NOIP 模拟赛题解

namespace_std

2024年 9 月 1 0 日

回文

暴力枚举左上角和右下角 DP，复杂度 $O(n^4)$。

观察到只有 $x1+y1+x2+y2=n+m+2$ 的状态才有用，因此我们枚举 $x1,y1,x2$ 即可得知 $y2$，复杂度降为 $O(n^3)$。

快速排序

观察给出操作的性质：

首先，如果所有被排序数都非 nan，那么必然是按升序排列。

否则，我们考虑第一个数 x_1：

如果 x_1 是 nan，那相当于把一个 nan 置于最前，然后排序其余的数。

否则，相当于把所有剩下的 $< x_1$ 的数从小到大放在 x_1 之前，并放置 x_1。

不难通过预先给所有非 nan 的数排序来均摊 $O(1)$ 完成此操作。

复杂度 $O(n\log_2 n)$。

混乱邪恶

从 MO 高联的二试改来的构造题。

不妨设 n 为偶数。若 n 为奇数，我们考虑加入一个 $a_{n+1}=0$，归约到偶数的情况。

我们将 a 排序，并构造 $d_i=a_{2i}-a_{2i-1}$。

可以发现 $\sum d_i \le m-\frac{n}{2}<n$。

我们尝试对于每个 d_i 分配一个 e_i 使得 $\sum d_i e_i=0$，这样便可以构造出一组满足条件的 c_i。

我们不难归纳得出，若 n 个正整数 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 的和为偶数且小于 $2n$，则必存在一种方案：

$n=1$ 显然成立。

对于 $n=k$ ，若 $d_i=1$ 显然成立。

若存在 $d_i>1$ 我们考虑将 d 的最大值 $\max d$ 和最小值 $\min d$ 删除，并加入 $\max d-\min d$。

不难发现总和减少了 $2\min d$ 即至少 2，且最小值仍然非零，问题归约到 $n'=n-1$ 的情况

因此我们证明了一定存在合法的构造方案，并能成功给出一种构造。

复杂度 $O(n\log_2 n)$。

校门外歪脖树上的鸽子

观察一次操作 $[l,r]$ 选中节点的特征，问题可以转化为若干次以下操作：

1) 给定一条链，遍历链上的每个节点，如果这个节点为右儿子，那么给其父亲的左子树上打一个标记；（或如果这个节点为左儿子，那么给其父亲的右子树上打一个标记）

2) 给定一条链，遍历链上的每个节点，如果这个节点为右儿子，那么答案加上父亲的左子树大小乘以左子树的标记，并求答案之和。（或反之）

将原树树链剖分，每条重链维护两棵线段树，分别维护与这条链相邻的左子树和右子树。（若一个点的左子树不在链上则这个点维护左子树，否则这个点维护右子树）

容易发现跳重链的过程只会影响某一棵线段树的一个区间，相当于在线段树上做一个区间加。

跳轻链的过程难以在线段树上表示，但由于轻边只会跳 $O(\log_2 n)$ 次，可以暴力维护。

查询和修改几乎是对称的，这里不再赘述。

复杂度 $O(n\log_2^2 n)$。