

动态规划选讲 2024.7

动态规划的状态设计

序列一维 dp , 背包, 区间 dp, 树上 dp, DAG dp, 状压 dp, 数位 dp

动态规划求解过程的优化

矩阵乘法, 高斯消元, 单调栈/单调队列, 斜率优化, 决策单调性, wqs 二分, 线段树/树状数组/st表/平衡树, 倍增

有技巧的状态设计

费用提前计算, 断环为链, 交换结果和状态维度, 容斥原理

基于题目性质的状态设计

1.

n 行 m 列的棋盘上放若干个互不攻击的炮的方案数。 $n, m \leq 100$

2.

给定整数 n, m, k , 和一个长度为 $m + 1$ 的正整数数组 v_0, v_1, \dots, v_m 。 对于一个长度为 n , 下标从 1 开始且每个元素均不超过 m 的非负整数序列 $\{a_i\}$, 我们定义它的权值为 $v_{a_1} \times v_{a_2} \times \dots \times v_{a_n}$ 。 当这样的序列 $\{a_i\}$ 满足整数 $S = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_n}$ 的二进制表示中 1 的个数不超过 k 时, 我们认为 $\{a_i\}$ 是一个合法序列。 计算所有合法序列 $\{a_i\}$ 的权值和对 998244353 取模的结果。

3.

单调不降正整数序列, 每次操作将 a_i 变成 $a_{i-1} + a_{i+1} - a_i$ 。 若干次操作之后序列方差最小值是多少。 $n \leq 10000, a_i \leq 600$ 。

4.

树。 在一个点放监听设备可以覆盖与其直接连边的相邻的点, 但不会覆盖自己。 总共放 k 个设备, 覆盖所有节点的方案数。 $n \leq 100000, k \leq 100$

5.

有根树。 每次询问树上随机游走经过一个点集中所有点至少一次的期望步数。 $n \leq 18$ 。

6.

树，每个点最多有两个儿子。叶子结点有一个权值，每个叶子节点的权值互不相同。内部节点如果只有一个儿子，其继承其儿子的权值；如果有两个儿子，有 p_i 的概率取两个儿子中较大的权值， $1 - p_i$ 的概率取两个儿子中较小的权值。设根可能的权值中第 i 小的权值为 v_i ，概率为 D_i ，求 $\sum_i i \times v_i \times D_i^2$ 。 $n \leq 300000$ 。

7.

树上边有边权。更改边权代价是更改后相差的绝对值。边权修改后非负。让所有叶子的带权深度相同的最小修改代价。 $n \leq 300000$ 。

8.

树，边有边权。在树上寻找 $k + 1$ 条不交链，和最大多少。 $n, k \leq 300000$ 。

9.

有 n 个城市，第 i 个城市有 a_i 个景点。从 st 出发，经历 d 天假期，每天可以选择向左或向右走一个城市，或是参观这个城市的所有景点。一个城市的景点只能参观一次。求参观景点数目最多是多少。 $n \leq 100000$ 。

10.

树。对于每个点 x 求 $Ans_x = \sum_{i=1}^n dis(i, x)^k$ 。 $n \leq 50000$ ， $k \leq 150$ 。

11.

无向完全图上每条边有出现概率。求连通块个数期望。

12.

n 支队伍滚榜。第 i 支队伍封榜前通过了 a_i 道题目。排行榜按照 a_i 从大到小排名，通过题目数量相同则编号小的队伍排名靠前。现按照封榜后通过题目数 b_i 不降的顺序宣布每个队伍最终过题数 $a_i + b_i$ 并实时更新排行榜。每次公布后，该被公布结果的队伍都成了排行榜上第一名。已知封榜后所有队伍总共通过 $\sum_i b_i = m$ 题，最终排行榜上的队伍排名情况可能有多少种？ $n \leq 13, m \leq 500$

13.

有向图，多少种边集使得其为强连通图。 $n \leq 15$ 。

14.

2 到 n 的数字，两个人各自选择一个集合，两个集合所有数字对应互质的方案数。 $n \leq 500$

15.

正整数序列。每次操作选择一个位置 $i \in [2, n - 1]$ 使得 $a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$ ，将 a_i 删去，之后的数顺次向前补空位。若干次操作后序列最短多少。 $n \leq 300000, a_i \leq 10^9$ 。

16.

有 n 个数，每个数是一个 $[1, x]$ 之内的随机数。 q 次询问，每次询问给出 $[l_i, r_i]$ ，计算区间内的最小值。最终测试结果是所有询问的最大值。求测试结果期望多少。对 998244353 取模。 $n, k, q \leq 2000$ 。

17.

在 $1, 2, \dots, n$ 中取 m 个互不相同的非空子集，异或起来为 0 的方案数。 $n, m \leq 1000000$

18.

有 n 种原料，第 i 种原料质量为 d_i 。做 m 道菜，每道菜用到的原料总质量恰好为 k ， $m \times k = \sum d_i$ 。每道菜最多使用两种原料，且使用原料的质量为正整数。给出一种做菜方案或无解。 $n \leq 500, n - 2 \leq m \leq 2500, k \leq 5000$ 。

19.

无向图，对每个 k 求保留 k 条边图联通的方案数。 $n \leq 15, m \leq 200$ 。