2024.10.4 noip模拟赛 题解

t1

找一个价值最大的子区间。区间价值为区间最大值减最小值减区间长度。

特殊性质 A：a_i 单调不降。此时区间最值为区间两端的值。可以直接分离左端点和右端点的贡献。

特殊性质 B：$a_i \le 100$。枚举最大值和最小值，对于最大值的每一个值，寻找对应最小值出现位置的前驱后继，这样是最短的区间。时间复杂度 $O(nv)$。

特殊性质 C: a_i 只有 100 种值。离散化之后变成特殊性质 B。

$n \le 2 \times 10^5$：扫描线右端点，单调栈维护区间最小值和最大值，修改线段树维护答案。时间复杂度 $O(n \log n)$。

当区间的两端不是最值时，可以扔掉两端，最大值和最小值不变，区间长度减一，答案加一。于是最优区间最值一定取在两端，一端最小值一端最大值，则两端的贡献独立。钦定当前位置为右端点的最大值或最小值即可。将最大值和最小值钦定反了不会使答案更优，钦定错误也不会使答案更优。以上是正确性。时间复杂度 $O(n)$。

t2

一个未知的 0/1 序列，每次告诉一段区间内是否有 1。多次单点询问某处的值，无法确定即为无法确定。

$n, q \le 5000$： 如何判断一个位置上的答案是否为 1？如果有一个区间为 1 的信息，而且除去这个位置的其他数都为 0，则可以确定这个位置为 1，否则无法确定。对于每个询问，预处理 0 位置数量的前缀和，对于所有区间为 1 的信息查找区间中 0 的数量。时间复杂度 $O(qn)$。

特殊性质 A：发现如果一个区间为 1 的信息更新了某处的答案，是因为又知道了一些地方为 0，和其他区间为 1 的信息没有关系。于是区间为 1 的信息之间不会相互干扰，区间为 1 信息能否使用只取决于 0 的位置和数量。所有区间为 0 的信息处理完之后预处理 0 位置数量的前缀和。对于一个区间为 1 的信息使用 0 的信息直接更新。时间复杂度 $O(n+q)$。

特殊性质 B：问题在于前面出现一个区间为 1 的信息，后面又出现了一些 0 ，可能会让之前区间为 1 的信息有效。区间为 1 的信息很短，暴力将区间中每个位置塞入这个信息，一个位置被更新为 0 时更新区间为 1 的信息。时间复杂度 $O(n+10q)$。

特殊性质 C：按特殊性质 B 一样处理。塞入每个位置的区间为 1 的信息总数为 $O(20n)$ 。时间复杂度 $O(20n+q)$。

$n, q \le 5 \times 10^4$：各凭本事，或者是正解写的常数太大了。

如果一段区间内没有 1，可以直接知道区间内都是 0。如果一段区间有一个 1，这个信息只有在区间除一个数不确定之外都确定为 0 时有用，可以知道唯一剩下的不确定的数为 1。由此两个区间为 1 的信息不能互相传递使用，区间为 1 的信息只需要依靠区间为 0 的信息。接下来需要处理询问到一个不确定位置时，能否知道其为 1。处理出该位置向左延伸的最长 0 连续段，向右延伸的最长 0 连续段，两端点记为 L, R 。则需要查找是否有区间为 1 的信息，区间落在 $[L, R]$ 内。对于一个区间为 1 的信息，将 r 存储在 l 位置上，询问是否 $[L, R]$ 上的左端点对应的右端点最小值是否小于等于 R 。处理 0 的段可以使用并查集或 set 实现。区间最小值使用线段树实现。时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

t3

n 行 m 列矩阵中有 t 个障碍。求选择 $2/3$ 个互不相邻的格子方案数。

$t = 0$： 推推式子。数学题。

$n = 1$： 推推式子。数学题。

正难则反，用总方案数减去选出格子相邻的方案数。对于 $k = 2$ ，减去所有两个相邻的格子对即可。对于 $k = 3$ ，钦定 3 个格子中的两个相邻，则减去 两个相邻的格子对 * (总格子数-2) 的答案。但是对于 3 个格子形成连通块的情况，被钦定了两次两个格子相邻，减掉了两次答案，于是需要再加回来，加上 3 个格子形成连通块的情况。

没有障碍时，2 个格子相邻或 3 个格子相邻成连通块的数量容易计算。添加障碍之后，枚举一个障碍所在的连通块，减掉对应的答案。注意多个障碍相连时一个连通块只需要被减去一次。需要支持查询某处有无障碍，使用 map 或 set 或 hashtable 实现。时间复杂度 $O(40t \log t)$。常数是每个障碍所在的大小小于等于三的连通块个数。

t4

序列，每次操作选择一个区间覆盖成区间中位数。不超过 k 次操作后序列最小值的最大值。

二分答案，大于等于二分值的记为 1 ，小于二分值的记为 -1，则操作相当于选择一个区间和为正数的区间，区间赋值为 1。

设操作序列为 $I_1, I_2, \cdots, I_m, I_i = [l_i, r_i], I_m = [1, n]$。

对于 $1 \le i < m$ ，其操作时的区间和一定等于 1，否则向左向右扩展均合法，同时更优。由此

由此如果一系列区间相互包含，$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_m$，则 $|I_i| \ge 2 \times |I_{i-1}| - 1$。同时说明了如果 I_1 存在， $m \le \lceil \log_2^n \rceil$。$I_1$ 存在的充要条件是存在子串 11 或者 101。

下面证明所有的操作区间相互包含。

- 操作区间相交则必然包含。

若 $I_i=[a,b],I_j=[c,d],a\le c\le b\le d,i<j$ ，则 $I_j=[a,d]$ 也合法，因为到第 j 次操作时 $[a,c)$ 均为 1。

- 操作区间一定有交。

使用调整法：设最后两个相邻但不交的操作区间 I_j,I_{j+1}，那么有 $I_{j+1}\subset I_{j+2}\subset\cdots\subset I_m=[1,n]$ 。在这一串区间中存在最后一个区间 I_p，其和 I_j 无交，而 I_{p+1} 包含整个 I_j 和 I_p 。即为存在 $j+1\le p<m,I_p\cap I_j=\emptyset,I_{p+1}\cap I_j=I_j$。如果 $|I_j|>|I_p|$ ，则可以把 $j+1,\cdots,p$ 一系列区间全部取消，取而代之操作 I_j 的超集，因为其长度更大，则延伸出来的操作区间长度也更长。如果 $|I_j|<>|I_p|$ ，则取消操作 I_j ，换成 I_p 的超集在 p 和 $p+1$ 中间操作。因为 I_{p+1} 能操作的原因是有 I_j 和 I_p 贡献了区间的 1，将 I_j 换成 I_p 的超集贡献的 1 只会增多，那么 I_{p+1} 必然也可以进行。综上通过调整法证明了操作区间两两包含。

考虑区间 dp： $f_{i,l,r}$ 表示操作 i 次之后 $[l,r]$ 能否都为 1。但是对于每个 l 我们只关心对应的最大的 r ，改写状态为 $f_{i,l}$ 表示操作 i 次之后从 l 开始最长的连续的 1 区间右端点为 $r=f_{i,l}$。从第 $i-1$ 次操作转移到第 i 次操作时，有 n 个操作区间决策 $[1,f_{i-1,1}],[2,f_{i-1,2}],\cdots,[n,f_{i-1,n}]$。如果一个区间被其他区间包含了，其作为决策一定不优。于是我们只关心 $l1<l2,f_{i-1,l1}<f_{i-1,l2}$ 的决策，即 $f_{i-1,l}$ 单调递增。

设 s_i 为序列前缀和，$c(I)$ 表示操作完 I 后对序列权值产生的贡献，$c(I)=r-l+1-(s_r-s_{l-1})$ 。对于检查 $f_{i,l}$ 能否为 p 为答案，需要求出所有的有效决策 $[j,f_{i-1,j}\subset[l,p]]$ 的 $c(I_j)$ 的最大值 c_max，满足 $s_p-s_{l-1}+c_max>0$，即 $s_p+c_max>s_{l-1}$。l 倒序转移，每次将 $f_{i-1,l}$ 放入决策时更改 s_p+c_max 的值，转移时线段树上二分。时间复杂度 $O(n\log^3 n)$。

考虑决策单调性，加入一个新决策 $[j,f_{i-1,j}]$ 之后，之前所有的 $k>j,c(I_k)\le c(I_j)$ 的决策均不会更优，可以舍弃。转移时对于一个 l ，其最终的答案 $f_{i,l}$ 只与 s_{l-1} 有关。于是说，如果 $l1<l2,s_{l1-1}\le s_{l2-1}$,必然会转移出 $f_{i,l1}\ge f_{i,l2}$，此时 $[l2,f_{i,l2}]$ 一定不会作为下一轮的新决策。于是干脆不需要计算 $f_{i,l2}$ 的值，即只需要计算 $f_{i,l}$ 满足 s_{l-1} 单调递减。那么对于一个决策 $[j,f_{i-1,j}]$，如果其不能为 s_{l-1} 贡献，那他也必然不能为 s_{l-1} 更大的 l 贡献。于是一个决策无法贡献时，其之后也没有用处。使用单调队列维护决策，队头存储 j 大的决策，每次从队尾插入决策 $[j,f_{i-1,j}]$ 时维护队列内的 $c(I)$ 单调递增，转移时寻找队头转移，若成功转移则其为最优决策，不成功转移则其之后也无法成功转移，直接出队。由此一轮转移时间复杂度 $O(n)$。总时间复杂度 $O(n\log^2 n)$。

特殊性质 A：提示要二分答案。同时复杂度少一个二分的 $\log n$，给高复杂度算法的分数。

$k\ge 50$：提示操作次数不会太多，二分答案后寻找有无 101 或 11 子串。

$k=1$：只会做一次操作 $I_1=[1,n]$。提示操作范围能大则尽可能大。二分答案后判断整体 1 的个数是否符合条件。

$n\le 5000$：给暴力 dp 的分数。

$n \le 10^5$：给 $O(n\log^3 n)$ 算法的分数。

原题：

t1 : 虹色的北斗七星

t2 : Anonymity Is Important

t3 : [DMOI-R2] 回到过去

t4 : 「DTOI-4」中位数