

实验五 IIR 滤波器的设计与滤波

1. 实验目的

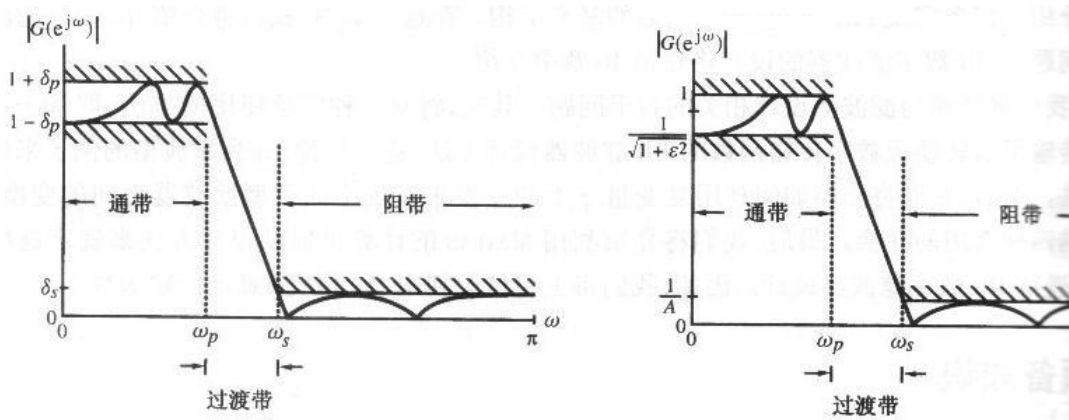
- (1) 加深对信号采样的理解,
- (2) 掌握滤波器设计的方法;
- (3) 复习低通滤波器的设计。

2. 实验原理

目前, 设计 IIR 数字滤波器的通用方法是先设计相应的低通滤波器, 然后再通过双线性变换法和频率变换得到所需要的数字滤波器。模拟滤波器从功能上分有低通、高通、带通及带阻四种, 从类型上分有巴特沃兹 (Butterworth) 滤波器、切比雪夫 (Chebyshev) I 型滤波器、切比雪夫 II 型滤波器、椭圆 (Elliptic) 滤波器以及贝塞尔 (Bessel) 滤波器等。

典型的模拟低通滤波器的指标如下: Ω_p, Ω_s 分别为通带频率和阻带频率, δ_p, δ_s 分别为通带和阻带容限 (峰波纹值)。在通带内要求 $1 - \delta_p \leq |H_a(j\Omega)| \leq 1$, 有时指标由通带最大衰减 α_p 和阻带最小衰减 α_s 给出, 定义如下: $\alpha_p = -20\lg(1 - \delta_p)$ 和 $\alpha_s = -20\lg(\delta_s)$

第二种常用指标是用参数 ε 和 A 表示通带和阻带要求, 如图所示:



二者之间的关系为: $\varepsilon = [(1 - \delta_p)^{-2} - 1]^{1/2}$ 和 $\delta_s = 1/A$, 根据这几个参数可导出另外两个参数 d, k , 分别称为判别因子和选择性因子。

$$d = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \quad k = \Omega_p / \Omega_s$$

BUTTERWORTH 低通滤波器: 幅度平方函数定义为 $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$, N 为滤

波器阶数， Ω_c 为截止频率。当 $\Omega = \Omega_c$ 时，有 $|H_a(j\Omega)| = 1/\sqrt{2}$ ，为 3DB 带宽。

BUTTERWORTH 低通滤波器系统函数有以下形式：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} = \frac{1}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + a_N}$$

由模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器，必须建立好 s 平面和 z 平面的映射关系。使模拟系统函数 $H_a(s)$ 变换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ ，通常采用冲激相应不变法和双线性变换法。冲激相应不变法存在频谱混叠现象，双线性变换法消除了这一现象，在 IIR 数字滤波器的设计中得到了更广泛的应用。

s 平面和 Z 平面的映射关系为 $s = f(Z) = \frac{2}{T_s} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$ ，将 $s = j\Omega$ 和 $z = e^{j\omega}$ 待入数字频率

和等效的模拟频率之间的映射关系： $\Omega = \tan(\frac{\omega}{2})$ ，由于二者不是线性关系，所以称为预畸变。

3.实验内容及其步骤

实验的步骤：

- (1) 给定数字滤波器的幅度相应参数。
- (2) 用预畸变公式将数字滤波器参数变换为相应的等效模拟滤波器参数。
- (3) 采用模拟滤波器设计方法设计等效模拟滤波器 $H_a(s)$
- (4) 采用双线性变换公式把等效模拟滤波器映射为所期望的数字滤波器。

其中第三步中模拟滤波器设计步骤为：

首先，根据滤波器指标求选择因子 k 和判别因子 d

其次，确定满足技术所需的滤波器阶数 N， $N \geq \frac{\log d}{\log k}$

再次，设 3db 截止频率 Ω_c

最后由表查出归一化巴特沃斯滤波器系数。

设计举例：

例 1 设计一个模拟巴特沃特低通滤波器，它在 30rad/s 处具有 1dB 或更好的波动，在 50rad/s 处具有至少 30dB 的衰减。求出级联形式的系统函数，画出滤波器的幅度响应、对数幅度响应、相位响应和脉冲响应图。

MATLAB 参考程序：

```
Wp=30;Ws=50;Rp=1;As=30; %技术指标
Ripple=10^(-Rp/20);
Attn=10^(-As/20);
[b,a]=afd_butt(Wp,Ws,Rp,As) %巴特沃兹低通滤波器子程序
```

```

[db,mag,pha,w]=freqs_m(b,a,50);           %计算幅频响应
[ha,x,t]=impz(b,a);                       %计算模拟滤波器的单位脉冲响应
figure(1);clf;
subplot(2,2,1);plot(w,mag);title('Magnitude Response');
xlabel('Analog frequency in rad/s'); ylabel('H');
axis([0,50,0,1.1]);grid;
subplot(2,2,2);plot(w,db);title('Magnitude in dB');
xlabel('Analog frequency in rad/s');
ylabel('decibels');
axis([0,50,-40,5])
grid
subplot(2,2,3);plot(w,pha/pi);title('Phase Response');
xlabel('Analog frequency in rad/s');
ylabel('radians');
axis([0,50,-1.1,1.1])
grid
subplot(2,2,4);plot(t,ha);title('Impulse Response');
xlabel('time in seconds');
ylabel('ha(t)');
axis([0,max(t)+0.05,min(ha),max(ha)+0.025]);
grid
%巴特沃兹模拟滤波器的设计子程序
function[b,a]=afd_butt(Wp,Ws,Rp,As);
if Wp<=0
    error('Passband edge must be larger than 0')
end
if Ws<=Wp
    error('Stopband edge must be larger than Passed edge')
end
if (Rp<=0)|(As<0)
    error('PB ripple and /or SB attenuation must be larger than 0')
end
N=ceil((log10((10^(Rp/10)-1)/(10^(As/10)-1)))/(2*log10(Wp/Ws)));
OmegaC=Wp/((10^(Rp/10)-1)^(1/(2*N)));
[b,a]=u_buttap(N,OmegaC);
%设计非归一化巴特沃兹模拟低通滤波器原型子程序
function [b,a]=u_buttap(N,OmegaC);
[z,p,k]=buttap(N); z、p 和 k 分别是设计出的  $G(p)$  的极点、零点及增益。

p=p*OmegaC; %非归一化
k=k*OmegaC^N;
B=real(poly(z));
b0=k;
b=k*B; 分子向量
a=real(poly(p));分母向量

```

%计算系统函数的幅度响应和相位响应子程序

```
function [db,mag,pha,w]=freqs_m(b,a,wmax);  
w=[0:1:500]*wmax/500;  
H=freqs(b,a,w);  
mag=abs(H);  
db=20*log10((mag+eps)/max(mag));  
pha=angle(H);
```

例 2 设计如下指标的数字低通滤波器。

相应的 MATLAB 程序如下：

```
fp=100;fst=300;Fs=1000;
```

```
rp=3;rs=20;
```

```
wp=2*pi*fp/Fs;
```

```
ws=2*pi*fst/Fs;
```

```
Fs=Fs/Fs; % let Fs=1
```

```
wap=tan(wp/2);was=tan(ws/2); 预畸变公式
```

```
[n,wn]=buttord(wap,was,rp,rs,'s') ; 设计等效模拟滤波器
```

```
[z,p,k]=buttap(n);
```

```
[bp,ap]=zp2tf(z,p,k)          设计模拟低通原型滤波器
```

```
[bs,as]=lp2lp(bp,ap,wap) ;    将模拟低通原型滤波器转换为低通滤波器
```

```
[bz,az]=bilinear(bs,as,Fs/2)  实现双线性变换，即由模拟滤波器  $H(s)$  得到数字滤波器
```

```
[h,w]=freqz(bz,az,256,Fs*1000);
```

```
plot(w,abs(h));grid on;
```

调试运行该程序，运行结果如下：

```
bp=[1,0,0],ap=[1,1.4142,1],bs=[0.1056,0,0],as=[1,0.4595,0.1056]
```

```
bz=[0.0675,0.1349,0.06745],az=[1,-1.143,0.4128]
```

4.实验用 MATLAB 函数介绍

在实验过程中，MATLAB 函数命令有数字滤波器函数 $[N,Wn]=\text{buttord}(Wp,Ws,Rp,Rs)$ 、模拟滤波器函数 $[N,Wn]=\text{buttord}(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')$ 。式中 Wp, Ws 分别上通带和阻带的截止频率，实际上它们是归一化频率，其值在 0~1 之间， Rp, Rs 分别是通带和阻带的衰减，单位为 dB。 N 是求出的相应低通滤波器的阶次， Wn 是求出的 3dB 频率，第二个式子的单位为 rad/s，因此，它们实际上是频率。

用来设计模拟低通原型滤波器 $G(p)$ ，其调用格式是 $[z,p,k]=\text{buttap}(N)$ N 是欲设计的低通原型滤波器的阶次， z 、 p 和 k 分别是设计出的 $G(p)$ 的极点、零点及增益。

以下 4 个文件用来将模拟低通原型滤波器 $G(p)$ 分别转换为低通、高通、带通、及带阻滤波器。其调用格式分别是

(1) $[B,A]=\text{lp2lp}(b,a,Wo)$ 或 $[B,A]=\text{lp2hp}(b,a,Wo)$

(2) $[B,A]=\text{lp2bp}(b,a,Wo,Bw)$ 或 $[B,A]=\text{lp2bs}(b,a,Wo,Bw)$

式中 \mathbf{b} , \mathbf{a} 分别是模拟低通原型滤波器 $G(p)$ 有分子、分母多项式的系数向量, \mathbf{B} , \mathbf{A} 分别是转换后的 $H(s)$ 有分子、分母多项式的系数向量; 在格式 (1) 中, ω_0 是低通或高通滤波器的截止频率; 在格式 (2) 中 ω_0 是带通或带阻滤波器的中心频率, \mathbf{Bw} 是其带宽。

实现双线性变换, 即由模拟滤波器 $H(s)$ 得到数字滤波器 $H(z)$ 。其调用格式是

$$[\mathbf{Bz}, \mathbf{Az}] = \text{bilinear}(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{Fs})$$

式中 \mathbf{B} 、 \mathbf{A} 分别是 $H(s)$ 的分子、分母多项式的系数向量; \mathbf{Bz} 、 \mathbf{Az} 分别是 $H(z)$ 的分子、分母多项式的系数向量, \mathbf{Fs} 是抽样频率。

5. 思考题

- (1) IIR 滤波器设计步骤。
- (2) 对实验过程中所涉及的问题进行分析, 试编写和修改相应的程序, 得出最终正确的结果和波形图, 并对实验报告进行整理分析。
- (3) 设计低通数字滤波器, 要求在通带内频带低于 $0.2\pi \text{ rad}$ 时, 允许幅度误差在 1dB 以内, 在频率 $0.3\pi \text{ rad} \sim \pi \text{ rad}$ 之间的阻带衰减大于 15dB。用双线性设计数字滤波器, $T=1$, 模拟滤波器采用巴特沃兹滤波器原型。
- (4) 设计一个巴特沃兹高通滤波器, 要求通带截止频率为 0.6π , 通带内衰减不大于 1dB, 阻带起始频率为 0.4π , 阻带内衰减不小于 15dB, $T=1$ 。(选做)

6. 实验报告要求

- (1) 明确实验目的以及实验的原理。
- (2) 通过实验内容掌握滤波器的设计。
- (3) 完成思考题的内容, 对实验结果及其波形图进行分析, 总结主要结论。