24年国庆集训提高组Day3题解

糖豆人 (guys)

30分做法：

x为奇数，解方程$\frac{x(x-1)}{2}=n$。

60分测试点：

n比较小，将x从1枚举到n：判断比赛总场数是不是n。

100分测试点：

设$x=x_0\cdot 2^d$，那么比赛总场数$n=\frac{x_0(x_0-1)}{2}+x_0\cdot(2^d-1)$。
这是一个二元方程，两个未知数是x_0和d。因为d比较小，可以枚举d从0到63，然后上述方程转化成一个一元二次方程：
$x_0^2+\left(2\left(2^d-1\right)-1\right)x_0=2n$
设$D=2\left(2^d-1\right)-1$，这是一个常数，然后方程会转化成：
$x_0^2+D\cdot x_0=2n$
方程左侧随着x_0的增加而增加，方程右侧是一个常数，所以可以通过二分来求解。

考试 (exam)

Algorithm1

我们要计算的内容可以写成下式：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{[a_{i,k}\in A_j]}{n^2m_i} \tag{1}$$

直接枚举本式进行计算，根据实现细节可以得到 $O(n^2m^2)$ 或 $O(n^2m)$ 的时间复杂度，期望得分 $20\sim 40$

Algorithm2

对上式可以改变枚举的顺序，从判断 $a_{i,k}\in A_j$ 转变为确定 $a_{i,k}$ 后枚举其超集，再进行一些提取和合并可以得到下式：

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{1}{m_i}\sum_{A_j\ni a_{i,k}}1 \tag{2}$$

那么只需要预处理每个 $a_{i,k}$ 被多少张试卷包含，即可直接计算上式。时间复杂度 $O(n+\sum m)$ ，期望得分 100

快速数字变换 (fnt)

Algorithm 1

设 k 为 n 的位数。一个直接的想法为分解出 k 个数位并进行全排列，检验结果是否符合要求。

时间复杂度 $O(k!)$ ，期望得分 10

Algorithm 2

数位出现与否可以通过状态压缩来表示。设置状态 s 表示目前 n 的数字使用情况，某一位被使用为 1， 反之为 0 。

那么可以获得这样的状态压缩动态规划算法：$dp[s][j]$ 表示数字使用状态为 s 时此时产生的数字对 m 取模为 j 的方案数，重复方案可用可重排列的方法去重。由于 m 是质数，答案可以表示为 $\sum_{j=1}^{m-1} dp[2^k-1][j]$。

时间复杂度 $O(2^k \times m \times 10)$ ，期望得分 20

Algorithm 3

由辗转相除法可知， $\gcd(n,m) = \gcd(n \mod m, m)$，因此当 m 不是质数时，答案为 $\sum_{j=0}^{m-1} dp[2^k-1][j] \times [\gcd(j,m)=1]$。

时间复杂度不变，期望得分 40

Algorithm 4

前面做法的瓶颈在于状态过多，但由于重复数字是等价的，直接状压会有许多不同状态本质上是相同的情况。考虑合并这些状态，会得到更为高效率的做法。

设 x_i 表示 i 的出现次数，那么有 $\sum_{i=0}^{9} x_i = 20$ ，本质不同的状态数最多即表示为 $\max\{\prod_{i=0}^{9}(x_i+1)\}$ ，该多元函数的极值在 $\forall_i, x_i = 2$ 时候取到，故状态数不超过 3^{10} 。

压缩状态数后再进行动态规划，时间复杂度 $O(3^{10} \times m \times 10)$ ，期望得分 100

吃饭！ (launch)

Algorithm 1

对于 20% 的测试数据，考虑到 n 小于 50，可以使用任意的最短路相关算法进行穷举求解

Algorithm 2

对于 40% 的测试数据，可以考虑跑 Q 次 dijkstra ，记录从每张饭卡位置出发到达其余点的最短路。再跑起点到其余点的最短路，得到从起点到达每张饭卡地点的距离与饭卡到达最近食堂的距离之和。

之后运行一个贪心算法进行匹配：将一学期的饭钱从降序排序，再将每张饭卡按余额降序排序。遍历每天饭钱，将所有余额大于当前饭钱的饭卡距离和加入优先队列，随后取出优先队列的 top，即为当天的最优花费。令 ans 加最优花费，得到结果。贪心部分的时间复杂度为 $O(n\log n)$

Algorithm 3

发现我们实际上要求的是若干个点到指定点的最短路径。那么可以反向建图，构建一个虚拟点以零边连接所有的食堂，跑以虚拟点为起点的 dijkstra，这样得到每张饭卡到达最近食堂的最短路。然后在正图上跑最短路，得到出发教室到每个饭卡位置的最短路。

最后通过上述贪心得到总共的最小花费，整体时间复杂度 $O(n\log n)$（视 n,m 同阶），可以获得满分。