N}) \tag{6.17}$$

alias

$$\hat{r} = n^{-1}\left(\hat{\imath} + \hat{N}\left(\sqrt{n^2 - 1 + (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2}\,\mathrm{sgn}(\hat{\imath}\cdot\hat{N}) - \hat{\imath}\cdot\hat{N}\right)\right). \tag{6.18}$$

6.3 Bayangan Titik akibat Dilatasi oleh Titik, Garis, dan Bidang

Apabila titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ didilatasi oleh sebuah titik $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ dengan faktor skala $k \in \mathbb{R}$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ sedemikian

$$\vec{r}' = \vec{r} + (k-1)(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{6.19}$$

alias

$$\vec{r}' = k\vec{r} + (1-k)\vec{r}_0. \tag{6.20}$$

Dilatasi $k = -1$ boleh dikatakan sebagai pencerminan.

Apabila titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ didilatasi oleh sebuah garis lurus $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} = \vec{0}\}$, di mana $\vec{r}_0, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, dengan faktor skala $k \in \mathbb{R}$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ sedemikian

$$\vec{r}' = \vec{r} + (k-1)\hat{v} \times ((\vec{r} - \vec{r}_0) \times \hat{v}) \tag{6.21}$$

di mana $\hat{v} := \vec{v}/v$ dan $v := |\vec{v}|$.

Apabila titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ didilatasi oleh sebuah bidang datar $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0\}$, di mana $\vec{r}_0, \vec{N} \in \mathbb{R}^3$, dengan faktor skala $k \in \mathbb{R}$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ sedemikian

$$\vec{r}' = \vec{r} + (k-1)(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \hat{N}\hat{N} \tag{6.22}$$

di mana $\hat{N} := \vec{N}/N$ dan $N := |\vec{N}|$.

6.4 Cermin Cekung dan Cermin Cembung

Andaikan ada sebuah benda yang tingginya $h \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol, yang berdiri tegak lurus sumbu utama sebuah cermin cekung dengan titik fokus yang terletak sejauh $f \in \mathbb{R}$ di depan cermin cekung tersebut. Benda tersebut terletak pada posisi $s \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di depan cermin cekung tersebut. Bayangan yang dihasilkan oleh cermin cekung tersebut terletak pada posisi $s' \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di depan cermin cekung tersebut. Tinggi bayangan tersebut adalah $h' \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol. Dari pengamatan geometris sifat-sifat sinar, diperoleh

$$h/(s-f) = -h'/f \qquad \text{dan} \qquad h/f = -h'/(s'-f). \tag{6.23}$$

Dengan mengeliminasi h dan h' dari kedua persamaan (6.23), diperoleh

$$\begin{aligned} f/(s-f) = (s'-f)/f \quad &\Leftrightarrow \quad f^2 = (s-f)(s'-f) \quad \Leftrightarrow \quad ss' = (s+s')f \\ &\Leftrightarrow \quad 1/f = 1/s + 1/s'. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Dari persamaan (6.24), diperoleh $s' = sf/(s-f)$, sehingga dari persamaan (6.23), diperoleh perbesaran bayangannya, yaitu

$$M := h'/h = f/(f-s) = -s'/s. \tag{6.25}$$

Bayangan dikatakan nyata apabila $s' > 0$. Bayangan dikatakan maya apabila $s' < 0$. Bayangan dikatakan tegak apabila $h' > 0$. Bayangan dikatakan terbalik apabila $h' < 0$. Bayangan dikatakan diperbesar apabila $|M| > 1$. Bayangan dikatakan sama besar apabila $|M| = 1$. Bayangan dikatakan diperkecil apabila $|M| < 1$. Pada cermin cekung, dapat dikatakan $f > 0$. Pada cermin cembung, dapat dikatakan $f < 0$.

6.5 Lensa Cembung dan Lensa Cekung

Andaikan ada sebuah benda yang tingginya $h \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol, yang berdiri tegak lurus sumbu utama sebuah lensa cembung dengan titik fokus yang terletak sejauh $f \in \mathbb{R}$ di belakang lensa cembung tersebut. Benda tersebut terletak pada posisi $s \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di depan lensa cembung tersebut. Bayangan yang dihasilkan oleh lensa cembung tersebut terletak pada posisi $s' \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di belakang lensa cembung tersebut. Tinggi bayangan tersebut adalah $h' \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol. Dari pengamatan geometris sifat-sifat sinar, diperoleh

$$h/s = -h'/s' \quad \text{dan} \quad h/f = -h'/(s'-f). \tag{6.26}$$

Dengan mengeliminasi h dan h' dari kedua persamaan (6.26), diperoleh

$$\begin{aligned} f/s = (s'-f)/s' \quad &\Leftrightarrow \quad fs' = s(s'-f) \quad \Leftrightarrow \quad fs' + sf = ss' \\ &\Leftrightarrow \quad 1/f = 1/s + 1/s'. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Dari persamaan (6.27), diperoleh $s' = sf/(s-f)$, sehingga dari persamaan (6.26), diperoleh perbesaran bayangannya, yaitu

$$M := h'/h = f/(f-s) = -s'/s. \tag{6.28}$$

Bayangan dikatakan nyata apabila $s' > 0$. Bayangan dikatakan maya apabila $s' < 0$. Bayangan dikatakan tegak apabila $h' > 0$. Bayangan dikatakan terbalik apabila $h' < 0$. Bayangan dikatakan diperbesar apabila $|M| > 1$. Bayangan dikatakan sama besar apabila $|M| = 1$. Bayangan dikatakan diperkecil apabila $|M| < 1$. Pada lensa cembung, dapat dikatakan $f > 0$. Pada lensa cekung, dapat dikatakan $f < 0$.

6.6 Kalkulus Variasi dan Prinsip Fermat

Andaikan ada sinar monokromatis yang merambat di posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$ di dalam medium $\mathbb{R}^3$ yang berindeks bias mutlak $n \in \mathbb{R}$ dengan $n \mapsto (\vec{r}, t)$. Kecepatan sinar tersebut pada waktu t tentu saja $\vec{v} := \dot{\vec{r}} := d\vec{r}/dt$, sehingga kelajuannya adalah $v := |\dot{\vec{r}}|$. Menurut hukum Snellius, berlaku kaitan $v = c/n$, di mana c adalah kelajuan sinar dalam ruang hampa, sehingga

$$dt = c^{-1} n |d\vec{r}| = c^{-1} n v \, dt \tag{6.29}$$

dengan keharusan $nv/c = 1$. Oleh karena itu, dengan mengintegralkan persamaan (6.29) dengan batas bawah $t = t_1$ dan batas atas $t = t_2$ untuk sebarang $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, maka diperoleh

$$\Delta t := t_2 - t_1 = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} n v \, dt = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt \tag{6.30}$$

di mana $L := nv/c$ (yang bergantung secara eksplisit pada $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$, dan t) adalah *Lagrangian* dari sistem optik tersebut.

Dengan menggunakan kalkulus variasi, agar Δt bernilai stasioner, yaitu $\delta\Delta t = 0$, diperoleh persamaan Euler-Lagrange, yaitu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \tag{6.31}$$

alias

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (n|\dot{\vec{r}}|)}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial (n|\dot{\vec{r}}|)}{\partial \vec{r}} \tag{6.32}$$

alias

$$\frac{d}{dt}\left(n\frac{d|\dot{\vec{r}}|}{d\dot{\vec{r}}}\right) = \frac{\partial n}{\partial \vec{r}}|\dot{\vec{r}}|. \tag{6.33}$$

Karena $d|\dot{\vec{r}}|/d\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}|$, maka persamaan (6.33) menjadi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{n\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}\right) = \frac{\partial n}{\partial \vec{r}}|\dot{\vec{r}}| \quad \text{dengan} \quad \frac{n|\dot{\vec{r}}|}{c} = 1 \tag{6.34}$$

yang merupakan persamaan gerak sinar tersebut di ruang $\mathbb{R}^3$.

Apabila n bersifat homogen (konstan), maka dari persamaan (6.34), diperoleh $d(\dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}|) = \vec{0}$ alias $\dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}| = (\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0|$, sehingga $\dot{\vec{r}} = |\dot{\vec{r}}|(\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0| = (c/n)(\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0|$ alias (diintegralkan terhadap t) $\vec{r} = \vec{r}_0 + (ct/n)(\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0|$, yaitu bahwa sinar tersebut bergerak lurus beraturan dengan kelajuan c/n dan arah sebarang, seperti yang diharapkan menurut intuisi fisis yang seharusnya.

6.7 Bayangan Titik akibat Pencerminan oleh Cermin Berbentuk Permukaan Bola

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$, ada sebuah cermin berbentuk permukaan bola, yaitu

$$S^2(\vec{r}_0, R) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r} - \vec{r}_0| = R\} \tag{6.35}$$

di mana $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ adalah pusat dari $S^2(\vec{r}_0, R)$, serta $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari dari $S^2(\vec{r}_0, R)$.

Selanjutnya, titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akan dicerminkan oleh $S^2(\vec{r}_0, R)$, sehingga menghasilkan dua buah bayangan, yaitu $\vec{r}_1', \vec{r}_2' \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + (R + s_1')\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.36}$$

$$s_1' := \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}, \qquad s_1 := |\vec{r} - \vec{r}_0| - R, \qquad f_1 := -\frac{1}{2}R. \tag{6.37}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + \left(R + \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}\right)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.38}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + \left(R + \frac{(|\vec{r} - \vec{r}_0| - R)(-R/2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0| - R/2}\right)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.39}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + (R - s_2')\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}. \tag{6.40}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + (s_2' - R)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.41}$$

$$s_2' := \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2}, \qquad s_2 := |\vec{r} - \vec{r}_0| + R, \qquad f_2 := \frac{1}{2}R. \tag{6.42}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + \left(\frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} - R\right)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.43}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + \left(\frac{(|\vec{r} - \vec{r}_0| + R)R/2}{|\vec{r} - \vec{r}_0| + R/2} - R\right)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.44}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + \frac{R(|\vec{r} - \vec{r}_0| - R/2) + (|\vec{r} - \vec{r}_0| - R)(-R/2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0| - R/2}\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.45}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + \frac{R|\vec{r} - \vec{r}_0|/2}{|\vec{r} - \vec{r}_0| - R/2}\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.46}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + R\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{2|\vec{r} - \vec{r}_0| - R}. \tag{6.47}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + \frac{(|\vec{r} - \vec{r}_0| + R)R/2 - R(|\vec{r} - \vec{r}_0| + R/2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0| + R/2}\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.48}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + \frac{(-R/2)|\vec{r} - \vec{r}_0|}{|\vec{r} - \vec{r}_0| + R/2}\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.49}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 - R\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{2|\vec{r} - \vec{r}_0| + R}. \tag{6.50}$$

Jadi, bayangan dari titik $\vec{r}$ akibat pencerminan oleh cermin berbentuk permukaan bola $S^2(\vec{r}_0, R)$ adalah

$$\vec{r}' = \vec{r}_\pm' = \vec{r}_0 \pm R\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{2|\vec{r} - \vec{r}_0| \mp R}. \tag{6.51}$$

Bayangannya ada dua, yaitu $\vec{r}_+'$ dan $\vec{r}_-'$.

6.8 Menghitung Tetapan Kelajuan Cahaya dalam Ruang Hampa

Tetapan kelajuan cahaya dalam ruang hampa, yaitu c, dapat dihitung tanpa eksperimen, dengan aksioma yang mengatakan bahwa jarak tempuh cahaya dalam ruang hampa dalam satu hari sama dengan panjang lintasan yang ditempuh bulan selama seribu tahun relatif terhadap kerangka acuan matahari, dengan menganggap bahwa kelajuan cahaya adalah c yang tetap dengan lintasan gerak sebarang di ruang $\mathbb{R}^3$.

Apabila posisi bumi menurut matahari adalah $\vec{R} := R(\hat{x}\cos\Omega t + \hat{y}\sin\Omega t)$, dan posisi bulan menurut bumi adalah $\vec{r}' := r(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)$ di mana $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, $\Omega := 2\pi/(1\,\text{tahun masehi})$ adalah frekuensi sudut putaran bumi relatif terhadap matahari, $\omega := 2\pi/(1\,\text{bulan siderik})$ adalah frekuensi sudut putaran bulan relatif terhadap bumi, dan t adalah waktu, serta R adalah jarak bumi ke matahari, dan r adalah jarak bulan ke bumi, maka posisi bulan relatif terhadap matahari adalah

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' = \hat{x}(R\cos\Omega t + r\sin\omega t) + \hat{y}(R\sin\Omega t + r\sin\omega t). \tag{6.52}$$

Oleh karena itu, panjang lintasan yang ditempuh bulan selama 1000 tahun menurut matahari adalah

$$l := \int_{t=0}^{t=T} |d\vec{r}| = \int_0^T \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = c\tau \tag{6.53}$$

di mana $T := 1000\,\text{tahun siderik}$, $\tau := 1\,\text{harisiderik}$.

Kecepatan sesaat bulan menurut matahari pada waktu t adalah

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\hat{x}(\Omega R\sin\Omega t + \omega r\sin\omega t) + \hat{y}(\Omega R\cos\Omega t + \omega r\cos\omega t) \tag{6.54}$$

sehingga

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = (\Omega R\sin\Omega t + \omega r\sin\omega t)^2 + (\Omega R\cos\Omega t + \omega r\cos\omega t)^2 \tag{6.55}$$

$$= ((\Omega R)^2 + (\omega r)^2) + 2\Omega R\omega r\cos((\Omega - \omega)t). \tag{6.56}$$

Karena $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = ((\Omega R)^2 + (\omega r)^2) + 2\Omega R\omega r\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\Omega - \omega}{2}t\right)\right) \tag{6.57}$$

$$= (\Omega R + \omega r)^2 - 4\Omega R\omega r\sin^2\left(\frac{\Omega - \omega}{2}t\right) = (\Omega R + \omega r)^2(1 - k^2\sin^2\phi) \tag{6.58}$$

di mana

$$k := \frac{2\sqrt{\Omega R\omega r}}{\Omega R + \omega r} \quad \text{dan} \quad \phi := \frac{|\Omega - \omega|}{2}t \tag{6.59}$$

sehingga

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = |\Omega R + \omega r|\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}. \tag{6.60}$$

Oleh karena itu,

$$l = |\Omega R + \omega r|\int_0^T \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,dt = 2\frac{|\Omega R + \omega r|}{|\Omega - \omega|}\int_0^{\frac{|\Omega-\omega|}{2}T} \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,d\phi. \tag{6.61}$$

Dengan mendefinisikan bentuk Legendre dari integral eliptik jenis kedua, yaitu

$$E(k,\Phi) := \int_0^\Phi \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,d\phi, \tag{6.62}$$

maka

$$l = 2\frac{|\Omega R + \omega r|}{|\Omega - \omega|} E\left(\frac{2\sqrt{\Omega R \omega r}}{\Omega R + \omega r}, \frac{|\Omega - \omega|}{2} T\right) = c\tau \tag{6.63}$$

alias

$$c = \frac{2}{\tau}\frac{|\Omega R + \omega r|}{|\Omega - \omega|} E\left(\frac{2\sqrt{\Omega R \omega r}}{\Omega R + \omega r}, \frac{|\Omega - \omega|}{2} T\right). \tag{6.64}$$

Berikut ini adalah program MATLAB untuk menghitung c.

```
clear all;
format long;
tau = 86164.0906; % detik
T = 12000*27.32661*tau; % detik
satu_tahun = 365.25636*tau; % detik
Omega = 2*pi/satu_tahun; % radian per detik
satu_bulan = 27.32661*tau; % radian per detik
omega = -2*pi/satu_bulan; % radian per detik
R = 149600000000; % meter
r = 384400000; % meter
k = 2*sqrt(Omega*R*omega*r)/(Omega*R + omega*r);
Phi = abs(Omega - omega)*T/2;
N = 20000;
dphi = Phi/N;
phi(1) = dphi;
for m = 2:N
   phi(m) = phi(m - 1) + dphi;
end
E = 0;
for n = 1:N;
   E = E + sqrt(1 - k^2*sin(phi(n))^2)*dphi;
end
C = (2/tau)*(Omega*R + omega*r)/abs(Omega - omega);
c = C*E;
```

Apabila program tersebut dijalankan, maka diperoleh $c = 9,7968(10^9)\,\mathrm{m/s}$ yang hampir sama dengan $c = 10^{10}\,\mathrm{m/s}$.

Nisbah c ini terhadap kelajuan cahaya yang kita ketahui sekarang ini, yaitu $299792458\,\mathrm{m/s}$ adalah $c/(299792458\,\mathrm{m/s}) = 32,6785$.

6.9 Lintasan Bayangan Titik akibat Pencerminan oleh Garis Lurus yang Berputar

Sebuah titik $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ yang dicerminkan secara aktif oleh sebuah garis lurus $L(\alpha) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \tan\alpha\}$, di mana $\alpha \in \mathbb{R}$ akan mengalami transformasi ke titik $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ sedemikian

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6.65}$$

sehingga

$$x' = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha, \tag{6.66}$$

$$y' = -y\cos 2\alpha + x\sin 2\alpha. \tag{6.67}$$

Apabila garis $L(\alpha)$ tersebut diputar dengan sumbu putar melalui titik $(0,0)$ dan tegak lurus bidang $\mathbb{R}^2$, maka bayangan titik (x', y') tersebut juga akan bergerak. Untuk mengetahui bentuk lintasan geraknya, kita dapat mengeliminasi α dari kedua persamaan terakhir tersebut. Ternyata, kita peroleh

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \tag{6.68}$$

yang dinyatakan oleh notasi pembentuk himpunan menjadi

$$P(x,y) := \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2\}. \tag{6.69}$$

Ternyata, $P(x,y)$ berbentuk lingkaran dengan jari-jari $R := \sqrt{x^2+y^2}$ dan pusat $(0,0)$.

6.10 Teknik Menggambar Perspektif secara Matematis

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah titik $\vec{r} := (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Andaikan pula ada sebuah bidang gambar, yaitu

$$P(X) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = X\} \tag{6.70}$$

di mana $X \in \mathbb{R}$, serta sebuah titik tinjau, yaitu $\vec{r}_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Seandainya ada sinar dari $\vec{r}$ menuju $\vec{r}_0$, maka sinar tersebut akan memotong $P(X)$ di titik $\vec{R} := (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$. Kita akan mencari titik potongnya.

Mula-mula,

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\vec{R} - \vec{r}_0) = \vec{0}. \tag{6.71}$$

alias

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0} \tag{6.72}$$

alias

$$Y = y_0 + (X - x_0)\frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{dan} \quad Z = z_0 + (X - x_0)\frac{z - z_0}{x - x_0}. \tag{6.73}$$

Pemetaan $(x,y,z) \mapsto (Y,Z)$ merupakan penggambaran perspektif pada bidang gambar.

Contohnya adalah sebagai berikut.

Andaikan ada sebuah lingkaran

$$S^1(R) := \{R(\cos\phi, \sin\phi, 0) \mid \phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)\} \tag{6.74}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jarinya.

Andaikan kita ambil sebuah titik tinjau, yaitu $(x_0, 0, z_0)$, maka kita peroleh $x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$, $z = 0$, dan $y_0 = 0$, sehingga

$$Y = (X - x_0)\frac{R\sin\phi}{R\cos\phi - x_0} \tag{6.75}$$

dan

$$Z = z_0 - (X - x_0)\frac{z_0}{R\cos\phi - x_0}. \tag{6.76}$$

Dari sini, ϕ akan dieliminasi untuk memperoleh bayangannya pada bidang $P(X)$.

6.11 Menentukan Kurva Pelukis dalam Teknik Menggambar Perspektif

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah permukaan

$$S(\varphi) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{r}) = 0\} \tag{6.77}$$

di mana $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah sebarang pemetaan. Andaikan pula, $\vec{r} := (x, y, z) \in S(\varphi)$. Dalam teknik menggambar perspektif secara matematis, tentu ada sebuah bidang gambar, misalnya

$$P(X) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = X\} \tag{6.78}$$

di mana $X \in \mathbb{R}$, serta sebuah titik tinjau, yaitu $\vec{r}_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Kurva pelukis dari $S(\varphi)$ didefinisikan secara intuitif sebagai

$$R(\varphi, \vec{r}_0) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla\varphi(\vec{r}) = 0\}. \tag{6.79}$$

Sebagai contoh, kita akan menentukan kurva pelukis dari sebuah permukaan bola, yaitu

$$S^2(R) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \tag{6.80}$$

dengan $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari $S^2(R)$. Karena $S^2(R)$ dianggap sebagai $S(\varphi)$, maka kita peroleh

$$\varphi(\vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2. \tag{6.81}$$

Tentu saja,

$$\nabla\varphi(\vec{r}) = 2(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \tag{6.82}$$

di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, dan $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

Dari persamaan $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla\varphi(\vec{r}) = 0$, kita peroleh

$$x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0) = 0 \tag{6.83}$$

alias

$$x(x - x_0) + y(y - y_0) = z(z_0 - z). \tag{6.84}$$

Kita akan melakukan parameterisasi $R(\varphi, \vec{r}_0)$ dengan parameter $l \in \mathbb{R} \cup (i\mathbb{R})$ dan $\alpha \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$. Oleh karena itu,

$$z(z_0 - z) = l^2, \tag{6.85}$$

$$x(x - x_0) = l^2 \cos^2\alpha, \tag{6.86}$$

$$y(y - y_0) = l^2 \sin^2\alpha. \tag{6.87}$$

Dari sini, kita peroleh

$$z^2 - z_0 z + l^2 = 0, \tag{6.88}$$

$$x^2 - x_0 x - l^2 \cos^2 \alpha = 0, \tag{6.89}$$

$$y^2 - y_0 y - l^2 \sin^2 \alpha = 0, \tag{6.90}$$

sehingga dari rumus abc, kita peroleh

$$z = \frac{1}{2}\left(z_0 \pm \sqrt{z_0^2 - 4l^2}\right), \tag{6.91}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 4l^2 \cos^2 \alpha}\right), \tag{6.92}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 4l^2 \sin^2 \alpha}\right). \tag{6.93}$$

Kemudian, hasil-hasil ini kita masukkan ke persamaan $x^2+y^2+z^2 = R^2$, sehingga kita peroleh kaitan antara l dan α, yaitu $l \mapsto \alpha$, lalu kita memperoleh sebuah kurva pelukis yang kita inginkan, yaitu $(x_{l,\alpha}(l_\alpha(\alpha), \alpha), y_{l,\alpha}(l_\alpha(\alpha), \alpha), z_{l,\alpha}(l_\alpha(\alpha), \alpha))$.

Bab 7

Serbaneka Matematika

7.1 Definisi dan Teorema Limit

Andaikan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $c, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$. Definisi limit adalah

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \tag{7.1}$$

sedemikian rupa sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, sedemikian berlaku jika

$$0 < |x - c| < \delta \tag{7.2}$$

mengakibatkan

$$|f(x) - L| < \epsilon. \tag{7.3}$$

Dari definisi ini, kita hendak mencari bentuk eksplisit dari nilai L.
Kita dapat menuliskan

$$|x - c| = |r| \tag{7.4}$$

di mana $0 < |r| < \delta$ alias $r \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$, sehingga

$$x = c + r. \tag{7.5}$$

Kita dapat menuliskan pula

$$|f(x) - L| = |R| \tag{7.6}$$

di mana $0 \leq |R| < \epsilon$ alias $R \in (-\epsilon, \epsilon)$, sehingga

$$L = f(x) + R = f(c + r) + R. \tag{7.7}$$

Contoh kongkretnya adalah

$$\lim_{x \to 0} x = (0 + r) + R. \tag{7.8}$$

Kita ambil $R = -r$, sehingga

$$\lim_{x \to 0} x = r + (-r) = 0. \tag{7.9}$$

Selain itu,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \frac{0 + r}{0 + r} + R. \tag{7.10}$$

Kita ambil $R = 0$, sehingga

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \frac{r}{r} = 1. \tag{7.11}$$

Selanjutnya kita hendak menurunkan beberapa teorema limit.

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = (f(c+r) + g(c+r)) + R. \tag{7.12}$$

Apabila kita ambil $R = R_1 + R_2$, di mana $R_1, R_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) &= (f(c+r) + g(c+r)) + R \\
&= (f(c+r) + R_1) + (g(c+r) + R_2) \\
&= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x).
\end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = f(c+r)g(c+r) + R. \tag{7.14}$$

Apabila kita ambil $R = 0$, maka

$$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = (f(c+r) + R)(g(c+r) + R) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right). \tag{7.15}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c+r)}{g(c+r)} + R. \tag{7.16}$$

Apabila kita ambil $R = 0$, maka

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c+r) + R}{g(c+r) + R} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \tag{7.17}$$

di mana $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$.

Sekarang, andaikan kita hendak menghitung nilai

$$L := \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x}{y}. \tag{7.18}$$

Dari definisi limit tersebut, kita peroleh

$$L = \frac{r}{s} + R + S \tag{7.19}$$

di mana $r, s \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ dan $R, S \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Apabila kita ambil $r = \alpha s$, di mana $\alpha \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$, maka kita peroleh

$$L = \alpha + R + S. \tag{7.20}$$

Apabila kita ambil $R = 0$ dan $S = -\alpha$, maka kita peroleh $L = 0$. Jadi,

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x}{y} = 0. \tag{7.21}$$

7.2 Teorema L' Hôpital

Andaikan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah dua buah fungsi riil, serta f' dan g' berturut-turut adalah turunan pertama dari f dan g. Apabila $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ dan $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/(g(x))^2}{-f'(x)/(f(x))^2} \\
&= \left(\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}\right)\left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 \qquad (7.22)
\end{aligned}$$

sehingga

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.} \qquad (7.23)$$

Jadi, teorema L' Hôpital bukan hanya berlaku untuk bentuk 0/0, melainkan juga berlaku untuk bentuk ∞/∞.

7.3 Deret Ganda

Secara umum, sebuah deret ganda memiliki bentuk

$$S := \sum_{j_1,\cdots,j_n\in\mathbb{N}} u_{j_1,\cdots,j_n} \qquad (7.24)$$

di mana $u_{j_1,\cdots,j_n} \in \mathbb{R}$ untuk setiap $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}$.

Deret ganda S ini dapat dianggap sebagai deret tunggal, yaitu

$$S = \sum_{j_k\in\mathbb{N}} v_{j_k} \qquad (7.25)$$

untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$ di mana

$$v_{j_k} := \sum_{j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n\in\mathbb{N}} u_{j_1,\cdots,j_n} \qquad (7.26)$$

untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Melalui tes rasio, deret ganda S dapat diuji konvergenitasnya, dengan menganggap S adalah deret tunggal, yaitu bahwa

$$\lim_{j_k\to\infty} \left|\frac{v_{j_k+1}}{v_{j_k}}\right| < 1 \qquad (7.27)$$

untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Dengan memasukkan nilai v_{j_k}, diperoleh syarat konvergenitas deret ganda S tersebut, yaitu

$$\lim_{j_k\to\infty}\left|\frac{\sum_{j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n\in\mathbb{N}} u_{j_1,\cdots,j_{k-1},(j_k+1),j_{k+1},\cdots,j_n}}{\sum_{j'_1,\cdots,j'_{k-1},j'_{k+1},\cdots,j'_n\in\mathbb{N}} u_{j'_1,\cdots,j'_n}}\right| < 1 \tag{7.28}$$

untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Apabila persamaan terakhir dipenuhi, maka deret ganda S bersifat konvergen.

7.4 Membalik Pemetaan

Andaikan A, B, dan C adalah sebarang tiga buah lapangan. Andaikan ada pemetaan $f, g : A \times B \to C$. Andaikan diketahui $z = f(x, y)$. Di sini kita diminta untuk mencari x dalam bentuk yang mengandung y dan z dari persamaan terakhir tersebut. Oleh karena itu, $z = f((\mathrm{id}\otimes(y1_f))(x)) = (f\circ(\mathrm{id}\otimes(y1_f)))(x)$ alias $x = (f\circ(\mathrm{id}\otimes(y1_f)))^{-1}(z)$, di mana $\mathrm{id}(x) = x$ dan $1_f(x) = 1$ untuk setiap $x \in A, B, C$, serta $(f\otimes g)(x) = (f(x), g(x))$.

Selanjutnya, andaikan diketahui $z = f(x, y)$ dan $w = g(x, y)$. Dari sini, kita diminta untuk mencari x dan y dalam bentuk yang mengandung z dan w. Mula-mula, kita akan mencari y dalam bentuk yang mengandung x dan z dari persamaan $z = f(x, y)$, yaitu bahwa $z = f(((x1_f)\otimes\mathrm{id})(y)) = (f\circ((x1_f)\otimes\mathrm{id}))(y)$ sehingga $y = (f\circ((x1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)$, lalu hasil ini kita masukkan ke dalam persamaan $w = g(x, y)$, yaitu bahwa $w = g(x, (f\circ((x1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)) = g((\mathrm{id}\otimes(f\circ((\mathrm{id}\,1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z))(x)) = (g\circ(\mathrm{id}\otimes(f\circ((\mathrm{id}\,1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)))(x)$ sehingga $x = (g\circ(\mathrm{id}\otimes(f\circ((\mathrm{id}\,1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)))^{-1}(w)$. Kemudian, untuk mencari y, kita masukkan hasil terakhir ini ke persamaan $y = (f\circ((x1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)$, sehingga $y = (f\circ(((g\circ(\mathrm{id}\otimes(f\circ((\mathrm{id}\,1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)))^{-1}(w)1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)$. Demikianlah x dan y sudah dapat dinyatakan dalam z dan w.

7.5 Sebuah Kulit Bola dalam Sistem Koordinat Kulit Bola

Sebuah kulit bola memiliki tempat kedudukan

$$S^2(\vec{r}_0, R) := \{\vec{r}\in\mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}-\vec{r}_0| = R\} \tag{7.29}$$

di mana $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ adalah pusat kulit bola tersebut, dan $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jarinya.

Tentu saja,

$$\vec{r} := r(\hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta) \tag{7.30}$$

dan

$$\vec{r}_0 := r_0(\hat{x}\sin\theta_0\cos\phi_0 + \hat{y}\sin\theta_0\sin\phi_0 + \hat{z}\cos\theta_0) \tag{7.31}$$

di mana $r, r_0 \in \mathbb{R}^+\cup\{0\}$, $\theta, \theta_0 \in [0, \pi]$, dan $\phi, \phi_0 \in \{0\}\cup(0, 2\pi)$, serta $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, dan $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

Tentu saja,

$$\begin{aligned}\vec{r}-\vec{r}_0 &= \hat{x}(r\sin\theta\cos\phi - r_0\sin\theta_0\cos\phi_0)\\ &\quad +\hat{y}(r\sin\theta\sin\phi - r_0\sin\theta_0\sin\phi_0)+\hat{z}(r\cos\theta - r_0\cos\theta_0) \end{aligned}\tag{7.32}$$

sehingga

$$\begin{aligned}|\vec{r}-\vec{r}_0|^2 &= r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r_0^2\sin^2\theta_0\cos^2\phi_0 - 2r_0r\sin\theta_0\cos\phi_0\sin\theta\cos\phi\\ &\quad +r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r_0^2\sin^2\theta_0\sin^2\phi_0 - 2r_0r\sin\theta_0\sin\phi_0\sin\theta\sin\phi\\ &\quad +r^2\cos^2\theta + r_0^2\cos^2\theta_0 - 2r_0r\cos\theta_0\cos\theta\\ &= r^2\sin^2\theta + r_0^2\sin^2\theta_0 - 2r_0r\sin\theta_0\sin\theta\cos(\phi-\phi_0)\\ &\quad +r^2\cos^2\theta + r_0^2\cos^2\theta_0 - 2r_0r\cos\theta_0\cos\theta = R^2 \end{aligned}\tag{7.33}$$

sehingga

$$r^2 + r_0^2 - 2r_0r[\cos\theta_0\cos\theta + \sin\theta_0\sin\theta\cos(\phi-\phi_0)] = R^2. \tag{7.34}$$

Inilah persamaan sebuah kulit bola dalam sistem koordinat kulit bola.

7.6 Perkalian Titik Dua Buah Vektor

Perkalian titik antara vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$ didefinisikan sebagai

$$\vec{A}\cdot\vec{B} := |\vec{A}||\vec{B}|\cos\angle(\vec{A},\vec{B}). \tag{7.35}$$

Karena

$$\cos\angle(\vec{A},\vec{B}) = \frac{|\vec{A}+\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2}{2|\vec{A}||\vec{B}|}, \tag{7.36}$$

maka apabila $\vec{A} := (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$ dan $\vec{B} := (B_x, B_y, B_z) \in \mathbb{R}^3$, diperoleh

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= \frac{1}{2}(|\vec{A}+\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2)\\ &= \frac{1}{2}\Big((A_x+B_x)^2 + (A_y+B_y)^2 + (A_z+B_z)^2 - (A_x^2+A_y^2+A_z^2) - (B_x^2+B_y^2+B_z^2)\Big)\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \end{aligned}\tag{7.37}$$

7.7 Perkalian Silang Dua Buah Vektor

Perkalian silang antara vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ didefinisikan sebagai

$$\vec{A}\times\vec{B} := |\vec{A}||\vec{B}|\sin\angle(\vec{A},\vec{B})\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}. \tag{7.38}$$

Karena untuk $\vec{A} := (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$ dan $\vec{B} := (B_x, B_y, B_z) \in \mathbb{R}^3$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\sin\angle(\vec{A},\vec{B}) &= \sqrt{1-\cos^2\angle(\vec{A},\vec{B})} = \sqrt{1-\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right)^2} = \frac{\sqrt{|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \\
&= \frac{\sqrt{(A_x^2+A_y^2+A_z^2)(B_x^2+B_y^2+B_z^2)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \\
&= \frac{\sqrt{(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2}}{|\vec{A}||\vec{B}|}, \qquad (7.39)
\end{aligned}$$

maka

$$\vec{A}\times\vec{B} = \sqrt{(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2}\,\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}, \qquad (7.40)$$

sehingga

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2}. \qquad (7.41)$$

Ada banyak kemungkinan bentuk eksplisit dari $\vec{A}\times\vec{B}$ yang memenuhi persamaan (7.41). Karena $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$, $\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$, dan $\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$ harus dipenuhi, maka terpaksa

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z-A_zB_y)\hat{x}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{y}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{z}. \qquad (7.42)$$

7.8 Suatu Identitas Vektor yang Tak Terduga

$$\begin{aligned}
[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} &\equiv [\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{d} \\
&= \epsilon_{jkl}a_jb_kc_ld_m\hat{x}_m \\
&= \delta_{jp}\delta_{mq}\epsilon_{jkl}a_pb_kc_ld_m\hat{x}_q \\
&= (\epsilon_{rjp}\epsilon_{rmq}-\epsilon_{rjq}\epsilon_{rmp}+\delta_{jq}\delta_{mp})\epsilon_{jkl}a_pb_kc_ld_m\hat{x}_q \\
&= \epsilon_{rjp}\epsilon_{rmq}\epsilon_{jkl}a_pb_kc_ld_m\hat{x}_q-\epsilon_{rjq}\epsilon_{rmp}\epsilon_{jkl}a_pb_kc_ld_m\hat{x}_q+\epsilon_{jkl}a_mb_kc_ld_m\hat{x}_j \\
&= \epsilon_{rjp}\epsilon_{rmq}(\vec{b}\times\vec{c})_ja_pd_m\hat{x}_q-\epsilon_{rjq}\epsilon_{rmp}(\vec{b}\times\vec{c})_ja_pd_m\hat{x}_q+(\vec{b}\times\vec{c})_ja_md_m\hat{x}_j \\
&= [(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}]_r\epsilon_{rmq}d_m\hat{x}_q-\epsilon_{rjq}(\vec{d}\times\vec{a})_r(\vec{b}\times\vec{c})_j\hat{x}_q+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) \\
&= [(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}]\times\vec{d}-(\vec{d}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) \\
&= [(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}]\times\vec{d}-(\vec{d}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) \\
&= (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\times\vec{d})-[\vec{d}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{a}+[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{d}+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c})
\end{aligned}$$

Ini berarti

$$[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a} = (\vec{b}\cdot\vec{a})(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{d}\times\vec{b})+(\vec{d}\cdot\vec{a})(\vec{b}\times\vec{c}) \qquad (7.43)$$

sehingga

$$\boxed{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{c}\times\vec{a})+(\vec{c}\cdot\vec{d})(\vec{a}\times\vec{b}).} \qquad (7.44)$$

7.9 Kabar Gembira dalam Analisis Vektor

Andaikan kita mendefinisikan produk skalar tripel dari 3 buah vektor $\vec{A}$, $\vec{B}$, dan $\vec{C}$, yaitu $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}] := \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$.

Identitas vektor

$$[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]\vec{D} = (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\times\vec{C}) + (\vec{B}\cdot\vec{D})(\vec{C}\times\vec{A}) + (\vec{C}\cdot\vec{D})(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{7.45}$$

dapat membuktikan bahwa

1. perkalian antara skalar semu dengan vektor sejati menghasilkan vektor semu,
2. perkalian antara skalar semu dengan vektor semu menghasilkan vektor sejati,
3. perkalian antara skalar semu dengan skalar semu dengan skalar semu menghasilkan skalar sejati,
4. dan sebagainya,

dengan cara mengutak-atik identitas vektor di atas tersebut.

7.10 Turunan Vektor Basis Satuan Azimutal terhadap Koordinat Azimutal

Andaikan $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in (0,\pi)$, dan $\phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$.

$$\partial\hat{\phi}/\partial\phi = (\partial/\partial\phi)(\vec{e}_\phi/|\vec{e}_\phi|). \tag{7.46}$$

$$\vec{e}_\phi = \partial\vec{r}/\partial\phi. \tag{7.47}$$

$$\vec{e}_\phi = \partial\vec{r}/\partial\phi. \tag{7.48}$$

$$\vec{r} = \hat{x} r\sin\theta\cos\phi + \hat{y} r\sin\theta\sin\phi + \hat{z} r\cos\theta. \tag{7.49}$$

$$\vec{e}_\phi = -\hat{x} r\sin\theta\sin\phi + \hat{y} r\sin\theta\cos\phi. \tag{7.50}$$

$$|\vec{e}_\phi| = r\sin\theta. \tag{7.51}$$

$$\hat{\phi} = \vec{e}_\phi/|\vec{e}_\phi| = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi. \tag{7.52}$$

$$\partial\hat{\phi}/\partial\phi = -(\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi). \tag{7.53}$$

$$\hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta. \tag{7.54}$$

$$\hat{\theta} = \vec{e}_\theta/|\vec{e}_\theta|. \tag{7.55}$$

$$\vec{e}_\theta = \partial\vec{r}/\partial\theta = \hat{x} r\cos\theta\cos\phi + \hat{y} r\cos\theta\sin\phi - \hat{z} r\sin\theta. \tag{7.56}$$

$$|\vec{e}_\theta| = r. \tag{7.57}$$

$$\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta. \tag{7.58}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}. \tag{7.59}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{vmatrix} = 1. \tag{7.60}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \hat{r} & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \hat{\theta} & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ \hat{\phi} & \cos\phi & 0 \end{vmatrix} = \hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi. \tag{7.61}$$

$$\hat{y} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \hat{r} & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \hat{\theta} & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \hat{\phi} & 0 \end{vmatrix} = \hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi. \tag{7.62}$$

$$\begin{aligned} \partial\hat{\phi}/\partial\phi &= -((\hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi)\cos\phi \\ &\quad +(\hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi)\sin\phi). \end{aligned} \tag{7.63}$$

$$\partial\hat{\phi}/\partial\phi = -(\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta). \tag{7.64}$$

7.11 Jarak Rata-Rata Dua Buah Objek Geometris

Pada kesempatan ini, saya akan menerangkan konsep jarak rata-rata dua buah objek geometris.

Andaikan ada dua buah objek di $\mathbb{R}^3$, yaitu $A := \{\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n\}$ dan $A' := \{\vec{r}'_1, \cdots, \vec{r}'_{n'}\}$ di mana titik $\vec{r}_j$ bermassa m_j untuk semua $j \in \{1, \cdots, n\}$, dan titik $\vec{r}'_{j'}$ bermassa $m'_{j'}$ untuk semua $j' \in \{1, \cdots, n'\}$. Jarak euklidean rata-rata objek A terhadap objek A' tentu saja adalah

$$\delta = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=1}^{n'} |\vec{r}_j - \vec{r}'_{j'}| m_j m'_{j'}}{\sum_{k=1}^{n} m_k \sum_{k'=1}^{n'} m'_{k'}}. \tag{7.65}$$

Untuk agihan kontinyu, apabila terdapat dua buah objek, yaitu M dan M' sedemikian untuk setiap $\vec{r} \in M$ bermassa dm, dan untuk setiap $\vec{r}' \in M'$ bermassa dm', maka jarak eukidean rata-rata antara objek M dan M' adalah

$$\delta = \frac{\int_M \int_{M'} |\vec{r} - \vec{r}'| dm' dm}{\int_M dm \int_{M'} dm'}. \tag{7.66}$$

Contoh penerapannya adalah sebagai berikut. Apabila ada sebuah penggal garis lurus di ruang $\mathbb{R}^3$, yaitu

$$S := \{(0, 0, z) \mid z \in [0, L]\} \tag{7.67}$$

di mana $L \in \mathbb{R}^+$, yang mana rapat massanya seragam. Tentu saja jarak euklidean rata-rata objek S terhadap dirinya sendiri adalah δ.

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L |z-z'|dz\,dz'. \\
&= \frac{1}{2L^2}\int_0^L (z-z')^2\operatorname{sgn}(z-z')|_0^L dz'. \\
&= \frac{1}{2L^2}\int_0^L \left((L-z')^2\operatorname{sgn}(L-z') - z'^2\operatorname{sgn}(-z')\right)dz'. \\
&= \frac{1}{2L^2}\left(-\int_0^L (z'-L)^2\operatorname{sgn}(z'-L)dz' + \int_0^L z'^2\operatorname{sgn} z'\,dz'.\right). \\
&= \frac{1}{6L^2}\left(-(z'-L)^3\operatorname{sgn}(z'-L)|_0^L + z'^3\operatorname{sgn} z'|_0^L\right). \\
&= \frac{1}{6L^2}\left((-L)^3\operatorname{sgn}(-L) + L^3\operatorname{sgn} L\right). \\
&= \frac{1}{6L^2}(L^3+L^3) = \frac{L}{3}.
\end{aligned} \tag{7.68}$$

Jadi, jarak euklidean rata-rata ruas garis S tersebut terhadap dirinya sendiri adalah $L/3$.

7.12 Keanehan Bentuk Tak Tentu dalam Analisis Vektor

Andaikan ada sebuah vektor posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Mungkin kita semua akan mengira bahwa ungkapan $3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3$ itu bernilai nol untuk setiap $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Ternyata dugaan ini keliru, sebab apabila $\vec{r} = \vec{0}$, maka ungkapan $3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3$ tidaklah bernilai nol mengingat $3(0)/0-3/0$ itu merupakan bentuk tak tentu. Pada kesempatan ini, saya akan menunjukkan hasil yang sebenarnya dari $3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3$, yaitu bahwa ternyata

$$3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3 = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) \tag{7.69}$$

di mana $\delta^{(3)}$ adalah delta Dirac pada ruang $\mathbb{R}^3$.

Untuk menunjukkan kesamaan terakhir ini, mula-mula kita akan menghitung nilai $\nabla^2(1/|\vec{r}|)$ untuk semua $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

Dengan analisis vektor dan kesepakatan penjumlahan Einstein untuk indeks berulang, kita peroleh bahwa $\nabla^2(1/|\vec{r}|) = \partial_j\partial_j(x_kx_k)^{-1/2} = -\partial_j(x_j(x_kx_k)^{-3/2}) = -3(x_kx_k)^{-3/2} + 3x_jx_j(x_kx_k)^{-5/2} = 3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3$, di mana x_j didefinisikan sedemikian $\vec{r} := x_j\hat{x}_j$ dengan $\{\hat{x}_j \mid j \in \{1,2,3\}\}$ adalah basis ortonormal, serta didefinisikan $\partial_j := \partial/\partial x_j$. Di sini kita tidak dapat mengatakan bahwa $|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 = 1/|\vec{r}|^3$, sebab apabila $\vec{r} = \vec{0}$, ungkapan tersebut tidak berlaku, mengingat $0/0$ adalah bentuk tak tentu.

Selanjutnya, kita akan mencoba menerapkan teorema Stokes, yaitu

$$\oint_{\partial V}\vec{A}\cdot d^2\vec{r} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}d^3\vec{r}. \tag{7.70}$$

Dengan memisalkan $\vec{A} := \nabla(1/|\vec{r}|)$ dan $V := \mathbb{R}^3$, maka diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2(1/|\vec{r}|) d^3\vec{r} = \oint_{\partial\mathbb{R}^3} \nabla(1/|\vec{r}|) \cdot d^2\vec{r}. \tag{7.71}$$

Karena diketahui bahwa

$$d^2\vec{r} := \hat{r}|\vec{r}|^2 \sin\theta d\theta \wedge d\phi + \hat{\theta}|\vec{r}| \sin\theta d\phi \wedge d|\vec{r}| + \hat{\phi}|\vec{r}| d|\vec{r}| \wedge d\theta \tag{7.72}$$

di mana $\hat{r} := \vec{r}/|\vec{r}|$, $\theta := \arctan_2(x_3, \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, $\phi := \arctan_2(x_1, x_2)$, $\hat{\theta} := \vec{e}_\theta/|\vec{e}_\theta|$, $\hat{\phi} := \vec{e}_\phi/|\vec{e}_\phi|$, $\vec{e}_\theta := \partial\vec{r}/\partial\theta$, dan $\vec{e}_\phi := \partial\vec{r}/\partial\phi$, maka

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2(1/|\vec{r}|) d^3\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi = -4\pi. \tag{7.73}$$

Terpaksa, kita anggap bahwa $\nabla^2(1/|\vec{r}|) = \alpha\delta^{(3)}(\vec{r})$ di mana $\alpha \in \mathbb{R}$ adalah tetapan. Dari sifat delta Dirac, yaitu

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta^{(3)}(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1, \tag{7.74}$$

maka diperoleh $\alpha = -4\pi$, sehingga

$$\nabla^2(1/|\vec{r}|) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}). \tag{7.75}$$

Karena tadi, kita peroleh bahwa

$$\nabla^2(1/|\vec{r}|) = 3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3, \tag{7.76}$$

maka akhirnya, terbuktilah bahwa

$$3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3 = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}). \tag{7.77}$$

7.13 Deret Fourier

Suatu fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan *periodik* dengan periode $T \in \mathbb{R}^+$ apabila $f(t + T) = f(t)$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Setiap fungsi periodik f ini dapat dinyatakan sebagai *deret Fourier*

$$f(t) = Ka_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{T} \right) \tag{7.78}$$

di mana $K, a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ adalah tetapan yang hendak dicari kemudian, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Interval periode dari f adalah himpunan interval terbuka $(c, c+T) \subseteq \mathbb{R}$ untuk suatu $c \in \mathbb{R}$. Apabila didefinisikan $2\pi t/T =: u$, maka persamaan (7.78) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = Ka_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \sin nu) \tag{7.79}$$

sehingga

$$\int_{2\pi c/T}^{2\pi(c+T)/T} f(t)\, du = 2\pi K a_0 \tag{7.80}$$

alias

$$a_0 = \frac{1}{KT}\int_c^{c+T} f(t)\,dt. \tag{7.81}$$

Demikian pula,

$$\int_{2\pi c/T}^{2\pi(c+T)/T} f(t)\cos mu\,du = \pi\sum_{n=1}^{\infty} a_n\delta_{mn} \equiv \pi a_m \tag{7.82}$$

alias

$$a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt \tag{7.83}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Demikian pula,

$$\int_{2\pi c/T}^{2\pi(c+T)/T} f(t)\sin mu\,du = \pi\sum_{n=1}^{\infty} b_n\delta_{mn} \equiv \pi b_m \tag{7.84}$$

alias

$$b_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}dt. \tag{7.85}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Agar persamaan (7.81) dan (7.83) memiliki bentuk yang seragam, maka haruslah $K = 1/2$, sehingga persamaan (7.78) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi t}{T}\right). \tag{7.86}$$

Perpaduan antara persamaan (7.81) dan (7.83) adalah

$$a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt \tag{7.87}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}_0$.

Karena $\cos\alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$ dan $\sin\alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i)$, maka persamaan dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(e^{2in\pi t/T} + e^{-2in\pi t/T}) - ib_n(e^{2in\pi t/T} - e^{-2in\pi t/T})\right). \tag{7.88}$$

alias

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2in\pi t/T} \tag{7.89}$$

di mana

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)\,dt \tag{7.90}$$

serta

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{-2in\pi t/T}dt \tag{7.91}$$

dan

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{2in\pi t/T}dt \tag{7.92}$$

keduanya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Gabungan dari persamaan (7.90), (7.91), dan (7.92) adalah

$$c_n = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{-2in\pi t/T}dt \tag{7.93}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Tentu saja, dari persamaan (7.86), diperoleh

$$\langle f^2\rangle_{(c,c+T)} := \frac{1}{T}\int_c^{c+T} (f(t))^2 dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{7.94}$$

yang merupakan *identitas Parseval* untuk deret Fourier.

Dari persamaan (7.90), (7.91), dan (7.92), diperoleh

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad \text{dan} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \tag{7.95}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga persamaan (7.94) menjadi

$$\begin{aligned} \langle f^2\rangle_{(c,c+T)} &= c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((c_n^2 + c_{-n}^2 + 2c_nc_{-n}) - (c_n^2 + c_{-n}^2 - 2c_nc_{-n})) \\ &= c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_nc_{-n} = c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 \end{aligned} \tag{7.96}$$

yang merupakan bentuk lain dari identitas Parseval untuk deret Fourier, mengingat $c_{-n} = c_n^*$ dari persamaan (7.91) dan (7.92).

7.14 Persamaan Bernoulli

Persamaan diferensial Bernoulli adalah

$$y' + Py = Q \tag{7.97}$$

di mana $x, y \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $P, Q \mapsto x$.

Jika kedua ruas persamaan (7.97) dikalikan dengan e^I, sedemikian $dI/dx = P$ alias $I = I_0 + \int_0^x P\,dx$, di mana I_0 konstan, maka persamaan tersebut menjadi

$$\frac{d}{dx}(ye^I) = Qe^I. \tag{7.98}$$

Pengintegralan persamaan (7.98) menghasilkan

$$ye^I - y_0 e^{I_0} = \int_0^x Qe^I dx \tag{7.99}$$

alias

$$y = e^{-I}\left(y_0 e^{I_0} + \int_0^x Qe^I dx\right) \tag{7.100}$$

alias

$$y = e^{-\int_0^x P\,dx}\left(y_0 + \int_0^x Qe^{\int_0^x P\,dx} dx\right) \tag{7.101}$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (7.97).

Sekarang, andaikan ada persamaan diferensial yang lebih umum daripada persamaan (7.97), yaitu

$$y' + Py = Qy^n \tag{7.102}$$

di mana $n \in \mathbb{R}$. Substitusi $z := y^{1-n}$ alias $y = z^{1/(1-n)}$ menghasilkan $z' := dz/dx = (1-n)y^{-n}y'$ alias $y' = (1-n)^{-1}y^n z' = (1-n)^{-1}z^{n/(1-n)}z'$, sehingga persamaan (7.102) menjadi

$$(1-n)^{-1}z^{n/(1-n)}z' + Pz^{1/(1-n)} = Qz^{n/(1-n)}. \tag{7.103}$$

Apabila kedua ruas persamaan (7.103) dikalikan dengan $(1-n)z^{-n/(1-n)}$, maka persamaan tersebut menjadi

$$z' + (1-n)Pz = (1-n)Q, \tag{7.104}$$

sehingga

$$z = y^{1-n} = e^{-(1-n)\int_0^x P\,dx}\left(z_0 + (1-n)\int_0^x Qe^{(1-n)\int_0^x Pdx}\right) \tag{7.105}$$

alias

$$y = \left(e^{-(1-n)\int_0^x P\,dx}\left(y_0^{1-n} + (1-n)\int_0^x Qe^{(1-n)\int_0^x Pdx}\right)\right)^{1/(1-n)} \tag{7.106}$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (7.102).

7.15 Persamaan Diferensial Linier Orde-2

Persamaan diferensial orde-2 berbentuk

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{7.107}$$

di mana $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $y'' := dy'/dx$.

Persamaan (7.107) itu identik dengan

$$(d/dx - k_+)(d/dx - k_-)y = 0 \tag{7.108}$$

di mana

$$k_\pm := \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7.109}$$

Apabila didefinisikan

$$z := (d/dx - k_-)y \equiv y' - k_- y, \tag{7.110}$$

maka persamaan (7.108) menjadi

$$(d/dx - k_+)z = 0 \quad \text{alias} \quad z' = k_+ z \quad \text{alias} \quad dz/z = k_+ dx. \tag{7.111}$$

Pengintegralan persamaan (7.111) menghasilkan

$$\ln(z/z_0) = k_+ x \quad \text{alias} \quad z = z_0 e^{k_+ x} = (y_0' - k_- y_0)e^{k_+ x}. \tag{7.112}$$

Dengan memasukkan nilai z dari persamaan (7.112) ke persamaan (7.110), diperoleh

$$y' - k_- y = (y_0' - k_- y_0)e^{k_+ x} \tag{7.113}$$

yang merupakan persamaan Bernoulli, yang penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} y &= e^{k_- x}\left(y_0 + (y_0' - k_- y_0)\int_0^x e^{(k_+ - k_-)x} dx\right) \\ &= e^{k_- x}\left(y_0 + \frac{y_0' - k_- y_0}{k_+ - k_-}(e^{(k_+ - k_-)x} - 1)\right) \\ &= e^{k_- x}\frac{(k_+ - k_-)y_0 + (y_0' - k_- y_0)(e^{(k_+ - k_-)x} - 1)}{k_+ - k_-} \\ &= e^{k_- x}\frac{(k_+ y_0 - y_0') + (y_0' - k_- y_0)e^{(k_+ - k_-)x}}{k_+ - k_-} \end{aligned} \tag{7.114}$$

alias

$$y = \frac{(y_0' - k_- y_0)e^{k_+ x} + (k_+ y_0 - y_0')e^{k_- x}}{k_+ - k_-} \tag{7.115}$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (7.107).

Apabila $k_- = k_+ = k$, maka persamaan (7.115) menjadi

$$\begin{aligned} y &= \lim_{k_- \to k} \frac{(y_0' - k_- y_0)e^{kx} + (ky_0 - y_0')e^{k_- x}}{k - k_-} \\ &= -\lim_{k_- \to k}(-y_0 e^{kx} + (ky_0 - y_0')xe^{k_- x}) \\ &= -(-y_0 e^{kx} + (ky_0 - y_0')xe^{kx}) \end{aligned} \tag{7.116}$$

alias

$$y = ((y_0' - ky_0)x + y_0)e^{kx}. \tag{7.117}$$

7.16 Persamaan Diferensial Eksak

Andaikan $x, y \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $M, N \mapsto (x, y)$.

Persamaan diferensial

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad \text{alias} \quad M + Ny' = 0 \tag{7.118}$$

dikatakan *eksak* apabila terdapat $F \mapsto (x, y)$ sedemikian

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N. \tag{7.119}$$

Apabila persamaan (7.118) merupakan persamaan diferensial eksak, maka persamaan tersebut dapat dituliskan

$$dF/dx = 0 \quad \text{alias} \quad F = F_x(0). \tag{7.120}$$

Penyelesaian persamaan (7.119) adalah

$$F = F_{x,y}(0, y) + \int_0^x M\,\partial x = F_{x,y}(x, 0) + \int_0^y N\,\partial y \tag{7.121}$$

alias

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{7.122}$$

yang merupakan syarat agar persamaan (7.118) eksak.

Dari persamaan (7.119), (7.121), dan (7.122), diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dy} F_{x,y}(0, y) + \int_0^x \frac{\partial M}{\partial y} \partial x = N \tag{7.123}$$

alias

$$\frac{d}{dy} F_{x,y}(0, y) + \int_0^x \frac{\partial N}{\partial x} \partial x = N \tag{7.124}$$

alias

$$\frac{d}{dy} F_{x,y}(0, y) - N_{x,y}(0, y) = 0 \tag{7.125}$$

alias

$$F_{x,y}(0, y) = F_{x,y}(0, 0) + \int_0^y N_{x,y}(0, y) dy. \tag{7.126}$$

Substitusi persamaan (7.126) ke persamaan (7.121) menghasilkan

$$F = F_{x,y}(0, 0) + \int_0^y N_{x,y}(0, y) dy + \int_0^x M\,\partial x \tag{7.127}$$

yang merupakan penyelesaian dari persamaan (7.119).

Substitusi persamaan (7.127) ke persamaan (7.120) menghasilkan

$$\int_0^y N_{x,y}(0, y) dy + \int_0^x M\,\partial x = F_x(0) - F_{x,y}(0, 0) \tag{7.128}$$

yang merupakan penyelesaian dari persamaan (7.118).

7.17 Persamaan Diferensial Tak Eksak

Apabila persamaan (7.122) tidak dipenuhi, maka persamaan (7.118) disebut *persamaan diferensial tak eksak*.

Agar supaya persamaan (7.118) menjadi persamaan diferensial eksak, maka kedua ruas dari persamaan (7.118) harus dikalikan dengan *faktor integral* $u \mapsto (x, y)$, sehingga

$$uM\,dx + uN\,dy = 0 \tag{7.129}$$

yang akan dipaksa menjadi eksak.

Oleh karena itu, dari persamaan (7.129), haruslah berlaku

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x} \tag{7.130}$$

alias

$$\frac{\partial u}{\partial y}M + u\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}N + u\frac{\partial N}{\partial x} \tag{7.131}$$

alias

$$u = \frac{N\partial u/\partial x - M\partial u/\partial y}{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}. \tag{7.132}$$

Apabila ternyata u hanya bergantung pada x saja, maka tentu saja $\partial u/\partial x = du/dx$ dan $\partial u/\partial y = 0$, sehingga persamaan (7.132) menjadi

$$u = \frac{N}{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}\frac{du}{dx} \tag{7.133}$$

alias

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}dx = \frac{du}{u} \tag{7.134}$$

alias

$$\int_0^x \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}dx = \ln\frac{u}{u_0} \tag{7.135}$$

alias

$$u = u_0 \exp\int_0^x \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}dx. \tag{7.136}$$

Sekali lagi, peubah u pada persamaan (7.136) harus bergantung pada x saja. Apabila u tersebut masih bergantung pada y juga, maka u yang diperoleh dari persamaan (7.136) bukanlah faktor integral sebagaimana dimaksud sebelumnya, sehingga persamaan (7.129) gagal dijadikan persamaan diferensial eksak.

7.18 Fungsi Peubah Kompleks

Ada sebuah bilangan imajiner $i \in \mathbb{C}$ yang memenuhi sifat $i^2 = -1$. Tentu saja, $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, dan $i^{4n+3} = -i$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Apabila ada pemetaan $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, maka dengan bantuan deret Taylor, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n, i) &= \sum_{j_1,\cdots,j_n,k=0}^{\infty} \frac{1}{j_1!\cdots j_n!k!} f_{j_1\cdots j_n k}(0) x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n} i^k \\ &= \sum_{j_1,\cdots,j_n=0}^{\infty} \frac{x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}}{j_1!\cdots j_n!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{f_{j_1\cdots j_n(4k)}(0)}{(4k)!} - \frac{f_{j_1\cdots j_n(4k+2)}(0)}{(4k+2)!} \right) \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{f_{j_1\cdots j_n(4k+1)}(0)}{(4k+1)!} - \frac{f_{j_1\cdots j_n(4k+3)}(0)}{(4k+3)!} \right) \right) \end{aligned} \tag{7.137}$$

di mana

$$f_{j_1,\cdots,j_n,k}(X_1, \cdots, X_n, Y) := \lim_{x_1 \to X_1} \cdots \lim_{x_n \to X_n} \lim_{y \to Y} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n+k} f(x_1, \cdots, x_n, y)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n} \partial y^k}. \tag{7.138}$$

Dari persamaan (7.137), tampak bahwa $f(x_1, \cdots, x_n, i)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $u + iv$, di mana $u, v \in \mathbb{R}$, yaitu bahwa $u := \operatorname{Re} f(x_1, \cdots, x_n, i)$ dan $v := \operatorname{Im} f(x_1, \cdots, x_n, i)$ berturut-turut adalah bagian riil dan imajiner dari $f(x_1, \cdots, x_n, i)$.

Andaikan ada sebuah bilangan kompleks $z \in \mathbb{C}$. Apabila pada persamaan (7.137), $n = 2$ serta $x := x_1 := \operatorname{Re} z$ dan $y := x_2 := \operatorname{Im} z$, maka $f(x, y, i) = u + iv = f(z) =: w$, di mana $u, v \mapsto (x, y)$, sedemikian $u := \operatorname{Re} f(z)$ dan $v := \operatorname{Im} f(z)$, serta kali ini $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dikatakan *analitik* / *reguler* / *holomorfis* / *monogenik* pada suatu daerah $A \subseteq \mathbb{C}$, di mana $\dim A = \dim \mathbb{C}$, apabila f memiliki turunan yang tunggal di setiap titik pada daerah A tersebut.

Apabila fungsi f tersebut analitik pada daerah A tersebut, maka pada daerah A berlaku

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \tag{7.139}$$

serta

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{dw}{dz}. \tag{7.140}$$

Dari persamaan (7.139) dan (7.140), diperoleh

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{7.141}$$

sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{7.142}$$

yang merupakan akibat dari ke-analitik-an f di A.

Apabila f analitik di A, maka

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} f(z)\, dz &= \oint_{\partial A} (u + iv)(dx + i\, dy) = \oint_{\partial A} (u\, dx - v\, dy) + i \oint_{\partial A} (v\, dx + u\, dy) \\ &= -\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i \int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0 \end{aligned} \tag{7.143}$$

akibat persamaan (7.142).

Apabila $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik di $A\subseteq\mathbb{C}$ di mana $\dim A=\dim\mathbb{C}$, serta $a\in A$, maka

$$\oint_{\partial A}\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a). \tag{7.144}$$

Dengan menurunkan kedua ruas persamaan (7.144) terhadap a sebanyak $n-1$ kali, diperoleh

$$\oint_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-a)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a). \tag{7.145}$$

Dengan memasukkan $f(z)=1$ ke dalam persamaan (7.145), diperoleh

$$\oint_{\partial A}\frac{dz}{(z-a)^n}=2\pi i\,\delta_{1n}. \tag{7.146}$$

Titik $a\in\mathbb{C}$ disebut *kutub* tingkat-n menurut fungsi $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ apabila $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f(z)=a_0+\sum_{j=1}^{\infty}a_j(z-a)^j+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{(z-a)^j} \tag{7.147}$$

di mana $a_0,a_j,b_j\in\mathbb{C}$ adalah konstanta, sedemikian rupa sehingga $n\in\mathbb{N}$ adalah nilai terbesar yang memenuhi $b_n\neq 0$.

Apabila pada wilayah $A\subseteq\mathbb{C}$, di mana $\dim A=\dim\mathbb{C}$, terdapat p buah kutub, yaitu $a_1,\cdots,a_p\in\mathbb{C}$, maka

$$f(z)=a_{0k}+\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}(z-a_k)^j+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_{jk}}{(z-a_k)^j} \tag{7.148}$$

untuk setiap $j\in\{1,\cdots,p\}$. Apabila $a_j\in A_j\subset A$ adalah satu-satunya kutub di wilayah A_j, maka tentu saja

$$\begin{aligned}\oint_{\partial A}f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{p}\oint_{\partial A_k}f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{p}b_{jk}\sum_{j=1}^{\infty}\oint_{\partial A_k}\frac{dz}{(z-a_k)^j}\\ &= 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{\infty}b_{jk}\delta_{1j}=2\pi i\sum_{k=1}^{p}b_{1k}=2\pi i\sum_{k=1}^{p}R(f,a_k)\end{aligned} \tag{7.149}$$

di mana $b_{1k}:=R(f,a_k)$ disebut sebagai *residu* fungsi f di titik a_k.

Untuk memperoleh nilai b_{1k}, dapat dilakukan prosedur sebagai berikut.

Dari persamaan (7.148), apabila a_k adalah kutub tingkat-n menurut fungsi f, maka untuk setiap $m\in\mathbb{N}_0$ yang memenuhi $m\geq n$, berlaku

$$(z-a_k)^m f(z)=a_{0k}(z-a_k)^m+\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}(z-a_k)^{j+m}+\sum_{j=1}^{\infty}b_{jk}(z-a_k)^{m-j} \tag{7.150}$$

lalu

$$\begin{aligned}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a_k)^m f(z)\right) &= m!a_{0k}(z-a_k)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+m)!}{(j+1)!}a_{jk}(z-a_k)^{j+1} \\ &\quad +\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-j)!}{(1-j)!}b_{jk}(z-a_k)^{1-j} \qquad (7.151)\end{aligned}$$

lalu

$$\begin{aligned}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a_k)^m f(z)\right) &= ma_{0k}(z-a_k)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+m)!}{(j+1)!(m-1)!}a_{jk}(z-a_k)^{j+1} \\ &\quad +\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-j)!}{(1-j)!(m-1)!}b_{jk}(z-a_k)^{1-j} \qquad (7.152)\end{aligned}$$

lalu

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a_k}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a_k)^m f(z)\right)=b_{1k}, \qquad (7.153)$$

sehingga persamaan (7.149) menjadi

$$\oint_{\partial A} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{z\to a_k}\frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}}\left((z-a_k)^{m_k}f(z)\right) \qquad (7.154)$$

di mana $m_k \in \mathbb{N}_0$ yang memenuhi $m_k \geq n$ untuk setiap $k \in \{1, \cdots, p\}$.

7.19 Invers Transformasi Laplace

Transformasi Laplace $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ didefinisikan sedemikian

$$(L(f))(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (7.155)$$

di mana $\operatorname{Re} s > 0$.

Apabila $L(f) =: F$, maka $f = L^{-1}(F)$, sehingga untuk mendapatkan invers dari L, dapat dilakukan pengintegralan kedua ruas persamaan terakhir, yaitu

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st'}ds = \int_0^\infty f(t)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s(t'-t)}ds\,dt \qquad (7.156)$$

di mana c adalah sebarang konstanta riil, serta integrasi s menelusuri lintasan garis lurus.

Apabila $\operatorname{Im} s =: y$, maka $s := c + iy$, sehingga

$$\begin{aligned}
\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st'}ds &= i\int_0^{\infty} f(t)\int_{-\infty}^{\infty} e^{(c+iy)(t'-t)}dy\,dt \\
&= i\int_0^{\infty} f(t)e^{c(t'-t)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(t'-t)}dy\,dt \\
&= 2\pi i\int_0^{\infty} f(t)e^{c(t'-t)}\delta(t'-t)\,dt \\
&= 2\pi i\int_{-\infty}^{\infty} u(t)f(t)e^{c(t'-t)}\delta(t'-t)\,dt \\
&= 2\pi i\, u(t')f(t') \qquad (7.157)
\end{aligned}$$

di mana $\delta : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ adalah delta Dirac 1-dimensi, serta $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi undak satuan Heaviside.

Oleh karena itu, dengan penggantian peubah boneka (*dummy variable*), diperoleh

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds = 2\pi i\, u(t)f(t). \qquad (7.158)$$

Karena nilai t hanya dibatasi positif ($t > 0$), maka

$$f(t) = (L^{-1}(F))(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (7.159)$$

yang biasa dikenal sebagai *Integral Bromwich*.

7.20 Memampatkan Fungsi

Sebuah fungsi itu dapat dimampatkan. Sebagai contoh, fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan oleh $f(x) := \tanh kx$. Apabila fungsi ini dimampatkan di titik 0, maka fungsi ini menjadi $\operatorname{sgn} x := \lim_{k\to\infty} \tanh kx$ yang merupakan fungsi tanda (signatur) yang nilainya sama dengan 1 untuk $x > 0$, 0 untuk $x = 0$, dan -1 untuk $x < 0$. Selanjutnya, kita dapat mendefinisikan fungsi undak satuan Heaviside, yaitu fungsi $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai $u(x) = (1 + \operatorname{sgn} x)/2$, yang nilainya 1 untuk $x > 0$, 1/2 untuk $x = 0$, dan 0 untuk $x < 0$. Fungsi undak satuan Heaviside ini adalah pemampatan dari fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai $g(x) := \frac{1}{2}(1 + \tanh kx)$ dengan mengambil limit $k \to \infty$. Dapat dibuktikan bahwa $\operatorname{sgn} x = 2u(x) - 1$.

Contoh selanjutnya adalah 'fungsi' delta Dirac, yaitu $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, yang didefinisikan sebagai turunan pertama dari fungsi undak satuan Heaviside, yaitu bahwa $\delta(x) = du(x)/dx$, yang merupakan pemampatan dari fungsi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai $h(x) = \frac{1}{2}k \operatorname{sech}^2 kx$ dengan mengambil limit $k \to \infty$.

Contoh selanjutnya adalah fungsi turunan pertama dari delta Dirac, yaitu $\delta' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, yang didefinisikan sebagai $\delta'(x) := d\delta(x)/dx$. Di titik $x = 0$, tampak bahwa fungsi δ' ini mengalami fluktuatif naik-turun secara sangat cepat sekali, bahkan kita tidak dapat melihatnya. Sungguh menakjubkan! Inilah salah satu contoh fungsi-fungsi misterius.

Contoh selanjutnya, adalah fungsi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai $p(x) := e^{-kx^2}$, yang apabila dimampatkan menjadi fungsi, katakanlah, $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yaitu $P(x) := \lim_{k\to\infty} e^{-kx^2}$, yang nilainya 1 untuk $x = 0$ dan 0 untuk $x \neq 0$. Secara serupa, juga misalkan ada fungsi $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yaitu $q(x) := \sin kx/(kx)$, yang apabila dimampatkan di titik 0 menjadi fungsi, katakanlah $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yaitu $Q(x) := \lim_{k\to\infty} \sin kx/(kx)$ yang nilainya 1 untuk $x = 0$ dan 0 untuk $x \neq 0$.

Fungsi-fungsi yang telah dimampatkan ini diperoleh dari wakilannya, yaitu fungsi-fungsi yang belum dimampatkan. Tentunya sebuah fungsi mampat memiliki wakilan fungsi tak-mampat-nya yang tidak tunggal. Fungsi-fungsi mampat ini biasanya memiliki sifat-sifat yang khas, misalnya $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y)dx = f(y)$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-y)dx = -f'(y)$ di mana f' adalah turunan pertama dari fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wakilah fungsi tak-mampat ini semata-mata berguna untuk melihat fluktuasi fungsi-fungsi mampat yang terjadi di titik mampatnya.

7.21 Semua Anggota Grup O(2) dan SO(2)

Grup O(2) adalah himpunan semua matriks riil A berlarik 2×2 yang memiliki invers sedemikian $A^{\mathrm{T}}A = 1$ disertai perkalian matriks biasa. Sedangkan grup SO(2) adalah himpunan semua matriks anggota grup O(2) yang memiliki nilai determinan 1.

Semua anggota grup O(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -(-1)^n \sin\alpha & (-1)^n \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.160}$$

untuk semua $n \in \mathbb{Z}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Semua anggota grup SO(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.161}$$

untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$.

Matriks-matriks anggota grup O(2) merupakan matriks rotasi atau pencerminan di $\mathbb{R}^2$ yang memiliki nilai determinan 1 atau -1, sedangkan matriks-matriks anggota grup SO(2) merupakan matriks rotasi di $\mathbb{R}^2$ yang memiliki nilai determinan 1.

Sebuah titik $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ yang dicerminkan secara aktif oleh garis lurus $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \tan\alpha\}$, di mana $\alpha \in \mathbb{R}$, akan mengalami transformasi ke titik $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ sedemikian

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{7.162}$$

Inilah bentuk eksplisit dari matriks pencerminan di $\mathbb{R}^2$.

7.22 Semua Anggota Grup U(2) dan SU(2)

Grup U(2) adalah himpunan semua matriks kompleks A berlarik 2×2 yang memiliki invers sedemikian $A^\dagger A = 1$ disertai perkalian matriks biasa. Sedangkan grup SU(2) adalah himpunan semua matriks anggota grup U(2) yang memiliki determinan 1.

Semua anggota grup U(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} e^{i\gamma}\cos\alpha & e^{i\beta}\sin\alpha \\ -e^{i(\eta-\beta)}(-1)^p\sin\alpha & e^{i(\eta-\gamma)}(-1)^p\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.163}$$

untuk semua $p\in\mathbb{Z}$ dan $\alpha,\beta,\gamma,\eta\in\mathbb{R}$.

Semua anggota grup SU(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} e^{i\gamma}\cos\alpha & e^{i\beta}\sin\alpha \\ -e^{-i\beta}\sin\alpha & e^{-i\gamma}\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.164}$$

untuk semua $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

7.23 Semua Anggota Grup SO(3)

Apabila sebuah titik $\vec{r} := (x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$ dirotasikan secara aktif oleh suatu vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$ yang berpangkal di titik $\vec{0} := (0,0,0)\in\mathbb{R}^3$, di mana $\hat{\theta} := (n_1, n_2, n_3)$ adalah vektor satuan arah sudut rotasi, dan $\theta := |\vec{\theta}|$ adalah besar sudut rotasi, maka titik $\vec{r}$ tersebut akan mengalami transformasi ke titik $\vec{r}' := (x_1', x_2', x_3')\in\mathbb{R}^3$, sedemikian rupa sehingga

$$\begin{aligned} \vec{r}' = x_j'\hat{x}_j &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta}\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin\theta \\ &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + \left(\vec{r} - (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta}\right)\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin\theta \\ &= (1-\cos\theta)(\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + \vec{r}\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin\theta \\ &= (1-\cos\theta)n_k x_k n_j\hat{x}_j + x_j\hat{x}_j\cos\theta + \epsilon_{jkl}\hat{x}_j n_k x_l\sin\theta. \end{aligned} \tag{7.165}$$

Ini berarti

$$\begin{aligned} x_j' &= (1-\cos\theta)n_k x_k n_j + x_j\cos\theta + \epsilon_{jkl}n_k x_l\sin\theta \\ &= \left((1-\cos\theta)n_l n_j + \delta_{jl}\cos\theta + \epsilon_{jkl}n_k\sin\theta\right)x_l \\ &= R_{jl}x_l \end{aligned} \tag{7.166}$$

sehingga

$$R_{jl} := (1-\cos\theta)n_l n_j + \delta_{jl}\cos\theta + \epsilon_{jkl}n_k\sin\theta \tag{7.167}$$

untuk semua $j,l\in\{1,2,3\}$. Ternyata, matriks rotasi $R\in\mathrm{SO(3)}$ dengan kesembilan unsur yang didefinisikan pada persamaan (7.167) untuk setiap $\theta\in\mathbb{R}$ sedemikian $n_j n_j = 1$ ini membentuk grup SO(3), dengan sifat $R^\mathrm{T}R = 1$ alias $R_{jl}R_{jm} = \delta_{lm}$, dan $\det R = 1$.

7.24 Contoh Semigrup

Sebuah sistem aljabar $(A, *_1, *_2, \ldots, *_n)$ merupakan sebuah himpunan A yang dilengkapi dengan operasi biner $*_1, *_2, \ldots, *_n$. Sebuah operasi biner $*$ di A tersebut mengoperasikan dua buah anggota himpunan A sehingga menghasilkan sebuah anggota himpunan A juga. Apabila operasi biner $*$ tersebut asosiatif, yaitu bahwa $a * (b * c) = (a * b) * c$ untuk setiap a, b, c anggota A, maka sistem aljabar $(A, *)$ ini boleh dikatakan sebagai sebuah semigrup. Apabila semigrup $(A, *)$ tadi memiliki identitas kiri, yaitu $e_l \in A$ sedemikian $e_l * a = a$ untuk setiap $a \in A$, maka semigrup tersebut boleh dikatakan beridentitas kiri. Apabila semigrup $(A, *)$ memiliki identitas kanan, yaitu $e_r \in A$ sedemikian $a * e_r = a$ untuk setiap $a \in A$, maka semigrup tersebut boleh dikatakan beridentitas kanan. Apabila semigrup $(A, *)$ memiliki identitas kiri dan identitas kanan sekaligus (yang disebut sebagai identitas saja), yaitu $e \in A$ (yang dapat dibuktikan hanya tunggal), maka semigrup tersebut boleh dikatakan beridentitas. Apabila pada sebuah semigrup $(A, *)$ berlaku bahwa $b * a = a * b$ untuk setiap $a, b \in A$, maka semigrup ini boleh dikatakan komutatif (abelan). Apabila setiap a anggota himpunan A memiliki invers (kebalikan), yaitu $a^{-1} \in A$ sedemikian rupa $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$ di mana $e \in A$ merupakan identitas dari semigrup $(A, *)$, maka semigrup $(A, *)$ ini boleh dikatakan sebagai sebuah grup.

Contoh sebuah semigrup komutatif yang bukan merupakan sebuah grup adalah himpunan $C^\infty(\mathbb{R})$, yang berisi semua fungsi licin dari himpunan bilangan riil ke dirinya sendiri, disertai dengan operasi konvolusi $*$, yang didefinisikan sedemikian $(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$ untuk setiap $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dengan pembuktian yang cukup, dapat ditunjukkan bahwa $g * f = f * g$ dan $f * (g * h) = (f * g) * h$ untuk setiap $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$, sehingga sistem aljabar $(C^\infty(\mathbb{R}), *)$ ini merupakan sebuah semigrup komutatif. Akan tetapi, semigrup ini konon bukanlah sebuah grup, sebab, untuk sementara ini diketahui bahwa semigrup ini tidak beridentitas dan tidak setiap unsurnya memiliki invers.

7.25 Invers dalam Grup Konvolusi

Konvolusi antara dua buah fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ didefinisikan sedemikian

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds. \tag{7.168}$$

Transformasi Fourier $F : C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ didefinisikan sedemikian

$$(F(f))(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt. \tag{7.169}$$

Himpunan semua fungsi $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ disertai operasi konvolusi ternyata membentuk sebuah grup, yaitu grup konvolusi. Ternyata, terdapat sebuah isomorfisme, yaitu $\sqrt{2\pi}F$, dari grup konvolusi fungsi ke grup perkalian fungsi sedemikian $F(f * g) = \sqrt{2\pi}F(f)F(g)$.

Dalam grup konvolusi fungsi, terdapat sebuah unsur identitas, yaitu delta Dirac δ, yang salah satunya didefinisikan sedemikian $\delta(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk$. Apabila fungsi f dan g saling invers dalam grup konvolusi ini, maka haruslah $f * g = \delta$.

Apabila kedua ruas persamaan terakhir ini dikenai transformasi Fourier F, maka terjadilah $F(f*g)=F(\delta)$ alias $\sqrt{2\pi}F(f)F(g)=1_f/\sqrt{2\pi}$ alias $g=(1/2\pi)F^{-1}(1_f/F(f))$, sehingga

$$
\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\left(\frac{1}{2\pi}F^{-1}\left(\frac{1_f}{F(f)}\right)\right)(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1_f}{F(f)}\right)(u)e^{-isu}du\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isu}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(w)e^{iuw}dw}du\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)e^{-isu}ds}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(w)e^{iuw}dw}du. \qquad (7.170)
\end{aligned}
$$

Apabila $t-s=\alpha$ dengan t konstan relatif, maka $ds=-d\alpha$ dan $e^{-isu}=e^{-i(t-\alpha)u}$. sehingga

$$
\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)e^{i\alpha u}d\alpha}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(w)e^{iuw}dw}e^{-iut}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iut}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}du=\delta(t). \qquad (7.171)
\end{aligned}
$$

Jadi, dalam grup konvolusi fungsi, invers dari fungsi f adalah $(1/2\pi)F^{-1}(1_f/F(f))$.

7.26 Tensor Sejati dan Tensor Semu

Tensor adalah bentuk umum dari skalar dan vektor. Skalar itu tidak lain adalah tensor rank-0. Vektor itu tidak lain adalah tensor rank-1. Skalar S, vektor $\vec{V}:=V_i\hat{x}_i$, tensor rank-2 $\overleftrightarrow{T}:=T_{ij}\hat{x}_i\otimes\hat{x}_j$ masing-masing dapat diuraikan menjadi komponen sejatinya (yaitu S_+, $\vec{V}_+$, dan $\overleftrightarrow{T}_+$) dan komponen semunya (yaitu S_-, $\vec{V}_-$, dan $\overleftrightarrow{T}_-$). Sifat skalar sejati, vektor sejati, dan tensor rank-2 sejati tersebut adalah bahwa apabila variabel ruangnya dikenai transformasi $R\in O(n)$, maka $S'_+=S_+$, $V'_{+i}=R_{ij}V_{+j}$, dan $T'_{+ij}=R_{ik}R_{jl}T_{+kl}$. Sifat skalar semu, vektor semu, dan tensor rank-2 semu tersebut adalah bahwa apabila variabel ruangnya dikenai transformasi $R\in O(n)$, maka $S'_-=(\det R)S_-$, $V'_{-i}=(\det R)R_{ij}V_{-j}$, dan $T'_{-ij}=(\det R)R_{ik}R_{jl}T_{-kl}$.

7.27 Skalar Sejati dan Skalar Semu

Skalar sejati S_+ di $\mathbb{R}^n$ adalah medan skalar yang bergantung pada variabel ruang, yang apabila variabel ruang tersebut dikenai transformasi yang diwakili oleh matriks riil $R \in O(n)$ berlarik $n \times n$, maka medan skalar tersebut tidak berubah, yaitu bahwa $S'_+ = S_+$.

Skalar semu S_- di $\mathbb{R}^n$ adalah medan skalar yang bergantung pada variabel ruang, yang apabila variabel ruang tersebut dikenai transformasi yang diwakili oleh matriks riil $R \in O(n)$ berlarik $n \times n$, maka medan skalar tersebut berubah, yaitu bahwa $S'_- = (\det R)S_-$.

Sebuah medan skalar S di $\mathbb{R}^n$ dapat diuraikan sebagai kombinasi dari skalar sejati dan skalar semu, yaitu $S = S_+ + S_-$. Apabila S dikenai transformasi $R \in O(n)$, maka $S' = S'_+ + S'_- = S_+ + (\det R)S_-$. Dalam bentuk matriks, kedua persamaan tersebut dapat disajikan sebagai

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \det R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_+ \\ S_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ S' \end{pmatrix}, \tag{7.172}$$

yang melalui aturan Cramer, penyelesaiannya adalah

$$\boxed{S_+ = \frac{S' - (\det R)S}{1 - \det R}} \qquad \text{dan} \qquad \boxed{S_- = \frac{S - S'}{1 - \det R}}. \tag{7.173}$$

7.28 Hasil Kali Silang antara Dua Vektor Sejati

Andaikan $\vec{a} := a_i \hat{x}_i$ dan $\vec{b} := b_i \hat{x}_i$ adalah dua buah vektor sejati di $\mathbb{R}^3$. Andaikan kita definisikan vektor $\vec{c} := c_i \hat{x}_i = \vec{a} \times \vec{b}$ yang akan ditransformasikan oleh matriks $R \in O(3)$ menjadi vektor $\vec{c}' := c'_i \hat{x}'_i$, sehingga

$$\begin{aligned} \vec{c}' &= c'_s \hat{x}'_s = (\vec{a} \times \vec{b})' = (\epsilon_{jkl} \hat{x}_j a_k b_l)' = \epsilon_{jkl} \hat{x}'_j a'_k b'_l \\ &= \epsilon_{jkl} R_{jm} \hat{x}_m R_{kp} a_p R_{lq} b_q = (\det R) \epsilon_{mpq} \hat{x}_m a_p b_q \\ &= (\det R) \vec{a} \times \vec{b} = (\det R) \vec{c} = (\det R) c_m \hat{x}_m \\ &= (\det R) c_m R_{sm} \hat{x}'_s \end{aligned} \tag{7.174}$$

sehingga $c'_s = (\det R) R_{sm} c_m$. Ini berarti bahwa $\vec{c}$ adalah vektor semu.

7.29 Hubungan Basis Kontravarian dengan Basis Kovarian Konstan

Andaikan $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \subset \mathbb{R}^3$ adalah basis kontravarian yang konstan, sehingga

$$\vec{e}_x := \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^x} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^x}, \frac{\partial y}{\partial q^x}, \frac{\partial z}{\partial q^x} \right) = (e_{xx}, e_{xy}, e_{xz}), \tag{7.175}$$

$$\vec{e}_y := \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^y} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^y}, \frac{\partial y}{\partial q^y}, \frac{\partial z}{\partial q^y} \right) = (e_{yx}, e_{yy}, e_{yz}), \tag{7.176}$$

$$\vec{e}_z := \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^z} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^z}, \frac{\partial y}{\partial q^z}, \frac{\partial z}{\partial q^z} \right) = (e_{zx}, e_{zy}, e_{zz}). \tag{7.177}$$

Di sini, $\vec{r} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor posisi yang bergantung pada koordinat umum $q^x, q^y, q^z \in \mathbb{R}$, serta $e_{ij} \in \mathbb{R}$ adalah tetapan untuk setiap $i, j \in \{x, y, z\}$.

Penyelesaian persamaan (7.175), (7.176), dan (7.177) adalah

$$x = e_{xx}q^x + e_{yx}q^y + e_{zx}q^z + C_x, \tag{7.178}$$

$$y = e_{xy}q^x + e_{yy}q^y + e_{zy}q^z + C_y, \tag{7.179}$$

$$z = e_{xz}q^x + e_{yz}q^y + e_{zz}q^z + C_z, \tag{7.180}$$

di mana $C_x, C_y, C_z \in \mathbb{R}$ adalah tetapan.

Penyajian matriks dari tiga persamaan terakhir adalah

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^x \\ q^y \\ q^z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \tag{7.181}$$

alias

$$\begin{pmatrix} x - C_x \\ y - C_y \\ z - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^x \\ q^y \\ q^z \end{pmatrix}. \tag{7.182}$$

Dengan mendefinisikan

$$D := \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}, \qquad D_x := \begin{vmatrix} x - C_x & e_{yx} & e_{zx} \\ y - C_y & e_{yy} & e_{zy} \\ z - C_z & e_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}, \tag{7.183}$$

$$D_y := \begin{vmatrix} e_{xx} & x - C_x & e_{zx} \\ e_{xy} & y - C_y & e_{zy} \\ e_{xz} & z - C_z & e_{zz} \end{vmatrix}, \qquad D_z := \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{yx} & x - C_x \\ e_{xy} & e_{yy} & y - C_y \\ e_{xz} & e_{yz} & z - C_z \end{vmatrix}, \tag{7.184}$$

maka melalui aturan Cramer, diperoleh

$$q^x = D_x/D, \qquad q^y = D_y/D, \qquad \text{dan} \qquad q^z = D_z/D, \tag{7.185}$$

sehingga

$$\vec{e}^x := \nabla q^x = \left(\frac{\partial q^x}{\partial x}, \frac{\partial q^x}{\partial y}, \frac{\partial q^x}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{D_x}{D} \right), \tag{7.186}$$

$$\vec{e}^y := \nabla q^y = \left(\frac{\partial q^y}{\partial x}, \frac{\partial q^y}{\partial y}, \frac{\partial q^y}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{D_y}{D} \right), \tag{7.187}$$

$$\vec{e}^z := \nabla q^z = \left(\frac{\partial q^z}{\partial x}, \frac{\partial q^z}{\partial y}, \frac{\partial q^z}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{D_z}{D} \right). \tag{7.188}$$

Bentuk eksplisit dari ketiga persamaan terakhir adalah

$$\vec{e}^x = \frac{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}{\vec{e}_x \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_z)}, \qquad \vec{e}^y = \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_x}{\vec{e}_y \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_x)}, \qquad \vec{e}^z = \frac{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}{\vec{e}_z \cdot (\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}. \tag{7.189}$$

Dari persamaan terakhir, diperoleh kaitan $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j$ untuk setiap $i, j \in \{x, y, z\}$.

7.30 Persamaan Geodesik

Penggal jarak dalam ruang melengkung dapat dinyatakan sebagai ds sedemikian rupa sehingga

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j, \tag{7.190}$$

di mana g_{ij} adalah komponen metrik, serta q^i adalah koordinat umum, sehingga variasi dari persamaan (7.190) adalah $2ds\delta ds = \delta g_{ij} dq^i dq^j + g_{ij} dq^j \delta dq^i + g_{ij} dq^i \delta dq^j$. Jarak antara dua buah titik pada ruang melengkung didefinisikan sebagai $s_{21} := s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds$. Agar supaya jarak tersebut menjadi stasioner, maka variasi dari s_{21} harus sama dengan nol, yaitu bahwa $\delta s_{21} = 0$ alias $\delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0$ alias $\int_{s_1}^{s_2} \delta ds = 0$. Tentu saja,

$$\delta ds = \frac{1}{2} \left(\delta g_{ij} \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} + g_{ij} \frac{dq^j}{ds} \delta \frac{dq^i}{ds} + g_{ij} \frac{dq^i}{ds} \delta \frac{dq^j}{ds} \right) ds. \tag{7.191}$$

Kita tentu tahu bahwa

$$\delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \delta q^k, \tag{7.192}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \delta ds &= \frac{1}{2} \left(\delta g_{ij} \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} + \frac{d}{ds} \left(g_{ij} \frac{dq^i}{ds} \delta q^i \right) - \frac{d}{ds} \left(g_{ij} \frac{dq^j}{ds} \right) \delta q^i \right. \\ &\left. + \frac{d}{ds} \left(g_{ij} \frac{dq^i}{ds} \delta q^j \right) - \frac{d}{ds} \left(g_{ij} \frac{dq^i}{ds} \right) \delta q^j \right) ds. \end{aligned} \tag{7.193}$$

Andaikan $(\delta q^i)_s(s_1) = (\delta q^i)_s(s_2) = 0$ maka pengintegralan pada persamaan (7.193) menghasilkan

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} \delta ds &= \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} - \frac{d}{ds} \left(g_{kj} \frac{dq^j}{ds} + g_{ik} \frac{dq^i}{ds} \right) \right) \delta q^k ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \left(\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right) \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} - 2 g_{ik} \frac{d^2 q^i}{ds^2} \right) \delta q^k ds = 0. \end{aligned}$$

Karena δq^k itu saling bebas, maka integran pada persamaan terakhir ini haruslah nol, yaitu bahwa

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right) \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} - g_{ik} \frac{d^2 q^i}{ds^2} = 0. \tag{7.194}$$

Apabila kedua ruas persamaan terakhir ini dikalikan dengan g^{kl}, maka diperoleh kaitan

$$\boxed{\frac{d^2 q^l}{ds^2} + \Gamma^l{}_{ij} \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} = 0} \tag{7.195}$$

di mana

$$\boxed{\Gamma^l{}_{ij} := \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right)} \tag{7.196}$$

adalah lambang Christoffel alias koneksi Levi-Civita yang bebas torsi. Persamaan (7.195) merupakan persamaan geodesik yang mengatur hubungan antara koordinat-koordinat umum q^i dengan parameter jarak s. Dari persamaan (7.190), diperoleh kaitan

$$ds^2 = g_{ij} \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} ds^2 \tag{7.197}$$

sehingga haruslah

$$\boxed{g_{ij} \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} = 1.} \tag{7.198}$$

Jadi, persamaan geodesik (7.195) harus disertai persamaan (7.198).

7.31 Kuarternion dalam Bentuk Polar

Diketahui perkalian antara anggota basis kuarternion i, j, k sebagai berikut, yaitu $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$, dan $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Sebuah kuarternion riil $q := q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H}_\mathbb{R}$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar, yaitu bahwa $q = |q|e^{u\Theta} = |q|(\cos\Theta + u\sin\Theta)$, di mana $u^2 = -1$, $\Theta \in \mathbb{R}$ dan

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \tag{7.199}$$

sehingga $q_0 = |q|\cos\Theta$ dan $iq_1 + jq_2 + kq_3 = u|q|\sin\Theta$. Dari sini, kita peroleh

$$u := (iq_1 + jq_2 + kq_3)/\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{7.200}$$

di mana $q_1 = r\sin\theta\cos\phi$, $q_2 = r\sin\theta\sin\phi$, dan $q_3 = r\cos\theta$, sehingga

$$r := \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \tag{7.201}$$

$\theta := \mathrm{arctan}_2(q_3, \sqrt{q_1^2 + q_2^2})$, $\phi := \mathrm{arctan}_2(q_1, q_2)$, dan $\Theta := \mathrm{arctan}_2(q_0, \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2})$, sehingga $u = i\sin\theta\cos\phi + j\sin\theta\sin\phi + k\cos\theta$ dan $r := |q|\sin\Theta$.

7.32 Relasi Kontinyuitas antar-Objek Geometris

Pada kesempatan ini, saya hendak memperkenalkan relasi kontinyuitas antar-objek geometris.

Kita telah mengetahui relasi ekuivalen, yaitu $\sim$, pada himpunan S, yang memiliki sifat reflektif ($a \sim a$), simetris (jika $a \sim b$ maka $b \sim a$), dan transitif (jika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a \sim c$).

Di sini, akan dipilih relasi ekuivalen kontinyuitas $\sim$ antara dua buah ruang topologis (objek geometris), yaitu bahwa $A \sim B$ apabila terdapat sedikitnya sebuah pemetaan bijektif yang kontinyu dari ruang topologis A ke ruang topologis

B atau dari ruang topologis B ke ruang topologis A, di mana invers dari pemetaan tersebut tidak harus kontinyu.

Saya akan memperkenalkan sebuah operasi penjumlahan + untuk dua buah ruang topologis, yaitu bahwa

$$A+B := (A \times \{b\}) \cup (\{a\} \times B) \tag{7.202}$$

sedemikian $A \cap \{a\} = \varnothing$ atau $B \cap \{b\} = \varnothing$. Dengan demikian, $B+A \sim A+B$.

Selanjutnya didefinisikan perkalian sebuah ruang topologis A dengan bilangan asli n, yaitu

$$nA := A_1 + \cdots + A_n \tag{7.203}$$

di mana $A_1 = \cdots = A_n = A$.

Selanjutnya didefinisikan perkalian antara dua ruang topologis, yaitu $AB := A \times B$, dan pangkat dari ruang topologis, yaitu $A^n := A_1 \times \cdots \times A_n$ di mana $A_1 = \cdots = A_n = A$.

Dengan demikian, $BA \sim AB$, $A+\varnothing \sim A$, $A\{0\} \sim A$, dan $A\varnothing \sim \varnothing$. Di sini, $\varnothing$ adalah himpunan kosong.

Didefinisikan sebuah lingkaran atau permukaan bola $S^n := \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$, sebuah cakram $D^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$, dan sebuah torus $T^n := (S^1)^n$.

Terdapat beberapa teorema, yaitu $\mathbb{Z}+\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^n \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}+\{0\} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}+\{0\} \sim S^1$, $2\mathbb{R}+\{0\} \sim \mathbb{R}$, $(n+1)\mathbb{R}+n\{0\} \sim \mathbb{R}$, $2\mathbb{R}^2+\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$, $2\mathbb{R}^3+\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}^3$, $D^n+\{0\} \sim S^n$, dan $\mathbb{R}^n + S^{n-1} \sim D^n$.

Ada pula teorema yang tidak disangka-sangka, misalnya $D^2 \sim \mathbb{R}^2$ dan $T^2 \sim S^1\mathbb{R}$. Pembuktiannya adalah sebagai berikut.

$D^2 \sim \mathbb{R}^2 + S^1 \sim \mathbb{R}^2 + \mathbb{R} + \{0\} \sim 2\mathbb{R}^2 + 2\mathbb{R} + \{0\} \sim 2\mathbb{R}^2 + \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$.

$T^2 = (S^1)^2 \sim (\mathbb{R}+\{0\})^2 \sim \mathbb{R}^2 + 2\mathbb{R} + \{0\} \sim \mathbb{R}^2 + \mathbb{R} \sim \mathbb{R}(\mathbb{R}+\{0\}) \sim \mathbb{R}S^1 \sim S^1\mathbb{R}$.

Teori ini belum mapan dan masih dalam tahap perkembangan.

7.33 Cara Menentukan Ruang Vektor Singgung pada Sebuah Manifold

Andaikan ada sebuah manifold berdimensi n yang terbenam di ruang $\mathbb{R}^m$ (di mana $n < m$), yaitu

$$M := \{p := f(q_1, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^m \mid q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}\} \tag{7.204}$$

di mana $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah sebuah fungsi licin.

Ruang vektor singgung pada manifold M di titik $p \in M$ tentu saja adalah

$$T_pM := \{p + \sum_{j=1}^{n} x_j \partial p/\partial q_j \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\} \tag{7.205}$$

di mana $q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}$ adalah n buah parameter riil milik manifold M.

7.34 Menalar Turunan Lie dengan Analisis Tensor Biasa

Andaikan $T := T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n}$ adalah sebuah tensor yang bergantung pada p buah koordinat umum, yaitu $x^1, \cdots, x^p \in \mathbb{R}$ sebagai p buah parameter bagi manifold M yang berdimensi p, serta $X := X^\lambda e_\lambda$ adalah sebuah vektor yang bergantung pada p buah koordinat umum tersebut juga. Selanjutnya, akan dicari turunan Lie dari T sepanjang X, yang didefinisikan sebagai

$$L_X T := \left(\lim_{\epsilon\to 0} \frac{T_x(x+\epsilon X) - T}{\epsilon}\right)_{\partial_\rho X = 0} \tag{7.206}$$

untuk semua $\rho \in \{1, \cdots, p\}$, di mana $\partial_\rho := \partial/\partial x^\rho$.

Ternyata, pengolahan lebih lanjut dari persamaan terakhir, menghasilkan

$$L_X T = \left(X^\lambda \partial_\lambda T\right)_{\partial_\rho X = 0}. \tag{7.207}$$

$$\begin{aligned}
L_X T = (&X^\lambda(\partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&+T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} \sum_{s=1}^{m} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_{s-1}} \otimes \partial_\lambda e_{\mu_s} \otimes e_{\mu_{s+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&+T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes \sum_{r=1}^{n} e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_{r-1}} \otimes \partial_\lambda e^{\nu_r} \otimes e^{\nu_{r+1}} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n}))_{\partial_\rho X = 0}.
\end{aligned}$$

Dengan memanfaatkan identitas $\partial_\alpha e_\beta = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} e_\gamma$ dan $\partial_\alpha e^\beta = -\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} e^\gamma$, diperoleh

$$\begin{aligned}
L_X T = (&X^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&+T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} X^\lambda \sum_{s=1}^{m} \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu_s} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_{s-1}} \otimes e_\sigma \otimes e_{\mu_{s+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&-T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} X^\lambda e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes \sum_{r=1}^{n} \Gamma^{\nu_r}{}_{\lambda\tau} e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_{r-1}} \otimes e^\tau \otimes e^{\nu_{r+1}} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n})_{\partial_\rho X = 0}
\end{aligned}$$

di mana Γ adalah lambang Christoffel.

Dengan memanfaatkan identitas $\partial_\alpha X = D_\alpha X^\lambda e_\lambda$ di mana $D_\alpha X^\beta := \partial_\alpha X^\beta + X^\lambda \Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
L_X T = &X^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&-T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} \sum_{s=1}^{m} \partial_{\mu_s} X^\sigma e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_{s-1}} \otimes e_\sigma \otimes e_{\mu_{s+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&+T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes \sum_{r=1}^{n} \partial_\tau X^{\nu_r} e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_{r-1}} \otimes e^\tau \otimes e^{\nu_{r+1}} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n}.
\end{aligned}$$

Dengan melakukan penukaran indeks boneka, akhirnya diperoleh bentuk eksplisit dari turunan Lie dari T sepanjang X, yaitu

$$\begin{aligned} L_X T &= (X^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} - \sum_{s=1}^{m} T^{\mu_1 \cdots \mu_{s-1} \sigma \mu_{s+1} \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} \partial_\sigma X^{\mu_s} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n} T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_{r-1} \tau \nu_{r+1} \cdots \nu_n} \partial_{\nu_r} X^\tau) e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n}. \end{aligned}$$

7.35 Turunan Tingkat Pecahan

Biasanya, turunan (derivatif) dari sebuah fungsi riil $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ itu tingkatan turunannya selalu bilangan asli. Tetapi, pada kesempatan ini, saya hendak mendefinisikan turunan tingkat pecahan untuk fungsi f tersebut.

Dari kalkulus diferensial, kita telah mengetahui bahwa

$$\frac{d^j}{dx^j}(x^n) = \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} \tag{7.208}$$

untuk setiap bilangan asli j dan n.

Kali ini kaitan ini akan diperumum untuk beberapa bilangan riil j dan n dengan menggunakan fungsi gamma Γ sedemikian $\Gamma(x) = (x-1)!$, yaitu bahwa

$$\frac{d^j}{dx^j}(x^n) = \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-j+1)} x^{n-j}. \tag{7.209}$$

Dengan memperderet-Taylor-kan fungsi f tadi, kita peroleh

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lim_{y \to 0} \frac{d^n f(y)}{dy^n} x^n \tag{7.210}$$

yang konvergen pada daerah tertentu. Turunan tingkat $j \in \mathbb{R}$ dari f tersebut, tentu saja adalah

$$\frac{d^j}{dx^j} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{y \to 0} \frac{d^n f(y)}{dy^n} \frac{1}{(n-j)!} x^{n-j}. \tag{7.211}$$

Sebagai contoh, kita akan menghitung $d^{1/2}x/dx^{1/2}$, yaitu bahwa

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{1!}{(1-1/2)!} x^{1-1/2} = \frac{1}{(1/2)!} x^{1/2}. \tag{7.212}$$

Karena $(1/2)! = \Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2) = (1/2)\sqrt{\pi}$, maka

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}. \tag{7.213}$$

Sekarang, kita hendak menghitung turunan tingkat negatif, yang sudah seharusnya merupakan anti-derivatif (integral) dari fungsi tersebut. Contohnya adalah sebagai berikut.

$$\frac{d^{-1}(x^n)}{dx^{-1}} = \frac{n!}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \tag{7.214}$$

sesuai yang kita harapkan.

7.36 Fungsi Homogen Berderajat Sebarang

Diketahui ada kuantitas $f := \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{r} M_{i_1\cdots i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}$, sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{r}\sum_{k=1}^{n} M_{i_1\cdots i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}\delta_{ii_k}x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_n}, \tag{7.215}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_n=1}^{r} M_{i_1\cdots i_{k-1}ii_{k+1}\cdots i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_n}, \tag{7.216}$$

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i,i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_n=1}^{r} M_{i_1\cdots i_{k-1}ii_{k+1}\cdots i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}x_i x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_n}. \tag{7.217}$$

Karena $M_{i_1\cdots i_{k-1}ii_{k+1}\cdots i_n}x_i = \sum_{i_k=1}^{r}\delta_{ii_k}M_{i_1\cdots i_{k-1}i_k i_{k+1}\cdots i_n}x_{i_k}$, maka

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i,i_1,\ldots,i_n=1}^{r} M_{i_1\cdots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n}\delta_{ii_k}. \tag{7.218}$$

Karena $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\delta_{ii_k} = n$, maka

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = nf. \tag{7.219}$$

7.37 Pertambahan Majemuk Kontinyu

Misalkan jumlah sesuatu pada saat t adalah $M(t)$ dan pada saat t_0 adalah $M_0 := M(t_0)$. Apabila pertambahan pada saat t adalah $I(t)$ dan laju pertambahannya adalah $J(t) := dI(t)/dt$, maka jumlah sesuatu pada saat $t_0 + n\Delta t$ adalah

$$M(t_0 + n\Delta t) = M_0\prod_{j=0}^{n}[1 + J(t_0 + j\Delta t)\Delta t], \tag{7.220}$$

dengan Δt adalah selang waktu pertambahan.

Apabila dianggap $n = (t - t_0)/\Delta t$, maka

$$M(t) = M_0\prod_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t}[1 + J(t_0 + j\Delta t)\Delta t], \tag{7.221}$$

$$M(t) = M_0\prod_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t}\left\{[1 + J(t_0 + j\Delta t)\Delta t]^{1/[J(t_0+j\Delta t)\Delta t]}\right\}^{J(t_0+j\Delta t)\Delta t}. \tag{7.222}$$

Untuk $\Delta t \approx 0$, diperoleh

$$M(t) \approx M_0\prod_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t}\exp[J(t_0 + j\Delta t)\Delta t] = M_0\exp\sum_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t}J(t_0 + j\Delta t)\Delta t \tag{7.223}$$

sehingga

$$M(t) \approx M_0\exp\int_{t_0}^{t}J(t)\,dt. \tag{7.224}$$

7.38 Proyeksi Stereografis Permukaan Bola ke Bidang Datar

Andaikan ada sebuah permukaan bola

$$S^2(R) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}| = R\} \tag{7.225}$$

dan ada sebuah bidang datar

$$P(c) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c\} \tag{7.226}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ dan $c \in \mathbb{R}$.

Oleh karena itu, salah satu titik pada $S^2(R)$ adalah

$$\vec{r} := R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{7.227}$$

di mana $\theta \in [0, \pi]$ dan $\phi \in (0, 2\pi) \cup \{0\}$.

Proyeksi stereografis dari $S^2(R)$ ke $P(c)$ oleh titik $\vec{r}_0 := (0, 0, -R)$ merupakan titik potong pada $P(c)$ oleh garis yang menghubungkan $\vec{r}_0$ dan $\vec{r}$ dengan titik potong di (X, Y, c) di mana $X, Y \in \mathbb{R}$. Garis tersebut adalah

$$L(\vec{r}_0, \vec{r}) := \{\vec{s} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{s} - \vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}\}. \tag{7.228}$$

Oleh karena itu,

$$\vec{s} := (x, y, z) = \vec{r}_0 + k(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{7.229}$$

di mana $k \in \mathbb{R}$, sehingga

$$(X, Y, c) = (0, 0, -R) + k(R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) - (0, 0, -R)). \tag{7.230}$$

Untuk mencari k, di ambillah komponen

$$c = -R + kR(\cos\theta + 1) \tag{7.231}$$

alias

$$c/R = -1 + 2k\cos^2(\theta/2) \tag{7.232}$$

alias

$$k = (1/2)(1 + c/R)\sec^2(\theta/2). \tag{7.233}$$

Kedua komponen lainnya adalah

$$X = kR\sin\theta\cos\phi = (R + c)\tan(\theta/2)\cos\phi \tag{7.234}$$

dan

$$Y = kR\sin\theta\sin\phi = (R + c)\tan(\theta/2)\sin\phi. \tag{7.235}$$

Dengan demikian pemetaan $(\theta, \phi) \mapsto (X, Y)$ merupakan proyeksi stereografis.

7.39 Perkalian Silang antara Dua Buah Vektor yang Tegak Lurus dengan Sebuah Vektor yang Lain

Andaikan untuk sebuah vektor $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$, didefinisikan $\vec{A}_{//} := \vec{A} \cdot \hat{V}\hat{V}$ dan $\vec{A}_{\perp} := \vec{A} - \vec{A}_{//}$, di mana $\hat{V} := \vec{V}/|\vec{V}|$ untuk setiap $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$.

Untuk setiap $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, berlaku

$$(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp})_{//} = (\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp}) \cdot \hat{V}\hat{V}. \tag{7.236}$$

Andaikan didefinisikan $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] := (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ untuk setiap $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, sehingga

$$(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp})_{//} = [\vec{a}_{\perp}, \vec{b}_{\perp}, \hat{V}]\hat{V}. \tag{7.237}$$

Ada teorema yang mengatakan bahwa

$$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}]\vec{s} = (\vec{p} \cdot \vec{s})(\vec{q} \times \vec{r}) + (\vec{q} \cdot \vec{s})(\vec{r} \times \vec{p}) + (\vec{r} \cdot \vec{s})(\vec{p} \times \vec{q}) \tag{7.238}$$

untuk setiap $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3$ sehingga

$$(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp})_{//} = (\vec{a}_{\perp} \cdot \hat{V})(\vec{b}_{\perp} \times \hat{V}) + (\vec{b}_{\perp} \cdot \hat{V})(\hat{V} \times \vec{a}_{\perp}) + (\hat{V} \cdot \hat{V})(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp}). \tag{7.239}$$

Karena $\vec{a}_{\perp} \cdot \hat{V} = \vec{b}_{\perp} \cdot \hat{V} = 0$ dan $\hat{V} \cdot \hat{V} = 1$, maka

$$(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp})_{//} = \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp}. \tag{7.240}$$

Kesamaan terakhir ini sangat penting dalam perumusan transformasi Lorentz untuk medan elektromagnetik.

7.40 Gabungan dan Irisan dari Objek-Objek Geometris

Andaikan ada sebuah titik $P(\vec{r}) := \{\vec{r}\}$ di mana $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

Andaikan ada sebuah kurva $C(f, g) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = g(\vec{r}) = 0\}$ di mana $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah dua buah pemetaan kontinyu.

Andaikan ada sebuah permukaan $S(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = 0\}$ di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah sebuah pemetaan kontinyu.

Andaikan ada sebuah volume $V(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) < 0\}$ di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah sebuah pemetaan kontinyu.

Andaikan fungsi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $p(x) = 1$ untuk $x = 0$ dan $p(x) = 0$ untuk $x \neq 0$.

Andaikan fungsi $p^{(3)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $p^{(3)}(\vec{r}) = 1$ untuk $\vec{r} = \vec{0}$ dan $p^{(3)}(\vec{r}) = 0$ untuk $\vec{r} \neq \vec{0}$.

Andaikan fungsi $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di definisikan sebagai $u(x) = 1$ untuk $x > 0$, $u(x) = 1/2$ untuk $x = 0$, dan $u(x) = 0$ untuk $x < 0$.

Berikut ini adalah beberapa teorema mengenai gabungan dan irisan dari objek-objek geometris tersebut.

$$P(\vec{a}) \cap P(\vec{b}) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p^{(3)}(\vec{r} - \vec{a})p^{(3)}(\vec{r} - \vec{b}) = 1\}. \tag{7.241}$$

$$P(\vec{a}) \cup P(\vec{b}) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - p^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}))(1 - p^{(3)}(\vec{r} - \vec{b})) = 0\}. \tag{7.242}$$

$$P(\vec{a}) \cap C(f, g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p^{(3)}(\vec{r} - \vec{a})p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.243}$$

$$P(\vec{a}) \cup C(f, g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - p^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}))(1 - p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.244}$$

$$P(\vec{a}) \cap S(f) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p^{(3)}(\vec{r} - \vec{a})p(f(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.245}$$

$$P(\vec{a}) \cup S(f) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - p^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}))(1 - p(f(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.246}$$

$$P(\vec{a}) \cap V(f) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p^{(3)}(\vec{r} - \vec{a})u(-f(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.247}$$

$$P(\vec{a}) \cup V(f) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - p^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}))(1 - u(-f(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.248}$$

$$C(f, g) \cap C(h, k) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r}))p(h(\vec{r}))p(k(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.249}$$

$$C(f, g) \cup C(h, k) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})))(1 - p(h(\vec{r}))p(k(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.250}$$

$$C(f, g) \cap S(h) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r}))p(h(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.251}$$

$$C(f, g) \cup S(h) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})))(1 - p(h(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.252}$$

$$C(f, g) \cap V(h) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r}))u(-h(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.253}$$

$$C(f, g) \cup V(h) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})))(1 - u(-h(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.254}$$

$$S(f) \cap S(g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.255}$$

$$S(f) \cup S(g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - p(f(\vec{r})))(1 - p(g(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.256}$$

$$S(f) \cap V(g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))u(-g(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.257}$$

$$S(f) \cup V(g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - p(f(\vec{r})))(1 - u(-g(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.258}$$

$$V(f) \cap V(g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid u(-f(\vec{r}))u(-g(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.259}$$

$$V(f) \cup V(g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - u(-f(\vec{r})))(1 - u(-g(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.260}$$

7.41 Ortonormalisasi Gram-Schmidt

Andaikan ada sebuah ruang vektor $\mathcal{H}$ di atas lapangan $\mathbb{C}$. Andaikan ada seperangkat vektor $B_n := \{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \subset \mathcal{H}$ yang bebas linier. Ortonormalisasi Gram-Schmidt dari B_n menghasilkan seperangkat vektor $O_n := \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \subset \mathcal{H}$ yang ortonormal. Andaikan didefinisikan sebuah produk skalar $\langle\alpha|\beta\rangle \in \mathbb{C}$ untuk semua $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$. Andaikan pula didefinisikan sebuah norma $\|\alpha\| := \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle} \in \mathbb{C}$ untuk semua $\alpha \in \mathcal{H}$.

Mula-mula, $\varphi_1 := \psi_1/\|\psi_1\|$.

Selanjutnya,

$$\varphi_j := \frac{1}{N_j}\left(\psi_j - \sum_{k=1}^{j-1}\left\langle\varphi_k|\psi_j\right\rangle\varphi_k\right) \tag{7.261}$$

di mana

$$N_j := \left\|\psi_j - \sum_{k=1}^{j-1}\left\langle\varphi_k|\psi_j\right\rangle\varphi_k\right\| \tag{7.262}$$

untuk setiap $j \in \{2, \cdots, n\}$.

Ternyata, $\left\langle\varphi_j|\varphi_l\right\rangle = \delta_{jl}$ untuk setiap $j, l \in \{1, \cdots, n\}$.

Pembuktian hal ini secara umum sangat rumit, mengingat terdapat ungkapan rekursif. Namun, kita akan membuktikan kasus khusus untuk $n = 3$.

Tentu jelas bahwa $\left\langle\varphi_j|\varphi_j\right\rangle = \|\varphi_j\|^2 = N_j^2/N_j^2 = 1$ untuk semua $j \in \{1, 2, 3\}$.

Sekarang, kita tinggal membuktikan bahwa $\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = \langle\varphi_1|\varphi_3\rangle = \langle\varphi_2|\varphi_3\rangle = 0$.

Mula-mula kita tulis secara eksplisit bahwa

$$\varphi_2 = \frac{1}{N_2}\left(\psi_2 - \langle\varphi_1|\psi_2\rangle\varphi_1\right) \tag{7.263}$$

dan

$$\varphi_3 = \frac{1}{N_3}\left(\psi_3 - \langle\varphi_1|\psi_3\rangle\varphi_1 - \langle\varphi_2|\psi_3\rangle\varphi_2\right). \tag{7.264}$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = \frac{1}{N_2}\left(\langle\varphi_1|\psi_2\rangle - \langle\varphi_1|\psi_2\rangle\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle\right) = 0. \tag{7.265}$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_3\rangle = \frac{1}{N_3}\left(\langle\varphi_1|\psi_3\rangle - \langle\varphi_1|\psi_3\rangle\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle - \langle\varphi_2|\psi_3\rangle\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle\right) = 0. \tag{7.266}$$

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_2|\varphi_3\rangle &= \frac{1}{N_2 N_3}\left(\langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\varphi_1|\psi_3\rangle\langle\psi_2|\varphi_1\rangle\right.\\
&\quad - \langle\varphi_2|\psi_3\rangle\langle\psi_2|\varphi_2\rangle - \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\\
&\quad \left. + \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\right)\\
&= \frac{1}{N_2 N_3}\left(\langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\varphi_1|\psi_3\rangle\langle\psi_2|\varphi_1\rangle\right.\\
&\quad -\frac{1}{N_2^2}\left(\langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\right)\\
&\quad \left.\left(\|\psi_2\|^2 - \langle\varphi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\varphi_1\rangle\right)\right).
\end{aligned} \tag{7.267}$$

Karena $N_2^2 = \|\psi_2\|^2 - |\langle\varphi_1|\psi_2\rangle|^2$, maka

$$\begin{aligned}\langle\varphi_2|\varphi_3\rangle &= \frac{1}{N_2 N_3}\left(\langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\right.\\ &\quad \left. + \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\right) = 0. \end{aligned} \tag{7.268}$$

Bab 8

Serbaneka Fisika

8.1 Dimensi Sudut Datar

Sebenarnya, 1 radian itu tidak sama dengan 1 tanpa satuan.

Panjang busur lingkaran berjari-jari R dengan sudut pusat θ sering kali ditulis sebagai $s = \theta R$ apabila kita memakai sistem satuan sedemikian rupa $1\,\mathrm{rad} = 1$. Apabila kita ingin mengetahui rumus panjang busur lingkaran tersebut yang sebenarnya, tanpa menerapkan penyamaan $1\,\mathrm{rad} = 1$, maka sebenarnya

$$s = \frac{\theta}{360°} 2\pi R = \frac{\theta}{2\pi\,\mathrm{rad}} 2\pi R = \frac{\theta}{1\,\mathrm{rad}} R = \frac{\theta R}{\mathrm{rad}}. \tag{8.1}$$

Inilah rumus panjang busur lingkaran yang sebenarnya.

Sebagai contoh, kita ingin mengetahui panjang busur setengah lingkaran berjari-jari R, maka $\theta = 180° = \pi\,\mathrm{rad}$, sehingga

$$s = \theta R/\,\mathrm{rad} = (\pi\,\mathrm{rad})R/\,\mathrm{rad} = \pi R. \tag{8.2}$$

Oleh karena itu, sebenarnya besaran sudut datar itu tetaplah berdimensi, yaitu dimensi sudut datar, dengan satuan SI yaitu radian alias rad.

Masalah ini diangkat, mengingat dalam teori medan kuantum, misalnya, kita sering mengidentikkan $c = \hbar = 1$ meskipun sebenarnya c dan $\hbar$ itu berbeda dimensi dan satuan.

8.2 Waktu Relatif

Besaran waktu itu merupakan pelabelan (penyematan) nilai yang disepakati oleh sebuah benda (pengamat).

Andaikan pada suatu saat tertentu, waktu menurut pengamat A adalah $t_A \in \mathbb{R}$, serta waktu menurut pengamat B adalah $t_B \in \mathbb{R}$. Andaikan pula, pada suatu saat tertentu yang lain, waktu menurut pengamat A adalah $t'_A \in \mathbb{R}$, serta waktu menurut pengamat B adalah $t'_B \in \mathbb{R}$. Apabila hubungan antara waktu menurut A, yaitu $T_A \in \mathbb{R}$, dan waktu menurut B, yaitu $T_B \in \mathbb{R}$ adalah linier, maka berlakulah kaitan

$$T_B = MT_A + N \tag{8.3}$$

di mana $M, N \in \mathbb{R}$ adalah tetapan yang hendak dicari kemudian.

Dengan memasukkan nilai $(T_A, T_B) = (t_A, t_B)$ dan $(T_A, T_B) = (t'_A, t'_B)$, maka diperoleh sistem persamaan

$$t_B = Mt_A + N \quad \text{dan} \quad t'_B = Mt'_A + N \tag{8.4}$$

yang apabila disajikan dalam bentuk matriks, keduanya menjadi

$$\begin{pmatrix} t_B \\ t'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_A & 1 \\ t'_A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

Dengan aturan Cramer, serta dengan mendefinisikan

$$T := \begin{vmatrix} t_A & 1 \\ t'_A & 1 \end{vmatrix}, \quad m := \begin{vmatrix} t_B & 1 \\ t'_B & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{dan} \quad n := \begin{vmatrix} t_A & t_B \\ t'_A & t'_B \end{vmatrix}, \tag{8.6}$$

alias

$$T = t_A - t'_A, \quad m = t_B - t'_B, \quad \text{dan} \quad n = t_A t'_B - t'_A t_B, \tag{8.7}$$

sehingga

$$M = \frac{m}{T} = \frac{t_B - t'_B}{t_A - t'_A} \quad \text{dan} \quad N = \frac{n}{T} = \frac{t_A t'_B - t'_A t_B}{t_A - t'_A}. \tag{8.8}$$

Dengan memasukkan nilai M dan N ke persamaan pertama, diperoleh hubungan relatif antara T_A dan T_B, yaitu

$$T_B = \frac{(t_B - t'_B)T_A + (t_A t'_B - t'_A t_B)}{t_A - t'_A}. \tag{8.9}$$

8.3 Perlajuan Partikel

Andaikan $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ adalah kecepatan sebuah partikel di ruang $\mathbb{R}^3$. Tentu saja $|\vec{v}|$ adalah kelajuan partikel tersebut. Perlajuan milik partikel tersebut pada waktu $t \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $(d\vec{v}/dt) \cdot \vec{v}/|\vec{v}|$. Ternyata,

$$a_{//} := \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{2} \frac{2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}{|\vec{v}|} = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}. \tag{8.10}$$

Sekarang, hendak dibuktikan bahwa $\vec{v} \cdot (d/dt)(\vec{v}/|\vec{v}|) = 0$. Buktinya adalah sebagai berikut.

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}\right) - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = a_{//} - a_{//} = 0. \tag{8.11}$$

8.4 Turunan Waktu Vektor Posisi yang Berotasi

Misalkan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{n}$ yang berpangkal di titik $\vec{0}$, di mana θ merupakan sudut rotasi yang bergantung pada waktu t, serta $\hat{n}$ merupakan vektor satuan arah orientasi rotasi yang konstan terhadap t. Vektor posisi mula-mula $\vec{r}_0$ yang berotasi oleh $\vec{\theta}$ tersebut pada waktu t akan berpindah ke posisi

$$\vec{r} = (\hat{n}\cdot\vec{r}_0)\hat{n} + (\hat{n}\times\vec{r}_0)\times\hat{n}\cos\theta + \hat{n}\times\vec{r}_0\sin\theta. \tag{8.12}$$

Turunan $\vec{r}$ terhadap t tentu saja adalah

$$\vec{v} := \frac{d\vec{r}}{dt} = -(\hat{n}\times\vec{r}_0)\times\hat{n}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta + \hat{n}\times\vec{r}_0\frac{d\theta}{dt}\cos\theta, \tag{8.13}$$

sehingga

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times(\hat{n}\times\vec{r}_0\sin\theta + \vec{r}_0\cos\theta), \tag{8.14}$$

di mana $\vec{\omega} := d\vec{\theta}/dt$.

Karena $(\hat{n}\times\vec{r}_0)\times\hat{n} = \vec{r}_0 - (\hat{n}\cdot\vec{r}_0)\hat{n}$ dan $\vec{\omega}\times\hat{n} = \vec{0}$, maka

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times((\hat{n}\cdot\vec{r}_0)\hat{n} + (\hat{n}\times\vec{r}_0)\times\hat{n}\cos\theta + \hat{n}\times\vec{r}_0\sin\theta), \tag{8.15}$$

sehingga

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{8.16}$$

8.5 Rotasi Benda Tegar

Andaikan $d\theta := \theta_t(t+dt) - \theta$, $\dot{\theta} := d\theta/dt$, $|\hat{\theta}| = 1$, dan $\dot{\vec{r}} := d\vec{r}/dt$. Di ruang $\mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$, sebuah titik dengan posisi $\vec{r}$ yang dirotasikan murni secara aktif selama selang waktu dt oleh vektor sudut rotasi $\vec{\theta} = \theta\hat{\theta}$ dengan pangkal di $\vec{0}$ akan mengalami perpindahan ke posisi

$$\begin{aligned}
\vec{r}_t(t+dt) &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta}\cos d\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta} + \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\vec{r} - (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta}) + \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta \\
&= \vec{r} + \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta
\end{aligned} \tag{8.17}$$

sehingga

$$\vec{r}_t(t+dt) - \vec{r} \equiv d\vec{r} = \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta \tag{8.18}$$

alias

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}\times\vec{r}.} \tag{8.19}$$

Persamaan terakhir ini merupakan persamaan diferensial vektor. Untuk mencari $\vec{r}$ pada waktu t secara eksplisit, maka persamaan tersebut harus diselesaikan untuk $\vec{r}$ yang bergantung t.

8.6 Percepatan Tangensial dan Sentripetal Gerak Rotasi

Kecepatan gerak rotasi partikel pada waktu t dengan vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$ yang berpangkal di titik $\vec{0}$ sejauh sudut θ, dengan $\hat{\theta}$ konstan, adalah

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{8.20}$$

di mana $\vec{\omega} := d\vec{\theta}/dt$ adalah kecepatan sudutnya, dan $\vec{r}$ adalah posisi partikel tersebut.

Percepatan partikel tersebut, tentu saja adalah

$$\vec{a} := d\vec{v}/dt = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{8.21}$$

di mana $\vec{\alpha} := d\vec{\omega}/dt$ adalah percepatan sudutnya.

Dari persamaan (8.20) dan (8.21), diperoleh percepatan tangensial, yaitu

$$\begin{aligned} \vec{a}_{//} &= \vec{a} \cdot \vec{v}\vec{v}/|\vec{v}|^2 = (\vec{\alpha} \times \vec{r}) \cdot \vec{v}\vec{v}/|\vec{v}|^2 \\ &= (\vec{\alpha} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})(\vec{\omega} \times \vec{r})/(\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2) \\ &= \alpha(1/\omega)(1 - (\hat{\theta} \cdot \hat{r})^2)(\vec{\omega} \times \vec{r})/(1 - (\hat{\theta} \cdot \hat{r})^2) \\ &= \alpha(1/\omega)(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \alpha\hat{\theta} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Sedangkan, percepatan sentripetalnya adalah

$$\vec{a}_{\perp} := \vec{a} - \vec{a}_{//} = \vec{\omega} \times \vec{v} = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}. \tag{8.23}$$

8.7 Tensor Kelembamban

Momen kelembaman sebuah sistem n buah partikel terhadap sumbu yang melalui titik asal koordinat yang diwakili oleh vektor satuan $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ didefinisikan sebagai

$$\boxed{I := \sum_{j=1}^{n} m_j |\vec{r}_j \times \hat{n}|^2} \tag{8.24}$$

di mana m_j adalah massa partikel ke-j, $\vec{r}_j := x_{jk}\hat{x}_k$ adalah posisi partikel ke-j, dan $\hat{n} := n_k\hat{x}_k$ adalah vektor satuan sebuah sumbu yang bertitik pangkal di titik asal koordinat, sehingga

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^{n} m_j \epsilon_{klm} x_{jl} n_m \epsilon_{kpq} x_{jp} n_q \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j (\delta_{lp}\delta_{mq} - \delta_{lq}\delta_{mp}) x_{jl} x_{jp} n_m n_q \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j (x_{jl} x_{jl} n_m n_m - x_{jl} x_{jm} n_m n_l). \end{aligned} \tag{8.25}$$

Ini sama saja mengatakan bahwa

$$\boxed{I = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_{js} x_{js} \delta_{ml} - x_{jl} x_{jm}) n_m n_l = I_{lm} n_l n_m} \tag{8.26}$$

di mana

$$\boxed{I_{lm} := \sum_{j=1}^{n} m_j (x_{js} x_{js} \delta_{ml} - x_{jl} x_{jm})} \tag{8.27}$$

merupakan komponen tensor kelembaman $\overleftrightarrow{I} := I_{lm}\hat{x}_l \otimes \hat{x}_m$.

8.8 Massa Tereduksi

Andaikan ada sistem dua partikel bermassa m_1 dan m_2 yang berturut-turut menempati posisi $\vec{r}_1$ dan $\vec{r}_2$ yang bergantung pada waktu t. Misalkan kedua partikel tersebut mengalami gaya aksi-reaksi berupa gaya sentral yang saling berlawanan, sehingga gaya yang dialami oleh partikel pertama adalah $\vec{F}_1 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 = f(|\vec{r}|)\vec{r}/|\vec{r}|$, serta gaya yang dialami partikel kedua adalah $\vec{F}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -f(|\vec{r}|)\vec{r}/|\vec{r}|$, di mana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebarang fungsi riil, dan $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ adalah posisi relatif partikel pertama terhadap partikel kedua. Oleh karena itu, $m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_1 = f(|\vec{r}|) m_2 \vec{r}/|\vec{r}|$ dan $m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -f(|\vec{r}|) m_1 \vec{r}/|\vec{r}|$, yang selisihnya adalah $m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = f(|\vec{r}|)(m_1 + m_2)\vec{r}/|\vec{r}|$ sehingga $\mu\ddot{\vec{r}} = f(|\vec{r}|)\vec{r}/|\vec{r}|$ di mana $\boxed{\mu := m_1 m_2/(m_1 + m_2)}$ adalah massa tereduksi untuk sistem dua partikel tersebut.

8.9 Interaksi Gravitasi Partikel Bermassa dengan Partikel Tak Bermassa

Andaikan hanya ada dua buah partikel klasik non-relativistik di ruang fisis $\mathbb{R}^3$, serta hanya ada interaksi gravitasi antara keduanya. Partikel pertama bermassa m_1 yang tidak nol dan terletak pada posisi $\vec{r}_1$ pada waktu t_1. Partikel kedua bermassa $m_2 = 0$ dan terletak pada posisi $\vec{r}_2$ pada waktu t. Selanjutnya akan dicari persamaan gerak kedua partikel tersebut.

Menurut hukum gravitasi Newton dan hukum kedua Newton, diperoleh

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{8.28}$$

dan

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = G\frac{m_2 m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \tag{8.29}$$

Karena $m_2 = 0$, maka dari dua persamaan terakhir, diperoleh

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{0} \tag{8.30}$$

dan

$$\vec{0} = \vec{0}, \tag{8.31}$$

sehingga dua persamaan terakhir, diperoleh kesimpulan bahwa partikel pertama akan bergerak lurus beraturan, sedangkan partikel kedua boleh bergerak sebarang.

8.10 Persamaan Hamilton

Andaikan ada sebuah Lagrangian $L \mapsto (q, \dot{q}, t)$, di mana q adalah satu-satunya koordinat umum, t adalah waktu, dan $\dot{q} := dq/dt$, serta $q \mapsto t$ dan $\dot{q} \mapsto t$. Andaikan ada sebuah momentum umum p yang didefinisikan sebagai

$$p := \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}. \tag{8.32}$$

Tentu saja, $p \mapsto (q, \dot{q}, t)$, sehingga tentu saja $\dot{q} \mapsto (q, p, t)$.

Karena L memenuhi persamaan Euler-Lagrange, yaitu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t} = \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{\dot{q},t}, \tag{8.33}$$

maka

$$\dot{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{\dot{q},t}. \tag{8.34}$$

Tentu saja, $\dot{p} \mapsto (q, \dot{q}, t)$.

Andaikan ada sebuah Hamiltonian $H \mapsto (q, p, t)$, yang didefinisikan sebagai $H := \dot{q}p - L$.

Karena $L = L_{q,\dot{q},t}(q, \dot{q}_{q,p,t}(q, p, t), t)$, maka

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{p,t} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right)_{p,t} p - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{p,t}. \tag{8.35}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{p,t} = \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{\dot{q},t} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right)_{p,t}, \tag{8.36}$$

maka

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{p,t} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right)_{p,t}\left(p - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{\dot{q},t} \tag{8.37}$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{p,t} = -\dot{p}. \tag{8.38}$$

Demikian pula,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{q,t} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right)_{q,t} p + \dot{q} - \left(\frac{\partial L}{\partial p}\right)_{q,t}. \tag{8.39}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial L}{\partial p}\right)_{q,t} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right)_{q,t}, \tag{8.40}$$

maka

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{q,t} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right)_{q,t}\left(p - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}\right) + \dot{q} \tag{8.41}$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{q,t} = \dot{q}. \tag{8.42}$$

8.11 Peluang Keberadaan Partikel Klasik

Andaikan ada partikel titik bergerak bolak-balik sepanjang garis riil $\mathbb{R}$, misalnya sumbu-x, dengan posisi $x = A\sin(2\pi t/T)$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$ di mana $A > 0$ dan $T > 0$. Ternyata, menurut perhitungan yang teliti, dapat disimpulkan beberapa kesimpulan berikut ini.

Peluang keberadaan partikel di daerah $0 < x < A$ adalah 1/2.
Peluang keberadaan partikel di daerah $0 < x < A/2$ adalah 1/6.
Peluang keberadaan partikel di daerah $A/2 < x < A$ adalah 1/3.

8.12 Rapat Peluang Keberadaan Partikel Klasik

Andaikan ada sebuah partikel klasik yang bergerak bolak-balik sepanjang garis riil $\mathbb{R}$ dengan posisi $x = A\sin(2\pi t/T)$, di mana $A, T \in \mathbb{R}^+$ berturut-turut adalah amplitudo dan periode getaran, dan $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu. Tentu saja, $t = (T/2\pi)\arcsin(x/A)$. Rapat peluang keberadaan partikel klasik tersebut tentu saja adalah (di mana P adalah peluangnya)

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2}{T}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\arcsin\frac{x}{A} = \frac{1}{\pi A}\frac{1}{\sqrt{1-(x/A)^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}}. \tag{8.43}$$

Peluang untuk menemukan partikel pada interval $-A < x < A$ tentu saja adalah

$$\begin{aligned} P_x(A) - P_x(-A) &= \int_{-A}^{A}\frac{dP}{dx}dx = \frac{2}{T}(t_x(A) - t_x(-A)) \\ &= \frac{1}{\pi}(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1. \end{aligned} \tag{8.44}$$

Peluang untuk menemukan partikel pada interval $0 < x < A$ tentu saja adalah

$$P_x(A) - P_x(0) = \int_0^A \frac{dP}{dx}dx = \frac{2}{T}(t_x(A) - t_x(0)) = \frac{1}{\pi}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{1}{2}. \tag{8.45}$$

Peluang untuk menemukan partikel pada interval $0 < x < A/2$ tentu saja adalah

$$P_x(A/2) - P_x(0) = \int_0^{A/2}\frac{dP}{dx}dx = \frac{2}{T}(t_x(A/2) - t_x(0)) = \frac{1}{\pi}(\arcsin(1/2) - \arcsin 0) = \frac{1}{6}. \tag{8.46}$$

Peluang untuk menemukan partikel pada interval $A/2 < x < A$ tentu saja adalah

$$\begin{aligned} P_x(A) - P_x(A/2) &= \int_{A/2}^{A}\frac{dP}{dx}dx = \frac{2}{T}(t_x(A) - t_x(A/2)) \\ &= \frac{1}{\pi}(\arcsin 1 - \arcsin(1/2)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{8.47}$$

Demikianlah ini sesuai yang diharapkan bahwa $1/2 + 1/6 + 1/3 = 1$.

8.13 Pemuaian Panjang Infinitesimal

Sebuah logam yang berbentuk batangan lurus dengan panjang mula-mula L_0 yang dipanaskan dari suhu T_0 sampai suhu T akan bertambah panjang sehingga panjangnya menjadi L sedemikian

$$\Delta L := L - L_0 = \alpha L_0 (T - T_0) \tag{8.48}$$

alias

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta T) \tag{8.49}$$

di mana α adalah koefisien muai panjang, dan $\Delta T := T - T_0$.

Apabila ΔT infinitesimal kecil, yaitu bahwa $\Delta T = dT$, maka bolehlah L bergantung pada T sehingga

$$L_T(T + dT) = L + L\alpha\, dT \tag{8.50}$$

alias

$$dL = L\alpha\, dT \tag{8.51}$$

alias

$$dL/L = \alpha\, dT \tag{8.52}$$

yang diintegralkan menjadi

$$\ln(L/L_0) = \alpha T \tag{8.53}$$

alias

$$L = L_0 e^{\alpha T} \tag{8.54}$$

di mana $L_0 := L_T(0)$ adalah panjang batang logam pada saat suhu nol mutlak Kelvin.

8.14 Bagian Riil dan Imajiner dari Persamaan Schrödinger

Persamaan Schrödinger secara umum adalah

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \partial\Psi/\partial t \tag{8.55}$$

di mana $i^2 = -1$, $\hat{H}$ adalah operator variabel Hamiltonian yang bergantung pada vektor posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ saja, $\Psi \in \mathbb{C}$ adalah variabel gelombang kemungkinan yang bergantung pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ dan waktu $t \in \mathbb{R}$, serta $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi yang riil.

Persamaan Schrödinger tersebut sebenarnya merupakan dua buah persamaan diferensial riil, yaitu

$$\hat{H}\,\mathrm{Re}\,\Psi = -\hbar\partial(\mathrm{Im}\,\Psi)/\partial t \tag{8.56}$$

dan

$$\hat{H}\,\mathrm{Im}\,\Psi = \hbar\partial(\mathrm{Re}\,\Psi)/\partial t. \tag{8.57}$$

Jadi, sesungguhnya, sebuah persamaan Schrödinger itu merupakan sistem persamaan yang terdiri dari dua buah persamaan diferensial dengan dua buah variabel riil, yaitu $\mathrm{Re}\,\Psi$ dan $\mathrm{Im}\,\Psi$ yang harus dicari.

8.15 Laju Nilai Harap Besaran Fisis

Andaikan ada sebuah besaran fisis $Q(x, p, t) \in \mathbb{R}$ yang bergantung pada posisi $x \in \mathbb{R}$, momentum linier $p \in \mathbb{R}$, dan waktu $t \in \mathbb{R}$, yang diwakili oleh operator linier $\hat{Q}$ yang Hermitean dan hanya bergantung pada waktu t. Andaikan ada ket keadaan kuantum $|\psi\rangle$ yang normal, yaitu bahwa $\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$, dan hanya bergantung pada t, serta memenuhi persamaan Schrodinger, yaitu $\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar(d/dt)|\psi\rangle$, di mana $\hat{H}$ adalah operator Hamiltonian. Didefinisikan pula $\langle x|\psi\rangle := \psi(x)$ dan $\langle p|\psi\rangle := \tilde{\psi}(p)$ di mana $\tilde{\psi}$ adalah transformasi Fourier dari ψ. Di sini, $\langle p|\hat{Q}|x\rangle = Q(x, p, t)$.

Oleh karena itu, laju nilai harap dari Q adalah

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle_\psi = \frac{d}{dt}(\langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle) = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\, dx \langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\, dx \left(\frac{\partial}{\partial t}(\langle\psi|p\rangle)\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\frac{\partial}{\partial t}(\langle p|\hat{Q}|x\rangle)\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\frac{\partial}{\partial t}(\langle x|\psi\rangle)\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\, dx \left(\left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)^\dagger |p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\frac{d\hat{Q}}{dt}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\, dx \left(\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle\right)^\dagger |p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\frac{d\hat{Q}}{dt}|x\rangle\langle x|\psi\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\hat{H}|\psi\rangle\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\, dx \left(\frac{i}{\hbar}\langle\psi|\hat{H}|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\frac{d\hat{Q}}{dt}|x\rangle\langle x|\psi\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\hat{H}|\psi\rangle\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\langle\psi|(\hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H})|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{d\hat{Q}}{dt}|\psi\rangle.$$

Oleh karena itu,

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle_\psi = \frac{i}{\hbar}\langle\psi|[\hat{H}, \hat{Q}]|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{d\hat{Q}}{dt}|\psi\rangle \tag{8.58}$$

di mana didefinisikan komutasi $[\hat{H}, \hat{Q}] := \hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H}$.

Untuk menghitung $\langle\psi|(d\hat{Q}/dt)|\psi\rangle$, dapat dilakukan penguraian, yaitu

$$\begin{aligned}\langle\psi|\frac{d\hat{Q}}{dt}|\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\, dx \langle\psi|p\rangle\frac{\partial}{\partial t}(\langle p|\hat{Q}|x\rangle)\langle x|\psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\, dx \tilde{\psi}^*(p)\frac{\partial Q(x, p, t)}{\partial t}\psi(x).\end{aligned} \tag{8.59}$$

Untuk mencari $\tilde{\psi}(p)$, dapat dilakukan penguraian, yaitu

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle. \tag{8.60}$$

Untuk mencari $\langle p|x\rangle$, dapat dilakukan penguraian dengan tambahan posisi lain $x' \in \mathbb{R}$, yaitu

$$\langle x'|x\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp \langle x'|p\rangle\langle p|x\rangle \tag{8.61}$$

yang harus sama dengan delta Dirac $\delta(x-x')$, sehingga

$$\langle x'|x\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}} dp e^{ip(x-x')/\hbar}, \tag{8.62}$$

sehingga haruslah

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}. \tag{8.63}$$

8.16 Persamaan Schrödinger Relativistik

Tenaga kinetik partikel relativistik adalah

$$T = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2, \tag{8.64}$$

di mana p, c, dan m berturut-turut adalah besar momentum partikel kuantum relativistik, kelajuan cahaya dalam ruang hampa, dan massa rehat partikel kuantum.

Hukum kelestarian tenaga relativistik adalah

$$E = T + V = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 + V \tag{8.65}$$

alias

$$E + mc^2 - V = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}, \tag{8.66}$$

di mana E, T, dan V berturut-turut adalah tenaga mekanik, tenaga kinetik, dan tenaga potensial milik partikel kuantum tersebut.

Pengkuadratan kedua ruas persamaan terakhir menghasilkan

$$E^2 + (mc^2)^2 + V^2 + 2mc^2E - 2VE - 2mc^2V = (pc)^2 + (mc^2)^2 \tag{8.67}$$

alias

$$E^2 + V^2 + 2mc^2E - 2VE - 2mc^2V - (pc)^2 = 0. \tag{8.68}$$

Simpangan gelombang partikel bebas pada posisi $\vec{r}$ dan waktu t adalah

$$\Psi = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}, \tag{8.69}$$

di mana N adalah tetapan normalisasi, $\vec{p}$ adalah momentum partikel tersebut, dan $\hbar := 1,055\cdots(10^{-34})\,\mathrm{J\,s}$ adalah tetapan Planck tereduksi.

Dari persamaan terakhir, diperoleh

$$\nabla\Psi = i\vec{p}\Psi/\hbar, \quad \nabla^2\Psi = -p^2\Psi/\hbar^2, \quad p := |\vec{p}|, \quad p^2\Psi = -\hbar^2\nabla^2\Psi, \tag{8.70}$$

$$\partial\Psi/\partial t = -iE\Psi/\hbar, \quad E\Psi = i\hbar\partial\Psi/\partial t, \quad (pc)^2\Psi = -(\hbar c)^2\nabla^2\Psi. \tag{8.71}$$

Selanjutnya,

$$\left(E^2 + V^2 + 2mc^2E - 2VE - 2mc^2V - (pc)^2\right)\Psi = 0. \tag{8.72}$$

Oleh karena itu,

$$\left(-\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + V^2 + 2mc^2\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V\right) - 2i\hbar V\frac{\partial}{\partial t} + (\hbar c)^2\nabla^2\right)\Psi = 0 \tag{8.73}$$

alias

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\frac{V^2}{2mc^2}+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-V-\frac{i\hbar}{mc^2}V\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\Psi=0 \tag{8.74}$$

alias

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right)+V\left(1-\frac{1}{2mc^2}\left(V-2i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right)\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{8.75}$$

yang merupakan persamaan Schrödinger relativistik.

Limit non-relativistik-nya, yaitu $c\to\infty$ alias $1/c\to+0$, adalah

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{8.76}$$

yang merupakan persamaan Schrödinger non-relativistik.

Meskipun ternyata persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac bukanlah persamaan Schrödinger relativistik, tetapi bagaimanapun juga persamaan Klein-Gordon tetaplah persamaan Klein-Gordon, dan persamaan Dirac tetaplah persamaan Dirac.

8.17 Melihat Bentuk Ruang-Waktu secara Geometri

Sebagian besar dari kita telah mampu menentukan kelengkungan ruang-waktu dengan cara menghitung tensor kelengkungan Riemann dan skalar kelengkungan Riemann, tetapi kita untuk sementara ini belum dapat 'melihat' bentuk ruang-waktu kita secara utuh yang terbenam di ruang $\mathbb{R}^{10}$. Sebenarnya, sekedar menentukan tensor kelengkungan Riemann untuk ruang-waktu kita itu bukanlah berarti kita telah 'melihat' bentuk ruang-waktu seperti kita mempelajari ilmu geometri analitik, yaitu mencari tempat kedudukan sebuah objek geometris yang terbenam di dalam ruang $\mathbb{R}^n$.

Untuk melihat bentuk salah satu dari berbagai ruang-waktu, mula-mula kita perlu mengetahui berbagai kemungkinan gerak partikel cahaya di ruang $\mathbb{R}^3$, yang diwakili oleh keluarga kurva berparameterkan waktu $t\in\mathbb{R}$. Sebagai contoh, partikel cahaya yang bergerak lurus beraturan ke segala arah dengan kelajuan $c:=299792458$m/s, dengan koordinat-koordinat Cartesian $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ yaitu

$$x:=x_0+ct\sin\theta\cos\phi, \tag{8.77}$$

$$y:=y_0+ct\sin\theta\sin\phi, \tag{8.78}$$

$$z:=z_0+ct\cos\theta, \tag{8.79}$$

di mana $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ adalah posisi awal partikel cahaya tersebut (yang konstan), serta $\theta\in(0,\pi)$ dan $\phi\in(0,2\pi)$ berturut-turut adalah sudut arah zenital dan azimutal gerak partikel cahaya tersebut, sehingga pengambilan diferensial dari ketiga persamaan tersebut menghasilkan

$$dx = c\,dt \sin\theta \cos\phi, \tag{8.80}$$
$$dy = c\,dt \sin\theta \sin\phi, \tag{8.81}$$
$$dz = c\,dt \cos\theta. \tag{8.82}$$

Dari identitas trigonometri $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ketiga persamaan terakhir dapat disatukan menjadi

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2 \tag{8.83}$$

atau

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0. \tag{8.84}$$

Khusus untuk partikel cahaya, panjang garis dunia (*world-line*) -nya adalah nol, yaitu bahwa

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu = 0 \tag{8.85}$$

di mana $q^1 := x$, $q^2 := y$, $q^3 := z$, dan $q^4 := t$, serta $g_{\mu\nu}$ adalah komponen ke-$\mu\nu$ dari 16 komponen dari tensor metrik di ruang-waktu tersebut. Karena tensor metrik itu merupakan tensor simetrik, yaitu bahwa $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$, maka sebenarnya tensor metrik tersebut hanya memiliki $6 + 4 = 10$ komponen, bukan 16 komponen.

Dengan membandingkan kedua persamaan terakhir ini, kita peroleh bahwa $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -c^2$, dan $g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{14} = g_{41} = g_{23} = g_{32} = g_{24} = g_{42} = g_{34} = g_{43} = 0$.

Dalam analisis vektor dan tensor, komponen kovarian tensor metrik, yaitu $g_{\mu\nu}$, didefinisikan sebagai perkalian titik antara dua buah vektor basis kontravarian dari sebuah manifold yang terbenam (dalam kasus kita ini) di ruang $\mathbb{R}^{10}$. Kedua vektor basis tersebut adalah $\vec{e}_\mu := \partial\vec{s}/\partial q^\mu$ dan $\vec{e}_\nu := \partial\vec{s}/\partial q^\nu$, di mana $\vec{s} := (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{10}) \in \mathbb{R}^{10}$ merupakan posisi setiap titik pada manifold ruang-waktu tersebut yang dibenamkan di ruang $\mathbb{R}^{10}$, sehingga $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$, alias

$$\sum_{\rho=1}^{10} \frac{\partial s_\rho}{\partial q^\mu} \frac{\partial s_\rho}{\partial q^\nu} = g_{\mu\nu} \tag{8.86}$$

di mana $\mu = 1, 2, 3, 4$ dan $\nu = 1, \ldots, \mu$.

Sebenarnya, persamaan diferensial parsial terakhir tersebut merupakan 10 buah persamaan diferensial parsial yang harus diselesaikan untuk $(s_1, \ldots, s_{10})$ sebagai fungsi 4 buah parameter ruang-waktu, yaitu (x, y, z, t). Inilah bentuk ruang waktu yang sedang kita bahas ini.

Selama kita belum mampu menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial tersebut (yang tentu saja terdiri dari 10 persamaan diferensial parsial), kita tidak dapat melihat bentuk ruang-waktu yang ingin kita lihat ini. Prosedur pencarian penyelesaian umum dari sistem persamaan ini sangat rumit, sehingga yang dapat kita lakukan semata-mata hanyalah mencari solusi deret pangkat maupun menebak penyelesaiannya melalui intuisi.

8.18 Menentukan Lintasan Partikel Cahaya jika Diketahui Bentuk Ruang-Waktu-nya

Andaikan ada sebuah ruang waktu 2-dimensi yang berbentuk permukaan bola 2-dimensi, yaitu

$$S^2(0,R) := \{(s_1,s_2,s_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (s_1)^2+(s_2)^2+(s_3)^2 = R^2\}, \tag{8.87}$$

di mana R adalah jari-jari ruang-waktu permukaan bola tersebut yang konstan.

Salah satu parameterisasi ruang-waktu tersebut adalah

$$s_1 := R\cos kx, \tag{8.88}$$
$$s_2 := R\sin kx\cos\omega t, \tag{8.89}$$
$$s_3 := R\sin kx\sin\omega t, \tag{8.90}$$

di mana $k,\omega \in \mathbb{R}$ adalah dua buah konstanta, serta (x,t) adalah parameter ruang-waktu 2-dimensi tersebut.

Tentu saja, komponen ke-$\mu\nu$ dari 4 komponen tensor metrik manifold ruang-waktu tersebut adalah

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\rho=1}^{3} \frac{\partial s_\rho}{\partial q^\mu}\frac{\partial s_\rho}{\partial q^\nu}, \tag{8.91}$$

di mana $q^1 := x$ dan $q^2 := t$, mengingat $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$.

Dengan sedikit perhitungan, akan diperoleh $g_{11} = k^2R^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, dan $g_{22} = \omega^2R^2\sin^2 kx$.

Karena untuk partikel cahaya, panjang garis dunia (*world-line*) -nya harus nol, maka

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu}dq^\mu dq^\nu = 0, \tag{8.92}$$

yang tidak lain adalah

$$k^2R^2dx^2 + \omega^2R^2\sin^2 kx\,dt^2 = 0, \tag{8.93}$$

alias (dengan $i^2 = -1$)

$$k\,dx = i\omega\sin kx dt \tag{8.94}$$

alias

$$\csc kx\,dx = i(\omega/k)\,dt. \tag{8.95}$$

Pengintegralan persamaan terakhir menghasilkan

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{\cot kx+\csc kx}{\cot(kx_0)+\csc kx_0}\right) = i\frac{\omega t}{k}, \tag{8.96}$$

di mana x_0 adalah posisi awal partikel cahaya tersebut.

Identitas trigonometri $\cot\alpha+\csc\alpha = \cot(\alpha/2)$ menyebabkan persamaan terakhir menjadi

$$-\ln\left(\frac{\cot(kx/2)}{\cot(kx_0/2)}\right) = i\omega t, \tag{8.97}$$

alias

$$\frac{\cot(kx/2)}{\cot(kx_0/2)} = e^{-i\omega t}, \tag{8.98}$$

alias

$$x = (2/k)\cot^{-1}\left(e^{-i\omega t}\cot(kx_0/2)\right). \tag{8.99}$$

Inilah keluarga lintasan gerak partikel cahaya tersebut di $\mathbb{C}$.

Meskipun demikian, ini hanyalah contoh kemungkinan yang cukup sederhana dari sekian banyak kemungkinan gerak yang seharusnya, mengingat setiap manifold itu memiliki medan tensor metrik yang tidak tunggal karena parameterisasi posisi pada manifold tersebut juga tidak tunggal.

8.19 Menentukan Persamaan Gerak Cahaya apabila Diketahui Bentuk Ruang-Waktunya

Andaikan ada sebuah ruang-waktu berdimensi-2 yang terbenam di ruang $\mathbb{R}^3$, yang berbentuk kerucut, yaitu

$$C := \left\{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3 \mid s_1^2 + s_2^2 = \alpha^2 s_3^2\right\} \tag{8.100}$$

di mana $\alpha \in \mathbb{R}$ adalah sebuah tetapan.

Salah satu parameterisasi dari kerucut C tersebut adalah

$$s_1 := \alpha vt\cos kx, \qquad s_2 := \alpha vt\sin kx, \qquad \text{dan} \qquad s_3 := vt, \tag{8.101}$$

di mana $k, v \in \mathbb{R}$ adalah tetapan, serta $x, t \in \mathbb{R}$ adalah parameter.

Komponen tensor metriknya tentu saja adalah

$$g_{\mu\nu} := \sum_{\rho=1}^{3} \frac{\partial s_\rho}{\partial q^\mu}\frac{\partial s_\rho}{\partial q^\nu} \tag{8.102}$$

untuk setiap $\mu \in \{1, 2\}$ dan $\nu \in \{1, \cdots, \mu\}$. Dalam hal ini, $q^1 := x$ dan $q^2 := t$ merupakan parameter dari kerucut C tersebut.

Tentu saja,

$$g_{11} = \sum_{\rho=1}^{3}\left(\frac{\partial s_\rho}{\partial x}\right)^2 = \alpha^2 k^2 v^2 t^2, \tag{8.103}$$

$$g_{12} = \sum_{\rho=1}^{3} \frac{\partial s_\rho}{\partial x}\frac{\partial s_\rho}{\partial t} = 0 = g_{21}, \tag{8.104}$$

$$g_{22} = \sum_{\rho=1}^{3}\left(\frac{\partial s_\rho}{\partial t}\right)^2 = v^2(\alpha^2 + 1). \tag{8.105}$$

Karena untuk cahaya, penggal jarak di ruang-waktu harus nol, yaitu bahwa

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu}dq^\mu dq^\nu = 0, \tag{8.106}$$

maka dengan memasukkan nilai $g_{\mu\nu}$ tersebut, diperolehlah

$$\alpha^2 k^2 t^2 dx^2 + (\alpha^2+1)dt^2 = 0 \tag{8.107}$$

alias

$$\frac{\alpha k}{\sqrt{\alpha^2+1}}dx = \pm i\frac{dt}{t} \tag{8.108}$$

yang diintegralkan kedua ruasnya menjadi

$$\frac{\alpha k}{\sqrt{\alpha^2+1}}(x-x_0) = \pm i \ln\left|\frac{t}{t_0}\right|. \tag{8.109}$$

Persamaan terakhir ini merupakan persamaan gerak cahaya yang mewakili ruang-waktu tersebut. Di sini, x mewakili ruang, serta t mewakili waktu.

Sekarang, apabila ruang-waktu tersebut berbentuk bidang datar, yaitu

$$P := \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3 \mid As_1 + Bs_2 + Cs_3 = D\} \tag{8.110}$$

di mana $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ adalah tetapan.

Salah satu parameterisasi dari bidang datar P tersebut adalah

$$s_1 := x, \qquad s_2 := vt, \qquad \text{dan} \qquad s_3 := (D - Ax - Bvt)/C \tag{8.111}$$

di mana $v \in \mathbb{R}$ adalah tetapan.

Apabila $q^1 := x$ dan $q^2 := t$, maka tentu saja

$$g_{11} = k^2(1 + A^2/C^2), \qquad g_{12} = ABkv/C^2 = g_{21}, \qquad \text{dan} \qquad g_{22} = v^2(1 + B^2/C^2). \tag{8.112}$$

Untuk cahaya, berlakulah

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu = 0, \tag{8.113}$$

sehingga, dengan substitusi $g_{\mu\nu}$, diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v\left(-AB \pm iC\sqrt{A^2+B^2+C^2}\right)}{A^2+C^2}. \tag{8.114}$$

Inilah persamaan gerak cahaya yang mewakili ruang waktu P.

8.20 Hukum Fisika untuk Model Bumi Datar

Hukum fisika untuk model bumi datar tentu berbeda dengan hukum fisika untuk model bumi bulat berotasi. Contohnya adalah hukum gravitasi dan hukum pembiasan cahaya. Untuk memperoleh hukum fisika pada bumi datar dapat dilakukan dengan cara melakukan transformasi koordinat bumi datar ke koordinat bumi bulat berotasi, kemudian berlakukan hukum fisika yang telah diakui keabsahannya dalam model bumi bulat berotasi, kemudian lakukan transformasi balik koordinat bumi bulat berotasi yang berkaitan dengan hukum fisika tersebut menjadi koordinat bumi datar yang berkaitan dengan hukum fisika tersebut. Transformasi koordinatnya adalah sebagai berikut.

Misalkan dalam sistem koordinat Cartesian, pusat bumi bulat berotasi ada di titik $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, serta posisi suatu titik P adalah $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, maka posisi P dalam kerangka acuan bumi bulat yang berotasi dengan frekuensi sudut $\omega \in \mathbb{R}$ adalah $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$ sedemikian rupa sehingga

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t, \qquad y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t, \qquad z' = z. \tag{8.115}$$

Apabila dalam kerangka acuan bumi bulat yang berotasi, posisi P dalam koordinat polar bola adalah (r,θ,ϕ), maka

$$r = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}, \qquad \theta = \arctan_2(z', \sqrt{x'^2+y'^2}), \qquad \phi = \arctan_2(x',y'). \tag{8.116}$$

Dengan menggunakan proyeksi stereografis terhingga, posisi P menurut model bumi datar adalah $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3$ sedemikian rupa sehingga

$$X = \mathcal{R}\tanh(\tan(\theta/2))\cos\phi, \qquad Y = \mathcal{R}\tanh(\tan(\theta/2))\sin\phi, \qquad Z = Z_0\ln(r/R) \tag{8.117}$$

di mana $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari bumi datar, $Z_0 \in \mathbb{R}^+$ adalah tetapan kesebandingan yang berdimensi panjang, dan $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari bumi bulat.

Pemetaan $(x,y,z) \mapsto (X,Y,Z)$ merupakan transformasi koordinat bumi bulat berotasi ke koordinat bumi datar.

Transformasi koordinat bumi datar ke koordinat bumi bulat berotasi, yaitu $(X,Y,Z) \mapsto (x,y,z)$, adalah

$$\theta = 2\tan^{-1}(\tanh^{-1}(\sqrt{X^2+Y^2}/\mathcal{R})), \qquad \phi = \arctan_2(X,Y), \qquad r = Re^{Z/Z_0}, \tag{8.118}$$

$$x' = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y' = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z' = r\cos\theta, \tag{8.119}$$

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, \qquad y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, \qquad z = z'. \tag{8.120}$$

Jadi, untuk memperoleh hukum fisika pada model bumi datar, mula-mula kita lakukan transformasi $(X,Y,Z) \mapsto (x,y,z)$, kemudian kita berlakukan hukum fisika bumi bulat berotasi, kemudian kita transformasikan hukum fisika tersebut menurut $(x,y,z) \mapsto (X,Y,Z)$. Dengan demikian kita telah memperoleh hukum fisika untuk bumi datar.

8.21 Mekanika Dijital

Pada kesempatan ini, saya hendak menerangkan tentang konsep mekanika dijital. Dalam mekanika dijital, benda tidak bergerak dalam ruang $\mathbb{R}^3$, melainkan setiap titik hanya berkedip antara nilai 0 dan 1, yang membuat gambaran bahwa seolah-olah ada benda yang bergerak.

Andaikan seolah-olah ada sebuah titik $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$ yang bergantung pada waktu $t \in \mathbb{R}$, yang seolah-olah bergerak bergerak dalam ruang $\mathbb{R}^3$. Kuantitas dijitalnya adalah $\delta = p(\vec{r}-\vec{R})$, di mana $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi cuplik di mana $p(\vec{r})$ bernilai 1 untuk $\vec{r} = \vec{0}$, dan bernilai 0 untuk $\vec{r} \neq \vec{0}$. Jadi, δ itu merupakan kuantitas yang bergantung pada $\vec{r}$ dan t, yang hanya dapat bernilai 0 atau 1.

Selanjutnya, apabila terdapat sebuah kurva $C(f,g) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = g(\vec{r}) = 0\}$, di mana $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinyu, yang seolah-olah mengalami translasi $\vec{R}$ yang bergantung pada waktu t, maka kuantitas dijitalnya adalah $\delta = p(f(\vec{r}-\vec{R}))p(g(\vec{r}-\vec{R}))$, di mana kali ini $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sedemikian $p(x)$ bernilai 1 untuk $x = 0$, dan bernilai 0 untuk $x \neq 0$.

Selanjutnya, apabila terdapat sebuah permukaan $S(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = 0\}$ yang seolah-olah mengalami translasi $\vec{R}$ yang bergantung pada waktu t, maka kuantitas dijitalnya adalah $\delta = p(f(\vec{r} - \vec{R}))$.

Terakhir, apabila terdapat sebuah volume $V(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) < 0\}$, yang seolah-olah mengalami translasi $\vec{R}$ yang bergantung pada waktu t, maka kuantitas dijitalnya adalah $\delta = u(-f(\vec{r}-\vec{R}))$, di mana $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sedemikian $u(x)$ bernilai 1 untuk $x > 0$, bernilai 1/2 untuk $x = 0$, dan bernilai 0 untuk $x < 0$.

Bab 9

Soal-Soal Latihan

9.1 Paket A

1. Andaikan sebuah pegas ideal horizontal dengan konstanta pegas k yang ujung pertamanya dilekatkan pada sebuah tembok, sedangkan ujung yang satunya diikatkan sebuah benda bermassa m di atas lantai yang licin sempurna, lalu benda tersebut ditarik sejauh A, lalu dilepaskan, maka benda tersebut akan mengalami getaran selaras tak teredam. Tentukan (a) amplitudo getaran, (b) frekuensi sudut getaran, (c) kelajuan maksimum getaran, (d) magnitudo percepatan maksimum getaran, (e) tenaga kinetik maksimum getaran, (f) tenaga potensial pegas maksimum getaran, (g) tenaga mekanik getaran.

   Jawaban. (a) Amplitudo getarannya adalah A. (b) Frekuensi sudut getarannya adalah $\omega = \sqrt{k/m}$. (c) Kelajuan maksimum getaran adalah $v_{\text{mak}} = \omega A = \sqrt{k/m}A$. (d) Magnitudo percepatan maksimum getaran adalah $\omega^2 A = kA/m$. (e) Tenaga kinetik maksimum getaran adalah $T_{\text{mak}} = \frac{1}{2}mv_{\text{mak}}^2 = \frac{1}{2}m(k/m)A^2 = \frac{1}{2}kA^2$. (f) Karena simpangan maksimum getaran adalah $x_{\text{mak}} = A$, maka tenaga potensial pegas maksimum getaran adalah $V_{\text{mak}} = \frac{1}{2}kx_{\text{mak}}^2 = \frac{1}{2}kA^2$. (g) Tenaga mekanik getaran adalah $E = T + V = \frac{1}{2}kA^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = \frac{1}{2}kA^2$. ■

2. Getaran itu dapat merupakan getaran selaras dan getaran tidak selaras. (a) Apa definisi getaran secara umum? (b) Apakah getaran itu harus mempunyai periode getaran? (c) Getaran detak jantung itu merupakan getaran selaras atau tidak?

   Jawaban. (a) Getaran merupakan gerakan bolak-balik sebuah besaran fisis. (b) Tidak. Getaran tidak harus memiliki periode. (c) Tidak. ■

3. Hukum Hooke itu berasal dari getaran selaras yang seperti apa?

   Jawaban. Hukum Hooke berasal dari getaran selaras tak teredam. ■

4. Selesaikan persamaan diferensial getaran selaras tak teredam berikut ini, yaitu
$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{9.1}$$
dalam artian, carilah x yang bergantung pada waktu t, di mana $\ddot{x} := d^2x/dt^2$ adalah percepatan, m adalah massa benda yang konstan, dan k adalah tetapan pegas yang konstan pula, dalam penyelesaian umum.

   Jawaban. $x = A\cos(t\sqrt{k/m}) + B\sin(t\sqrt{k/m})$ di mana A dan B adalah tetapan sebarang. ■

5. Apakah setiap gerak bolak-balik itu dapat disebut sebagai getaran?

   Jawaban. Ya. ■

6. Sebenarnya, gelombang itu kurang tepat apabila disebut sebagai getaran yang merambat. Sebutkan definisi gelombang secara umum.

   Jawaban. Gelombang adalah besaran fisis yang bergantung pada posisi ruang dan waktu, yang memenuhi persamaan gelombang tertentu. ■

7. Turunkan asal muasal persamaan diferensial gelombang 1-dimensi dari sebuah fungsi gelombang datar, kemudian selesaikan persamaan diferensial tersebut agar dihasilkan fungsi gelombang yang paling umum.

   Jawaban. $\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ lalu $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi = -k^2\Psi$ dan $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = -\omega^2\Psi$, sehingga
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{9.2}$$
di mana $v := \omega/k$. Penyelesaian umum dari persamaan (9.2) adalah $\Psi = A_+f(x+vt) + A_-f(x-vt)$ di mana $A_\pm$ adalah tetapan sebarang, dan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ adalah sebuah fungsi sebarang. ■

8. Sebutkan 4 (empat) buah persamaan diferensial vektor yang mengatur perilaku gelombang elektromagnetik $\vec{E}$ dan $\vec{B}$.

   Jawaban. $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (hukum Gauss listrik), $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (hukum Gauss magnet), $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ (hukum Faraday), dan $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$ (hukum Ampere), di mana $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ dan $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M}$. ■

9. Bagaimana ceritanya bahwa sebarang fungsi periodik $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dapat disajikan dalam deret Fourier kosinus-sinus dan eksponensial kompleks?

   Jawaban. Lihat sesi 7.13. ■

10. Diketahui sebuah partikel klasik bermassa m dan bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ yang relativistik. Tentukan (a) massa transversal, (b) massa longitudinal.

Jawaban. Lihat persamaan (4.12). ■

11. Sebutkan definisi energi kinetik secara umum, kemudian dari definisi tersebut, turunkan rumus energi kinetik relativistik untuk partikel klasik bermassa rehat m_0 yang sedang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ relativistik.

    Jawaban. Lihat persamaan (4.13). ■

12. Persamaan Maxwell diferensial terdiri dari 4 (empat) buah persamaan. Tetapi keempat persamaan tersebut dapat disatukan menjadi sebuah persamaan saja. Sebutkan keempat buah persamaan tersebut dan sebuah persamaan gabungannya.

    Jawaban. Lihat sesi 5.20. ■

13. Gelombang seperti apakah yang diatur oleh (a) persamaan gelombang biasa, (b) persamaan Maxwell, (c) persamaan Schrödinger non-relativistik, (d) persamaan Klein-Gordon, (e) persamaan Dirac, (f) persamaan Schrödinger relativistik?

    Jawaban. (a) gelombang mekanik. (b) gelombang elektromagnetik. (c) gelombang kemungkinan. (d) gelombang medan skalar Klein-Gordon. (e) gelombang bispinor Dirac. (f) gelombang kemungkinan relativistik. ■

14. Buktikan bahwa untuk setiap $m, n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ berlaku kesamaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \pi\delta_{mn} \quad (9.3)$$

di mana δ_{mn} adalah delta Kronecker.

Jawaban. Untuk setiap $j, k \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos jy \cos ky \, dy \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left. \frac{k\cos jy \sin ky - j \sin jy \cos ky}{k^2 - j^2} \right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left. \frac{\cos jy \sin ky + ky \cos jy \cos ky + jy \sin jy \sin ky}{2k} \right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \frac{1}{2j} \left. \left(jy + \frac{1}{2}\sin 2jy \right) \right|_{y=-\pi}^{y=\pi} = \pi\delta_{jk}, \qquad (9.4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos jy \cos ky \, dy \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left. \frac{j \cos jy \sin ky - k \sin jy \cos ky}{k^2 - j^2} \right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left. \frac{jy \cos jy \cos ky - \sin jy \cos ky + ky \sin jy \sin ky}{2k} \right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \frac{1}{2j} \left. \left(jy - \frac{1}{2} \sin 2jy \right) \right|_{y=-\pi}^{y=\pi} = \pi \delta_{jk}, \qquad (9.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K &:= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)y} dy = \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left. \frac{e^{i(j-k)y}}{i(j-k)} \right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left. \left(y e^{i(j-k)y} \right) \right|_{y=-\pi}^{y=\pi} = \delta_{jk} y|_{y=-\pi}^{y=\pi} = 2\pi\delta_{jk}. \qquad (9.6)
\end{aligned}
$$

■

15. Turunkan identitas parseval untuk deret Fourier kosinus-sinus dan eksponensial kompleks.

    Jawaban. Lihat sesi 7.13. ■

16. Tentukan nilai dari deret-deret tak hingga berikut ini. (a) $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$, (b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots$, (c) $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots$.

    Jawaban. (a) Karena $1 + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots = e^x$, maka $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = e$. (b) Karena $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \cos x$, maka $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots = \cos 1$. (c) Karena $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sin x$, maka $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots = \sin 1$. ■

17. Buktikan rumus Euler berikut ini, yaitu $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$ dengan $i^2 = -1$.

    Jawaban. Apabila $z := \cos\theta + i\sin\theta$, maka $dz = iz\, d\theta$, sehingga $dz/z = i\, d\theta$. Pengintegralan persamaan terakhir menghasilkan $\ln z = i\theta$ alias $z = e^{i\theta}$. ■

18. Diketahui sebuah partikel bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ relativistik. Gerak partikel ini dapat mewakili gerak gelombang yang berkaitan dengan partikel tersebut. Tentukan (a) kecepatan fase gelombang, (b) kecepatan grup gelombang.

    Jawaban. (a) Kelajuan fase gelombang adalah $w := \omega/k$, di mana

$$
\omega = 2\pi\nu = 2\pi mc^2/h = 2\pi m_0 c^2/(h\sqrt{1 - v^2/c^2}), \qquad (9.7)
$$

serta

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi mv/h = 2\pi m_0 v/(h\sqrt{1-v^2/c^2}), \qquad (9.8)$$

dengan mengingat $E = mc^2 = h\nu$ dan $p = mv = h/\lambda$, sehingga $w = c^2/v$, lalu kecepatan fasenya adalah $\vec{w} := w\vec{v}/v = c^2\vec{v}/|\vec{v}|^2$. (b) Kelajuan grup gelombang adalah $u := d\omega/dk = (d\omega/dv)/(dk/dv)$, lalu $d\omega/dv = 2\pi m_0 v/(h(1-v^2/c^2)^{3/2})$ dan $dk/dv = 2\pi m_0/(h(1-v^2/c^2)^{3/2})$, sehingga $u = v$, lalu kecepatan grupnya adalah $\vec{u} := u\vec{v}/v = \vec{v}$. ■

19. (a) Mengapa kelajuan fase gelombang relativistik selalu lebih dari atau sama dengan kelajuan cahaya dalam ruang hampa? (b) Mengapa kelajuan grup gelombang relativistik selalu kurang dari atau sama dengan kelajuan cahaya dalam ruang hampa?

    Jawaban. (a) Karena selalu $v \le c$, maka $v/c \le 1$ alias $c/v \ge 1$, sehingga $w = c^2/v = (c/v)c \ge c$. (b) $u = v = (v/c)c \le c$. ■

20. Sebuah foton dengan panjang gelombang λ ditembakkan secara lurus ke sebuah elektron dengan massa rehat m_0, sedemikian rupa foton tersebut terpantul oleh elektron dengan arah yang membentuk sudut ϕ dari arah semula. (a) Tentukan panjang gelombang foton tersebut setelah menabrak eletron tersebut. (b) Tentukan panjang gelombang Compton dari elektron tersebut.

    Jawaban. Foton dan elektron berlaku seperti bola bilyard. Kehilangan energi foton sama dengan energi yang diterima elektron, sehingga $h\nu - h\nu' = K$ dengan mengingat $E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2} = pc$ karena $m_0 = 0$. Momentum foton adalah $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda = \hbar k$. (a) Momentum awal sama dengan momentum akhir. Dalam arah foton semula, diperoleh $h\nu/c + 0 = (h\nu'/c)\cos\phi + p\cos\theta$. Dalam arah tegak lurus foton semula, diperoleh $0 = (h\nu'/c)\sin\phi - p\sin\theta$. Oleh karena itu, $pc\cos\theta = h\nu - h\nu'$ dan $pc\sin\theta = h\nu'\sin\phi$, sehingga $p^2c^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu')\cos\phi + (h\nu')^2$. Energi relativistik partikel adalah $E = K + m_0c^2$ sehingga $(K + m_0c^2)^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$ alias $p^2c^2 = K^2 + 2m_0c^2K$. Karena $K = h\nu - h\nu'$, maka $p^2c^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu') + (h\nu')^2 + 2m_0c^2(h\nu - h\nu')$. Dengan menyamakan p^2c^2, diperoleh $2m_0c^2(h\nu - h\nu') = 2(h\nu)(h\nu')(1-\cos\phi)$ alias $(m_0c/h)(\nu/c - \nu'/c) = (\nu/c)(\nu'/c)(1-\cos\phi)$. Mengingat $\nu/c = 1/\lambda$ dan $\nu'/c = 1/\lambda'$, maka diperoleh $(m_0c/h)(1/\lambda - 1/\lambda') = (1-\cos\phi)/(\lambda\lambda')$ alias $\lambda' = \lambda + (h/(m_0c))(1-\cos\phi)$. (b) Panjang gelombang Compton-nya adalah $\lambda_C := h/(m_0c)$. ■

21. Berapakah massa dan momentum relativistik sebuah foton dengan panjang gelombang λ yang bergerak dengan kelajuan $c := 299792458\,\text{m/s}$?

    Jawaban. $mc^2 = h\nu$ alias $m = h\nu/c^2 = h/(\lambda c)$ adalah massa relativistiknya. Momentum relativistiknya adalah $p = mv = (h/(\lambda c))c = h/\lambda$. ■

9.2 Paket B

1. Selesaikan persamaan matriks berikut ini dengan aturan Cramer (metode determinan),

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \tag{9.9}$$

yaitu dengan mencari nilai x_1, x_2, x_3, dan x_4.

Jawaban.

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}^{-1}, \tag{9.10}$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}^{-1}, \tag{9.11}$$

dan seterusnya. ■

2. Tentukan nilai-nilai determinan berikut ini,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ d & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{9.12}$$

dengan a, b, c, d adalah bilangan-bilangan riil.

Jawaban.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0, \tag{9.13}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ d & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} c & 0 & d \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & c & d \\ d & 0 & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \\ &= a \left(c \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{vmatrix} \right) + b \left(-d \begin{vmatrix} c & d \\ b & a \end{vmatrix} \right) \\ &= a(ac^2 - bcd) - bd(ac - bd) \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd = (ac - bd)^2, \end{aligned} \tag{9.14}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = abcd, \tag{9.15}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -ab \begin{vmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{vmatrix} = abcd. \tag{9.16}$$

■

3. Tiga orang tukang cat, yaitu Joni, Deni, dan Ari, biasa bekerja secara bersama-sama. Mereka bertiga dapat mengecat bagian luar sebuah rumah dalam waktu 10 jam kerja. Pengalaman Deni dan Ari pernah bekerja bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam waktu 15 jam kerja. Suatu hari, ketiga tukang cat ini bekerja mengecat rumah serupa selama 4 jam kerja, tetapi belum selesai. Setelah itu, Ari pergi karena ada suatu keperluan mendadak. Joni dan Deni terpaksa melanjutkan pekerjaan itu dengan tambahan waktu 8 jam kerja sampai menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan masing-masing tukang cat tersebut, jika mereka masing-masing bekerja sendirian. (Petunjuk: Gunakan metode determinan alias aturan Cramer.)

   Jawaban. Andaikan waktu yang dibutuhkan Joni, Deni, dan Ari, berturut-turut adalah J, D, dan A, maka $1/J+1/D+1/A = 1/10$ dan $1/D+1/A = 1/15$. Bagian yang sudah selesai dikerjakan adalah $4(1/J+1/D+1/A) = 4/10 = 2/5$. Bagian yang belum selesai dan akan dikerjakan adalah $N = 1-2/5 = 3/5$, sehingga $1/J+1/D = N/8 = 3/40$. Penyajian matriksnya adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/J \\ 1/D \\ 1/A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/15 \\ 3/40 \end{pmatrix}. \tag{9.17}$$

   Dengan aturan Cramer diperoleh $J = 30$, $D = 24$, dan $A = 40$. ■

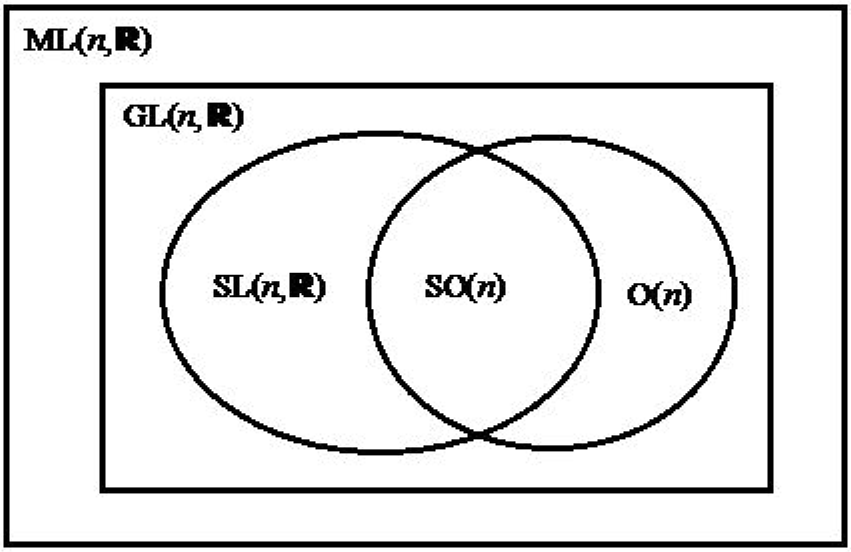
4. Apabila A dan B merupakan matriks bujur sangkar yang dimensinya sama, dan 0 adalah matriks nol bujur sangkar yang dimensinya sama dengan A dan B, maka penyelesaian dari persamaan matriks $AB = 0$ yang adalah $A = 0$ atau $B = 0$ itu bukanlah satu-satunya penyelesaian. Bagaimanakah seharusnya penyelesaian umumnya?

5. Tentukan semua anggota dari grup SO(3) dan grup SU(2).

   Jawaban. Lihat sesi 7.21 dan 7.22. ■

6. Buktikan bahwa perkalian matriks bersifat asosiatif, yaitu $A(BC) = (AB)C$.

   Jawaban. $(A(BC))_{jk} = A_{jl}(BC)_{lk} = A_{jl}B_{lm}C_{mk} = (AB)_{jm}C_{mk} = ((AB)C)_{jk}$. ■



Gambar 9.1: Diagram Venn Grup Matriks Riil

7. Apabila determinan suatu matriks bujur sangkar A sama dengan nol, yaitu $\det A = 0$, maka apakah adjugat-nya secara otomatis juga merupakan matriks nol bujur sangkar, yaitu $\mathrm{adj}\, A = 0$? Berikan alasannya.

8. Apabila A merupakan matriks bujur sangkar, maka buktikan bahwa $A\,\mathrm{adj}\, A = 1 \det A$. (Petunjuk: Carilah invers dari A, yaitu A^{-1}.)

   Jawaban. $A^{-1}1 = (\mathrm{adj}\, A)/(\det A)$ alias $1 \det A = A\,\mathrm{adj}\, A$. ∎

9. Gambarlah dalam diagram Venn untuk himpunan-himpunan matriks, yaitu grup-grup $ML(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$, dan $SO(n)$.

   Jawaban. Diagram Venn tersebut tampak pada Gambar 9.1. ∎

10. Carilah syarat agar n buah vektor berikut ini, yaitu $\vec{a}_j := \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\hat{x}_k$ untuk semua $j \in \{1,2,3,\cdots,n\}$, bebas linier.

    Jawaban.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9.18}$$
∎

11. Carilah swa-nilai dan swa-vektor dari matriks $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

    Jawaban. Swa-nilai dari matriks tersebut adalah μ sedemikian
$$\begin{vmatrix} 5-\mu & -2 \\ -2 & 2-\mu \end{vmatrix} = 0 \quad \text{alias} \quad \mu^2 - 7\mu + 6 = 0$$
$$\text{alias} \quad \mu = (7 \pm 5)/2 = \mu_\pm, \tag{9.19}$$

sehingga $\mu_+ = 6$ dan $\mu_- = 1$.

Swa-vektor dari $\mu_\pm$ adalah

$$V_\pm := \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} \tag{9.20}$$

sedemikian $(5-\mu_\pm)x_\pm - 2y_\pm = 0$ alias $\frac{1}{4}(3 \mp 5)x_\pm = y_\pm$, disertai syarat $x_\pm^2 + y_\pm^2 = 1$ alias $(1+(1/8)(17 \mp 15))x_\pm^2 = 1$ alias $x_\pm^2 = 8/(25 \mp 15)$ alias $x_\pm = 2\sqrt{2}/\sqrt{25 \mp 15}$. ∎

12. Apabila A dan B adalah matriks bujur sangkar yang dimensinya sama, maka buktikan bahwa $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$, di mana Tr adalah operator lacak (*trace*).

    Jawaban. $\mathrm{Tr}(BA) = (BA)_{jj} = B_{jk}A_{kj} = A_{kj}B_{jk} = (AB)_{kk} = \mathrm{Tr}(AB)$. ∎

13. Untuk setiap $A \in ML(2, \mathbb{R})$, buktikan bahwa swa-nilai dari A adalah

$$\mu_A = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\, A \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4\det A}\right). \tag{9.21}$$

    (Petunjuk: Gunakan definisi swa-nilai matriks).

    Jawaban.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11}-\mu_A & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\mu_A \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a_1 1-\mu_A)(a_{22}-\mu_A) - a_{12}a_{21} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mu_A^2 - (a_{11}+a_{22})\mu_A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mu_A = \frac{1}{2}\left((a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \mu_A = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\, A \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4\det A}\right). \qquad (9.22)
\end{aligned}$$

∎

14. Mengapa matriks yang memiliki invers harus matriks bujur sangkar?

    Jawaban. Karena rumus invers matriks adalah $A^{-1} = (\mathrm{adj}\, A)/(\det A)$. Operator adjugat adj dan determinan det hanya bekerja pada matriks bujur sangkar. ∎

15. Untuk setiap $A, B \in ML(n, \mathbb{R})$, buktikan bahwa $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

    Jawaban.

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \epsilon_{j_1\cdots j_n}(AB)_{j_1 1}\cdots(AB)_{j_n n} \\
&= \epsilon_{j_1\cdots j_n}A_{j_1k_1}B_{k_1 1}\cdots A_{j_nk_n}B_{k_n n} \\
&= \epsilon_{j_1\cdots j_n}A_{j_1k_1}\cdots A_{j_nk_n}B_{k_1 1}\cdots B_{k_n n} \\
&= (\det A)\epsilon_{k_1\cdots k_n}B_{k_1 1}\cdots B_{k_n n} = (\det A)(\det B). \qquad (9.23)
\end{aligned}$$

∎

16. Tentukan semua kemungkinan determinan dari matriks anggota grup $O(n)$ dan $U(n)$. (Petunjuk: Gunakan sifat determinan serta definisi $O(n)$ dan $U(n)$.)

    Jawaban. Misalkan $A \in O(n)$ maka $A^{\mathrm{T}}A = 1$ sehingga $\det(A^{\mathrm{T}}A) = \det 1$ alias $(\det A^{\mathrm{T}})(\det A) = 1$ alias $(\det A)^2 = 1$ alias $\det A = \pm 1$. Misalkan $B \in U(n)$ maka $B^\dagger B = 1$ sehingga $\det(B^\dagger B) = \det 1$ alias $(\det B^\dagger)(\det B) = 1$ alias $|\det B|^2 = 1$ alias $\det B = e^{i\alpha}$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

17. Buktikan identitas $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$.

    Jawaban. $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \epsilon_{jkl} A_k B_l \epsilon_{jmn} C_m D_n = (\delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}) A_k B_l C_m D_n = A_k B_l C_k D_l - A_k B_l C_l D_k = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$. ■

18. Tentukan bayangan dari titik $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ akibat transformasi pencerminan oleh bidang datar $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$ di mana $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. (Petunjuk: Gunakan aljabar dan analisis vektor.)

    Jawaban. Apabila $\vec{r} := (x, y, z)$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' := \vec{r} + (k - 1)(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \hat{N}\hat{N}$ di mana $k = -1$, $\vec{r}_0 := (0, 0, d/c)$, $\hat{N} := \vec{N}/N$, $\vec{N} := (a, b, c)$, dan $N := |\vec{N}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, sehingga $k - 1 = -2$ dan $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x, y, z - d/c)$. Jadi,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\frac{ax + by + cz - d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{9.24}$$

■

19. Buktikan $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$.

    Jawaban.

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \delta_{jk}\delta_{lm} \hat{x}_j \partial_k (A_l B_m) \\ &= (\epsilon_{njl}\epsilon_{nkm} + \delta_{jm}\delta_{kl}) \hat{x}_j (B_m \partial_k A_l + A_l \partial_k B_m) \\ &= \epsilon_{njl}\epsilon_{nkm} \hat{x}_j B_m \partial_k A_l + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}. \end{aligned} \tag{9.25}$$

    Karena $\epsilon_{njl}\epsilon_{nkm} - \epsilon_{njm}\epsilon_{nkl} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$, maka $\epsilon_{njl}\epsilon_{nkm} \hat{x}_j B_m \partial_k A_l = (\epsilon_{njm}\epsilon_{nkl} + \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) \hat{x}_j B_m \partial_k A_l = \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$, sehingga

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}. \tag{9.26}$$

■

20. Buktikan $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$.

    Jawaban. $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \epsilon_{jkl} \hat{x}_j \partial_k (\epsilon_{lmn} A_m B_n) = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) \hat{x}_j \partial_k (A_m B_n) = \hat{x}_j \partial_k (A_j B_k) - \hat{x}_j \partial_k (A_k B_j) = \hat{x}_j B_k \partial_k A_j + \hat{x}_j A_j \partial_k B_k - \hat{x}_j B_j \partial_k A_k - \hat{x}_j A_k \partial_k B_j = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$. ■

21. Buktikan $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$.

Jawaban. $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \epsilon_{jkl} \hat{x}_j \partial_k (\epsilon_{lmn} \partial_m A_n) = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) \hat{x}_j \partial_k \partial_m A_n = \hat{x}_j \partial_k \partial_j A_k - \hat{x}_j \partial_k \partial_k A_j = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$. ■

22. Apabila $\vec{r}$ adalah vektor posisi dan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi riil, maka buktikan bahwa $\nabla f(|\vec{r}|) = (\vec{r}/|\vec{r}|) df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}|$.

Jawaban. $\nabla f(|\vec{r}|) = \hat{x}_j \partial_j f(|\vec{r}|) = \hat{x}_j \partial_j |\vec{r}| df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}| = \hat{x}_j \partial_j (x_k x_k)^{1/2} df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}| = \hat{x}_j (1/2)(1/|\vec{r}|) 2 x_j df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}| = (\vec{r}/|\vec{r}|) df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}|$. ■

9.3 Paket C

1. Seperti kita ketahui bahwa suhu sebuah benda atau materi itu merupakan tampilan makroskopis dari perilaku gerak partikel-partikel mikroskopis penyusun benda tersebut. Semakin besar energi kinetik partikel-partikel penyusun benda, semakin tinggi pula suhu benda tersebut, sehingga suhu mutlak (dalam kelvin) sebuah benda sebanding dengan energi kinetik partikel-partikel penyusun benda tersebut. Kita juga mengetahui bahwa kalor dari matahari dapat merambat ke bumi dengan cara radiasi (pancaran), bahkan tanpa melalui zat perantara. Padahal, ruang antara bumi dan matahari adalah ruang hampa udara, di mana tidak ada partikel perantara. Pertanyaannya adalah sebagai berikut. Apabila kalor dari matahari merambat melalui ruang hampa, maka apakah di ruang hampa tersebut terjadi perbedaan suhu? Apakah suhu di ruang hampa itu selalu nol mutlak kelvin, mengingat energi kinetik di sana nol oleh sebab tidak ada partikel?

2. Carilah transformasi Fourier dari delta Dirac δ.

Jawaban.

$$(F(\delta))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \left(\frac{1_f}{\sqrt{2\pi}} \right)(\omega) \tag{9.27}$$

sehingga $F(\delta) = 1_f / \sqrt{2\pi}$. ■

3. Apabila $F : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, buktikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(F(f))(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \tag{9.28}$$

yang merupakan identitas Parseval untuk transformasi Fourier.

Jawaban.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|(F(f))(t)|^2dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(\omega))^* f(\omega')e^{i(\omega'-\omega)}d\omega\, d\omega' dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(\omega))^* f(\omega')\delta(\omega'-\omega)d\omega' d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt. \end{aligned} \tag{9.29}$$

■

4. Apabila $F : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, buktikan bahwa

$$(F^{-1}(f))(\omega) = (F(f))(-\omega). \tag{9.30}$$

Jawaban.

$$(F^{-1}(f))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = (F(f))(-\omega). \tag{9.31}$$

■

5. Apabila $F : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, dan $1_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi sedemikian $1_f(t) = 1$, buktikan bahwa $F(1_f) = \pm\sqrt{2\pi}\delta$, di mana δ adalah delta Dirac.

Jawaban.

$$\begin{aligned}(F(1_f))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dt \\ &= \sqrt{2\pi}\delta(\omega) = (\sqrt{2\pi}\delta)(\omega) \end{aligned} \tag{9.32}$$

sehingga $F(1_f) = \sqrt{2\pi}\delta$. ■

6. Buktikan bahwa operasi konvolusi $*$ fungsi atau sinyal, yaitu $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{C})$, bersifat komutatif [yaitu $g * f = f * g$], asosiatif [yaitu $f * (g * h) = (f * g) * h$], dan linier [yaitu $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ dan $f * (\alpha g) = \alpha(f * g)$], di mana $\alpha \in \mathbb{C}$.

Jawaban.

$$\begin{aligned}(g * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = -\int_{\infty}^{-\infty} g(u)f(t-u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)\,du = (f * g)(t) \end{aligned} \tag{9.33}$$

sehingga $g * f = f * g$.

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)(g*h)(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau-u)h(u)du\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau-u)d\tau\,h(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u-v)g(v)dv\,h(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t-u)h(u)du = ((f*g)*h)(t) \quad (9.34)\end{aligned}$$

sehingga $f*(g*h) = (f*g)*h$.

$$\begin{aligned}(f*(g+h))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)(g+h)(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= (f*g)(t)+(f*h)(t) = (f*g+f*h)(t) \quad (9.35)\end{aligned}$$

sehingga $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$.

$$\begin{aligned}(f*(\alpha g))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)(\alpha g)(\tau)d\tau = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \alpha(f*g)(t) = (\alpha(f*g))(t) \quad (9.36)\end{aligned}$$

sehingga $f*(\alpha g) = \alpha(f*g)$. ■

7. Apabila $F : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, dan $*$ adalah operasi konvolusi fungsi atau sinyal, maka buktikan bahwa

$$F(f*g) = \pm\sqrt{2\pi}F(f)F(g). \quad (9.37)$$

Jawaban.

$$\begin{aligned}(F(f)F(g))(\omega) &= (F(f))(\omega)(F(g))(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{i\omega(s+t)}ds\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds\right)e^{i\omega t}dt \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)(t)\right)e^{i\omega t}dt \\ &= \left(F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)\right)\right)(\omega) \\ \Longleftrightarrow\ F(f)F(g) &= F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)\right) \quad (9.38)\end{aligned}$$

sehingga $F(f * g) = \pm\sqrt{2\pi}F(f)F(g)$. ■

8. Selesaikan persamaan gerak getaran selaras teredam

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \tag{9.39}$$

di mana $m > 0$ adalah massa benda, $c > 0$ adalah tetapan kesebandingan redaman, dan $k > 0$ adalah tetapan pegas, dengan cara mencari simpangan horizontal pegas, yaitu x, yang bergantung pada waktu t, di mana $\dot{x} := dx/dt$ dan $\ddot{x} := d\dot{x}/dt$, untuk kasus (a) teredam lanjut atau kuat ($c^2 - 4mk > 0$), (b) teredam kritis ($c^2 - 4mk = 0$), dan (c) teredam lampau atau lemah ($c^2 - 4mk < 0$).

Jawaban. (a) $x = A_+e^{\alpha_+ t} + A_-e^{\alpha_- t}$ di mana $\alpha_\pm := (-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk})$. (b) $x = (Ax+B)e^{-\gamma t}$ di mana $\gamma := c/(2m)$. (c) $x = e^{-\gamma t}(A_+e^{i\omega t}+A_-e^{-i\omega t})$ di mana $\gamma := c/(2m)$, $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, dan $\omega_0 := \sqrt{k/m}$ Lalu, $x = e^{-\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ di mana $A := A_+ + A_-$ dan $B := i(A_+ - A_-)$, sehingga $x = \mathcal{A}e^{-\gamma t}\cos(\omega t - \varphi)$ di mana $\mathcal{A} := \sqrt{A^2 + B^2}$ dan $\varphi := \arctan_2(A, B)$. ■

9. Persamaan gerak getaran selaras terpaksa adalah

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{\text{ext}}, \tag{9.40}$$

di mana biasa dipilih gaya pemaksa $F_{\text{ext}} := F_0e^{i\omega t}$ agar lebih nyaman, sedemikian $i^2 = -1$. Kemudian, dicari solusinya, yaitu $x = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$, di mana A adalah amplitudo getaran, ω adalah frekuensi sudut getaran gaya pemaksa F_{ext} tersebut, t adalah waktu, dan φ adalah sudut fase awal getaran. Carilah hubungan antara A dan ω, serta φ dan ω agar persamaan gerak tersebut terpenuhi.

Jawaban. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0e^{i\omega t}$ yang penyelesaiannya adalah $x = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$, sehingga $m\frac{d^2}{dt^2}(Ae^{i(\omega t - \varphi)}) + c\frac{d}{dt}(Ae^{i(\omega t - \varphi)}) + kAe^{i(\omega t - \varphi)} = F_0e^{i\omega t}$ alias $-m\omega^2A + i\omega cA + kA = F_0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Bagian riil dari persamaan terakhir adalah $A(k - m\omega^2) = F_0\cos\varphi$, sedangkan bagian imajinernya adalah $c\omega A = F_0\sin\varphi$, sehingga $\varphi = \arctan_2(k - m\omega^2, c\omega)$ serta $A^2(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2A^2 = F_0^2$ alias $A = F_0/\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$. ■

10. Sebutkan 6 buah analogi besaran mekanik dan besaran elektronik.

Jawaban.

Mekanis	Elektronis
x (perpindahan)	q (muatan listrik)
$\dot{x}$ (kecepatan)	$\dot{q}$ (arus listrik)
m (massa)	L (induktansi)
k (tetapan pegas)	$1/C$ (invers kapasitansi)
c (hambatan redaman)	R (hambatan listrik)
F (gaya)	V (beda potensial)

■

11. Buktikan bahwa besar impedansi rangkaian arus dan tegangan listrik bolak-balik yang terdiri dari resistor R, induktor L, dan kapasitor C yang dirangkai (a) seri adalah
$$Z_S = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}, \tag{9.41}$$
serta (b) paralel adalah Z_P sedemikian
$$1/Z_P = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - 1/(\omega L))^2}, \tag{9.42}$$
di mana ω adalah frekuensi sudut getaran elektronis tersebut.

Jawaban. (a) Karena $\tilde{Z}_S := R + i(\omega L - 1/(\omega C))$, maka $Z_S := |\tilde{Z}_S| = (R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2)^{1/2}$. (b) Karena $1/\tilde{Z}_P := 1/R + i(\omega C - 1/(\omega L))$, maka $1/Z_P = |1/\tilde{Z}_P| = (1/R^2 + (\omega C - 1/(\omega L))^2)^{1/2}$. ■

12. Hitunglah limit non-relativistik berikut ini.
$$\lim_{c\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)mc^2\right) \quad \text{dan} \quad \lim_{c\to\infty}\left(c\sqrt{p^2+(mc)^2} - mc^2\right), \tag{9.43}$$
di mana m, v, dan p berturut-turut adalah massa, kelajuan, dan momentum partikel.

Jawaban.
$$\begin{aligned} T &= \lim_{c\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)mc^2\right) = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1-(v/c)^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}mc^2\right) \\ &= \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1-(1-(v/c)^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{mc^2}{1+\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned} \tag{9.44}$$
$$\begin{aligned} T &= \lim_{c\to\infty}\left(c\sqrt{p^2+(mc)^2} - mc^2\right) = \lim_{c\to\infty}\frac{c^2(p^2+(mc)^2) - m^2c^4}{c\sqrt{p^2+(mc)^2}+mc^2} \\ &= \lim_{c\to\infty}\frac{p^2}{\sqrt{(p/c)^2+m^2}+m} = \frac{p^2}{2m}. \end{aligned} \tag{9.45}$$
■

9.4 Paket D

1. Buktikan bahwa luas permukaan bola berjari-jari R adalah $A = 4\pi R^2$.

Jawaban.
$$A = \int_{\vec{r}\in S^2(R)} |d^2\vec{r}| = R^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\phi\, d\theta = 4\pi R^2. \tag{9.46}$$
■

2. Andaikan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi riil, dan $f(x, y, z) = 0$. Buktikan bahwa

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 1 \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -1. \tag{9.47}$$

Jawaban. Diketahui $Q := f(x, y, z) = 0$ di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x,z} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}, \tag{9.48}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}, \tag{9.49}$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_z = \left(-\frac{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}\right) \left(-\frac{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}\right) = 1. \tag{9.50}$$

Di samping itu,

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}{(\partial Q/\partial z)_{x,y}}, \tag{9.51}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_x = \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x,z} \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{(\partial Q/\partial z)_{x,y}}{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}, \tag{9.52}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}, \tag{9.53}$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_z = \left(-\frac{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}{(\partial Q/\partial z)_{x,y}}\right) \left(-\frac{(\partial Q/\partial z)_{x,y}}{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}\right) \left(-\frac{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}\right) = -1. \tag{9.54}$$

■

3. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, dan δ adalah delta Dirac. Buktikan bahwa

$$\nabla^2(1/|\vec{r}|) = -4\pi\delta(\vec{r}). \tag{9.55}$$

Jawaban. Lihat sesi 7.12. ■

4. Tuliskan teorema Stokes bentuk umum dalam bahasa geometri diferensial, kemudian sebutkan bentuk-bentuk khusus dari teorema Stokes tersebut.

Jawaban. Teorema Stokes dalam bentuk umum adalah

$$\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega. \tag{9.56}$$

Bentuk-bentuk khusus teorema Stokes adalah persamaan (9.57), (9.60), (9.63), (9.66), (9.69), dan (9.71). ■

5. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_2 adalah manifold berdimensi 2, dan $\vec{A}$ adalah medan vektor. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{R_2} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d^2\vec{r}. \tag{9.57}$$

Jawaban. $\vec{A} \cdot d\vec{r} = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ sehingga $d(\vec{A} \cdot d\vec{r}) = dA_x \wedge dx + dA_y \wedge dy + dA_z \wedge dz$. Karena $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, $dy \wedge dz = -dz \wedge dy$, $dz \wedge dx = -dx \wedge dz$, dan $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$, maka

$$d(\vec{A} \cdot d\vec{r}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \tag{9.58}$$

Karena $d^2\vec{r} := \hat{x} dy \wedge dz + \hat{y} dz \wedge dx + \hat{z} dx \wedge dy$, maka menurut teorema Stokes, yaitu persamaan (9.56), diperoleh

$$\oint_{\partial R_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{R_2} d(\vec{A} \cdot d\vec{r}) = \int_{R_2} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d^2\vec{r}. \tag{9.59}$$

■

6. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_2 adalah manifold berdimensi 2, dan φ adalah medan skalar. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_2} \varphi \, d\vec{r} = -\int_{R_2} \nabla\varphi \times d^2\vec{r}. \tag{9.60}$$

Jawaban. Apabila $\vec{A} := \varphi\vec{C}$ dengan $\vec{C}$ adalah vektor konstan, maka dari persamaan (9.57), diperoleh

$$\vec{C} \cdot \oint_{\partial R_2} \varphi \, d\vec{r} = \int_{R_2} (\nabla \times (\varphi\vec{C})) \cdot d^2\vec{r} = \int_{R_2} (\nabla\varphi \times \vec{C}) \cdot d^2\vec{r} = \int_{R_2} (d^2\vec{r} \times \nabla\varphi) \cdot \vec{C} \tag{9.61}$$

sehingga

$$\oint_{\partial R_2} \varphi \, d\vec{r} = \int_{R_2} d^2\vec{r} \times \nabla\varphi = -\int_{R_2} \nabla\varphi \times d^2\vec{r}. \tag{9.62}$$

■

7. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_2 adalah manifold berdimensi 2, dan $\vec{B}$ adalah medan vektor. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_2} \vec{B} \times d\vec{r} = \int_{R_2} [(\nabla \cdot \vec{B}) d^2\vec{r} - (\nabla \otimes \vec{B}) \cdot d^2\vec{r}]. \tag{9.63}$$

Jawaban. Apabila $\vec{A} := \vec{C} \times \vec{B}$ di mana $\vec{C}$ adalah vektor konstan, maka dari persamaan (9.57), diperoleh

$$\oint_{\partial R_2} (\vec{C} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \int_{R_2} (\nabla \times (\vec{C} \times \vec{B})) \cdot d^2\vec{r} = \int_{R_2} ((\nabla \cdot \vec{B})\vec{C} - (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{B}) \cdot d^2\vec{r} \quad (9.64)$$

alias

$$\vec{C} \cdot \oint_{\partial R_2} \vec{B} \times d\vec{r} = \vec{C} \cdot \left(\int_{R_2} (\nabla \cdot \vec{B}) d^2\vec{r} - (\nabla \otimes \vec{B}) \cdot d^2\vec{r} \right). \quad (9.65)$$

■

8. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_3 adalah manifold berdimensi 3, dan $\vec{A}$ adalah medan vektor. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_3} \vec{A} \cdot d^2\vec{r} = \int_{R_3} (\nabla \cdot \vec{A}) d^3\vec{r}. \quad (9.66)$$

Jawaban. $\vec{A} \cdot d^2\vec{r} = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy$ sehingga $d(\vec{A} \cdot d^2\vec{r}) = dA_x \wedge dy \wedge dz + dA_y \wedge dz \wedge dx + dA_z \wedge dx \wedge dy$. Oleh karena itu,

$$d(\vec{A} \cdot d^2\vec{r}) = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot \vec{A}) d^3\vec{r} \quad (9.67)$$

sehingga

$$\oint_{\partial R_3} \vec{A} \cdot d^2\vec{r} = \int_{R_3} d(\vec{A} \cdot d^2\vec{r}) = \int_{R_3} (\nabla \cdot \vec{A}) d^3\vec{r}. \quad (9.68)$$

■

9. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_3 adalah manifold berdimensi 3, dan φ adalah medan skalar. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_3} \varphi\, d^2\vec{r} = \int_{R_3} \nabla\varphi\, d^3\vec{r}. \quad (9.69)$$

Jawaban. Apabila $\vec{A} := \varphi\vec{C}$ dengan $\vec{C}$ adalah vektor konstan, maka menurut persamaan (9.66), diperoleh

$$\vec{C} \cdot \oint_{\partial R_3} \varphi\, d^2\vec{r} = \int_{R_2} \nabla \cdot (\varphi\vec{C}) d^3\vec{r} = \vec{C} \cdot \int_{R_3} \nabla\varphi\, d^3\vec{r}. \quad (9.70)$$

■

10. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_3 adalah manifold berdimensi 3, dan $\vec{B}$ adalah medan vektor. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_3} \vec{B} \times d^2\vec{r} = -\int_{R_3} \nabla \times \vec{B}\, d^3\vec{r}. \quad (9.71)$$

Jawaban. Apabila $\vec{A} := \vec{C}\times\vec{B}$ dengan $\vec{C}$ adalah vektor konstan, maka menurut persamaan (9.66), diperoleh

$$\oint_{\partial R_3} (\vec{C}\times\vec{B})\cdot d^2\vec{r} = \vec{C}\cdot\oint_{\partial R_3} \vec{B}\times d^2\vec{r} = \int_{R_2} \nabla\cdot(\vec{C}\times\vec{B})d^3\vec{r} = \int_{R_3} (-\vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{B}))d^3\vec{r}. \tag{9.72}$$

■

11. Andaikan P dan Q adalah medan skalar yang keduanya bergantung pada x dan y, serta R_2 adalah manifold berdimensi 2. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_2} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy. \tag{9.73}$$

Jawaban. $d(P\,dx+Q\,dy) = dP\wedge dx + dQ\wedge dy = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)dx\wedge dy$. ■

12. Andaikan Γ adalah simbol Christoffel, $\vec{e}_\mu$ adalah vektor basis kontravarian, $\vec{e}^\rho$ adalah vektor basis kovarian, dan q^ν adalah koordinat umum. Buktikan bahwa

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \vec{e}^\rho\cdot\frac{\partial\vec{e}_\mu}{\partial q^\nu}. \tag{9.74}$$

Jawaban. $\partial\vec{e}_\mu/\partial q^\nu = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\vec{e}_\lambda$ sehingga $\vec{e}^\rho\cdot\partial\vec{e}_\mu/\partial q^\nu = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\delta^\rho{}_\lambda = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$. ■

13. Andaikan Γ adalah simbol Christoffel, $\vec{e}_\mu$ adalah vektor basis kontravarian, $\vec{e}^\rho$ adalah vektor basis kovarian, dan q^ν adalah koordinat umum. Buktikan bahwa

$$\frac{\partial\vec{e}^\rho}{\partial q^\nu} = -\sum_{\lambda=1}^{n}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\vec{e}^\lambda. \tag{9.75}$$

Jawaban. $\vec{e}^\mu\cdot\vec{e}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ sehingga $(\partial\vec{e}^\mu/\partial q^\lambda)\cdot\vec{e}_\nu + \vec{e}^\mu\cdot\partial\vec{e}_\nu/\partial q^\lambda$ alias $(\partial\vec{e}^\mu/\partial q^\lambda)\cdot\vec{e}_\nu = -\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}\delta^\mu{}_\alpha = -\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$. Oleh karena itu, $\partial\vec{e}^\mu/\partial q^\lambda = ((\partial\vec{e}^\mu/\partial q^\lambda)\cdot\vec{e}_\nu)\vec{e}^\nu = -\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\vec{e}^\nu$. ■

14. Andaikan Γ adalah simbol Christoffel, q^μ adalah koordinat umum, serta $g^{\mu\nu}$ dan $g_{\mu\nu}$ berturut-turut adalah komponen kovarian dan kontravarian dari tensor metrik $\overleftrightarrow{g}$. Buktikan bahwa

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{n} g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\rho}\right). \tag{9.76}$$

Jawaban.

$$g^{\lambda\rho}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial q^\mu} = \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}g^{\lambda\rho}g_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \tag{9.77}$$

$$g^{\lambda\rho}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial q^\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu}g^{\lambda\rho}g_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \tag{9.78}$$

$$g^{\lambda\rho}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^{\rho}} = \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho} g^{\lambda\rho} g_{\nu\sigma} + \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} g^{\lambda\rho} g_{\mu\sigma}. \tag{9.79}$$

■

15. Andaikan $\vec{A} := \sum_{\mu=1}^{n} A^{\mu}\vec{e}_{\mu}$ adalah medan vektor, $\vec{e}_{\mu}$ adalah vektor basis kontravarian, dan $DA^{\mu}/\partial q^{\nu}$ adalah turunan kovarian. Buktikan bahwa

$$\nabla \cdot \vec{A} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{DA^{\mu}}{\partial q^{\mu}}. \tag{9.80}$$

Jawaban.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= \vec{e}^{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial q^{\mu}}(A^{\nu}\vec{e}_{\nu}) = \vec{e}^{\mu} \cdot \left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial q^{\mu}} + A^{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\vec{e}_{\lambda}\right) \\ &= \frac{\partial A^{\nu}}{\partial q^{\mu}}\delta^{\mu}{}_{\nu} + A^{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial q^{\mu}} + A^{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu} = \frac{DA^{\mu}}{\partial q^{\mu}}. \end{aligned} \tag{9.81}$$

■

9.5 Paket E

1. Pembahasan tentang perilaku cahaya dengan menggunakan alat optik yang ukuran-ukuran optisnya relatif lebih besar daripada panjang gelombang cahaya disebut ... . [A] optika geometris [B] optika fisis [C] optika kuantum [D] opto-elektronika [E] optika klasik

   Jawaban. A. ■

2. Permukaan yang mampu memantulkan lebih dari 95% cahaya yang datang padanya disebut ... . [A] permukaan batas dua medium [B] permukaan Gauss [C] cermin [D] bidang yang memuat sinar datang, garis normal, dan sinar pantul [E] bidang yang tegak lurus garis normal

   Jawaban. C. ■

3. Sifat bayangan yang dibentuk oleh cermin datar adalah ... . [A] nyata, tegak, diperbesar [B] nyata, tegak, diperkecil [C] nyata, terbalik, diperbesar [D] maya, tegak, sama besar [E] maya, terbalik, sama besar

   Jawaban. C. ■

4. Bayangan yang terbentuk dari perpotongan langsung sinar-sinar cahaya disebut ... . [A] bayangan nyata [B] bayangan maya [C] bayangan tegak [D] bayangan terbalik [E] bayangan diperbesar

   Jawaban. A. ■

5. Bayangan yang dihasilkan dari perpotongan perpanjangan sinar-sinar cahaya disebut ... . [A] bayangan nyata [B] bayangan maya [C] bayangan tegak [D] bayangan terbalik [E] bayangan diperbesar

   Jawaban. B. ■

6. Berdasarkan hasil eksperimen, dapat disimpulkan bahwa jumlah bayangan yang dibentuk oleh dua buah cermin yang membentuk sudut α adalah ... . [A] $45°/\alpha - 1$ [B] $90°/\alpha - 1$ [C] $180°/\alpha - 1$ [D] $270°/\alpha - 1$ [E] $360°/\alpha - 1$

   Jawaban. E. ■

7. Pada cermin cembung atau cekung, apabila h dan h' berturut-turut adalah ketinggian benda dan bayangan yang mendekati nol, serta s dan s' berturut-turut adalah jarak benda dan bayangan ke cermin, maka hubungan yang benar adalah ... . [A] $h'/h = s'/s$ [B] $h'/h = -s'/s$ [C] $hh' = ss'$ [D] $hh' = -ss'$ [E] $s + h = s' + h'$

   Jawaban. B. ■

8. Sudut datang ketika sinar datang dibiaskan sebesar 90° disebut ... . [A] sudut pantul [B] sudut bias [C] sudut kritis [D] sudut belok [E] sudut siku-siku

   Jawaban. C. ■

9. Suatu pipa kecil panjang yang terbuat dari kaca plastik yang digunakan untuk menyalurkan cahaya maupun gelombang elektromagnetik disebut ... . [A] kabel [B] kawat [C] lensa tipis [D] serat optik [E] lensa tebal

   Jawaban. D. ■

10. Apabila sinar cahaya membias dari medium berindeks bias n_1 ke medium berindeks bias n_2 dengan $n_1 > n_2$, maka besarnya sudut kritis adalah i_k sedemikian rupa ... . [A] $\sin i_k = n_1/n_2$ [B] $\sin i_k = n_2/n_1$ [C] $\cos i_k = n_1/n_2$ [D] $\cos i_k = n_2/n_1$ [E] $\tan i_k = n_1/n_2$

    Jawaban. B. ■

11. Sekeping kaca yang kedua sisi pandangnya dibuat sejajar disebut ... . [A] prisma [B] lensa [C] cermin [D] kaca plan-paralel [E] permukaan lengkung

    Jawaban. D. ■

12. Benda yang terbuat dari gelas tembus cahaya (transparan) yang kedua sisinya dibatasi bidang permukaan yang membentuk sudut tertentu satu sama lain disebut ... . [A] prisma [B] lensa [C] cermin [D] kaca plan-paralel [E] permukaan lengkung

Jawaban. A. ■

13. Benda bening (tembus cahaya) yang terdiri atas dua permukaan lengkung disebut ... . [A] prisma [B] lensa [C] cermin [D] kaca plan-paralel [E] permukaan lengkung

    Jawaban. B. ■

14. Lensa konveks (lensa konvergen) yang bersifat mengumpulkan berkas sinar adalah ... . [A] lensa datar [B] lensa cembung [C] lensa cekung [D] bola bening [E] permukaan bening

    Jawaban. B. ■

15. Lensa konkaf (lensa divergen) yang bersifat menyebarkan berkas sinar adalah ... . [A] lensa datar [B] lensa cembung [C] lensa cekung [D] bola bening [E] permukaan bening

    Jawaban. C. ■

16. Apabila s dan s' berturut-turut adalah jarak benda dan bayangan titik ke lensa, maka perbesaran bayangannya bernilai ... . [A] $M = s'/s$ [B] $M = s/s'$ [C] $M = -s'/s$ [D] $M = -s/s'$ [D] $M = (s'/s)^2$

    Jawaban. C. ■

17. Apabila sebuah lensa memiliki jarak fokus f dan kekuatan lensa P, maka hubungan yang benar adalah ... . [A] $P = 1/f$ [B] $P = 2/f$ [C] $P = 3/f$ [D] $P = 4/f$ [E] $P = 5/f$

    Jawaban. A. ■

18. Cacat mata yang diakibatkan oleh bentuk kornea yang tidak sferis disebut ... . [A] miopi (rabun jauh) [B] hipermetropi (rabun dekat) [C] presbiopi (mata tua) [D] astigmatisma [E] hipometropi

    Jawaban. D. ■

19. Sekarang ini, dikenal dua macam teleskop secara garis besar, yaitu ... . [A] teleskop bias dan teleskop pantul [B] teleskop datang dan teleskop pantul [C] teleskop datang dan teleskop bias [D] teleskop kritis dan teleskop reras [E] teleskop kritis dan teleskop pantul

    Jawaban. A. ■

20. Alat untuk merekam suatu objek berupa tempat atau peristiwa disebut ... . [A] teleskop [B] kaca mata [C] kamera [D] proyektor [E] lup

    Jawaban. C. ■

21. Gelombang yang tidak memerlukan medium untuk merambat disebut ... . [A] gelombang mekanik [B] gelombang elektromagnetik [C] gelombang kebolehjadian [D] gelombang elektrik [E] gelombang magnetik

    Jawaban. B. ■

22. Beberapa sifat gelombang elektromagnetik adalah sebagai berikut, kecuali ... . [A] dapat merambat dalam ruang hampa [B] merupakan gelombang longitudinal [C] dapat mengalami pemantulan [D] dapat mengalami pembiasan [E] lintasan perambatannya tergantung pada distribusi indeks bias

    Jawaban. B. ■

23. Cahaya merupakan salah satu dari ... . [A] gelombang mekanik [B] gelombang elektromagnetik [C] gelombang kebolehjadian [D] gelombang elektrik [E] gelombang magnetik

    Jawaban. B. ■

24. Kelajuan gelombang elektromagnetik dalam ruang hampa selalu sebesar ... . [A] 300.000 m/s [B] 854.297.992 m/s [C] 299.792.458 m/s [D] 150.000.000 m/s [E] 150.000.000 km/s

    Jawaban. C. ■

25. Gelombang elektromagnetik yang memiliki panjang gelombang paling panjang adalah ... . [A] gelombang radio [B] gelombang televisi [C] gelombang mikro (radar) [D] sinar-X [E] sinar gamma

    Jawaban. A. ■

26. Gelombang elektromagnetik yang memiliki frekuensi paling tinggi adalah ... . [A] gelombang radio [B] gelombang televisi [C] gelombang mikro (radar) [D] sinar-X [E] sinar gamma

    Jawaban. E. ■

27. Hubungan yang benar antara frekuensi ν, panjang gelombang λ, dan kelajuan gelombang elektromagnetik c adalah ... . [A] $c = \lambda\nu$ [B] $\lambda = \nu c$ [C] $\nu = c\lambda$ [D] $\lambda = \nu/c$ [E] $c = \lambda/\nu$

    Jawaban. A. ■

28. Jika selang waktu antara pengiriman pulsa ke sasaran dan penerimaan pulsa pantulan dari sasaran adalah Δt, serta magnitudo kecepatan lurus gelombang elektromagnetik adalah c, maka jarak sasaran ke pusat radar adalah ... . [A] $\Delta s = c\Delta t$ [B] $\Delta s = \frac{1}{2}c\Delta t$ [C] $\Delta s = \frac{1}{3}c\Delta t$ [D] $\Delta s = \frac{1}{4}c\Delta t$ [E] $\Delta s = \frac{1}{5}c\Delta t$

    Jawaban. B. ■

29. Hubungan antara permitivitas vakum ϵ_0, permeabilitas vakum μ_0, kelajuan cahaya dalam ruang hampa c adalah ... . [A] $c^2\epsilon_0\mu_0 = 1$ [B] $c^2 = \epsilon_0\mu_0$ [C] $c^2\epsilon_0 = \mu_0$ [D] $c^2/\epsilon_0 = \mu_0$ [E] $c^2 = \epsilon_0/\mu_0$

    Jawaban. A. ■

30. Hubungan antara daya radiasi P, luas permukaan radiasi A, dan intensitas radiasi I adalah ... . [A] $I = P/A$ [B] $P = A/I$ [C] $A = I/P$ [D] $A = IP$ [E] $IPA = 1$

    Jawaban. A. ■

9.6 Paket F

1. Buktikan bahwa $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, dan $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

    Jawaban.

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = -\sum_{j=0}^\infty \frac{n!}{(n-j)!} t^{n-j} e^{-t} \Big|_{t=0}^{t\to\infty} = n! \quad \text{dengan} \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{9.82}$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}|_{t=0}^{t\to\infty} + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \tag{9.83}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt \tag{9.84}$$

sehingga

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt\right)\left(\int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du\right). \tag{9.85}$$

Apabila $t := x^2$ dan $u := y^2$, maka $dt = 2x\,dx$, $du = 2y\,dy$, $t^{-1/2} = x^{-1}$, dan $u^{-1/2} = y^{-1}$, sehingga

$$\begin{aligned}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \left(2\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr = \pi\int_0^\infty e^{-r^2} d(r^2) = -\pi e^{-r^2}|_{r=0}^{r\to\infty} = \pi\end{aligned}$$

sehingga $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. ■

2. Buktikan bahwa $B(y,x) = B(x,y)$ dan $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

Jawaban.

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = -\int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}du \\ &= \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du = B(y,x). \end{aligned} \tag{9.86}$$

Apabila $t := u/a$, maka $u = at$ dan $dt = du/a$, serta

$$t^{x-1} = \frac{u^{x-1}}{a^{x-1}} \quad \text{dan} \quad (1-t)^{y-1} = \left(1-\frac{u}{a}\right)^{y-1} = \frac{(a-u)^{y-1}}{a^{y-1}}. \tag{9.87}$$

$$B(x,y) = a^{1-x-y}\int_0^a u^{x-1}(a-u)^{y-1}du. \tag{9.88}$$

Apabila $t := \sin^2\theta$, maka $dt = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$, $1-t = \cos^2\theta$, $t^{x-1} = (\sin\theta)^{2(x-1)}$ dan $(1-t)^{y-1} = (\cos\theta)^{2(y-1)}$, sehingga

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta. \tag{9.89}$$

Apabila $t := w/(1+w)$, maka $1-t = 1/(1+w)$, $w = t/(1-t)$, $dt = dw/(1+w)^2$, $t^{x-1} = w^{x-1}/(1+w)^{x-1}$, dan $(1-t)^{y-1} = 1/(1+w)^{y-1}$ sehingga

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{(1+w)^{x+y}}dw. \tag{9.90}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty\int_0^\infty t^{x-1}u^{y-1}e^{-(t+u)}dt\,du. \tag{9.91}$$

Apabila $t := X^2$ dan $u := Y^2$, maka $dt \wedge du = 4XY\,dX \wedge dY$, $t^{x-1} = X^{2(x-1)}$, dan $u^{x-1} = Y^{2(y-1)}$, sehingga

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty X^{2x-1}Y^{2y-1}e^{-(X^2+Y^2)}dX\,dY. \tag{9.92}$$

Apabila $X := R\cos\Theta$ dan $Y := R\sin\Theta$, maka $dX \wedge dY = R\,d\Theta \wedge dR$, sehingga

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} R^{2(x+y)-1}(\cos\Theta)^{2x-1}(\sin\Theta)^{2y-1}e^{-R^2}d\Theta\,dR \\ &= 2\left(\int_0^\infty R^{2(x+y)-1}e^{-R^2}dR\right)\left(2\int_0^{\pi/2}(\cos\Theta)^{2x-1}(\sin\Theta)^{2y-1}d\Theta\right). \end{aligned}$$

Apabila $R^2 =: S$, maka $2R\,dR = dS$, sehingga

$$\int_0^\infty R^{2(x+y)-1}e^{-R^2}dR = \frac{1}{2}\int_0^\infty S^{x+y}e^{-S}dS = \frac{1}{2}\Gamma(x+y). \tag{9.93}$$

Jadi, $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y)$. ■

3. Sebutkan 3 (tiga) bentuk definisi fungsi beta yang Saudara ketahui.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 2. ■

4. Buktikan bahwa $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ dan $P(-\infty, x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}))$.

   Jawaban.

$$\operatorname{erf}(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-u^2} du = -\operatorname{erf}(x). \tag{9.94}$$

$$P(-\infty, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2} dt + \int_0^{x} e^{-t^2/2} dt \right). \tag{9.95}$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{dan} \quad \int_0^{x} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{9.96}$$

   Jadi, $P(-\infty, x) = (1/2)(1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}))$. ■

5. Buktikan bahwa $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ dan $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

   Jawaban.

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{x} e^{-t^2} dt \right) = 1 - \operatorname{erf}(x). \tag{9.97}$$

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1. \tag{9.98}$$

   ■

6. Buktikan bahwa $\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ dan $\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$.

   Jawaban.

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \frac{d}{du} \sin \operatorname{amp} u = \cos \operatorname{amp} u \frac{d}{du} \operatorname{amp} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u. \tag{9.99}$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = \frac{d}{du} \cos \operatorname{amp} u = -\sin \operatorname{amp} u \frac{d}{du} \operatorname{amp} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u. \tag{9.100}$$

   ■

7. Buktikan bahwa $\tanh \operatorname{gd} w = \sinh w$ dan $\sin \operatorname{gd} w = \tanh w$.

   Jawaban. Apabila $w := \ln(\sec \varphi + \tan \varphi)$, maka $\varphi = \operatorname{gd} w$, sehingga $\sec \operatorname{gd} w + \tan \operatorname{gd} w = e^w$ alias $\sec \operatorname{gd} w = e^w - \tan \operatorname{gd} w$, lalu $\sec^2 \operatorname{gd} w = 1 + \tan^2 \operatorname{gd} w = e^{2w} + \tan^2 \operatorname{gd} w - 2e^w \tan \operatorname{gd} w$ alias $2e^w \tan \operatorname{gd} w = e^{2w} - 1$ alias $\tan \operatorname{gd} w = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) = \sinh w$. Karena $1 + \sin \operatorname{gd} w = e^w \cos \operatorname{gd} w$ alias $1 + 2 \sin \operatorname{gd} w + \sin^2 \operatorname{gd} w = e^{2w} \cos^2 \operatorname{gd} w = e^{2w}(1 - \sin^2 \operatorname{gd} w)$ alias $(1 + e^{2w}) \sin \operatorname{gd} w + 2 \sin \operatorname{gd} w + (1 - e^{2w}) = 0$, maka $\sin \operatorname{gd} w = (e^{2w} - 1)/(e^{2w} + 1) = (e^w - e^{-w})/(e^w + e^{-w}) = \tanh w$. ■

8. Buktikan bahwa $\cos \operatorname{gd} w = \operatorname{sech} w$ dan $\sec \operatorname{gd} w = \cosh w$.

   Jawaban.
$$\cos \operatorname{gd} w = \frac{\sin \operatorname{gd} w}{\tan \operatorname{gd} w} = \frac{\tanh w}{\sinh w} = \operatorname{sech} w. \tag{9.101}$$
$$\sec \operatorname{gd} w = \frac{1}{\cos \operatorname{gd} w} = \frac{1}{\operatorname{sech} w} = \cosh w. \tag{9.102}$$
■

9. Buktikan bahwa $\cot \operatorname{gd} w = \operatorname{csch} w$ dan $\csc \operatorname{gd} w = \coth w$.

   Jawaban.
$$\cot \operatorname{gd} w = \frac{1}{\tan \operatorname{gd} w} = \frac{1}{\sinh w} = \operatorname{csch} w. \tag{9.103}$$
$$\csc \operatorname{gd} w = \frac{1}{\sin \operatorname{gd} w} = \frac{1}{\tanh w} = \coth w. \tag{9.104}$$
■

10. Buktikan bahwa $\operatorname{gd} w = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2 \arctan e^w$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

    Jawaban. $w = \ln(\sec\varphi + \tan\varphi) = \ln\tan(\pi/4 + \varphi/2)$, maka $e^w = \tan(\pi/4 + \varphi/2 - n\pi)$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}$, sehingga $\arctan e^w = \pi/4 + \varphi/2 - n\pi$ alias $\arctan e^w - \pi/4 + n\pi = \varphi/2$ alias $\varphi = \operatorname{gd} w = 2\arctan e^w - \pi/2 + 2n\pi$. ■

11. Buktikan bahwa $\frac{d}{dw} \operatorname{gd} w = \operatorname{sech} w = \cos \operatorname{gd} w$.

    Jawaban.
$$\frac{d}{dw} \tan \operatorname{gd} w = \sec^2 \operatorname{gd} w \frac{d}{dw} \operatorname{gd} w = \frac{d}{dw} \sinh w = \cosh w$$
$$\Leftrightarrow \quad \cosh^2 w \frac{d}{dw} \operatorname{gd} w = \cosh w \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dw} \operatorname{gd} w = \operatorname{sech} w = \cos \operatorname{gd} w.$$
■

12. Buktikan bahwa $\operatorname{sn} F(0,\phi) = \sin F(0,\phi)$ dan $\operatorname{cn} F(0,\phi) = \cos F(0,\phi)$.

    Jawaban.
$$\operatorname{sn}_0 F(0,\phi) = \sin \operatorname{amp}_0 F(0,\phi) = \sin\phi = \sin F(0,\phi). \tag{9.105}$$
$$\operatorname{cn}_0 F(0,\phi) = \cos \operatorname{amp}_0 F(0,\phi) = \cos\phi = \cos F(0,\phi). \tag{9.106}$$
■

13. Buktikan bahwa $\operatorname{amp} F(0,\phi) = F(0,\phi)$ dan $\operatorname{dn} F(0,\phi) = 1$.

Jawaban.

$$\mathrm{amp}_0 F(0,\phi) = \phi = \int_0^{\phi} d\phi = F(0,\phi). \tag{9.107}$$

$$\mathrm{dn}_0 F(0,\phi) = d\phi/dF(0,\phi) = 1/((d/d\phi)F(0,\phi)) = 1. \tag{9.108}$$

■

14. Buktikan bahwa $\mathrm{sn}\, F(1,\phi) = \tanh F(1,\phi)$ dan $\mathrm{cn}\, F(1,\phi) = \mathrm{sech}\, F(1,\phi)$.

    Jawaban.

$$\mathrm{sn}_1 F(1,\phi) = \sin \mathrm{amp}_1 F(1,\phi) = \sin \mathrm{gd}\, F(1,\phi) = \tanh F(1,\phi). \tag{9.109}$$

$$\mathrm{cn}_1 F(1,\phi) = \cos \mathrm{amp}_1 F(1,\phi) = \cos \mathrm{gd}\, F(1,\phi) = \mathrm{sech}\, F(1,\phi). \tag{9.110}$$

■

15. Buktikan bahwa $\mathrm{amp}\, F(1,\phi) = \mathrm{gd}\, F(1,\phi)$ dan $\mathrm{dn}\, F(1,\phi) = \mathrm{sech}\, F(1,\phi)$.

    Jawaban.

$$\mathrm{amp}_1 F(1,\phi) = \phi = \mathrm{gd}\, F(1,\phi). \tag{9.111}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{dn}_1 F(1,\phi) &= d\phi/dF(1,\phi) = 1/((d/d\phi)F(1,\phi)) = 1/\sec\phi = \cos\phi \\ &= \cos \mathrm{gd}\, F(1,\phi) = \mathrm{sech}\, F(1,\phi). \end{aligned} \tag{9.112}$$

■

16. Apabila J_p adalah fungsi Bessel, maka buktikan bahwa

$$J_p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+p}. \tag{9.113}$$

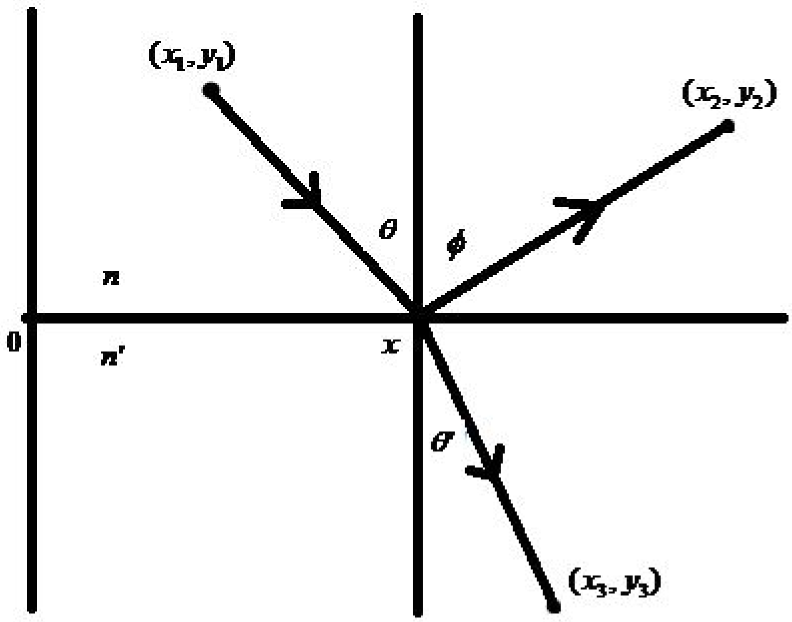
    Jawaban. Fungsi Bessel J_p adalah penyelesaian khusus dari persamaan Bessel $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, yaitu bahwa $y = J_p(x)$. ■

9.7 Paket G

1. Andaikan ruang $\mathbb{R}^3$ memiliki distribusi indeks bias n yang bergantung pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ dan waktu $t \in \mathbb{R}$, yaitu $n \mapsto (\vec{r}, t)$. Tentukan persamaan gerak partikel cahaya akibat distribusi indeks bias semacam ini, menggunakan Kalkulus Variasi dan Asas Fermat.

    Jawaban. Lihat sesi 6.6. ■

2. Andaikan ruang $\mathbb{R}^3$ memiliki indeks bias n homogen di mana-mana. Buktikan bahwa segala kemungkinan kecepatan partikel cahaya di ruang tersebut adalah $\vec{v} = (c/n)\hat{v}$, di mana $\hat{v}$ adalah sebarang arah kecepatan gerak partikel cahaya.



Gambar 9.2: Pembuktian Hukum Snellius

Jawaban. Lihat sesi 6.6. ■

3. Andaikan ada lensa cembung tipis dengan jarak fokus f. Sebuah benda yang tingginya h mendekati nol terletak pada jarak s dari lensa tersebut melalui sumbu utama, ternyata memiliki bayangan yang tingginya h' mendekati nol yang terletak pada jarak s' dari lensa tersebut melalui sumbu utama. Buktikan bahwa $1/f = 1/s + 1/s'$ dan perbesaran bayangannya adalah $M := h'/h = -s'/s = f/(f-s)$.

   Jawaban. Lihat sesi 6.5. ■

4. Andaikan ruang $\mathbb{R}^3$ memiliki distribusi indeks bias n pada posisi $\vec{r} \in V(n) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ serta indeks bias n' pada posisi $\vec{r} \in V(n') := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$. Andaikan ada sinar yang merambat dari ruang $V(n)$ yang dipantulkan sebagian dan sisanya dibiaskan menuju ruang $V(n')$ dengan sudut datang θ, sudut pantul ϕ, dan sudut bias θ'. Buktikan hukum Snellius untuk pemantulan, yaitu $\phi = \theta$, serta hukum Snellius untuk pembiasan, yaitu $n' \sin\theta' = n \sin\theta$.

   Jawaban. Perhatikan Gambar 9.2.

   $v = c/N = ds/dt$ alias $dt = (1/c)N\,ds$.

   $\Delta t := \int_{t_1}^{t_2} dt = (1/c)\int_{s_1}^{s_2} N\,ds$ dan $\delta(\Delta t) = 0$.

   $\Delta t_1 = (1/c)n(\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2})$.

   $\delta(\Delta t_1) = (d/dx)(\Delta t_1)\delta x = 0$.

$$\frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{x - x_2}{\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}} = 0 \qquad (9.114)$$

alias $\sin\theta - \sin\phi = 0$ alias $\phi = \theta$.

$\Delta t_2 = (1/c)(n\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + n'\sqrt{(x_3-x)^2 + y_3^2})$.

$\delta(\Delta t_2) = (d/dx)(\Delta t_2)\delta x = 0$.

$$\frac{n(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{n'(x-x_3)}{\sqrt{(x_3-x)^2 + y_3^2}} = 0 \tag{9.115}$$

alias $n\sin\theta - n'\sin\theta' = 0$ alias $n'\sin\theta' = n\sin\theta$. ■

5. Andaikan ada kurva dengan posisi salah satu dari titik pada kurva $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ dengan parameter $t \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa evolut kurva tersebut adalah

$$\vec{s} = \vec{r} + |\dot{\vec{r}}|\frac{\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})}{|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}|^2} \tag{9.116}$$

di mana $\dot{\vec{r}} := d\vec{r}/dt$ dan $\ddot{\vec{r}} := d\dot{\vec{r}}/dt$.

Jawaban. Evolut suatu kurva merupakan himpunan titik-titik pusat kelengkungan di setiap titik dari kurva tersebut. Untuk mencari pusat kelengkungan tersebut, mula-mula kurva hendak dianggap sebagai trayektori lintasan sebuah partikel titik dengan posisi $\vec{r}$ pada waktu t di $\mathbb{R}^3$. Tentu saja, kecepatan partikel tersebut pada saat t adalah $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$ (dengan $\dot{Q} := dQ/dt$), serta percepatannya pada saat t adalah $\vec{a} := \dot{\vec{v}} := \ddot{\vec{r}}$. Percepatan sentripetal suatu partikel yang bergerak pada posisi $\vec{r}$ pada saat t adalah $\vec{a}_s := \vec{a} - (\vec{a}\cdot\hat{v})\hat{\vec{v}}$ dengan $\hat{v} := \vec{v}/v$ dan $v = |\vec{v}|$ sedangkan besar percepatan sentripetalnya adalah $|\vec{a}_s| = v^2/|\vec{s} - \vec{r}|$ dengan $\vec{s}$ adalah posisi pusat kelengkungan kurva pada titik $\vec{r}$. Selain itu, harus berlaku juga bahwa $|\vec{a}_s|^2 = a^2 - (\vec{a}\cdot\hat{v})^2$ dengan $a := |\vec{a}|$. Tentu saja,

$$\begin{aligned}\vec{s} - \vec{r} &= |\vec{s} - \vec{r}|\frac{\vec{a}_s}{|\vec{a}_s|} = \frac{v^2\vec{a}_s}{|\vec{a}_s|^2} = \frac{v^2[\vec{a} - \hat{v}(\hat{v}\cdot\vec{a})]}{a^2 - (\hat{\vec{v}}\cdot\vec{a})^2} \\ &= \frac{v^2[v^2\vec{a} - \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{a})]}{v^2a^2 - (\vec{v}\cdot\vec{a})^2} = \frac{v^2(\vec{v}\times\vec{a})\times\vec{v}}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2} = \frac{|\dot{\vec{r}}|^2(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}.\end{aligned} \tag{9.117}$$

Dengan demikian, $\{\vec{s}\}$ menjadi evolut bagi $\{\vec{r}\}$. ■

6. Buktikan bahwa unsur identitas dari grup konvolusi fungsi sinyal $(C^\infty(\mathbb{C}), *)$ adalah delta Dirac δ, serta invers grup tersebut dari fungsi sinyal $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ adalah $g := (1/2\pi)F^{-1}(1_f/F(f))$ di mana $F : C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ adalah transformasi Fourier.

Jawaban. Lihat sesi 7.25. ■

7. Buktikan persamaan geodesik

$$\frac{d^2q^l}{ds^2} + \Gamma^l{}_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} = 0, \tag{9.118}$$

di mana q^i adalah koordinat umum,

$$\Gamma^l{}_{ij} := \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right) \tag{9.119}$$

adalah lambang Christoffel alias koneksi Levi-Civita yang bebas torsi, serta g_{ij} adalah komponen tensor metrik. Di sini, dipakai kesepakatan penjumlahan Einstein.

Jawaban. Lihat sesi 7.30. ■

9.8 Paket H

1. Andaikan $*$ adalah operasi konvolusi antara fungsi-fungsi $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{C})$, serta $\alpha \in \mathbb{C}$ adalah sebuah tetapan. Buktikan bahwa $g * f = f * g$, $f * (g * h) = (f * g) * h$, $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$, dan $f * (\alpha g) = \alpha(f * g)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 6 pada sesi 9.3. ■

2. Andaikan $F : C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, serta $*$ adalah operasi konvolusi antara fungsi-fungsi $f, g \in C^\infty(\mathbb{C})$. Buktikan bahwa $F(f * g) = \pm\sqrt{2\pi} F(f) F(g)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 7 pada sesi 9.3. ■

3. Andaikan $T : C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ adalah transformasi integral, $f, g \in C^\infty(\mathbb{C})$, serta $\beta \in \mathbb{C}$. Buktikan bahwa $T(f + g) = T(f) + T(g)$ dan $T(\beta f) = \beta T(f)$.

   Jawaban. Transformasi integral $T : C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ didefinisikan sedemikian

$$(T(f))(\alpha) = \int_a^b f(t) K(\alpha, t)\, dt \tag{9.120}$$

untuk setiap $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dan $K : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Dari persamaan (9.120), diperoleh bahwa untuk setiap $f, g \in C^\infty(\mathbb{C})$ dan $\beta \in \mathbb{C}$, berlaku kaitan

$$\begin{aligned} (T(f+g))(\alpha) &= \int_a^b (f+g)(t) K(\alpha, t)\, dt = \int_a^b (f(t) + g(t)) K(\alpha, t)\, dt \\ &= \int_a^b f(t) K(\alpha, t)\, dt + \int_a^b g(t) K(\alpha, t)\, dt = (T(f))(\alpha) + (T(g))(\alpha) \\ &= (T(f) + T(g))(\alpha) \end{aligned} \tag{9.121}$$

dan

$$\begin{aligned} (T(\beta f))(\alpha) &= \int_a^b (\beta f)(t) K(\alpha, t)\, dt = \beta \int_a^b f(t) K(\alpha, t)\, dt \\ &= \beta (T(f))(\alpha) = (\beta T(f))(\alpha). \end{aligned} \tag{9.122}$$

Persamaan (9.121) dan (9.122) mengatakan bahwa transformasi integral T pada persamaan (9.120) bersifat linier. ■

4. Andaikan δ adalah delta Dirac 1-dimensi, serta u adalah fungsi undak satuan Heaviside. Buktikan bahwa

$$\int_a^b \delta(x-y)\,dx = u(y-a) - u(y-b). \tag{9.123}$$

Jawaban.

$$\int_a^b \delta(x-y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)(u(x-a)-u(x-b))\,dx = u(y-a) - u(y-b). \tag{9.124}$$

■

9.9 Paket I

1. Gelombang dapat dikatakan sebagai getaran yang merambat dalam ruang. Apa yang menyebabkan sebuah getaran merambat? Apa alasannya?

   Jawaban. Yang menyebabkan sebuah getaran mekanik merambat adalah medium di sekitarnya. Getaran mekanis tersebut mengimbas (mempengaruhi) gerakan medium di sekitarnya. Yang menyebabkan sebuah getaran elektromagnetik merambat adalah adanya persamaan Maxwell. Penyelesaian persamaan Maxwell menyebabkan besaran medan listrik dan medan magnet bergantung pada posisi dan waktu yang memenuhi keempat persamaan Maxwell. ■

2. Andaikan $x, y, z \in \mathbb{R}$, serta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dan $f(x,y,z) = 0$. Buktikan bahwa

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 1 \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -1. \tag{9.125}$$

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 2 pada sesi 9.4. ■

3. Selesaikan persamaan gelombang

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_t\right)_t = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_x\right)_x \tag{9.126}$$

   di mana v adalah kelajuan gelombang yang konstan, dengan cara mencari $\Psi \mapsto (x,t)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 7 pada sesi 9.1. ■

4. Superposisikan dua buah gelombang, yaitu $\Psi_1 := A\sin(k_1 x - \omega_1 t)$ dan $\Psi_2 := A\sin(k_2 x - \omega_2 t)$ dalam bentuk modulasi gelombang.

Jawaban.

$$\begin{aligned}\Psi_1+\Psi_2 &= A[\sin(k_1x+\omega_1t)+\sin(k_2x+\omega_2t)]\\ &= 2A\sin\frac{1}{2}[(k_1+k_2)x+(\omega_1+\omega_2)t]\cos\frac{1}{2}[(k_1-k_2)x+(\omega_1-\omega_2)t].\end{aligned}$$

■

5. Buktikan bahwa kecepatan fase gelombang adalah $v_{\mathrm{ph}} := \omega/k = c^2/v$, dan kecepatan grup gelombang adalah $v_{\mathrm{gr}} := d\omega/dk = v$ apabila $\mathcal{E} = h\nu$, $p = h/\lambda$, $\omega = 2\pi\nu$, $k := 2\pi/\lambda$, $\hbar := h/(2\pi)$, $\mathcal{E} = mc^2$, $p = mv$, $m = m_0\gamma$, dan $\gamma := (1-(v/c)^2)^{-1/2}$, serta (h, c, m_0) konstan.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 18 pada sesi 9.1. ■

9.10 Paket J

1. Hitunglah determinan dari matriks $A \in \mathrm{ML}(4,\mathbb{C})$.

   Jawaban. $\det A = \sum_{j_1,\cdots,j_4=1}^{4} \epsilon_{j_1\cdots j_4} A_{j_1 1}\cdots A_{j_4 4}$. ■

2. Buktikan bahwa determinan suatu matriks $A \in \mathrm{ML}(n,\mathbb{C})$ tidak berubah apabila nomor baris dan nomor kolom matriks tersebut dipertukarkan, yaitu bahwa $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det A$.

   Jawaban. $\det(A^{\mathrm{T}}) = \epsilon_{j_1\cdots j_n}(A^{\mathrm{T}})_{j_1 1}\cdots(A^{\mathrm{T}})_{j_n n} = \epsilon_{j_1\cdots j_n}A_{1j_1}\cdots A_{nj_n} = \det A$. ■

3. Buktikan bahwa determinan suatu matriks $A \in \mathrm{ML}(n,\mathbb{C})$ yang dua baris tertentu dipertukarkan atau dua kolom tertentu dipertukarkan, nilainya sama dengan negatif dari determinan sebelumnya, yaitu sama dengan $-\det A$.

   Jawaban.

$$\begin{aligned}\det A' &= \epsilon_{j_1\cdots j_n}A_{j_1 1}\cdots A_{j_{k-1}(k-1)}A_{j_k l}A_{j_{k+1}(k+1)}\cdots A_{j_{l-1}(l-1)}A_{j_l k}A_{j_{l+1}(l+1)}\cdots A_{j_n n}\\ &= \epsilon_{j_1\cdots j_{k-1}j_l j_{k+1}\cdots j_{l-1}j_k j_{l+1}\cdots j_n}A_{j_1 1}\cdots A_{j_n n}\\ &= -\epsilon_{j_1\cdots j_n}A_{j_1 1}\cdots A_{j_n n} = -\det A. \qquad (9.127)\end{aligned}$$

■

4. Andaikan $A, B, C \in \mathrm{ML}(n,\mathbb{C})$. Buktikan bahwa $A(BC) = (AB)C$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 6 pada sesi 9.2. ■

5. Andaikan $A, B, C \in \mathrm{ML}(n,\mathbb{C})$ dan didefinisikan komutasi $[A,B] := AB - BA$. Buktikan bahwa $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$.

   Jawaban. $[A,BC] = ABC - BCA = ABC - BAC + BAC - BCA = (AB-BA)C + B(AC-CA) = [A,B]C + B[A,C]$. ■

6. Andaikan $A, B \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$.

   Jawaban. $\mathrm{Tr}(A+B) = (A+B)_{jj} = A_{jj} + B_{jj} = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$. ■

7. Andaikan $A, B \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 12 pada sesi 9.2. ■

8. Andaikan $A, B, C \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB)$ dan $\mathrm{Tr}(CBA) = \mathrm{Tr}(BAC) = \mathrm{Tr}(ACB)$ dari fakta bahwa $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$.

   Jawaban.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(ABC) &= \mathrm{Tr}(A(BC)) = \mathrm{Tr}((BC)A) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(B(CA)) \\ &= \mathrm{Tr}((CA)B) = \mathrm{Tr}(CAB).\end{aligned} \tag{9.128}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(CBA) &= \mathrm{Tr}(C(BA)) = \mathrm{Tr}((BA)C) = \mathrm{Tr}(BAC) = \mathrm{Tr}(B(AC)) \\ &= \mathrm{Tr}((AC)B) = \mathrm{Tr}(ACB).\end{aligned} \tag{9.129}$$

■

9. Andaikan $A \in \mathrm{ML}(5, \mathbb{C})$. Hitunglah determinan dari minor $\min(A; 2; 3)$ dan $\min(A; 4; 5)$.

   Jawaban.

$$\det(\min(A;2;3)) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix}. \tag{9.130}$$

$$\det(\min(A;4;5)) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix}. \tag{9.131}$$

■

10. Andaikan $A \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

    Jawaban. Lihat jawaban nomor 15 pada sesi 9.2. ■

11. Andaikan $A \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$. Buktikan bahwa $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

    Jawaban. $\det(\alpha A) = \epsilon_{j_1 \cdots j_n} (\alpha A)_{j_1 1} \cdots (\alpha A)_{j_n n} = \alpha^n \epsilon_{j_1 \cdots j_n} A_{j_1 1} \cdots A_{j_n n} = \alpha^n \det A$. ■

12. Carilah invers dari matriks $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, yaitu A^{-1}.

Jawaban. Misalkan

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}). \tag{9.132}$$

Melalui kaitan $AA^{-1} = 1$ dan aturan Cramer, diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{9.133}$$

■

13. Andaikan $A, B \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

    Jawaban.

$$\begin{aligned} ((AB)^\dagger)_{jk} &= ((AB)_{kj})^* = (A_{kl}B_{lj})^* = (A_{kl})^*(B_{lj})^* = (A^\dagger)_{lk}(B^\dagger)_{jl} \\ &= (B^\dagger)_{jl}(A^\dagger)_{lk} = (B^\dagger A^\dagger)_{jk}. \end{aligned} \tag{9.134}$$

■

14. Andaikan $A, B \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

    Jawaban. $(AB)^{-1}(AB) = 1$ alias $(AB)^{-1}A = B^{-1}$ alias $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

15. Tentukan secara eksplisit semua anggota dari grup SU(2).

    Jawaban. Lihat sesi 7.22. ■

9.11 Paket K

1. Tentukan persamaan gerak untuk dua buah partikel klasik bermassa m_1 dan m_2, yang berturut-turut bermuatan q_1 dan q_2, serta berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1$ dan $\vec{r}_2$ di ruang $\mathbb{R}^3$ pada waktu t akibat gaya interaksi gravitasi (Newton) dan listrik-magnet (Lorentz) non-relativistik.

   Jawaban. Lihat sesi 5.1. ■

2. Buktikan keberlakuan hukum tegangan Kirchoff yang non-relativistik.

   Jawaban.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j). \tag{9.135}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d^2\vec{r}. \tag{9.136}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}. \tag{9.137}$$

$$\nabla \times \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} = \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} \times (\vec{r}-\vec{r}_j) + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} \nabla \times (\vec{r}-\vec{r}_j). \quad (9.138)$$

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} &= \hat{x}_k \partial_k [(x_l - x_{jl})(x_l - x_{jl})]^{-3/2} \\ &= -3\hat{x}_k |\vec{r}-\vec{r}_j|^{-5} \delta_{kl}(x_l - x_{jl}) = -3(\vec{r}-\vec{r}_j)|\vec{r}-\vec{r}_j|^{-5}. \end{aligned} \quad (9.139)$$

$\nabla \times (\vec{r}-\vec{r}_j) = \epsilon_{klm}\hat{x}_k \partial_l (x_m - x_{jm}) = \epsilon_{klm}\hat{x}_k \delta_{lm} = \epsilon_{kll}\hat{x}_k = \vec{0}$ sehingga

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{lalu} \quad \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (9.140)$$

■

3. Andaikan ada sebuah ruang volume $V \subset \mathbb{R}^3$. Andaikan $\vec{E}$ adalah medan listrik non-relativistik yang disebabkan oleh n buah muatan q_j^{in} yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_j^{\text{in}} \in V$ untuk semua $j \in \{1, \cdots, n\}$, dan oleh n' buah muatan q_k^{out} yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_k^{\text{out}} \notin V$ untuk semua $k \in \{1, \cdots, n'\}$. Buktikan hukum Gauss non-relativistik, yaitu

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j^{\text{in}}, \quad (9.141)$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Jawaban. Lihat sesi 5.4. ■

4. Carilah medan listrik $\vec{E} \mapsto (x, y, z)$ di ruang $\mathbb{R}^3$ akibat distribusi muatan listrik yang berbentuk bidang datar $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, p < x < q, r < y < s\}$ yang memiliki rapat muatan permukaan seragam σ, di mana (p, q, r, s) konstan.

Jawaban.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_p^q \int_r^s \frac{\hat{x}(x-x') + \hat{y}(y-y') + \hat{z}z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}} dy'\, dx'. \quad (9.142)$$

■

5. Dari persamaan $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ dan $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, buktikan bahwa penyelesaiannya adalah $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ dan $\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$ untuk sebarang φ dan $\vec{A}$.

Jawaban. Karena $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$, maka $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ menghendaki $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Karena $\nabla \times \nabla\varphi = \vec{0}$, maka $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ menghendaki $\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \partial\vec{A}/\partial t$ alias $\nabla \times (\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t) = \vec{0}$ alias $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t = -\nabla\varphi$ alias $\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$. ■

6. Carilah medan $\vec{E}$ dan $\vec{B}$ yang bergantung pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ dan waktu t dari sistem persamaan Maxwell, yaitu $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, dan $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D}/\partial t$, di mana $\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$, $\vec{P} := \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, dan $\vec{M} := \mu_0 \chi_m \vec{H}$, serta $\rho, \vec{J} \mapsto (\vec{r}, t)$, dan $(\epsilon_0, \mu_0, \chi_e, \chi_m)$ konstan.

   Jawaban. Persamaan Maxwell adalah $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = 0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, dan $(1/\mu_0)(\nabla \times \vec{B} - \nabla \times \vec{M}) = \vec{J} + \epsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t + \partial \vec{P}/\partial t$. Misalkan $\vec{P} = \vec{M} = \vec{0}$. Persamaan Maxwell menjadi $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, dan $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + (1/c^2)\partial \vec{E}/\partial t$ mengingat $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Lalu, $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = (1/\epsilon_0)\nabla \rho - \nabla^2 \vec{E} = -(\partial/\partial t)(\mu_0 \vec{J} + (1/c^2)\partial \vec{E}/\partial t)$. Lalu, $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \vec{0} - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{J} + (1/c^2)(\partial/\partial t)(-\partial \vec{B}/\partial t)$. Apabila $\rho = 0$ dan $\vec{J} = \vec{0}$, maka $\nabla^2 \vec{E} = (1/c^2)\partial^2 \vec{E}/\partial t^2$ dan $\nabla^2 \vec{B} = (1/c^2)\partial^2 \vec{B}/\partial t^2$, yang penyelesaian khususnya adalah $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ dan $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$. ■

9.12 Paket L

1. Mengapa gelombang untuk partikel bebas pada waktu t di posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ selalu memiliki bentuk $\Psi = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ di mana $\vec{k}$ adalah vektor gelombang dan ω adalah frekuensi sudut getaran?

   Jawaban. Persamaan Schrödinger non-relativistik adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{9.143}$$

   Untuk partikel bebas, $V = 0$, sehingga

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{9.144}$$

   Apabila $\Psi := \psi \tau$ di mana $\psi \mapsto \vec{r}$ dan $\tau \mapsto t$, maka

$$\frac{1}{\psi}\nabla^2 \psi = -i\frac{2m}{\hbar}\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} = -k^2. \tag{9.145}$$

   $d\tau/dt = -i\omega\tau$ di mana $\omega := \hbar k^2/(2m)$, sehingga $\tau = \tau_0 e^{-i\omega t}$. Lalu, $\nabla^2 \psi = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\psi = k^2 \psi$. Jika $\psi := XYZ$, di mana $X \mapsto x$, $Y \mapsto y$, dan $Z \mapsto z$, serta $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$, maka $X = X_0 e^{ik_x x}$, $Y = Y_0 e^{ik_y y}$, dan $Z = Z_0 e^{ik_z z}$, sehingga $\Psi = XYZ\tau = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ di mana $A := X_0 Y_0 Z_0 \tau_0$. ■

2. Mengapa pada potensial sumur tak hingga, fungsi gelombangnya tidak membutuhkan syarat kekontinyuan untuk turunan pertamanya?

3. Besaran waktu itu ditentukan oleh perilaku suatu benda yang akan dijadikan acuan waktu. Diketahui waktu untuk menghasilkan n_1 buah getaran teratur benda A adalah t_1, serta waktu untuk menghasilkan n_2 buah getaran teratur benda B adalah t_2. Jika waktu menurut A adalah t, maka tentukan waktu menurut B.

Jawaban. Lihat sesi 8.2. ■

4. Andaikan sebuah foton yang mula-mula memiliki panjang gelombang λ ditembakkan pada sebuah elektron yang bermassa diam m_0 yang mula-mula diam. Apabila panjang gelombang foton setelah menumbuk elektron adalah λ', dan sudut antara arah hambur foton dengan arah tembak foton mula-mula adalah ϕ, maka buktikan bahwa

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\phi) \tag{9.146}$$

di mana h adalah tetapan Planck, dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 20 pada sesi 9.1. ■

5. Selesaikan persamaan gerak getaran selaras teredam, yaitu

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \tag{9.147}$$

yaitu mencari $x \mapsto t$, di mana $\dot{x} := dx/dt$, $\ddot{x} := d\dot{x}/dt$, $m, c, k \in \mathbb{R}^+$.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 8 pada sesi 9.3. ■

9.13 Paket M

1. Diketahui seperangkat vektor

$$A := \{\vec{a}_j := (a_{j1}, \cdots, a_{jn}) \in \mathbb{R}^n \mid j \in \{1, \cdots, n\}\} \tag{9.148}$$

di mana $a_{jk} \in \mathbb{R}$ untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$. Tentukan syarat agar A bebas linier.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 10 pada sesi 9.2. ■

2. Diketahui seperangkat fungsi

$$B := \{f_j \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid j \in \{1, \cdots, n\}\}. \tag{9.149}$$

Tentukan syarat agar B bebas linier.

Jawaban. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x) = 0$ menghendaki $\alpha_j = 0$ untuk semua $j \in \{1, \cdots, n\}$ sebagai satu-satunya kemungkinan. Turunan ke-k untuk kedua ruas persamaan tersebut adalah $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j^{(k)}(x) = 0$ untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ di mana

$$f^{(k)}(x) := (d^k/dx^k) f(x). \tag{9.150}$$

Penyajian matriksnya adalah

$$\begin{pmatrix} f_1^{(0)}(x) & \cdots & f_n^{(0)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9.151}$$

Karena $\alpha_j = 0$ untuk setiap $j \in \{1, \cdots, n\}$, maka

$$\begin{vmatrix} f_1^{(0)}(x) & \cdots & f_n^{(0)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9.152}$$

Determinan pada persamaan (9.152) dikenal sebagai *Wronskian*. ■

3. Buktikan bahwa swa-nilai dari matriks $M \in \mathrm{ML}(2, \mathbb{R})$ adalah M_+ dan M_- sedemikian rupa sehingga

$$M_\pm := \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\, M \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}\, M)^2 - 4 \det M}\right). \tag{9.153}$$

Jawaban. Lihat jawaban nomor 13 pada sesi 9.2. ■

4. Andaikan $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \in \mathbb{R}^3$ adalah empat buah vektor fisis. Buktikan identitas vektor

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]\vec{D} = (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \times \vec{C}) + (\vec{B} \cdot \vec{D})(\vec{C} \times \vec{A}) + (\vec{C} \cdot \vec{D})(\vec{A} \times \vec{B}) \tag{9.154}$$

dengan menggunakan aljabar dan analisis vektor.

Jawaban. Lihat sesi 7.8. ■

5. Andaikan $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ adalah dua buah vektor fisis. Buktikan identitas vektor

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \tag{9.155}$$

dan

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} \tag{9.156}$$

dengan menggunakan kalkulus dan analisis vektor.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 19 dan 20 pada sesi 9.2. ■

6. Andaikan $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor posisi, dan $\delta^{(3)} : \mathbb{R}^3 \to \bar{\mathbb{R}}$ adalah delta Dirac 3-dimensi. Buktikan bahwa $\nabla^2(1/|\vec{r}|) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$ dengan menggunakan teorema Stokes.

Jawaban. Lihat sesi 7.12. ■

7. Andaikan $A \subset \mathbb{R}^3$ adalah sebuah luasan sederhana, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ adalah sebuah volume, $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ adalah sebuah peubah vektor, $\varphi \in \mathbb{R}$ adalah sebuah peubah skalar, serta $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor posisi. Buktikan teorema Stokes

$$\oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_A (\nabla \times \vec{A}) \cdot d^2\vec{r}, \tag{9.157}$$

$$\oint_{\partial A} \varphi\, d\vec{r} = -\int_A \nabla\varphi \times d^2\vec{r}, \tag{9.158}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d^2\vec{r} = \int_V \nabla \cdot \vec{A}\, d^3\vec{r}, \tag{9.159}$$

$$\oint_{\partial V} \varphi\, d^2\vec{r} = \int_V \nabla\varphi\, d^3\vec{r}, \tag{9.160}$$

dan

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \times d^2\vec{r} = -\int_V \nabla \times \vec{A}\, d^3\vec{r}. \tag{9.161}$$

Jawaban. Lihat jawaban nomor 5 sampai 10 pada sesi 9.4. ■

8. Andaikan $T := \{\vec{e}_\mu \mid \mu \in \{1, \cdots, n\}\}$ adalah basis vektor kontravarian, $V := \{\vec{e}^\mu \mid \mu \in \{1, \cdots, n\}\}$ adalah basis vektor kovarian, $q^1, \cdots, q^n$ adalah n buah koordinat umum, serta Γ adalah lambang Christoffel. Buktikan bahwa

$$\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial q^\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \vec{e}_\lambda \tag{9.162}$$

dan

$$\frac{\partial \vec{e}^\mu}{\partial q^\nu} = -\sum_{\lambda=1}^{n} \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \vec{e}^\lambda. \tag{9.163}$$

Jawaban. Lihat jawaban nomor 12 dan 13 pada sesi 9.4. ■

9. Andaikan $\vec{a} := \sum_{j=1}^n a_j \hat{x}_j, \vec{b} := \sum_{j=1}^n b_j \hat{x}_j \in \mathbb{R}^n$ adalah dua buah vektor, serta $\{\hat{x}_j \in \mathbb{R}^n \mid j \in \{1, \cdots, n\}\}$ adalah basis ortonormal. Dengan menggunakan aljabar geometris, buktikan bahwa

$$\hat{x}_j \hat{x}_k = 2\delta_{jk} - \hat{x}_k \hat{x}_j \quad \text{dan} \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_j b_k \hat{x}_j \hat{x}_k - a_j b_j \right). \tag{9.164}$$

Jawaban. $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$ sehingga $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a})$ dan $\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})$. Karena $2\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}$, maka $\hat{x}_j\hat{x}_k + \hat{x}_k\hat{x}_j = 2\delta_{jk}$. Karena $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b}$, maka

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= \sum_{j,k=1}^{n} a_j b_k \hat{x}_j \wedge \hat{x}_k = \sum_{j,k=1}^{n} a_j b_k (\hat{x}_j \hat{x}_k - \delta_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_j b_k \hat{x}_j \hat{x}_k - a_j b_j \right). \end{aligned} \tag{9.165}$$

■

10. Diketahui $\vec{A} := A_0+A_1\hat{x}_1+A_2\hat{x}_2+A_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2$ dan $\vec{B} := B_0+B_1\hat{x}_1+B_2\hat{x}_2+B_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2$ adalah dua buah multi-vektor, di mana $A_0, A_1, A_2, A_{12}, B_0, B_1, B_2, B_{12} \in \mathbb{R}$, serta $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$ adalah basis ortonormal. Dengan menggunakan aljabar geometris, hitunglah perkalian geometris antara kedua multi-vektor tersebut, yaitu $\vec{A}\vec{B}$.

    Jawaban.

$$\begin{aligned}\vec{A}\vec{B} &= (A_0+A_1\hat{x}_1+A_2\hat{x}_2+A_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2)(B_0+B_1\hat{x}_1+B_2\hat{x}_2+B_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2)\\ &= (A_0B_0+A_1B_1+A_2B_2-A_{12}B_{12})+(A_0B_1+A_1B_0+A_{12}B_2-A_2B_{12})\hat{x}_1\\ &\quad +(A_0B_2+A_2B_0+A_1B_{12}-A_{12}B_1)\hat{x}_2\\ &\quad +(A_0B_{12}+A_{12}B_0+A_1B_2-A_2B_1)\hat{x}_1\hat{x}_2. \end{aligned} \tag{9.166}$$

■

9.14 Paket N

1. Mengapa aliran elektron dapat terkendala menelusuri kawat yang ujung-ujungnya diberi beda potensial?

    Jawaban. Ini karena terdapat perbedaan potensial listrik yang gradatif dalam ruang sedemikian terdapat jurang potensial yang berbentuk seperti saluran selokan potensial yang bentuknya sama dengan bentuk kawat tersebut. ■

2. Apakah medan listrik di titik di dalam distribusi muatan yang berbentuk permukaan tertutup sederhana itu nol? Buktikan dengan analisis vektor.

    Jawaban.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\oint_{\partial V}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}|d^2\vec{r}'|. \tag{9.167}$$

    Apabila $\vec{r} \in V$, maka belum tentu $\vec{E} = \vec{0}$. ■

3. Andaikan resistor R, induktor L, dan kapasitor C dirangkai seri pada suatu kawat penghantar yang dihubungkan dengan tegangan listrik konstan V_0. Tentukan arus listrik I yang dihasilkan yang bergantung pada waktu t.

    Jawaban.

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\left(Q_0 + \int_0^t I\,dt\right) = V_0. \tag{9.168}$$

$$Q = Q_0 + \int_0^t I\,dt. \tag{9.169}$$

$$R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = V_0. \tag{9.170}$$

$Q = Q_p + Q_c$ di mana $Q_p = V_0 C$.

$$R\frac{dQ_c}{dt} + L\frac{d^2Q_c}{dt^2} + \frac{1}{C}Q_c = 0. \tag{9.171}$$

$Q_c = C_+ e^{\alpha_+ t} + C_- e^{\alpha_- t}$ di mana $\alpha_\pm := (-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C})/(2L)$ sehingga $Q = V_0 C + C_+ e^{\alpha_+ t} + C_- e^{\alpha_- t}$ lalu $I = dQ/dt = \alpha_+ C_+ e^{\alpha_+ t} + \alpha_- C_- e^{\alpha_- t}$ alias

$$I = \frac{((\dot{I})_0 - \alpha_- I_0)e^{\alpha_+ t} + (\alpha_+ I_0 - (\dot{I})_0)e^{\alpha_- t}}{\alpha_+ - \alpha_-}. \tag{9.172}$$

■

4. Buktikan bahwa gaya yang dialami oleh sebuah partikel klasik bermassa rehat m_0 pada waktu t adalah

$$\vec{F} = m_{//}\vec{a}_{//} + m_\perp \vec{a}_\perp \tag{9.173}$$

di mana $m_{//} := m_0\gamma^3$ adalah massa longitudinal, $m_\perp := m_0\gamma$ adalah massa transversal, $\gamma := (1-(v/c)^2)^{-1/2}$ adalah faktor Lorentz, $v := |\vec{v}|$, $\vec{v}$ adalah kecepatan partikel, $\vec{a}_{//} := (\vec{a}\cdot\hat{v})\hat{v}$, $\vec{a}_\perp := \vec{a} - \vec{a}_{//}$, $\vec{a} := d\vec{v}/dt$, dan $\hat{v} := \vec{v}/v$.

Jawaban. Lihat persamaan (4.12). ■

5. Tentukan transformasi Lorentz untuk perangkat ruang-waktu, momentum-tenaga, momentum-massa, dan swa-kecepatan-faktor-Lorentz.

Jawaban. Lihat sesi 4.2. ■

6. Buktikan bahwa medan listrik relativistik pada posisi $\vec{r}$ akibat sebuah partikel klasik bermuatan q' yang terletak pada posisi $\vec{r}'$ pada waktu t adalah

$$\vec{E} = \frac{\kappa q'(1-\beta^2)\vec{R}/R^3}{(1-\beta^2\sin^2\psi)^{3/2}} \tag{9.174}$$

di mana $\beta := v'/c$, $v' := |\vec{v}'|$, $\vec{v}' := d\vec{r}'/dt$, ψ sedemikian $\sin\psi = R_\perp/R$, $R_\perp := |\vec{R}_\perp|$, $R := |\vec{R}|$, $\vec{R}_\perp := \vec{R} - \vec{R}_{//}$, $\vec{R}_{//} := (\vec{R}\cdot\hat{v}')\hat{v}'$, $\hat{v}' := \vec{v}'/|\vec{v}'|$, dan $\vec{R} := \vec{r} - \vec{r}'$.

Jawaban. Andaikan ada muatan q yang terletak di posisi $\vec{r}$ menurut pusat koordinat O, serta n buah muatan $q_1, \cdots, q_n$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n$ menurut pusat koordinat O pula. Semua muatan tersebut bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ yang sama menurut O. Gaya yang dialami muatan q menurut semua muatan tersebut adalah

$$\vec{F}^0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\vec{R}_j^0}{(R_j^0)^3} \tag{9.175}$$

di mana $\vec{R}_j^0 := \vec{r}^0 - \vec{r}_j^0$, $\vec{R}_{j//}^0 := \vec{R}_j^0 \cdot \hat{v}\hat{v}$, dan $\vec{R}_{j\perp}^0 := \vec{R}_j^0 - \vec{R}_{j//}^0$, serta $\vec{R}_j := \vec{r} - \vec{r}_j s$. Telah diketahui bahwa $\vec{R}_{j//}^0 = \gamma\vec{R}_{j//}$ dan $\vec{R}_{j\perp}^0 = \vec{R}_{j\perp}$ di mana $\gamma :=$

$(1-(v/c)^2)^{-1/2}$. Transformasi Lorentz untuk momentum linier dengan parameter $\vec{V}$ adalah

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\Gamma-1)\vec{p}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\mathcal{E}\vec{V}/c^2 \tag{9.176}$$

sehingga transformasi Lorentz untuk gaya adalah

$$\vec{F}' := \frac{d\vec{p}'}{dt'} = \frac{\vec{F} + (\Gamma-1)\vec{F}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\vec{F}\cdot\vec{v}\vec{V}/c^2}{\Gamma(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{9.177}$$

Menurut semua muatan tadi, berlakulah

$$\begin{aligned} \vec{F}^0 &= \frac{\vec{F} + (\gamma-1)\vec{F}\cdot\hat{v}\hat{v} - \gamma\vec{F}\cdot\vec{v}\vec{v}/c^2}{\gamma(1-(v/c)^2)} \\ &= \gamma(\vec{F} + (\gamma-1)\vec{F}\cdot\hat{v}\hat{v} - \gamma\vec{F}\cdot\vec{v}\vec{v}/c^2). \end{aligned} \tag{9.178}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}^0_{//} &= \gamma(\vec{F}_{//} + (\gamma-1)\vec{F}_{//} - \gamma\vec{F}_{//}v^2/c^2) \\ &= \gamma^2(1-v^2/c^2)\vec{F}_{//} = \vec{F}_{//}. \end{aligned} \tag{9.179}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}^0_{\perp} &= \vec{F}^0 - \vec{F}^0_{//} \\ &= \gamma(\vec{F} + (\gamma-1)\vec{F}_{//} - \gamma\vec{F}_{//}v^2/c^2) - \vec{F}_{//} \\ &= \gamma(\vec{F}_{\perp} + \gamma\vec{F}_{//}(1-v^2/c^2)) - \vec{F}_{//} \\ &= \gamma(\vec{F}_{\perp} + (1/\gamma)\vec{F}_{//}) - \vec{F}_{//} = \gamma\vec{F}_{\perp}. \end{aligned} \tag{9.180}$$

Dengan mendefinisikan $\beta := v/c$ dan $\sin\psi_j := R_{j\perp}/R_j$, maka

$$\begin{aligned} \vec{F}_{//} &= \vec{F}^0_{//} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\vec{R}^0_{j//}}{((R^0_{j//})^2 + (R^0_{j\perp})^2)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma\vec{R}_{j//}}{(\gamma^2R^2_{j//} + R^2_{j\perp})^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}\vec{R}_{j//}}{(R^2_{j//} + (1-\beta^2)R^2_{j\perp})^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}\vec{R}_{j//}}{R_j^3(1-\beta^2\sin^2\psi_j)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{9.181}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\perp} &= \frac{\vec{F}^0_{\perp}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}(\vec{F}^0 - \vec{F}^0_{//}) = \frac{1}{\gamma}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\vec{R}^0_{j\perp}}{((R^0_{j//})^2 + (R^0_{j\perp})^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\vec{R}_{j\perp}}{(\gamma^2R^2_{j//} + R^2_{j\perp})^{3/2}} = \frac{1}{\gamma}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-3}\vec{R}_{j\perp}}{(R^2_{j//} + (1-\beta^2)R^2_{j\perp})^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}(1-\beta^2)\vec{R}_{j\perp}}{R_j^3(1-\beta^2\sin^2\psi_j)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{9.182}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{9.183}$$

merupakan gaya Lorentz relativistik, di mana

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}\vec{R}_j}{R_j^3(1-\beta^2\sin^2\psi_j)^{3/2}} \tag{9.184}$$

adalah medan listrik relativistik, serta

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}\vec{v}\times\vec{R}_j}{R_j^3(1-\beta^2\sin^2\psi_j)^{3/2}} \tag{9.185}$$

adalah medan magnet relativistik, dengan $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$. ■

9.15 Paket O

1. Buktikan bahwa perkalian silang antara dua buah vektor itu menghasilkan pseudo-vektor.

   Jawaban.

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})' &= (\epsilon_{jkl}\hat{x}_j a_k b_l)' = \epsilon_{jkl}\hat{x}_j' a_k' b_l' = \epsilon_{jkl}R_{jm}R_{kn}R_{lp}\hat{x}_m a_n b_p \\ &= (\det R)\epsilon_{mnp}\hat{x}_m a_n b_p = (\det R)(\vec{a}\times\vec{b}).\end{aligned} \tag{9.186}$$

   ■

2. Buktikan bahwa perkalian titik vektor dengan pseudo-vektor itu menghasilkan pseudo-skalar.

   Jawaban. Andaikan $\vec{a}$ adalah vektor, dan $\vec{b}$ adalah pseudo-vektor.

$$\begin{aligned}(\vec{a}\cdot\vec{b})' &= (a_j b_j)' = a_j' b_j' = (\det R)R_{jk}R_{jl}a_k b_l = (\det R)\delta_{kl}a_k b_l \\ &= (\det R)a_k b_k = (\det R)(\vec{a}\cdot\vec{b}).\end{aligned} \tag{9.187}$$

   ■

3. Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ hanya ada dua buah partikel tak bermassa yang bermuatan $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$. Tentukan persamaan gerak kedua partikel tersebut menurut interaksi gravitasi dan elektromagnetis.

   Jawaban. Lihat sesi 5.1. ■

4. Buktikan semua kasus khusus dari teorema Stokes umum, yaitu $\oint_{\partial\Omega}\omega = \int_\Omega d\omega$, di mana Ω adalah manifold di ruang $\mathbb{R}^3$, dan ω adalah forma diferensial.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 5 sampai 10 pada sesi 9.4. ■

5. Andaikan q^1, q^2, q^3 adalah tiga buah koordinat umum, serta $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor posisi, serta $\vec{e}_j := \partial\vec{r}/\partial q^j$ dan $\vec{e}^j := \nabla q^j$ untuk semua $j \in \{1,2,3\}$. Apabila $\vec{e}_j \times \vec{e}_k = \sum_{s=1}^{3} \epsilon'_{jks}\vec{e}^s$, maka buktikan bahwa apabila $\vec{r} := (x_1, x_2, x_3)$, maka berlakulah kaitan

$$\epsilon'_{jks} = \sum_{l,m,r=1}^{3} \epsilon_{lmr} \frac{\partial x_l}{\partial q^j}\frac{\partial x_m}{\partial q^k}\frac{\partial x_r}{\partial q^s} \tag{9.188}$$

di mana ϵ_{lmr} adalah epsilon Levi-Civita.

Jawaban.

$$\begin{aligned}\vec{e}_j \times \vec{e}_k &= \frac{\partial x_l}{\partial q^j}\frac{\partial x_m}{\partial q^k}\hat{x}_l \times \hat{x}_m = \frac{\partial x_l}{\partial q^j}\frac{\partial x_m}{\partial q^k}\epsilon_{lmr}\hat{x}_r \\ &= \frac{\partial x_l}{\partial q^j}\frac{\partial x_m}{\partial q^k}\epsilon_{lmr}\frac{\partial x_r}{\partial q^s}\vec{e}^s = \epsilon'_{jks}\vec{e}^s \end{aligned} \tag{9.189}$$

sehingga

$$\epsilon'_{jks} = \epsilon_{lmr}\frac{\partial x_l}{\partial q^j}\frac{\partial x_m}{\partial q^k}\frac{\partial x_r}{\partial q^s}. \tag{9.190}$$

■

6. Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada n buah partikel bermassa $m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut bermuatan $q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$. Tentukan persamaan gerak masing-masing dari n buah partikel tersebut.

Jawaban. Andaikan $\mathbb{N}_n := \{1, \cdots, n\}$.

$$\begin{aligned} m_j\ddot{\vec{r}}_j &= G\sum_{k\in\mathbb{N}_n-\{j\}} \frac{m_j m_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_k - \vec{r}_j) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k\in\mathbb{N}_n-\{j\}}\frac{q_j q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_k) \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi}q_j\dot{\vec{r}}_j \times \sum_{k\in\mathbb{N}_n-\{j\}}\frac{q_k\dot{\vec{r}}_k \times (\vec{r}_j - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3}. \end{aligned} \tag{9.191}$$

■

9.16 Paket P

1. Selesaikan persamaan Bernoulli $y' + Py = Q$ dan $y' + Py = Qy^n$ untuk $y \mapsto x$, di mana $y, P, Q, x, n \in \mathbb{R}$, serta $y, P, Q \mapsto x$, dengan n adalah sebuah tetapan.

Jawaban. Lihat sesi 7.14. ■

2. Selesaikan persamaan diferensial $ay'' + by' + cy = 0$, di mana $a, b, c, y \in \mathbb{C}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $y'' := dy'/dx$, di mana a, b, c adalah tetapan.

Jawaban. Lihat sesi 7.15. ■

3. Selesaikan persamaan diferensial $ay'''+by''+cy'+dy=0$, di mana $a,b,c,d,y \in \mathbb{C}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, $y'' := dy'/dx$, dan $y''' := dy''/dx$, di mana a,b,c,d adalah tetapan.

   Jawaban. Misalkan persamaan diferensial tersebut difaktorkan menjadi
   $$(d/dx-\alpha)(d/dx-\beta)(d/dx-\gamma)y=0, \tag{9.192}$$
   maka apabila $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, maka penyelesaiannya adalah $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x}$ di mana A,B,C adalah tetapan sebarang. Apabila $\gamma = \beta$ dan $\alpha \neq \beta$, maka penyelesaiannya adalah $y = Ae^{\alpha x} + (Bx+C)e^{\beta x}$ di mana A,B,C adalah tetapan sebarang. Apabila $\alpha = \beta = \gamma$, maka penyelesaiannya adalah $y = (Ax^2+Bx+C)e^{\alpha x}$ di mana A,B,C adalah tetapan sebarang. ■

4. Selesaikan persamaan kubik $ax^3+bx^2+cx+d=0$ untuk $x \mapsto (a,b,c,d)$, di mana $a,b,c,d,x \in \mathbb{C}$.

   Jawaban. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ dengan $a \neq 0$.

   Apabila $x := y-h$, maka $y = x+h$ dan $py^3+qy+r=0$.

   $p(x^3+3hx^2+3h^2x+h^3)+q(x+h)+r=0$.

   $a=p$, $b=3hp$, $c=3h^2p+q$, dan $d=h^3p+hq+r$.

   $h=b/(3a)$, $q=c-3ah^2$, dan $r=d-hq-h^3p=d-(b/3a)(c-2b^2/9a)$.

   Apabila $y=u+v$, maka $p(u^3+3u^2v+3uv^2+v^3)+q(u+v)+r=0$.

   $a(u^3+3uv(u+v)+v^3)+q(u+v)+r=0$.

   $(a(u^3+v^3)+r)+(u+v)(3auv+q)=0$.

   $a(u^3+v^3)+r=0$ dan $3auv+q=0$.

   Karena $v=-q/(3au)$, maka $a(u^3-q^3/27a^3u^3)+r=0$.

   $a(u^3)^2+ru^3-q^3/(27a^2)=0$.

   $27a^3(u^3)^2+27a^2ru^3-q^3=0$.

   $u^3=(1/54a^3)(-27a^2r \pm \sqrt{(27a^2r)^2+4(27)a^3q^3})$.

   $u^3=(1/2)(-r/a \pm \sqrt{(r/a)^2+(4/27)(q/a)^3})$.

   $v=-q/(3au)=-(q/3a)(u^3)^{-1/3}$.

   $y=u+v=(u^3)^{1/3}-(q/3a)(u^3)^{-1/3}=x+h=x+b/(3a)$.

   $x=(u^3)^{1/3}-(1/3a)(q(u^3)^{-1/3}+b)$. ■

5. Andaikan $x,y,M,N \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, dan $M,N \mapsto (x,y)$, serta $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial $M\,dx + N\,dy = 0$, yaitu mencari $y \mapsto x$.

   Jawaban. Lihat sesi 7.16. ■

6. Andaikan $x, y, M, N, u \in \mathbb{R}$, $u, y \mapsto x$, dan $M, N \mapsto (x, y)$, serta $\partial(uM)/\partial y = \partial(uN)/\partial x$. Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial $M\,dx + N\,dy = 0$, yaitu mencari $y \mapsto x$.

   Jawaban. Lihat sesi 7.17. ■

9.17 Paket Q

1. Andaikan ada dua buah partikel klasik non-relativistik yang bermuatan $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$. Tentukan posisi di ruang $\mathbb{R}^3$ di mana medan listriknya nol.

   Jawaban. Lihat sesi 5.2. ■

2. Tentukan medan listrik di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ yang dihasilkan oleh muatan listrik yang memiliki distribusi garis lurus $L := \{z\hat{z} \mid z \in \mathbb{R}\}$ dengan rapat muatan kurva $\lambda \in \mathbb{R}$ yang konstan, di mana $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

   Jawaban. Andaikan $V := \{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r}' \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r}' \cdot \hat{y})^2 \leq (\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2, -l/2 \leq \vec{r}' \cdot \hat{z} \leq l/2\}$. Menurut hukum Gauss, diperoleh

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = El2\pi\sqrt{(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2} = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda l. \tag{9.193}$$

$$\vec{E} = E\frac{(\vec{r} \cdot \hat{x})\hat{x} + (\vec{r} \cdot \hat{y})\hat{y}}{\sqrt{(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r} \cdot \hat{x})\hat{x} + (\vec{r} \cdot \hat{y})\hat{y}}{(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2} \tag{9.194}$$

   di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$ dan $\hat{y} := (0, 1, 0)$. ■

3. Tentukan medan listrik di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ yang dihasilkan oleh muatan listrik yang memiliki distribusi bidang datar $P := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{r} \cdot \hat{z} = 0\}$ dengan rapat muatan permukaan $\sigma \in \mathbb{R}$ yang konstan, di mana $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

   Jawaban. Andaikan $V := \{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r}' \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r}' \cdot \hat{y})^2 \leq R^2, -h \leq \vec{r}' \cdot \hat{z} \leq h\}$. Menurut hukum Gauss, diperoleh

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = 2E\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma\pi R^2 \tag{9.195}$$

   sehingga $E = \sigma/(2\epsilon_0)$.

$$\vec{E} = E\hat{z}\frac{\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r} \cdot \hat{z}|} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r} \cdot \hat{z}|}\hat{z} \tag{9.196}$$

   di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$ dan $\hat{y} := (0, 1, 0)$. ■

4. Tentukan medan listrik di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ yang dihasilkan oleh muatan listrik yang memiliki distribusi bola pejal $D^3 := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}| \leq R\}$ dengan rapat muatan volume $\rho \in \mathbb{R}$ yang konstan, di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari bola tersebut.

Jawaban. Andaikan $V := \{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}'| \leq |\vec{r}|\}$. Untuk $|\vec{r}| \leq R$, maka

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = E4\pi|\vec{r}|^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi|\vec{r}|^3 \tag{9.197}$$

sehingga $E = \rho|\vec{r}|/(3\epsilon_0)$. Lantas, $\vec{E} = E\vec{r}/|\vec{r}| = \rho\vec{r}/(3\epsilon_0)$.

Untuk $|\vec{r}| \geq R$, maka

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = E4\pi|\vec{r}|^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{9.198}$$

sehingga $E = \rho R^3/(3\epsilon_0|\vec{r}|^2)$. Lantas, $\vec{E} = E\vec{r}/|\vec{r}| = \rho R^3\vec{r}/|\vec{r}|^3$.

Jadi, secara keseluruhan, diperoleh

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\epsilon_0}\left(u(R - |\vec{r}|) + \frac{R^3}{|\vec{r}|^3}u(|\vec{r}| - R)\right) \tag{9.199}$$

di mana u adalah fungsi undak satuan Heaviside. ■

5. Tentukan medan magnet di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ yang dihasilkan oleh garis lurus $L := \{z\hat{z} \mid z \in \mathbb{R}\}$ dengan arus listrik $I \in \mathbb{R}$ konstan yang mengalir naiknya nilai z di mana $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

Jawaban. Andaikan $A := \{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r}' \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r}' \cdot \hat{y})^2 \leq (\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2, \vec{r}' \cdot \hat{z} = 0\}$. Menurut hukum Ampere, diperoleh

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B2\pi\sqrt{(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2} = \mu_0 I \tag{9.200}$$

sehingga $B = \mu_0 I/(2\pi\sqrt{(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2})$. Lantas,

$$\vec{B} = B\frac{-(\vec{r} \cdot \hat{y})\hat{x} + (\vec{r} \cdot \hat{x})\hat{y}}{\sqrt{(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2}} = \frac{\mu_0 I[(\vec{r} \cdot \hat{x})\hat{y} - (\vec{r} \cdot \hat{y})\hat{x}]}{2\pi[(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2]}. \tag{9.201}$$

■

6. Buktikan dari hukum Biot-Savart bahwa medan magnet yang dihasilkan oleh distribusi muatan berbentuk permukaan $S(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = 0\}$ yang memiliki rapat arus $\vec{K} \in \mathbb{R}^3$ per satuan panjang, di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ merupakan sebuah pemetaan, adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\vec{r} \in S(f)} \frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}|d^2\vec{r}'|. \tag{9.202}$$

Jawaban. Hukum Biot-Savart adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_D \frac{dq'\vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{9.203}$$

$dq' = \sigma'|d^2\vec{r}'|$ dan $\vec{K} = \sigma'\vec{v}'$ sehingga $dq'\vec{v}' = \vec{K}|d^2\vec{r}'|$. ■

7. Buktikan dari hukum Biot-Savart bahwa medan magnet yang dihasilkan oleh distribusi muatan berbentuk volume $V(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) \leq 0\}$ yang memiliki rapat arus $\vec{J} \in \mathbb{R}^3$ per satuan luas, di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ merupakan sebuah pemetaan, adalah
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\vec{r} \in V(f)} \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} |d^3\vec{r}'|. \tag{9.204}$$

Jawaban. $dq' = \rho' |d^3\vec{r}'|$ dan $\vec{J} = \rho' \vec{v}'$ sehingga $dq'\vec{v}' = \vec{J}|d^3\vec{r}'|$. ■

9.18 Paket R

1. Buktikan bahwa nilai $I := \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$, di mana $L \mapsto (q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n, t)$, di mana $q^\mu, \dot{q}^\mu, t \in \mathbb{R}$ serta $q^\mu \mapsto t$ dan $\dot{q}^\mu := dq^\mu/dt$ untuk setiap $\mu \in \{1, \cdots, n\}$, mencapai nilai stasioner apabila
$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} = 0 \tag{9.205}$$
sedemikian $(\delta q^\mu)_{t=t_1} = (\delta q^\mu)_{t=t_2} = 0$, di mana δ adalah notasi variasi, sedemikian $\delta t = 0$.

Jawaban. Lihat sesi 3.2. ■

2. Andaikan $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi gamma. Buktikan bahwa $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dan $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 1 pada sesi 9.6. ■

3. Sebutkan lima bentuk fungsi beta yang Saudara ketahui.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 2 pada sesi 9.6. ■

4. Andaikan $\mathrm{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi beta. Buktikan bahwa $\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 2 pada sesi 9.6. ■

5. Andaikan $\mathrm{erf}, \mathrm{erfc} : \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ dan $P : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ berturut-turut adalah fungsi ralat, fungsi ralat pelengkap, dan fungsi peluang. Buktikan bahwa $\mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x)$, $P(-\infty, x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}(x/\sqrt{2})\right)$, $P(a, c) = P(a, b) + P(b, c)$, $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$, dan $\mathrm{erf}(\infty) = 1$.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 4 dan 5 pada sesi 9.6. ■

6. Andaikan $\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi-fungsi eliptik. Buktikan bahwa $\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,u = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$, $\frac{d}{du}\mathrm{cn}\,u = -\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$, dan $\mathrm{dn}\,u = \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 6 pada sesi 9.6. ■

7. Andaikan $\mathrm{gd} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah Gudermanian. Buktikan bahwa $\tan \mathrm{gd}\, w = \sinh w$, $\sin \mathrm{gd}\, w = \tanh w$, $\cos \mathrm{gd}\, w = \operatorname{sech} w$, $\cot \mathrm{gd}\, w = \operatorname{csch} w$, $\sec \mathrm{gd}\, w = \cosh w$, $\csc \mathrm{gd}\, w = \coth w$, $\frac{d}{dw} \mathrm{gd}\, w = \operatorname{sech} w$, dan $\mathrm{gd}\, w = 2n\pi - \pi/2 + 2 \arctan e^w$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 7, 8, 9, 10 dan 11 pada sesi 9.6. ■

8. Andaikan $\alpha \in \{\mathrm{amp}, \mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}\}$ dan α_l adalah nilai α ketika $k = l$. Buktikan bahwa $\mathrm{amp}_0 F(0, \phi) = F(0, \phi)$, $\mathrm{sn}_0 F(0, \phi) = \sin F(0, \phi)$, $\mathrm{cn}_0 F(0, \phi) = \cos F(0, \phi)$, $\mathrm{dn}_0 F(0, \phi) = 1$, serta $\mathrm{amp}_1 F(1, \phi) = \mathrm{gd} F(1, \phi)$, $\mathrm{sn}_1 F(1, \phi) = \tanh F(1, \phi)$, $\mathrm{cn}_1 F(1, \phi) = \operatorname{sech} F(1, \phi)$, dan $\mathrm{dn}_1 F(1, \phi) = \operatorname{sech} F(1, \phi)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 12, 13, 14, dan 15 pada sesi 9.6. ■

Daftar Pustaka

[1] Arfken & Weber , 2005 . *Mathematical Methods for Physicist* . New York : Elsevier Academic Press Publications.

[2] Boas, Mary L. , 1983 . *Mathematical Methods for The Physical Sciences* . New York : John Wiley & Sons.

[3] Goldstein, Herbert , 2005 . *Classical Mechanics* . Manila : Addision-Wesley Publishing Company.

[4] Muslim , 1997 . *Seri Fisika Dasar Bagian I : Mekanika* . Yogyakarta : Laboratorium Fisika Atom dan Inti Jurusan Fisika FMIPA UGM.

[5] Nakahara, Mikio , 1997 . *Geometry, Topology, and Physics* . London : Institute of Physics Publishing.

[6] Rosyid, M.F. , 2005 . *Mekanika Kuantum* . Yogyakarta : I-Es-Ye dan WGMPCDG Jurusan Fisika FMIPA UGM.

[7] Rosyid, M.F. , 2005 . *Aljabar Abstrak dalam Fisika* . Yogyakarta : I-Es-Ye dan WGMPCDG Jurusan Fisika FMIPA UGM.

[8] Tao, R. R. H. , 2016 . *Formulasi Matematika dan Fisika* . Yogyakarta : Graha Ilmu.

[9] Wangsness, Roald , 1997 . *Electromagnetics Fields* . New York : John Wiley & Sons.