题解

铁甲战士

考虑打完一张剑柄打击后，如果下一张牌不是耸肩无视，那么耸肩无视会无法抽到剑柄打击导致不可持续。所以在中间的时候剑柄打击下一张一定是耸肩无视。出完耸肩无视后可以有一次机会出狂怒或者全身撞击，然后再用剑柄打击把所有牌抽回来。因此，中间一定是：剑柄打击，耸肩无视，狂怒/全身撞击不断循环，只有在开始和结束时会有区别。

另外，一定是一个前缀打狂怒，后缀打全身撞击，否则交换一定不劣。显然是单峰的，三分得到分界点即可。

静默猎手

考虑 $d_{i,j}$ 表示到第 i 层还剩 j 次机会的期望答案。有

$$d_{i,j} = p\min(d_{1,j}, d_{i,j-1}) + (1-p)d_{i+1,j} + 1$$

首先 $d_{i,j}$ 关于 i 单调递减。令 $x = d_{1,j}$，考虑枚举 k 满足 $x \in [d_{k,j-1}, d_{k-1,j-1}]$。那么一个后缀为

$$d_{i,j} = p \cdot d_{i,j-1} + (1-p)d_{i+1,j} + 1$$

一个前缀为

$$d_{i,j} = px + (1-p)d_{i+1,j} + 1$$

后缀的部分可以不管 x 预处理得到，前缀的部分是一个线性递推，有

$$d_{i,j} - \frac{px+1}{p} = (1-p)\left(d_{i+1,j} - \frac{px+1}{p}\right) = (1-p)^{k-1}\left(d_{k,j} - \frac{px+1}{p}\right)$$

可以 $O(1)$ 解出 x，并检查是否在对应区间内。$O(n)$ 做一个固定的 j，总复杂度 $O(nk)$。

由于 k 太大并没有什么用，可以证明 $k \ge 300$ 时答案在误差范围内都一样。

故障机器人

构造一张二分图，每个 $(x, y) \in S$ 为一条左侧 x 连向右侧 y 的一条边。游戏流程为轮流执行以下操作：

1. 找到左侧的叶子集合 T，令 $f(S) += |T|$，然后删除所有和 T 相连的边。
2. 找到右侧的叶子集合 T，令 $g(S) += |T|$，然后删除所有和 T 相连的边。

可以发现答案即为不断剥叶子后左边和右边分别有多少个点被当作叶子删除了。如果连通块是一棵树，那么只有一个点不会被当作叶子删除，且这个点为直径中点。如果不是一棵树，那么所有有可能被删掉的点都被删了。

可以离线预处理出整张图，然后用并查集维护直径（树的情况）或者每个可以被删掉的树（不是树的情况）。复杂度 $O(n\log n)$（树上算距离）。

观者

充要条件为 $n = 4k$ 或 $n = 1$。

现证明 $n = 4k$。记原问题为问题 A，我们规约到问题 B：

定义 n 的双排列为 $0, 0, 1, 1, 2, 2, \ldots, n-1, n-1$ 的 permutation 构造两个双排列 p_i, q_i，使得对应位置异或之后 $r_i = p_i \oplus q_i$ 仍然是双排列（可以把 p_i 固定成 $0, 0, 1, 1, 2, 2, \ldots, n-1, n-1$）。规约方法如图：

P	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
Q	0	0	4	4	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	4	4	0	0
R	0	0	4	4	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	0	0	4	4

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Q	0	2	17	19	8	10	13	15	12	14	7	5	6	4	11	9	18	16	3	1
R	0	3	19	16	12	15	11	8	4	7	13	14	10	9	5	6	2	1	17	18

即在后面两位随便调一下。细节可以参考 std。

加强一下问题 B 变成问题 C：构造两个长度为 n 的排列 p_i, q_i，使得 $i \oplus p_i$ 和 $i \oplus q_i$ 这 $2n$ 个数构成双排列（加强的限制是一组 $0, 1, \ldots, n-1$ 必须对应一组 $0, 1, \ldots, n-1$）。

假设 $n = 2^l + k$，其中 $0 \le k < 2^l$，那么需要按照如下表格来进行 组合：（其中 block 2, 4, 5 凑出 2^l 的双排列，block 1, 3 凑出 k 的双排列 再将结果异或上 2^l）。

$0 \sim k-1$	$k \sim 2^l - 1$	$2^l \sim 2^l + k - 1$	|	$0 \sim 2^l - 1$	$2^l \sim 2^l + k - 1$
$2^l \sim 2^l + k - 1$	$k \sim 2^l - 1$	$0 \sim k-1$	|	$0 \sim 2^l - 1$	$2^l \sim 2^l + k - 1$
subproblem $C(k)$	subproblem $D(2^l, k)$ 2nd block of p	subproblem $C(k)$	|	subproblem $D(2^l, k)$ whole q	subproblem $D(2^l, k)$ 1st block of p

问题 $D(2^l, k)$ 定义为： 构造两个长度为 $n = 2^l$ 排列 p_i, q_i ，使得 $i \oplus p_i$ 和 $i \oplus q_i$ 这 $2n$ 个数构成双排列 并且 $\{p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}\} = \{0, 1, \ldots, k-1\}$， $\{p_k, p_{k+1}, \ldots, p_{2^l-1}\} = \{k, k+1, \ldots, 2l-1\}$。也就是 p 数组的位置 k 上有个挡板阻止排列的流动。$l = 0, 1$ 时显然。否则：

设 $B = 2^{l-1}$，先构造 q 把 $i \oplus q_i$ 弄成 $[B, B, B+1, B+1, \ldots, 2B-1, 2B-1]$（这一步简单手玩） 从子问题 $D(B, k \bmod B)$ 得到 $[p'_{\text{first}}, p'_{\text{second}}, q']$ 假如 $k < B$ 就是 $p = [p'_{\text{first}}, p'_{\text{second}}, q' \oplus B]$ 否则就是 $p = [q, p'_{\text{first}} \oplus B, p'_{\text{second}} \oplus B]$。

具体细节可以参考 std。