Tarjan 算法及连通性问题

SDSC

Adzl

山外

2024.7.27

1. 无向图的连通性
2. 有向图的连通性

dfs 树

- 在 DFS 的过程中，所有经过的边组成了一棵树，这棵树称作 DFS 树。
- (此处应有例子)

dfs 树的性质

- 一个连通的无向图，对于每条边 (u,v)，在 DFS 树中，要么 u 是 v 的祖先，要么 v 是 u 的祖先。分为树边和返祖边，不存在横叉边。

dfs 树的性质

- 一个连通的无向图，对于每条边 (u,v)，在 DFS 树中，要么 u 是 v 的祖先，要么 v 是 u 的祖先。分为树边和返祖边，不存在横叉边。
- 证明，考虑 dfs 的过程，如果存在这样一条横叉边，那么 dfs 不会回溯，而是继续下去。

割点

- 一个点 u 是个点，那么必定存在一个儿子，删去 u 后和他的父亲不连通。如果不存在，和 u 相连的所有点依然连通，那么连通性不变。不是割点。

割点

- 一个点 u 是个点，那么必定存在一个儿子，删去 u 后和他的父亲不连通。如果不存在，和 u 相连的所有点依然连通，那么连通性不变。不是割点。
- 特别的，对于根节点，如果他有至少 2 个儿子，那么他就是割点。

割点

- 一个点 u 是个点，那么必定存在一个儿子，删去 u 后和他的父亲不连通。如果不存在，和 u 相连的所有点依然连通，那么连通性不变。不是割点。
- 特别的，对于根节点，如果他有至少 2 个儿子，那么他就是割点。
- 如何判断一个点不经过父亲到他的边，也能和父亲的父亲连通？记录 dfn_u, low_u。

割点

- 一个点 u 是个点，那么必定存在一个儿子，删去 u 后和他的父亲不连通。如果不存在，和 u 相连的所有点依然连通，那么连通性不变。不是割点。
- 特别的，对于根节点，如果他有至少 2 个儿子，那么他就是割点。
- 如何判断一个点不经过父亲到他的边，也能和父亲的父亲连通？记录 dfn_u, low_u。
- dfn_u 表示点 u 的 dfs 序（是第几个被访问到的），low_u 表示点 u 通过自己和儿子，走到点的最小 dfn 序（不经过父亲到他的边）。

割点

- 如何描述删除一个点后儿子和父亲不连通

割点

- 如何描述删除一个点后儿子和父亲不连通
- $low_v \geq dfn_u$

割点

- 如何描述删除一个点后儿子和父亲不连通
- $low_v \geq dfn_u$
- （此处应有例子）

割点

- 代码

```
tarjan(int u) {
    dfn[u] = low[u] = ++cnt;
    for (auto v : son[u]) {
        if (dfn[v] != 0) {
            low[u] = min(low[u], dfn[v]);
        } else {
            tarjan(v);
            low[u] = min(low[u], low[v]);
        }
    }
}
```

点双连通分量

- 点双就是割点分割出的连通块，并上相邻的割点。

点双连通分量

- 点双就是割点分割出的连通块，并上相邻的割点。
- 可以发现一个点可能出现在多个点双中。

点双连通分量

- 点双就是割点分割出的连通块，并上相邻的割点。
- 可以发现一个点可能出现在多个点双中。
- 每条边只会出现在一个点双中。

点双连通分量

- 点双就是割点分割出的连通块，并上相邻的割点。
- 可以发现一个点可能出现在多个点双中。
- 每条边只会出现在一个点双中。
- 开一个栈，tarjan 递归访问到的时候把边入栈，然后如果找到边 (u, v)，$low_v \geq dfn_u$，则把栈里的边一一弹出直到 u，构成点双。

点双连通分量

- 点双就是割点分割出的连通块，并上相邻的割点。
- 可以发现一个点可能出现在多个点双中。
- 每条边只会出现在一个点双中。
- 开一个栈，tarjan 递归访问到的时候把边入栈，然后如果找到边 (u, v)，$low_v \geq dfn_u$，则把栈里的边一一弹出直到 u，构成点双。
- 存点也是可以的，但是没法对每个点染色。

割边

- 如果一条边是割边，首先他一定不是返祖边。对于树边，如果他是割边，那么除去他后，下面和上面不连通。

割边

- 如果一条边是割边，首先他一定不是返祖边。对于树边，如果他是割边，那么除去他后，下面和上面不连通。
- 所以对于一个点，如果 $dfn_u = low_u$，那么他和父亲间的边就是割边。

割边

- 如果一条边是割边，首先他一定不是返祖边。对于树边，如果他是割边，那么除去他后，下面和上面不连通。
- 所以对于一个点，如果 $dfn_u = low_u$，那么他和父亲间的边就是割边。
- (此处应有例子)

边双连通分量

- 开一个栈，tarjan 递归访问到的时候把点入栈，然后如果找到点 u，$low_u \geq dfn_u$，则把栈里的边一一弹出直到 u，构成边双。

边双连通分量

- 开一个栈，tarjan 递归访问到的时候把点入栈，然后如果找到点 u，$low_u \geq dfn_u$，则把栈里的边一一弹出直到 u，构成边双。
- 可以对点染色，缩完成了一棵树。

例题 1

- n 个点 m 条边的无向图，问至少添加多少条边，使得任意两点之间有两条边不相交的路径？$n, m \leq 10^6$

例题 1

- n 个点 m 条边的无向图，问至少添加多少条边，使得任意两点之间有两条边不相交的路径？$n, m \leq 10^6$
- 转化成成为一个边双（没有割边）。

例题 1

- n 个点 m 条边的无向图，问至少添加多少条边，使得任意两点之间有两条边不相交的路径？$n, m \le 10^6$
- 转化成成为一个边双（没有割边）。
- 先缩边双，成一棵树，只需要计算叶节点的个数 x，答案就是 $\frac{x}{2}$ 上取整。

NOIP2022 建造军营

- 有 n 座城市，m 条双向边连接，连通。
- 选择至少一座城市建造军营。还可以选择若干条边看守，同时在没有看守的路上会任意断一条边。
- 问有多少种方案，不会有两个军营不连通。取模。

NOIP2022 建造军营

- 只有断的是割边才有可能不连通。所以不是割边的点无所谓，贡献是 2。

NOIP2022 建造军营

- 只有断的是割边才有可能不连通。所以不是割边的点无所谓，贡献是 2。
- 缩边双，得到边双树。

NOIP2022 建造军营

- 只有断的是割边才有可能不连通。所以不是割边的点无所谓，贡献是 2。
- 缩边双，得到边双树。
- 下面就是一个需要手动讨论的树形 dp。这里不再展开。

HNOI2012 矿场搭建

- 煤矿工地可以看成是由隧道连接挖煤点组成的无向图。为安全起见，希望在工地发生事故时所有挖煤点的工人都能有一条出路逃到救援出口处。于是矿主决定在某些挖煤点设立救援出口，使得无论哪一个挖煤点坍塌之后，其他挖煤点的工人都有一条道路通向救援出口。请写一个程序，用来计算至少需要设置几个救援出口，以及不同最少救援出口的设置方案总数。
- $n \leq 500$

HNOI2012 矿场搭建

- 先求割点，再根据割点将图分开。对于一个连通块，讨论方案数：

HNOI2012 矿场搭建

- 先求割点，再根据割点将图分开。对于一个连通块，讨论方案数：
- 如果与割点没有交，那么至少要两个点，因为一个可能塌。方案数 $\frac{n\times(n+1)}{2}$。

HNOI2012 矿场搭建

- 先求割点，再根据割点将图分开。对于一个连通块，讨论方案数：
- 如果与割点没有交，那么至少要两个点，因为一个可能塌。方案数 $\frac{n\times(n+1)}{2}$。
- 如果与一个割点接触，那么要一个点，方案数 n。

HNOI2012 矿场搭建

- 先求割点，再根据割点将图分开。对于一个连通块，讨论方案数：
- 如果与割点没有交，那么至少要两个点，因为一个可能塌。方案数 $\frac{n\times(n+1)}{2}$。
- 如果与一个割点接触，那么要一个点，方案数 n。
- 如果与至少两个接触，不需要再设置，方案数 1。

POJ 2942

- 求无向图上有多少点不在任何一个奇环上。$n \leq 10^6$

POJ 2942

- 求无向图上有多少点不在任何一个奇环上。$n \leq 10^6$
- 一个性质：如果点双中有一个奇环，那么每个点都在至少一个奇环中。

POJ 2942

- 求无向图上有多少点不在任何一个奇环上。$n \leq 10^6$
- 一个性质：如果点双中有一个奇环，那么每个点都在至少一个奇环中。
- 做法就是先求点双，对于每个点双找奇环。

POJ 2942

- 求无向图上有多少点不在任何一个奇环上。$n \leq 10^6$
- 一个性质：如果点双中有一个奇环，那么每个点都在至少一个奇环中。
- 做法就是先求点双，对于每个点双找奇环。
- 找奇环的方法是 dfs，01 染色。

1 无向图的连通性

2 有向图的连通性

强连通分量

- 求强连通分量
- 同样进行 tarjan 遍历，当出现一个返祖边时，就有了一个环。那么环上的点都在一个强连通分量中。
- 根据分析，判断条件也是 $dfn_u = low_u$。

ZJOI2007 最大半连通子图

- 一个有向图 $G=(V,E)$ 称为半连通的 (Semi-Connected)，如果满足：$\forall u,v\in V$，满足 $u\to v$ 或 $v\to u$，即对于图中任意两点 u,v，存在一条 u 到 v 的有向路径或者从 v 到 u 的有向路径。若 $G'=(V',E')$ 满足 $V'\subseteq V$，E' 是 E 中所有跟 V' 有关的边，则称 G' 是 G 的一个导出子图。若 G' 是 G 的导出子图，且 G' 半连通，则称 G' 为 G 的半连通子图。若 G' 是 G 所有半连通子图中包含节点数最多的，则称 G' 是 G 的最大半连通子图。给定一个有向图 G，请求出 G 的最大半连通子图拥有的节点数 K，以及不同的最大半连通子图的数目 C。由于 C 可能比较大，仅要求输出 C 对 X 的余数。
- 题目定义较多，仔细理解一下。

ZJOI2007 最大半连通子图

- 有向图，存在环，如果强连通则必定半连通。

ZJOI2007 最大半连通子图

- 有向图，存在环，如果强连通则必定半连通。
- 先缩强连通分量，缩完就变成了一个 DAG。

ZJOI2007 最大半连通子图

- 有向图，存在环，如果强连通则必定半连通。
- 先缩强连通分量，缩完就变成了一个 DAG。
- 发现题目要求的就是一个最权值最大的链。

ZJOI2007 最大半连通子图

- 有向图，存在环，如果强连通则必定半连通。
- 先缩强连通分量，缩完就变成了一个 DAG。
- 发现题目要求的就是一个最权值最大的链。
- 在 DAG 上按照拓扑序 dp 即可。

JSOI2010 连通数

- 度量一个有向图连通情况的一个指标是连通数，指图中可达顶点对个的个数。
- 给定一张图，请你求出它的连通数。
- $n \leq 2000$

JSOI2010 连通数

- 因为有环所以没法直接暴力。

JSOI2010 连通数

- 因为有环所以没法直接暴力。
- 缩强连通分量之后拓扑排序即可。

JSOI2010 连通数

- 因为有环所以没法直接暴力。
- 缩强连通分量之后拓扑排序即可。
- 另外，bitset 优化的 floyd 好像能过。

APIO2009 抢掠计划

- n 个点，m 条有向边，每个点有权值，权值只能获得一次，求一条权值和最大的路径，可以重复经过边或点。
  $n, m \le 5 \times 10^5$

APIO2009 抢掠计划

- 可以重复走，所以只要第一次走到一个强连通分量内，里面所有点的权值都能获得。

APIO2009 抢掠计划

- 可以重复走，所以只要第一次走到一个强连通分量内，里面所有点的权值都能获得。
- 缩点之后呢？最长路？

APIO2009 抢掠计划

- 可以重复走，所以只要第一次走到一个强连通分量内，里面所有点的权值都能获得。
- 缩点之后呢？最长路？
- 其实还是 DAG 上 dp 就行了，因为环都没了，有拓扑序了。

Thanks!