题解

Reflection

不妨设平均数大于中位数。可以证明最优的 S 一定包含奇数个数字。

枚举中位数，设为 a_i，那么一定是取 $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ 中最大的一部分和 $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n$ 中最大的一部分，且两部分取出的个数一样。答案关于取出数的个数是先增后减的，二分出最大值所在位置即可。

时间复杂度 $O(n \log n)$。

The Summit

在奇数轮后，所有人积分都 $\in \{-3, -1, +1, +3\}$；在偶数轮后，所有人积分都 $\in \{-2, 0, +2\}$。对于奇数轮，确定得分分别为 $-3, +3$ 的人数分别为 j, k 后，得分 $-1, +1$ 的人数也可以随之确定，所以可能的状态数为 $O(n^2)$。对于偶数轮，得分 $-2, +2$ 的人数相等，可能的状态数为 $O(n)$。将所有可能的状态编码，令 $d_{i,j}$ 表示 i 轮后到状态 j 的方案数，则 i 为奇数时有 $O(n^2)$ 种状态，i 为偶数时有 $O(n)$ 种状态。如果能预处理所有 $O(n^3)$ 种转移的系数，即可在 $O(1)$ 转移。复杂度：$O(kn^3)$。

对于偶数行到奇数行的转移：$(i) \to (j, k)$。-3 分必须由两个 -2 分的人配对得到，3 分同理。先在 i 个 -2 分的人选出 $2j$ 个配对，i 个$+2$ 分的人选出 $2k$ 个配对，方案数可以通过预处理组合数得到。 剩下的问题变成有 $2(n-i)$ 个 0 分，$i-2j$ 个 -2 分，$i-2k$ 个 $+2$ 分的人配对，要求 -2 分的人不能和 -2 分的配对，$+2$ 分的人不能和 $+2$ 分的配对。预处理 $f_{a,b,c}$ 表示剩 a 个 -2，b 个 0，c 个 $+2$ 的配对方案数即可。

对于奇数行到偶数行的转移：$(j, k) \to (i)$。 可以看成 $i-j$ 个 -1 分的人通过和 -1 或 -3 分的人匹配得到 -2 分，$i-k$ 个 $+1$ 分的人通过和 $+1$ 或 $+3$ 分的人匹配得到 $+2$ 分。 剩下的匹配一定是分数 < 0 的人和分数 > 0 的人匹配，方案数可以通过预处理阶乘得到。预处理 $g_{a,b,c}$ 表示有 a 个 $-1/+1$ 分，b 个 $-3/+3$ 分，内部进行了 c 次匹配的方案数。

Core

先考虑静态的情况。考虑当所有点对的最大曼哈顿距离是 L， 每个点和与其曼哈顿距离最远的点之间的曼哈顿距离不小于 $L/2$，于是与其曼哈顿距离最远的点和它的切比雪夫距离不小于 $L/4$。如果我们把平面划分成边长为 $L/4$ 的正方形，每个正方形内有多个点的时候其中每个点都不可能成为二元组中的 a。因此可能的 a 的个数为 $O(1)$。现在我们考虑动态的情况，只在所有点对的最大曼哈顿距离翻倍的 时候重构否则沿用原来的 L。 每个阶段还是只会产生 $O(1)$ 个 a 的候选点，而只有 $O(\log(\max(x, y)))$ 个阶段。

时间复杂度 $O(n \log(\max(x, y)))$。

Farewell

首先，对于二分图左侧的每个点，只需要保留前 k 大的邻边，称新图为 G_1。正确性显然。

其次，在 G_1 中，对于二分图右侧的每个点，只需要保留前 k 大的邻边，称为 G_2。正确性显然。

最后，在 G_2 中，只有前 $O(k^2)$ 大的边是有用的。这是因为考虑一条较小的边和一个包含它的大小为 k 的匹配，如果比它大的边超过 $(2k-2)(k-1)+1$ 一定可以把这条边换成一条别的更大的匹配边。

目前成为了一个只有 $O(k^2)$ 个点和边的图，可以直接跑费用流。spfa 是 $O(k^4)$，可以用 dijkstra 版本优化至 $O(k^3 \log k)$。前两部分可以用 two pointers 在 $O(nk)$ 时间复杂度内完成。