solution

杨尚霖

July 2024

$n \le 10^4$

注意到当我们知道了第 x 天和第 y 天的差异了之后，可以在 $O(1)$ 时间内得到第 $x+1$ 天和第 $y+1$ 天的差异。

具体地，假设第 x 天和第 y 天差异是 d，则第 $x+1$ 天和第 $y+1$ 天的差异为 $d-[a_x \neq a_y]+[a_{x+l} \neq a_{y+l}]$。

故我们可以先 $O(l)$ 暴力求出第 1 天和第 $1+c$ 天的差异，我们就可以在 $O(n)$ 时间内求出所有相差为 c 的两天的差异。

时间复杂度 $O(n^2)$。注意空间，可以把所有 k_i 离散化做到 $O(nq)$ 的空间复杂度。

n $\leq 3 \times 10^5$

首先一遍 BFS 把从最东侧出发到达不了的最西侧城市扔掉。

由于题目的规定（道路无交），我们可以断言把最东侧城市按纵坐标排序后，每座城市能到达的最东侧城市都是一段连续的区间。

Proof

设城市 A 能到的最东侧城市中纵坐标最小和最大的分别是 L, R，如果中间存在一座城市 D 不能从 A 到达，那么一定存在一个最西侧城市 C 能够到达 D，则路径 $C \to D$ 和 $A \to L/R$ 一定在平面上有交。若交点处不是城市，则违反题目规定；若交点处是一座城市 E，则存在路径 $A \to E \to D$。故这样的 D 不存在。

n $\leq 3 \times 10^5$

所以我们只需要求出每座城市能到达的最东侧城市中纵坐标最大的（记作 L）和最小的（记作 R）即可。

把最东侧城市按纵坐标排序后，从小到大分别以每座城市为起点 BFS，已经搜过的结点不再搜索，搜到的之前没搜过的结点的 L 极为本次 BFS 的起点。求 R 同理，按纵坐标从大到小再扫一遍就好。

复杂度 $O(m + n \log n)$。

特殊性质 A

树高只有 $O(\log n)$ 级别，即 $\sum_{i=1}^{n} siz_i$ 是 $O(n \log n)$ 级别。

可以直接对每个点 i 维护其左子树中不满足 $a_j \le a_i$ 的结点 j 的数量以及右子树中不满足 $a_j \ge a_i$ 的结点 j 的数量之和，记作 c_i。

查询即询问 x 子树中结点 i 的数量，满足 i 子树中所有点的 c_j 均为 0，由于树高是 $O(\log)$ 的，容易做到 $O(\log n)$ 单次修改。

一般情况

实际上我们不需要考虑 $\sum_{i=1}^{n} siz_i$ 这么多对限制条件。

我们只需要对结点 x 关心其左子树中最右侧结点 l 以及右子树中最左侧结点 r 是否满足 $a_l \le a_x \le a_r$ 即可，只要 x 子树内所有点都满足如上条件，x 子树即为二叉搜索树，显然这样的限制条件只有 $O(n)$ 个，且一个点最多出现在两条限制中。

具体地，记 c_x 表示 x 子树中不满足限制的点对数，当我们修改 a_x 的时候，对其参与的之多四条限制都 check 一遍，用树剖 $+$ 线段树维护 c_i。显然 x 子树是搜索树当且仅当 $c_x = 0$，又有 $c_x \ge 0$，故线段树维护区间最小值及个数即可。

总复杂度 $O\left(n \log^2 n\right)$。

$n, m \le 2000$

记 $f_{i,j}$ 表示从 $(1,1)$ 出发到 (i,j) 的最短路，转移显然。

复杂度 $O(nm)$。

凸性

考虑一整列的 dp 值 $f_{1,2,\dots,n,j}$，看到 x^2 的代价形式可以考虑猜测其具有凸性，即差分数列 $\{f_{i+1,j}-f_{i,j}\}$ 单调不降或单调不增。

Proof

记 $d_{i,j}=f_{i+1,j}-f_{i,j}$ 当 $j=1$ 时，$\{d_{1,j},d_{2,j},\dots d_{n-1,j}\}$ 为常数列（恒为 c_1）。
假设 $d_{i+1,j}-d_{i,j}\ge 0$ 成立，当从第 j 列转移到第 $j+1$ 列时，只需执行 $d_{i,j+1}\leftarrow\min\left(d_{i,j}+2i+1,c_{j+1}\right)$，故有
$d_{i+1,j+1}-d_{i,j+1}=\min\left(d_{i+1,j}+2i+3-\min\left(d_{i,j}+2i+1,c_{j+1}\right),\right.$
$\left.c_{j+1}-\min\left(d_{i,j}+2i+1,c_{j+1}\right)\right)\ge\min\left(d_{i+1,j}-d_{i,j}+2,0\right)\ge 0$

故第 j 列上的 dp 值 $d_{i,j}=f_{i+1,j}-f_{i,j}$ 下凸，用单调栈维护差分数组或原数组均可。